6. f(x)在0附近有二阶连续导数, ∴ f(x)在某U(0)可导, 连续.
$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{\sin x}=1=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}\Rightarrow$ ① $\lim_{x\to0}f'(x)=0=f'(0)$ ② $f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=1>0$.
又 $f''(x)$ 连续 $\Rightarrow \exists U(0,\delta)$, $f''(x)>1$

故: 1° $f'(0)=0$, $f''(0)=1>0\Rightarrow x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点. 2° $\exists U(0,\delta)$, $f''(x)>0$, 即 $x\in U(0,\delta)$ 时, $f(x)$ 下凹, $(0,f(0))$ 不是拐点.

安徽大学 2024 — 2025 学年第一学期

《 高等数学 A (一) 》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

院/系__________ 年级__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、单选题（每小题 3 分，共 30 分）

[-1,1]连续, (-1,1)可导.

1．下列函数中，在区间[−1, 1]上满足拉格朗日中值定理条件的是（ D ）

A. $\ln(1+x)$ x=-1处无定义　　B. $|x|$ x=0处不可导　　C. $\sqrt[3]{x}$ x=0处不可导　　D. $\arctan x$

2．设 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则下列函数中，是 $f(x)$ 原函数的是（ C ）

2. $f(x)=-\cos x+C_1$
$\int f(x)dx=-\sin x+C_1x+C_2$

A. $\sin x$　　B. $\cos x$　　C. $1-\sin x$　　D. $1+x+\sin x$

定义域 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

3．曲线 $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 共有（ B ）条渐近线

① $\lim_{x\to1}y=\infty$. 故有垂直渐近线

3. ② $\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\frac14$, 且 $\lim_{x\to\infty}(y-\frac{x}{4})=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{x}{4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+9-x^2+x}{4(x-1)}=-\frac54$
即 $y=\frac{x}{4}-\frac54$ 为其斜渐近线.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4．函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处（ C ）

4. $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x^2\sin\frac1x=0$
$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}x\sin\frac1x=0$

A. 不连续　　B. 连续但不可导　　C. 可导且导数为 0　　D. 可导且导数不为 0

5．已知函数 $f(x)=\frac{e^x-e}{x-1}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（ B ）

5. $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}\overset{(\frac00)}{=}\lim_{x\to1}\frac{e^x}{1}=e$

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 无穷间断点

6．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶连续可导，且 $\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{\sin x}=1$，则下列正确的是（ D ）

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的零点 缺条件, 无法判定.　　B. $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点 ✗

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点 ✗　　D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点 ✓

7．极限 $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}=$（ A ）

7. 原式 $=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=0$

A. 0　　B. ∞　　C. 1　　D. $\frac12$

8．设定积分 $I_1=\int_1^e\ln x\,dx$，$I_2=\int_1^e\ln^2x\,dx$，$I_3=\int_1^e x\,dx$，则（ C ）

$1\le x\le e$ 时, $0\le\ln x\le1\le x$ ∴ $\ln^2x\le\ln x\le x$

A. $I_3 > I_2 > I_1$　　B. $I_1 > I_2 > I_3$　　C. $I_3 > I_1 > I_2$　　D. $I_1 > I_3 > I_2$

9. 下列描述正确的是（ C ）

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处不连续.

A. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ 发散

发散

$f(x)$ 可能小于0　如：取 $f(x)=-\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$

B. $f(x) < \frac{1}{x^2}$，故 $\int_{2}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

但 $\int_2^{+\infty} -\frac{1}{x} dx = -\ln x\Big|_2^{+\infty}$ 发散

C. $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ 发散

D. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \sin x dx = 0$

发散

$= -\cos x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(-\cos x) - \lim_{x\to-\infty}(-\cos x)$ 两个都发散

10. 曲线 $y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ 上点 $(0,0)$ 到点 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ 之间的一段弧的弧长为（ A ）

A. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $2\sqrt{2}-1$　　D. $\sqrt{2}-1$

10　$y' = x^{\frac{1}{2}}$　$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+x}\,dx$

$\therefore s = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} d(1+x) = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2^{\frac{2}{3}}-1)$

$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

二、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11. 将极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$ 表示成定积分，并求出极限值.

12. 求函数 $f(x) = x\sqrt{x-x^2}$ 的单调区间与极值.

13. 已知 e^{-2x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf'(x)dx$.

14. 求一阶微分方程 $xy' + y = xe^x$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

15. 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \\ x^2, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$，求 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx$.

三、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16. 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上，求曲线 $y = \sin x$ 与直线 $x = \frac{\pi}{3}$、$y = 0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0 \le a < b$，证明：在 (a,b) 上存在一点 ξ，使得 $2\xi\left[f(b)-f(a)\right] = (b^2-a^2)f'(\xi)$.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

安徽大学 2024—2025 学年第一学期

《 高等数学 A(一)》期末考试试卷（A）卷参考答案

一、单选题（每小题 3 分，共 30 分）

1. D；2. C； 3. B；   4. C；   5. B；6. D；7. A； 8. C；   9. C；   10. A；

二、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11. 解：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\dfrac{1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i，\quad f(\xi_i)=\frac{1}{1+\xi_i}，\quad \Delta x_i=\frac{1}{n}，\quad \lambda=\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$$

12. 解：定义域$[0,1]$

$$f'(x)=\sqrt{x-x^2}+x\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}=\frac{3x-4x^2}{2\sqrt{x-x^2}}，得：$$

驻点：$x=\dfrac{3}{4}$

x	$(0,\frac{3}{4})$	$\frac{3}{4}$	$(\frac{3}{4},1)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

$f(x)$ 的单调增区间为$[0,\frac{3}{4}]$，单调减区间为$[\frac{3}{4},1]$，极大值为 $f(\frac{3}{4})=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

13. 解 I： 由题设：$f(x)=\left(e^{-2x}\right)'=-2e^{-2x}$

$$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx$$

$$=-2xe^{-2x}-e^{-2x}+C$$

解 II：由题设：$f(x)=\left(e^{-2x}\right)'=-2e^{-2x}$

$$f'(x)=\left(-2e^{-2x}\right)'=4e^{-2x}$$

$$\int xf'(x)dx=\int 4xe^{-2x}dx=-2\int xde^{-2x}\text{，}$$

$$=-2\left(xe^{-2x}-\int e^{-2x}dx\right)=-2xe^{-2x}-e^{-2x}+C$$

14. 解：方程可化为：

$$y'+\frac{1}{x}y=e^{x}$$ ，此为一阶非齐次线性微分方程

由公式，$y(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\int e^{x}xdx+C\right)$

$$=\frac{1}{x}\left(xe^{x}-e^{x}+C\right)$$

又 $y(1)=1$，代入上式得：$C=1$，故所求特解：

$$y=e^{x}-\frac{e^{x}}{x}+\frac{1}{x}$$

15. 解：令 $t=x-1$ ，则 $dx=dt$，$x=\frac{1}{2}$ 时，$t=-\frac{1}{2}$；$x=2$ 时，$t=1$

则 $$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}te^{t^2}dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^2dt$$

其中 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}te^{t^2}dt=0$，　　$\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^2dt=\frac{7}{24}$

故 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx=\frac{7}{24}$

三、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16. 解： 所求体积：$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\pi\sin^2 x dx$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}1dx-\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2xd2x$$

$$=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 证明：所证等式等价于 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$

由此可知，若设 $g(x)=x^2$，则 $f(x)$， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理的条件，从而有：

在 (a,b) 上存在一点 ξ，使得： $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$，也即 $2\xi\left[f(b)-f(a)\right]=(b^2-a^2)f'(\xi)$，得证.

18. 证明：设 $x=\pi-t$，则 $dx=-dt$，且 $x=0$ 时， $t=\pi$； $x=\pi$ 时， $t=0$，故

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx$$

移项即得： $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$.