Sol

A

> 小思维。

搬运工。

正难则反。考虑用总三角个数 $\binom{n}{3}$ 减去异色三角个数。

定义异色角为两条有公共顶点且颜色不同的边组成的无序对。不难发现一个异色三角形会包含两个异色角，且同一个异色角不会被包含在两个异色三角形中。直接数数即可，$O(n+m)$。

B

> 换根 dp（部分分）、分块

谁能教教我长链剖分能不能做啊？

将询问离线到点上。先从 1 号点开始 dfs，求出每个点的深度。接下来将树拍扁建分块，以 dfn 序为下标，维护块内深度为 k 的点的权值和。接下来你第二次 dfs 这棵树动态维护并且回答问题即可，时间复杂度 $O(n+q\sqrt{n})$。

C

> 特殊性质、线段树、线段树上二分

临时决定不出板子题了，于是换了个题。

我们有性质：

$$\operatorname*{mex}_{l\le i\le r}\{a_i\} \le \operatorname*{mex}_{l\le i\le r+1}\{a_i\}$$

因此如果我们提前处理出 $[1,1]$，$[1,2]$，……，$[1,n]$ 这些区间的 mex，它们就是单调不降的。

考虑我们维护出了左端点为 l 时所有区间的 mex，现在要求左端点为 $l+1$ 时的。注意到这步操作只删除了 a_l，并且只影响到了所有 mex 比 a_l 大、且对应区间内没有数和 a_l 相同的位置。

因此我们首先对于每个 i 求出最小的 r 使得 $i<r$ 且 $a_i=a_r$。接下来我们暴力求出以 1 为起点的所有 mex，然后扫描求出剩余答案，这一步可以使用线段树维护。线段树要支持区间求和、区间取 $\max$（方便二分）和区间推平。时间复杂度 $O(n\log n)$。

D

> 数学，组合数，概率，期望

暴力 1

直接枚举每次取出的小球是哪些，时间复杂度 $O(\sum a^2)$，能得 10pts。

暴力 2

我们发现答案其实就是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j|i-j|^p$$

直接枚举即可，时间复杂度 $O(n^2\log p)$，能过 20pts。

ad-hoc 1

$p=1$ 的档。

原式就是

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j|i-j|\\=&2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(a_ia_ji-a_ia_jj)\\=&2\left(\sum_{i=1}^{n}ia_i\sum_{j=1}^{i}a_j-\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{i}ja_j\right)\end{aligned}$$

事已至此，直接打两个前缀和即可，时间复杂度 $O(n)$。

ad-hoc 2

$p=2$。

由上档可启发我们展开：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j(i-j)^2\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j(i^2-2ij+j^2)\\=&\sum_{i=1}^{n}i^2a_i\sum_{j=1}^{n}a_j+\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}j^2a_j-2\sum_{i=1}^{n}ia_i\sum_{j=1}^{n}ja_j\end{aligned}$$

预处理 $\sum i^2a_i$，$\sum ia_i$ 和 $\sum a_i$ 即可。

solution

上面的过程下来应该已经会了。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j|i-j|^p&=2\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{i-1}a_j(i-j)^p\\&=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}a_ia_j\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}i^{p-k}j^k\\&=2\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\sum_{i=1}^{n}a_ii^{p-k}\sum_{j=1}^{i}a_jj^k\end{aligned}$$

仔细审视一下我们要求什么：

- 组合数。
- 对于 $\forall k\in[0,p]$，求出 $\sum i^ka_i$ 前缀和。

这样时间复杂度是 $O(n \cdot p)$ 的。整体不难。

E

> 线段树，向量，矩阵

一个神奇的线段树题。考虑在线段树的节点内维护一个描述当前区间状态的**三维向量**：

$$\begin{bmatrix} sum\ a_i \\ sum\ b_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 1 是用于修改的量，不会变。

然后就可以区间打tag了，三种操作都是左乘 3×3 的矩阵：

操作 1 直接求和没的说。

操作 2 是区间加 a，左乘

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+v \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

操作 3 是区间加 b，左乘

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b+v \\ 1 \end{bmatrix}$$

操作 3 是区间 a 加 b，左乘

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

然后丢线段树上区间打 tag 即可。时间复杂度 $O(n \log n)$ 乘上 27 的常数。可能很卡常。因此我把 $3e5$ 的数据全删掉了。

F

> 构造，状压 dp

我们考虑构造这样一张网格图：

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \cdots \\ 3 & 6 & 12 & 24 & \cdots \\ 9 & 18 & 36 & 72 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

这样第 i 行第 j 个数 $a_{i,j}$ 一定等于 $2a_{i,j-1}$ 和 $3a_{i-1,j}$。问题转化为选数并使得相邻的数不能同时选，计数。

经典的状压。注意到矩阵很小，因此能行（复杂度分析要讲）

这样不能覆盖所有 $[1, n]$ 内的数，因此要对每个没有被访问过的数都 dp 一遍。