

安徽大学 2024 — 2025 学年第一学期

《高等数学 A(一)》期末考试试卷 (A 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号 _____

学号

姓名

专业

年级

院/系

线
订
装
超
勿
题
答
订
表

一、单选题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 下列函数中, 在区间 $[-1, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的是 ()
A. $\ln(1+x)$ B. $|x|$ C. $\sqrt[3]{x}$ D. $\arctan x$
2. 设 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$, 则下列函数中, 是 $f(x)$ 原函数的是 ()
A. $\sin x$ B. $\cos x$ C. $1 - \sin x$ D. $1 + x + \sin x$
3. 曲线 $y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 共有 () 条渐近线
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 ()
A. 不连续 B. 连续但不可导 C. 可导且导数为 0 D. 可导且导数不为 0
5. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e}{x - 1}$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 ()
A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点
6. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶连续可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sin x} = 1$, 则下列正确的是 ()
A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的零点 B. $(0, f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点
C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点 D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
7. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^2} =$ ()
A. 0 B. ∞ C. 1 D. $\frac{1}{2}$
8. 设定积分 $I_1 = \int_1^e \ln x dx$, $I_2 = \int_1^e \ln^2 x dx$, $I_3 = \int_1^e x dx$, 则 ()

A. $I_3 > I_2 > I_1$ B. $I_1 > I_2 > I_3$ C. $I_3 > I_1 > I_2$ D. $I_1 > I_3 > I_2$

9. 下列描述正确的是 ()

A. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\left. \frac{1}{x} \right|_{-1}^1 = -2$ B. $f(x) < \frac{1}{x^2}$, 故 $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ 收敛

C. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ 发散 D. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \sin x dx = 0$

10. 曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上点 $(0,0)$ 到点 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ 之间的一段弧的弧长为 ()

A. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ B. $\frac{2}{3}$ C. $2\sqrt{2}-1$ D. $\sqrt{2}-1$

二、计算题 (每小题 10 分, 共 50 分)

11. 将极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$ 表示成定积分, 并求出极限值.

12. 求函数 $f(x) = x\sqrt{x-x^2}$ 的单调区间与极值.

13. 已知 e^{-2x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int xf'(x) dx$.

14. 求一阶微分方程 $xy' + y = xe^x$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

15. 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ x^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$, 求 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx$.

三、应用题 (每小题 10 分, 共 10 分)

16. 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上, 求曲线 $y = \sin x$ 与直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 、 $y = 0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

四、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $0 \leq a < b$, 证明: 在 (a,b) 上存在一点 ξ , 使得 $2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi)$.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$.