بسمه تعالی

استنتاج علّی
تمرین نظری سری اول

نیمسال اول ۹۹-۹۸
مدرس: دکتر صابر صالح

---

۱ مسائل کتاب

مسائل زیر از کتاب درس حل کنید:

- فصل سه: $3.6,\ 3.7,\ 3.8$
- فصل چهار: 4.16

۲ تشخیص‌پذیری در حالت خطای جمعی

در این تمرین قصد داریم به بررسی قضیه‌ی تشخیص‌پذیری در مدل‌های خطا جمع شونده بپردازیم. فرض کنید توزیع توأم متغیرهای X و Y به فرم

$$p(x,y) = p_n(y - f(x))p_x(x) \tag{۱}$$

باشد که p_n و p_x توابع چگالی احتمال هستند. قصد داریم نشان دهیم که اگر مدلی در جهت وارون و به فرم

$$p(x,y) = p_{\tilde{n}}(x - g(y))p_y(y) \tag{۲}$$

وجود داشته باشد، با تعریف $\nu = \log(p_n)$ و $\xi = \log p_x$، برای هر x و y که در آن‌ها $\nu''(y - f(x))f'(x) \neq 0$ باشد، داریم:

$$\xi''' = \xi''\left(-\frac{\nu''' f'}{\nu''} + \frac{f''}{f'}\right) - 2\nu'' f'' f' + \nu' f''' + \frac{\nu' \nu''' f'' f'}{\nu''} - \frac{\nu' (f'')^2}{f'}\,, \tag{۳}$$

که در معادله‌ی فوق، آرگومان‌های ν، ξ و f به ترتیب $y - f(x)$، x و x هستند.

- در نظر بگیرید: $\pi(x,y) = \log\Big(p(x,y)\Big)$. نشان دهید اگر مدل در هر دو جهت موجود باشد، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y}}\right) = 0$$

- به کمک بخش قبل، درستی رابطه‌ی (۳) را نشان دهید.
- با استفاده از قضیه‌ی فوق، در مورد تشخیص‌پذیری در مدل‌های خطا جمع شونده چه می‌توان گفت؟

۳ تشخیص‌پذیری در حالت گسسته

در این بخش به یک روش تشخیص جهت علّی در حالت گسسته می‌پردازیم. لم ها و قضیه اصلی را اثبات کنید. نهایتا سعی کنید روشی برای تشخیص جهت علّی پیشنهاد دهید و ایده‌ی خود را توضیح دهید. اثبات قضیه‌ی اصلی امتیازی تلقی می‌شود.

تعریف ۱.۳. مجموعه بردارهای $S_m := \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ را ساداک m بعدی می‌نامیم.

تعریف ۲.۳. توزیع توأم دو متغیر تصادفی X, Y با مقادیر گسسته در مجموعه‌ی $\{1, 2, ..., n\}$ داده شده است. بردار توزیع شرطی $C^{Y|X} \in \mathbb{R}^{n^2}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall 1 \leq i, j \leq n : C^{Y|X}_{i+j(n-1)} = \mathbb{P}(Y = i | X = j)$$

تعریف ۳.۳. ماتریس $M \in \{0, 1\}^{n^2 \times m}$ را در نظر بگیرید. $m_{i,j}$ نشانگر سطر $i + j(n-1)$ام از ماتریس M است. قرار دهید $S_{i,j} := \{k \in 1, 2, ..., m : m_{i,j}(k) = 1\}$. حال ماتریس M را یک ماتریس زیبا می‌نامیم، اگر و فقط اگر در شرایط زیر بگنجد:

$$\forall j :$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_{i,j} = \{1, 2, ..., m\}$$

$$\forall i \neq l : S_{i,j} \cap S_{l,j} = \emptyset$$

لم ۱.۳. توزیع توأم دو متغیر تصادفی X, Y با مقادیر گسسته در مجموعه‌ی $\{1, 2, ..., n\}$ داده شده است. وجود مکانیزم علّی f و متغیر تصادفی $E \in \{1, 2, ..., m\}$ با شروط $Y = f(X, E), X \perp\!\!\!\perp E$ ممکن است، اگر و فقط اگر ماتریس زیبای M و بردار $e \in S_m$ وجود داشته باشند که $Me = C^{Y|X}$.

لم ۲.۳. توزیع توأم دو متغیر تصادفی X, Y با مقادیر گسسته در مجموعه‌ی $\{1, 2, ..., n\}$ داده شده است. نشان دهید همواره می‌توان متغیر تصادفی $E \in \{1, 2, ..., n(n-1)+1\}$ و تابع مکانیزم f را معرفی کرد که رابطه‌ی $Y = f(X, E)$ صادق باشد و همچنین $X \perp\!\!\!\perp E$ باشد.

تعریف ۴.۳. توزیع توأم دو متغیر تصادفی X, Y با مقادیر گسسته در مجموعه‌ی $\{1, 2, ..., n\}$ داده شده است. همچنین متغیر E مستقل از X معرفی شده است که در مجموعه‌ی $\mathcal{E} = \{1, 2, ..., m\}$ مقدار اتخاذ می‌کند.
قرار دهید $S_{y,x} := \{e \in \mathcal{E} : y = f(x, e)\}$. حال تابع مکانیزم علّی f را عمومی می‌نامیم هرگاه به ازای هر سه‌تایی (x_1, x_2, y) که $x_1 \neq x_2$ داشته باشیم $S_{x_1,y} \neq S_{x_2,y}$ و همچنین به ازای هر دوتایی (x, y) داشته باشیم $S_{x,y} \neq \emptyset$.

قضیه ۱.۳. فرض کنید متغیرهای تصادفی X, Y با مقادیر گسسته در مجموعه‌ی $\{1, 2, ..., n\}$، در رابطه‌ی علّی زیر می‌گنجند:

$$Y = f(X, E)$$

$$X \perp\!\!\!\perp E$$

که متغیر تصادفی E در مجموعه‌ی $\{1, 2, ..., m\}$ مقدار اتخاذ می‌کند. فرض کنید توزیع متغیرهای X و E به طور یکنواخت از ساداک‌های S_n و S_m انتخاب شده باشد. اگر متغیر $\tilde{E}$ مستقل از Y و تابع مکانیزم علّی g بتوانند علّیت را در خلاف جهت توضیح بدهند (یعنی $X = g(Y, \tilde{E})$ باشد) تعداد مقادیری که متغیر $\tilde{E}$ اتخاذ می‌کند با احتمال ۱ بیشتر از $n(n-1)$ خواهد بود. (امتیازی)

توضیحات: توزیع متغیر گسسته با k را می‌توان به صورت یک بردار k مؤلفه‌ای واقع در S_k نشان داد. در این قضیه فرض این است که این بردار متناظر با توزیع متغیرهای X و E خود یک بردار تصادفی در ساداک‌های مربوطه است. قضیه بیان می‌کند که با این مفروضات نویزی که بتواند رابطه‌ی علّی را در خلاف جهت واقعی توضیح بدهد با احتمال یک لازم است از مجموعه‌ای به بزرگی $n(n-1)$ عضو مقدار بپذیرد.