Počítačové algebraické systémy a jejich aplikace ve fyzice

E. Sabol[1], M. Šilhavý[2], D. Pojhan[3], A. Vondra[4], Y. Herashchanka[5], and J. R. Zbončák[6]

[1]sabole@ceskolipska.cz
[2]maarty421@gmail.com
[3]danpojhan@gmail.com
[4]sasav9768@gmail.com
[5]yherashchanka@gmail.com
[6]sakoraj35@gmail.com

Abstrakt

Počítačové algebraické systémy [1] (CAS - computer algebra system, česky PAS) dokážou efektivně řešit algebraické problémy nebo tvořit fyzikální modely, což hodně ulehčuje práci vědce. Cílem zpracování našeho projektu je pochopit PAS, ukázat některá využití Wolfram Mathematica a pokusit se vysvětlit základy programu i některé fyzikální a matematické koncepty.

1 Úvod

Operace, které vědci provádějí ve svém výzkumu jsou s časem víc a víc komplikované, proto se vyvíjejí programy, které tuto práci ulehčují. Počítačové algebraické systémy (PAS), se začaly vyvíjet hned po nástupu počítačů, pro zvýšení efektivity matematických operací a jejich automatizace. Hlavní výhodou těchto systémů je schopnost zpracovávat data s využitím algebry. [2]

Prvním programem PAS je Schoonschip, který vznikl v roce 1963. Prvním hojně využívaným programem se stal Mathlab, program vytvořený v roce 1964, který se používá dodnes. Dnes se využívají programy jako MATLAB, Octave, SageMath, Axiom, atd. Dále pak existují softwarové balíčky pro standardní programovací jazyky jako např. SymPy (Python), JuliaSymbolics (Julia), SymbolicC++ (C++). [3]

Tyto programy pracují ve dvou módech: symbolickém a numerickém. Symbolický mód pracuje s obecnými řešeními a numerický mód dosazuje čísla a s vysokou přesností vypočítá výsledek.

PAS mají využití ve většině matematických a fyzikálních problémů. Dají se zde řešit integrály, derivace, soustavy rovnic a nerovnic i úlohy s komplexními čísly. Další velmi užitečnou schopností PAS je vizualizace dat do 2D i 3D grafů. Mezi další funkce patří:

- Rozšiřování a zjednodušení výrazů

- Grafické řešení rovnice(v 2D i 3D)

Seznámili s programem Mathematica, ukázali jsme si (malou) část možností programu a zkusili vizualizovat některé fyzikální a matematické úlohy. Předchozí ročníky už ukázali základy používání programu a jak řešit jednoduché úlohy. V této práci ukážeme vizualizaci některých známých problémů.

2 Mathematica

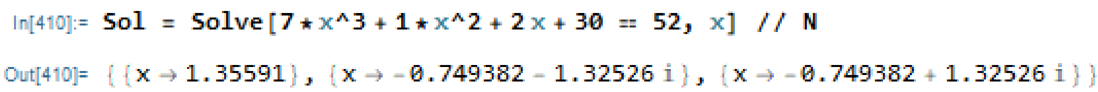
Většinu času jsme pracovali s programem Wolfram Mathematica, proto budou příklady zejména napsané v syntaxi programovacího jazyka Wolfram.

2.1 Příklady

V rámci miniprojektu jsme zpracovali některé příklady z fyziky. Jako třeba model obíhání planet ve sluneční soustavě. Jako další ukázku z PAS si uvedeme řešení různých druhů rovnic. [4]

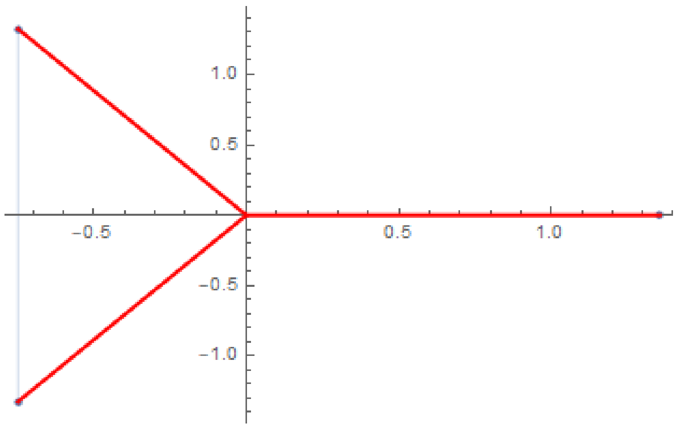
- Řešení kubické rovnice v oboru komplexních čísel: např. pro rovnici:

$$7x^3 + x^2 + 2x + 30 = 52 \tag{1}$$



Obrázek 1: Přepis rovnice do Wolframu

- Kořeny znázorněné na ose by vypadaly takto: Komplexní číslo má tvar $z = a + bi$

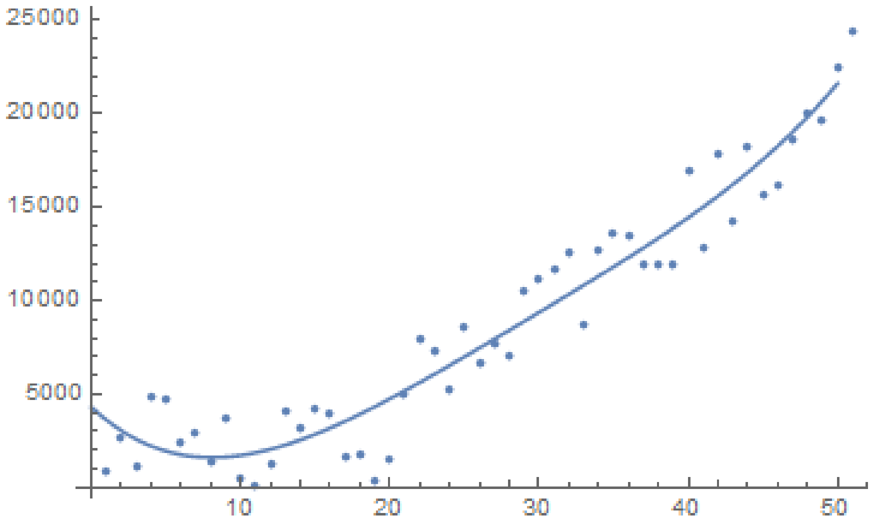


Obrázek 2: Kořeny kubické rovnice v komplexních souřadnicích

kde: $a = Re(z)(aR)$ $b = Im(z)$ (imaginární část, b) i je imaginární jednotka, pro kterou platí: $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$

Obor komplexních čísel se označuje C. Dovoluje tak kvadratickým rovnicím mít řešení i přesto že jejich diskriminant je záporný.

- Využití PAS pro statistiku: Mějme například 50 hodnot náhodně položené v soustavě, přičemž se budeme snažit předpovědět jaká bude z největší pravděpodobností následovat 51. hodnota. Pro tento problém jsme se rozhodli použít lineární a polynomickou regresi, které už byly vestavěné do prostředí. Polynomická regrese funguje

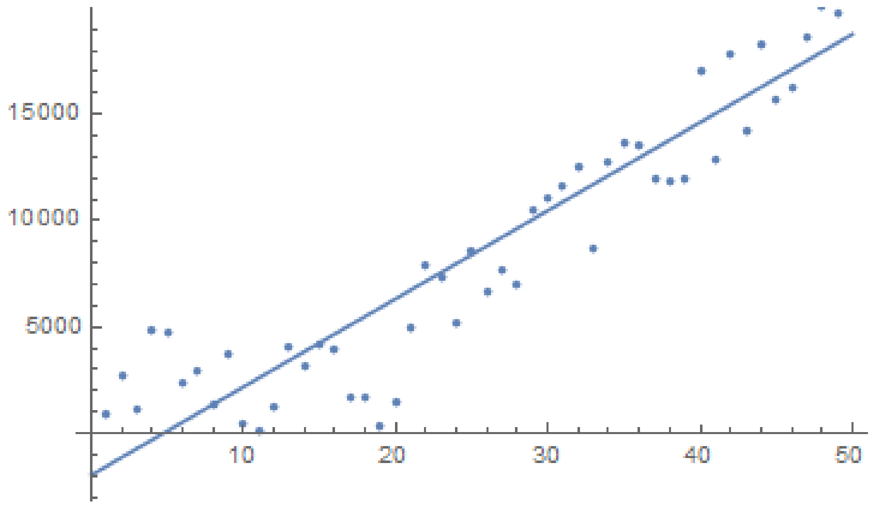


Obrázek 3: Polynomická regrese

na principu postupného sestavování polynomů vyššího řádu tak,

$$ax^2 + bx + c \to ax^3 + bx^2 + cx + d \to atd. \tag{2}$$

aby byl zvyšována přesnost (měřená nejčastěji funkcemi RMSE, MSE, MAE a Huber Loss) Lineární regrese funguje na principu postupné změny proměnné a v předpisu

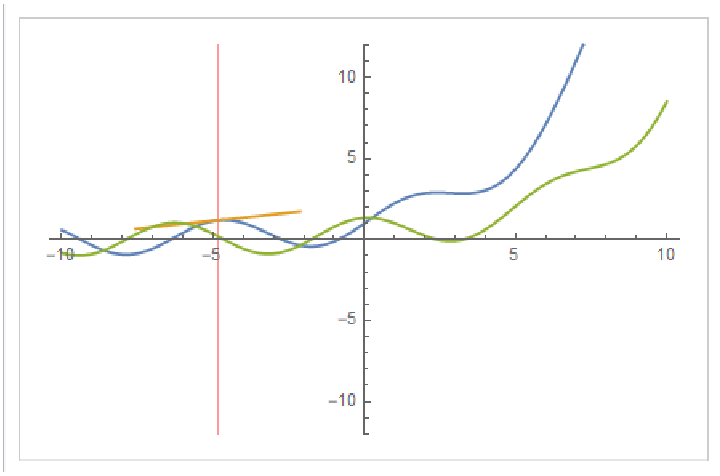


Obrázek 4: Lineární regrese:

lineární funkce ax + b tak aby se zvyšovala přesnost

- Grafické znázornění derivace.

  Derivace se dá vysvětlit buďto pomocí složitých definic a důkazů, nebo pomocí znázornění v grafu.[5] V našem případě je derivace směr tečny ke grafu v daném



Obrázek 5: Graf derivace:

bodě. K znázornění byly použity vestavěné možnosti grafování funkcí, výpočtu derivací a různé stylistické možnosti. V tomto případě jsme do jednoho grafu znázornili libovolnou funkci (modře), její derivaci (zeleně) a její tangentu v daném bodě (oranžově).

3 Shrnutí

PAS jsou bezpochyby jedním z nejužitečnějších nástrojů dnešní vědy. Práce s těmito programy není příliš těžká a jejich možnosti jsou velmi široké. Tyto programy mnohokrát ulehčují práci a našly využití nejen v matematice, proto je velice výhodné umět s nimi pracovat.

Poděkování

Děkujeme Dr. Ing. Milanu Šiňorovi, který nám pomáhal s projektem a všem organizátorům akce Týden vědy na Jaderce.

Reference

[1] G. Seif, "Understanding the 3 most common loss functions for machine learning regression," Feb 2022. [Online]. Available: https://towardsdatascience.com/understanding-the-3-most-common-loss-functions-for-machine-learning-regression-23e0ef3e14d3

[2] "Počítačový algebraický systém," May 2021. [Online]. Available: https://cs.wikipedia.org/wiki/Po%C4%8D%C3%ADta%C4%8Dov%C3%BD_algebraick%C3%BD_syst%C3%A9m

[3] "List of computer algebra systems," Jun 2022. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems

[4] [Online]. Available: https://reference.wolfram.com/language/

[5] L. Havrlant, "Derivace funkce." [Online]. Available: https://www.matweb.cz/derivace/