第四章 更新过程

4.1 更新过程定义

上一章我们看到泊松过程的到达时间间隔是服从独立同分布的指数随机变量。现将其进行推广，考虑到达时间间隔服从独立同分布，但分布函数任意，这样得到的计数过程称为更新过程。

设$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$是一列服从独立同分布的非负随机变量，分布函数为$F(x)$，为避免显而易见的平凡情形，假设$F(0)=P\{X_n=0\}<1$。将X_n解释为第$n-1$个与第n个事件之间相距的时间，记$\mu=E(X_n)=\int_0^{+\infty}xdF(x)$为相继发生的两事件的时间间隔的均值，且有$0<\mu\le\infty$。令$T_n=\sum_{i=1}^{n}X_i, n\ge 1, T_0=0$，显然，$T_n$表示第$n$个事件发生的时刻。因为至时刻$t$为止已发生的事件个数等于使第$n$个事件在时间$t$或$t$之前发生的最大的$n$值，所以到时刻$t$时刻已发生的事件的个数$N(t)$为

$$N(t)=\sup\{n, T_n\le t\}$$

定义 4.1 更新过程: 计数过程$\{N(t), t\ge 0\}$称为更新过程。

在更新过程中我们将事件发生一次叫做一次更新，从而X_n就是第$n-1$次与第n次更新相距的时间，T_n表示第n次更新发生的时刻，而$N(t)$就是t时刻或t时刻之前发生的总的更新次数。更新过程一个典型的例子是机器零件的更换。

我们首先要回答是第一个问题是在有限时间内是否会有无限多次更新发生。答案是不会发生这种情况的概率为 1。由强大数定律可知

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\frac{T_n}{n}\to\mu$$

以概率 1 成立。因$\mu>0$，这意味着当$n\to\infty$时，$T_n\to\infty$，这即是说无穷多次更新只可能在无限长的时间内发生，因此在有限时间内至多只能发生有限次更新。因此，更新过程亦可写成

$$N(t)=\max\{n, T_n\le t\}$$

4.2 $N(t)$的分布

$N(t)$ 的分布至少在理论上能够得到，首先我们注意这样一个重要的关系：到时刻 t 为止的更新次数大于或等于 n 当且仅当在 t 之前或在时刻 t 发生第 n 次更新，即

$$N(t)\ge n \Leftrightarrow T_n \le t$$

所以

$$P\{N(t)=n\}=P\{N(t)\ge n\}-P\{N(t)\ge n+1\}=P\{T_n\le t\}-P\{T_{n+1}\le t\}$$

且因为随机变量 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 服从独立同分布且分布函数为 $F(x)$，记 F_n 为 T_n 的分布函数，则 F_n 是 F 自身的 n 次卷积。因此可得

$$P\{N(t)=n\}=F_n(t)-F_{n+1}(t)$$

令 $M(t)=E[N(t)]$，称 $M(t)$ 为更新函数。

命题 4.1 $M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$

证明：对 $N(t)$ 重新定义为 $N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}I_n$，其中

$$I_n=\begin{cases}1, \text{若第} n \text{次更新发生在[0,t]内}\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

因此

$$E[N(t)]=E[\sum_{n=1}^{\infty}I_n]=\sum_{n=1}^{\infty}E(I_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P\{I_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{T_n\le t\}=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$$

这其中由于 I_n 非负，求期望与求和顺序交换是合理的。

注：对于泊松过程，$M(t)=E[N(t)]=\lambda t$。（请同学们自证）

命题 4.2 $M(t)$ 是不减函数，且对一切 $0\le t\le\infty, M(t)<\infty$。

证明：因为 $N(t)$ 是不减函数，所以 $M(t)$ 也是不减的。接下来证明 $M(t)$ 的有限性。

由于 $F(0)=P\{X_n=0\}<$，因此存在 $a>0$，使得 $P\{X_n\ge a\}>0$，从而 $P\{X_n<a\}<1$。而

$$F(a)=P\{X_n\le a\}=P\{X_n<a\}+P\{X_n=a\}$$

为避免因可能的 $P\{X_n=a\}=P\{X_n\ge a\}$ 造成的

$F(a)=P\left\{X_n \le a\right\}=P\left\{X_n < a\right\}+P\left\{X \ge a\right\}=1$的情况，不妨取$0<b<a$，则有

$$F(b)=P\left\{X_n \le b\right\} \le P\left\{X_n < a\right\} < 1$$

又对任意固定的t，总能找到一正整数k，使得$kb \ge t$，所以

$\left\{T_k \le t\right\} \subset \left\{T_k \le kb\right\} \subset \left\{X_1 > b, X_2 > b, \cdots, X_k > b\right\}^c$ （ 思 考 如 果 是 $\left\{X_1 \le b, X_2 \le b, \cdots, X_k \le b\right\}$成立吗？）

于是

$$P\left\{T_k \le t\right\} \le 1-P\left\{X_1 > b, X_2 > b, \cdots, X_k > b\right\}=1-[1-F(b)]^k=1-\beta$$

这其中利用了$\left\{X_n, n=1,2,\cdots\right\}$的独立同分布性质，这里$\beta=[1-F(b)]^k \in (0,1)$。又因为

$$\left\{T_{mk} \le t\right\} \subset \left\{T_k-T_0 \le t, T_{2k}-T_k \le t, \cdots, T_{mk}-T_{(m-1)k} \le t\right\}$$

而且更新区间（相当于时间间隔）服从独立同分布，即

$$P\left\{T_k-T_0 \le t, T_{2k}-T_k \le t, \cdots, T_{mk}-T_{(m-1)k} \le t\right\}=[P\left\{T_k-T_0 \le t\right\}]^m=[P\left\{T_k \le t\right\}]^m$$

所以

$$P\left\{T_{mk} \le t\right\} \le [P\left\{T_k \le t\right\}]^m \le (1-\beta)^m$$

对任意整数$j \ge 0$，有

$$\left\{T_{mk+j} \le t\right\} \subset \left\{T_{mk} \le t\right\}$$

所以

$$\sum_{n=mk}^{(m+1)k-1} P\left\{T_n \le t\right\} \le kP\left\{T_{mk} \le t\right\}$$

综合以上得

$$
\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{T_n \le t\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} P\left\{T_n \le t\right\} + \sum_{n=k}^{\infty} P\left\{T_n \le t\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} P\left\{T_n \le t\right\} + [\sum_{n=k}^{2k-1} P\left\{T_n \le t\right\} + \sum_{n=2k}^{3k-1} P\left\{T_n \le t\right\} + \cdots] \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} P\left\{T_n \le t\right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=mk}^{(m+1)k-1} P\left\{T_n \le t\right\} \\
&\le \sum_{n=1}^{k-1} P\left\{T_n \le t\right\} + \sum_{m=1}^{\infty} kP\left\{T_{mk} \le t\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} P\left\{T_n \le t\right\} + \sum_{m=1}^{\infty} k(1-\beta)^m \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} P\left\{T_n \le t\right\} + \frac{k}{\beta} < \infty
\end{aligned}
$$

因此，命题 4.2 得证。

例 4.1 考虑一个时间离散的计数过程$\{N(t), t = 1, 2, \cdots\}$，在每个时刻独立地做贝努利试验，设成功的概率为$P$，失败的概率为$1-P$。以试验成功作为事件（更新），则此过程是更新过程。求$P\{N(t)=n\}$和更新函数$M(t)$。

解：依题意易知，过程的时间间隔X_i服从独立的同几何分布，即

$$P\{X_i = n\} = P(1-P)^{n-1}, i = 1, 2, \cdots, n = 1, 2, \cdots$$

则第k次成功（更新）发生的时刻$T_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$具有负二项分布

$$P\{T_k = n\} = \begin{cases} C_{n-1}^{k-1} P^k (1-p)^{n-k}, n \ge k \\ 0, n < k \end{cases}$$

上式表示：在第n次贝努利试验取得第k次成功（更新）的概率。

因此

$$
\begin{aligned}
&P\{N(t) = k\} = F_k(t) - F_{k+1}(t) = P\{T_k \le t\} - P\{T_{k+1} \le t\} \\
&= \sum_{n=k}^{t} C_{n-1}^{k-1} P^k (1-p)^{n-k} - \sum_{n=k+1}^{t} C_{n-1}^{k} P^{k+1} (1-p)^{n-k-1}
\end{aligned}
$$

更新函数

$$M(k) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{k} rP\{N(t) = r\}$$

4.3 更新定理

在讨论更新定理之前，我们先讨论若干极限定理，这对于我们更好地理解更新定理有所帮助。

若以 $N(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}N(t)$ 记所发生的更新总数，易知以概率 1 保证 $N(\infty)=\infty$。这是因为使所发生的更新总数 $N(\infty)$ 有限的唯一方法是有一个到达时间间隔为无大，即

$P\left\{N(\infty)<\infty\right\}=P\left\{X_n=\infty,\exists n\right\}=P\left\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{X_n=\infty\right\}\right\}\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\left\{X_n=\infty\right\}=0$？（对比有限 t 的情形）

于是当 t 趋于无穷时 $N(t)$ 趋于无穷。接下来，我们还需要进一步考虑的是 $N(t)$ 趋于无穷的速度，即要考虑 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{N(t)}{t}$ 的情况。

为考虑 $N(t)$ 的发散速度，我们先考虑到达时刻 $T_{N(t)}$（$T_{N(t)}$ 表示在时刻 t 或时刻 t 之前最后一次更新发生的时刻，以此类推，则 $T_{N(t)+1}$ 表示在时刻 t 之后第一次更新发生的时刻）。利用 $T_{N(t)}$ 和 $T_{N(t)+1}$，我们提出并证明以下命题。

命题 4.3 当 $t\to\infty$ 时，以概率 1 保证 $\dfrac{N(t)}{t}\to\dfrac{1}{\mu},(\mu=EX_n)$。

证明：因为 $T_{N(t)}\leq t<T_{N(t)+1}$，于是有

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)}\leq\frac{t}{N(t)}<\frac{T_{N(t)+1}}{N(t)}$$

其中，$\dfrac{T_{N(t)}}{N(t)}$ 表示前 $N(t)$ 个事件（或更新）到达时间间隔的均值，由强大数定律可得，当 $N(t)\to\infty$ 时，$\dfrac{T_{N(t)}}{N(t)}\to\mu$。但由于 $t\to\infty$ 时 $N(t)\to\infty$，所以当 $t\to\infty$ 时，$\dfrac{T_{N(t)}}{N(t)}\to\mu$。

又 $\dfrac{T_{N(t)+1}}{N(t)}=\dfrac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}\cdot\dfrac{N(t)+1}{N(t)}$，类似地可推得当 $t\to\infty$ 时，$\dfrac{T_{N(t)+1}}{N(t)}\to\mu$。

利用极限的夹逼定理可知，当 $t\to\infty$ 时，$\dfrac{t}{N(t)}\to\mu$。因此命题 4.3 得证。

命题 4.3 的解释：以概率 1 保证，长时间后更新发生的速率将等于 $\dfrac{1}{\mu}$。因此，$\dfrac{1}{\mu}$ 称为更新过程的速率。

接下来我们感兴趣的是更新过程平均速度的期望$\frac{M(t)}{t}$是否也同样收敛于速率$\frac{1}{\mu}$。然则，在考虑$\frac{M(t)}{t}$的收敛问题之前，我们先讨论两个相用的知识点：停时与瓦尔德等式。

定义 4.2 停时：设$X_1, X_2, \cdots$为一列独立随机变量，若对一切的$n=1,2,\cdots$，事件$\{N=n\}$与$X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$独立，则称整值随机变量N为序列$X_1, X_2, \cdots$的停时。

定义 4.2 的理解：我们依次观察诸X_n，以N记在停止观察之前所观察的次数。若$N=n$，则在观察$X_1, \cdots, X_n$之后与观察$X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$之前我们停止观察。

例 4.2（a）掷硬币试验的停时：设$X_n, n=1,2,\cdots$相互独立且使得

$$P\{X_n=0\}=P\{X_n=1\}=\frac{1}{2}, 0\text{表示反面}, 1\text{表示正面}$$

如果令

$$N=\min\{n, X_1+\cdots+X_n=10\}$$

则N是一个停时，即在连续掷硬币试验过程中，当出现硬币正面次数达到 10 次时停止试验。

定理 4.1 瓦尔德等式：若$X_1, X_2, \cdots$是独立同分布的随机变量，期望有限，且N是$X_1, X_2, \cdots$的停时，使得$E[N]<\infty$，则

$$E[\sum_{n=1}^{N} X_n]=E[N]E[X]$$

证明：令

$$I_n=\begin{cases}1, N \geq n \\ 0, N<n\end{cases}$$

则有

$$\sum_{n=1}^{N} X_n=\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n$$

因此

$$E[\sum_{n=1}^{N} X_n]=E[\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n]=\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n I_n]$$

$I_n=1$当且仅当我们连续观察$X_1, \cdots, X_{n-1}$之后不停下来。所以I_n由$X_1, \cdots, X_{n-1}$决定而与X_n独立。因此可得

$$
\begin{aligned}
E[\sum_{n=1}^{N} X_n] &= \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n I_n] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]E[I_n] \\
&\xlongequal{X_n\text{独立同分布，且与}I_n\text{独立}} E[X]\sum_{n=1}^{\infty} E[I_n] \\
&= E[X]\sum_{n=1}^{\infty} P\{N \geq n\} \\
&= E[X]E[N]
\end{aligned}
$$

其中，由命题 4.1 可知，因 $N(t) \geq n \Leftrightarrow T_n \leq t$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} P\{N \geq n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \leq t\} = E[N]$。

例 4.2（a）掷硬币试验中，根据瓦尔德等式，

$$E[X_1 + \cdots + X_N] = \frac{1}{2}E[N] = 10 \Rightarrow E[N] = 20$$

命题 4.4 若 $\mu < \infty$，则 $E[T_{N(t)+1}] = \mu[M(t)+1]$

命题 4.4 相当于书（张波著）中第 50 页例 4.2.1 中的瓦尔德等式。在此我们将其作为瓦尔德等式定理在更新过程中的应用而成立的一个命题。我们以下给出与书中不同的另一证明过程。

证明：以 $X_1, X_2, \cdots$ 记一更新过程的到达时间间隔，在时刻 t 之后的第一次更新即 $N(t)+1$ 次更新时刻停止。现在我们证实 $N(t)+1$ 是序列 X_t 的停时，注意到

$$N(t)+1 = n \Leftrightarrow N(t) = n-1 \Leftrightarrow X_1 + \cdots + X_{n-1} \leq t, X_1 + \cdots + X_N > t$$

因此事件 $\{N(t)+1 = n\}$ 只依赖于 $X_1, \cdots, X_n$，故与 $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$ 独立；因此 $N(t)+1$ 是一个停时。根据瓦尔德等式可得，当 $E[X] < \infty$ 时，

$$
\begin{aligned}
&E[X_1 + \cdots + X_{N(t)+1}] \\
&= E[X]E[N(t)+1] \Leftrightarrow E[T_{N(t)+1}] \\
&= E[X]E[N(t)+1] \\
&= \mu[M(t)+1]
\end{aligned}
$$

现在我们可以给出并证明更新过程平均速度的期望 $\frac{M(t)}{t}$ 的收敛问题答案，即 Feller 基本更新定理。

定理 4.2 Feller 基本更新定理：当 $t \to \infty$ 时 $\frac{M(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$，若 $\mu = \infty, \frac{1}{\mu} \equiv 0$。

证明：设 $\mu < \infty$。显然有 $T_{N(t)+1} > t$，取期望并利用命题 4.4 的结论可得

$$\mu[M(t)+1]>t$$
$$\Leftrightarrow \frac{M(t)}{t}>\frac{1}{\mu}-\frac{1}{t}$$

从而推出

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\geq\frac{1}{\mu}$$

另，对一固定常数M，定义一个新的更新过程$\left\{X_n^C,n=1,2,\cdots\right\}$如下：

$$X_n^C=\begin{cases}X_n,\text{当}X_n\leq M,n=1,2,\cdots\\ M,\text{当}X_n>M\end{cases}$$

令$T_n^C=\sum_{i=1}^{n}X_i^C,N^C(t)=\sup\left\{n,T_n^C\leq t\right\}$。由于$X_n^C\leq M$，则$T_{N^C(t)+1}^C\leq t+M$。根据命题4.4的结论可得

$$\mu_M[M^C(t)+1]\leq t+M$$

其中，$\mu_M=E[X_n^C],M^C(t)=E[N^C(t)]$。从而可推得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{M^C(t)}{t}\leq\frac{1}{\mu_M}$$

根据更新过程$\left\{X_n^C,n=1,2,\cdots\right\}$的定义可知，$X_n^C\leq X_n$，从而$T_n^C\leq T_n$，$N^C(t)\geq N(t)$，$M^C(t)\geq M(t)$，因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\leq\frac{1}{\mu_M}$$

令$M\to\infty$，则有$X_n^C\to X_n,M^C(t)\to M(t)\Leftrightarrow\mu_M\to\mu$，从而可进一步推得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\leq\frac{1}{\mu}$$

因此

$$\frac{1}{\mu}\leq\liminf_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t},\limsup_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\leq\frac{1}{\mu}$$

根据上下极限与极限的关系可知，当$t\to\infty$时，$\frac{M(t)}{t}\to\frac{1}{\mu}$，即定理 4.2 成立。

当$\mu=\infty$时，注意到更新过程$\left\{X_n^C,n=1,2,\cdots\right\}$的定义，仅当$M\to\infty$时，$\mu=\infty$。从

而根据上述当 $\mu<\infty$ 时的证明过程可知，定理 4.2 的结论同样成立。

注：对比命题 4.3 和定理 4.2，乍看定理 4.2 似乎是命题 4.3 的简单推论，即平均更新速率以概率 1 收敛于 $\frac{1}{\mu}$ 即蕴含着平均更新速率的期望也收敛于 $\frac{1}{\mu}$。事实并非一定能如此推论，以下例子揭示此点。

例 4.3 设 U 是 $(0,1)$ 上均匀分布的随机变量，定义随机变量 $Y_n, n\geq 1$ 如下：

$$Y_n=\begin{cases}0, 若 U>\frac{1}{n}\\ n, 若 U\leq\frac{1}{n}\end{cases}$$

因我们可以以概率 1 保证 $U>0$，故对一切充分大的 n 使得 $\frac{1}{n}<U$，Y_n 将等于 0。因此，以概率 1 保证，当 $n\to\infty$ 时，$Y_n\to 0$。

然而，$E[Y_n]=nP\left\{U\leq\frac{1}{n}\right\}=n\times\frac{1}{n}=1$。显然，随机变量序列 Y_n 收敛于 0，而并不意味着其期望也收敛于 0。

因此，命题 4.3 和定理 4.2 中所涉及的随机变量 $N(t)$（关于 t）及其期望 $M(t)$（关于 t 的函数）并不能轻易地推广到其它随机变量中。

接下来，我们进一步讨论 $N(t)$ 的分布，可以证明当 $t\to\infty$ 时，$N(t)$ 服从渐近正态分布。在如下的定理 4.3 的证明中，我们将使用中心极限定理，以及关系式 $N(t)<n\Leftrightarrow T_n>t$。

定理 4.3 $N(t)$ 的渐近正态性：设到达时间间隔的均值为 μ 和方差为 σ^2 均有限，则当 $t\to\infty$ 时

$$P\left\{\frac{N(t)-t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}<y\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-x^2/2}dx$$

证明：令 $r_t=t/\mu+y\sigma\sqrt{t/\mu^3}$，则

$$P\left\{\frac{N(t)-t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}<y\right\}=P\left\{N(t)<r_t\right\}$$

$$\overset{N(t)<n\Leftrightarrow T_n>t}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}P\left\{T_{r_t}>t\right\}$$

$$=P\left\{\frac{T_{r_t}-r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}>\frac{t-r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{T_{r_t}-r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}>-y(1+\frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}})^{-1/2}\right\}$$

根据中心极限定理，当t（于是r_t）趋于∞时，$\dfrac{T_{r_t}-r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}$收敛于均值为 0 方差为 1 的正态随机变量（其中，$E(T_{r_t})=E(\sum_{i=1}^{r_t}X_i)=r_t\mu, Var(T_{r_t})=Var(\sum_{i=1}^{r_t}X_i)=r_t\sigma^2$）。又因当$t\to\infty$时，

$$-y(1+\frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}})^{-1/2}\to -y$$

因此，

$$P\left\{\frac{N(t)-t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}<y\right\}=P\left\{\frac{T_{r_t}-r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}>-y(1+\frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}})^{-1/2}\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-x^2/2}dx$$

即定理 4.3 得证。

注:（1）因要使用关系式$N(t)<n\Leftrightarrow T_n>t$，所以$r_t$应是整数;（2）定理 4.3 表明，$N(t)$是渐近正态的，且其均值为$\dfrac{t}{\mu}$，方差为$\dfrac{t\sigma^2}{\mu^3}$。

在基本更新定理基础之上，我们接下来将介绍其它几个重要的更新定理。在介绍更新定理之前，我们首先引入一个新的概念－－格点分布。

定义 4.3 格点分布：称非负随机变量X服从格点分布，若存在$d\geq 0$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{X=nd\right\}=1$$

若X只取d的整数倍，则满足上述条件的最大的d称为X的周期。若X是格点的，其分布函数F也称是格点的。

定理 4.4 Blackwell 更新定理:

（1）若F不是格点的，则对一切$a\geq 0$，当$t\to\infty$时

$$M(t+a)-M(t)\to\frac{a}{\mu}$$

（2）若F是格点的，周期为d，则当$n\to\infty$时

$$E[\text{在时刻}nd\text{更新发生的次数}] \to \frac{d}{\mu}$$

定理 4.4 的证明超出本书范围，在此省略。

Blackwell 更新定理表明，若 F 不是格点，则在远离原点的某长度为 a 的区间内更新发生次数的期望近似于 $\frac{a}{\mu}$。这是因为，根据命题 4.3，$\frac{1}{\mu}$ 可视为长时间后更新过程发生的平均速率。若 F 是格点的且周期为 d，则更新只能发生在 d 的整数倍时刻，则（1）中的极限不成立，因为更新发生次数并不依赖区间的长度，而是依赖于区间上形如 nd 的点的数目。于是格点的情形有关的极限是在时刻 nd 更新发生次数的期望的极限，且当 $\lim_{n\to\infty} E[\text{在时刻}nd\text{更新发生的次数}]$ 存在时，由基本更新定理可知它必须等于 $\frac{d}{\mu}$。若到达时间间隔总是正的，则 Blackwell 定理（2）表明，在格点情形中

$$\lim_{n\to\infty} P\{\text{在时刻}nd\text{更新发生的次数}\} = \frac{d}{\mu}$$

对比 Feller 基本更新定理和 Blackwell 更新定理容易发现，Feller 基本更新定理是 Blackwell 更新定理的一种特殊情形。令 $b_n = M_n - M_{n-1}$，当 F 是非格点时，由（1）可知

$$b_n \to \frac{1}{\mu}, n \to \infty$$

从而，由极限的性质可得

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = \frac{M_n}{n} \to \frac{1}{\mu}, n \to \infty$$

而对任意正实数 t，有

$$\frac{[t]}{t} \cdot \frac{M([t])}{[t]} \le \frac{M(t)}{t} \le \frac{[t]+1}{t} \cdot \frac{M([t]+1)}{[t]+1}$$

其中，$[t]$ 表示 t 的整数部分（$[t] \le t$）。令 $t \to \infty$ 可得

$$\frac{M(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

这即是 Feller 基本更新定理的结论。类似地，同样可证明当 F 是格点时，Feller 基本更新定理和 Blackwell 更新定理的上述关系同样成立。

定理 4.5　关键更新定理：设函数 $h(t), t \in [0, +\infty)$ 满足

(1) $h(t)$ 非负不增；（2）$\int_0^{+\infty} h(t)dt < \infty$。

若 F 不是格点的，有

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dM(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty}h(t)dt$$

其中，$M(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)$。

若F是格点，对于$0\le c<d$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n h(c+nd-x)dM(x)=\frac{d}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}h(c+nd)$$

可以证明 Blackwell 更新定理与关键更新定理的等价性。这里我们以一个特例来简略地描述二者的等价性。考虑F是非格点的情形，取满足关键更新定理中两个条件的函数

$$h(t)=\begin{cases}1,0\le t<a\\0,t\ge a\end{cases}$$

则

$$\int_0^t h(t-x)dM(x)=\int_{t-a}^t dM(x)=M(t)-M(t-a)$$

又

$$\frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty}h(t)dt=\frac{a}{\mu}$$

从而有

$$\lim_{t\to\infty}[M(t)-M(t-a)]=\frac{a}{\mu}$$

上式即是 Blackwell 更新定理的结论。

反过来，由 Blackwell 更新定理可知

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[M(t)-M(t-a)]}{a}=\frac{1}{\mu}$$

故

$$\lim_{a\to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{[M(t)-M(t-a)]}{a}=\frac{1}{\mu}\overset{\text{假设积分次序可交换}}{\Leftrightarrow}\lim_{t\to\infty}\frac{dM(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$$

即当$t\to\infty$时，$dM(t)\sim\frac{1}{\mu}dt$。又因为$\int_0^{+\infty}h(t)dt<\infty$，则当$t\to\infty$时，$h(t)$将快速地趋于 0。所以，当$t\to\infty$时，$h(t-x)$主要考虑当$t-x$较小即$x$比较大的情况，则有

$$\int_0^t h(t-x)dM(x)\approx\int_0^t\frac{1}{\mu}h(t-x)dx=\frac{1}{\mu}\int_0^t\frac{1}{\mu}h(x)dx$$

上式即是关键更新定理的结论。

4.4 更新过程的推广

4.4.1 交错（交替）更新过程

考虑一个系统，它有两个状态：开或关，由系统的开与关两种状态交替（交替）进行的更新过程构成一个交错（交替）更新过程。最初它是开的且持续开的时间是 Z_1，而后关闭且持续闭的时间为 Y_1；之后又打开且持续开的时间为 Z_2，而后又关闭且持续闭的时间为 Y_2；如此开关交替进行，每当系统打开时称作一次更新。

假设随机向量 $(Z_n, Y_n), n \geq 1$ 独立同分布，因此随机变量序列 $\{Z_n\}, \{Y_n\}$ 都是独立同分布的，即 Z_i, Y_j 在当 $i \neq j$ 时相互独立，但允许 Z_i, Y_i 不独立。

下面利用关键更新定理得到交错更新过程的一个重要结论。在

定理 4.6 设 H 是 Z_n 的分布，G 是 Y_n 的分布，而 F 是 $Z_n + Y_n$ 的分布，并记

$$P(t) = P\left\{t\text{时刻系统是开的}\right\}$$

若 $E[Z_n + Y_n] < \infty$，且 F 不是格点的，则

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{E(Z_n)}{E(Z_n) + E(Y_n)}$$

为证明定理 4.6，我们需引入如下一个引理。

引理 4.1 $P\left\{T_{N(t)} \leq s\right\} = \overline{F}(t) + \int_0^s \overline{F}(t-y)dM(y), t \geq s \geq 0$

证明：因为 $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$，则

$$P\left\{T_{N(t)} \le s\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T_n \le s, T_{n+1} > t\right\}$$

$$= P\left\{T_0 \le s, T_1 > t\right\} + \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{T_n \le s, T_{n+1} > t\right\}$$

$$= (1 - P\left\{X_1 \le t\right\}) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} P\left\{T_n \le s, T_{n+1} > t \middle| T_n = y\right\} dF_n(y)$$

$$= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} P\left\{T_n \le s, T_{n+1} > t \middle| T_n = y\right\} dF_n(y)$$

$$= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{s} P\left\{X_{n+1} > t - y\right\} dF_n(y)$$

$$= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{s} \overline{F}(t-y) dF_n(y)$$

$$= \overline{F}(t) + \int_0^{s} \overline{F}(t-y) d\sum_{n=1}^{\infty} F_n(y)$$

$$= \overline{F}(t) + \int_0^{s} \overline{F}(t-y) dM(y)$$

注：引理 4.1 的结论给出了 $T_{N(t)}$ 的分布，从引理 4.1 可得

（1）$P\left\{T_{N(t)} = 0\right\} = \overline{F}(t)$；

（2）$dF_{T_{N(t)}}(y) = \overline{F}(t-y)dM(y), 0 < y < \infty$

为更好理解（2）式，假设 F 连续且具有密度函数 f 。因为 $M(y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y)$，则对 $y > 0$ 有

$$dM(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\text{在}(y, y+dy)\text{中发生第}n\text{次更新}\right\}$$

$$= P\left\{\text{在}(y, y+dy)\text{中发生更新}\right\}$$

因此，$T_{N(t)}$ 的概率密度函数为

$$f_{T_{N(t)}}(y)dy$$

$$= P\left\{\text{在}(y, y+dy)\text{中发生更新,且下一个到达时间间隔} > t-y\right\}$$

$$= \overline{F}(t-y)dM(y)$$

接下来在引理 4.1 结论的基础上，我们给出定理 4.6 的证明。

定理 4.6 的证明：对时刻 t 或时刻 t 之前发生的最后一次更新的时刻取条件得

$$P(t)=\sum_{y=0}^{+\infty}P\left\{\text{在时刻}t\text{开着}\middle|T_{N(t)}=y\right\}P\left\{T_{N(t)}=y\right\}$$

$$=P\left\{\text{在时刻}t\text{开着}\middle|T_{N(t)}=0\right\}P\left\{T_{N(t)}=0\right\}+\int_0^{+\infty}P\left\{\text{在时刻}t\text{开着}\middle|T_{N(t)}=y\right\}dF_{T_{N(t)}}(y)$$

其中

$$P\left\{\text{在时刻}t\text{开着}\middle|T_{N(t)}=0\right\}=P\left\{Z_1>t\middle|Z_1+Y_1>t\right\}=\frac{\overline{H}(t)}{\overline{F}(t)}$$

且对于 $y>t$，有

$$P\left\{\text{在时刻}t\text{开着}\middle|T_{N(t)}=y\right\}=P\left\{Z>t-y\middle|Z+y>t-y\right\}=\frac{\overline{H}(t-y)}{\overline{F}(t-y)}$$

利用引理 4.1 可得

$$P(t)=\overline{H}(t)+\int_0^t\overline{H}(t-y)dM(y)$$

显然，$\overline{H}(t)$ 是非负不增的，且 $\int_0^{+\infty}\overline{H}(t)dt=E(Z)<\infty$，因此当 $t\to\infty$ 时，$\overline{H}(t)\to 0$。所以，利用关键更新定理可得

$$P(t)\to\frac{\int_0^{+\infty}\overline{H}(t)dt}{\mu_F}=\frac{E(Z_n)}{E(Z_n)+E(Y_n)}$$

若令 $Q(t)=P\left\{\text{在时刻}t\text{关着}\right\}=1-P(t)$，则有

$$Q(t)\to\frac{E(Y_n)}{E(Z_n)+E(Y_n)}$$

注：系统最初是开着的事实在极限中并不起作用。

例 4.4 商店存货问题：一商店经营某类商品，设顾客按一更新过程到达，到达时间间隔是非格点分布 F；每个顾客购买的商品数是独立同分布的随机变量，分布函数为 G。商店的进货策略是 (s,S)，若某顾客购货后库存量少于 s 就进货，使存货达到 S，否则不进货，即若一顾客购货后存货为 x，则进货数应为 $\begin{cases}S-x, x<s\\0, x\geq s\end{cases}$。设进货是立即完成的，不占时间，以 $X(t)$ 记以时刻 t 的存货量，求 $\lim\limits_{t\to\infty}P\{X(t)\geq x\}$。

解：设 $X(0)=S$。如果存货数至少为 x 时我们说系统是“开”的，否则是“关”的，则这正是一个交错更新过程。因此，根据定理 4.6 可得

$$\lim_{t\to\infty}P\{X(t)\geq x\}=\frac{E[\text{在一个循环中存货数}\geq x\text{的时间}]}{E[\text{一个循环的时间}]}$$

以 $Y_1,Y_2,\cdots$ 记相继到达的顾客的购货数且设

$$N_x = \min\{n : Y_1 + \cdots + Y_n < S - x\}$$

这里 N_x 表示一次循环中首次使存货少于 x 的序数，则 N_s 表示一次循环终止时顾客的序数。

以 $X_i (i \geq 1)$ 记顾客的到达时间间隔，则

在一个循环中“开”的时间$=\sum_{i=1}^{N_x} X_i$

一个循环的时间$=\sum_{i=1}^{N_s} X_i$

假设到达时间间隔与顾客的购货数相互独立，则

$$\lim_{t\to\infty} P\{X(t) \geq x\} = \frac{E[\sum_{i=1}^{N_x} X_i]}{E[\sum_{i=1}^{N_s} X_i]} \overset{Wald\ \ Equality}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \frac{E[N_x]}{E[N_s]}$$

因为$Y_i, i \geq 1$独立同分布，根据 N_x 的定义，我们可以把 $N_x - 1$解释为一个到达时间间隔为$Y_i, i \geq 1$的更新过程到时刻$S - x$为止所发生的更新次数（$T_{N_x - 1} = \sum_{i=1}^{N_x - 1} Y_i \leq S - x$）。因此

$$E[N_x] = M_G(S - x) + 1$$
$$E[N_s] = M_G(S - s) + 1$$

其中，$M_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)$，$G_i(t)$是$Y_i, i \geq 1$即顾客购货数的同一分布函数。

因此

$$\lim_{t\to\infty} P\{X(t) \geq x\} = \frac{M_G(S - x) + 1}{M_G(S - s) + 1}, x \leq S$$

定理 4.6 具有十分重要的作用，因为许多系统能以交错过程为模型。接下来我们将在此基础之上考虑剩余寿命与年龄的相关问题。

定义 4.4 剩余寿命和年龄: 考虑一个更新过程，以$Y(t)$记以时刻t直到下一次更新的时间，而以$A(t)$记以$[0, t]$内最后一次更新之后的时间，即

$$Y(t) = T_{N(t)+1} - t$$
$$A(t) = t - T_{N(t)}$$

则称$Y(t)$是时刻t的过剩或剩余寿命，称$A(t)$是时刻t的年龄。

若假设更新过程是将一个部件投入使用而一旦失效即更换所产生的，则 $A(t)$ 表示在时刻 t 所使用部件的年龄而 $Y(t)$ 则表示它的剩余寿命。

命题 4.5 若到达时间间隔的分布不是格点的，且 $\mu < \infty$，则

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{Y(t) \le x\right\} = \lim_{t\to\infty} P\left\{A(t) \le x\right\} = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy$$

证明：考虑一个开－关循环对应的更新过程，若在时刻 t 的年龄小于或等于 x，即表明系统在时刻 t 开着，换言之，在更新区间的前 x 时间内系统开着而其余时间关着。若更新分布不是格点的，则由定理 4.6 可得

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{A(t) \le x\right\} = \frac{E[\min(X,x)]}{E(X)}$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{P\left\{\min(X,x) > y\right\}}{E(X)} dy$$
$$= \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} \overline{F}(y)dy$$

类似地，为得到 $P\left\{Y(t) \le x\right\}$ 的极限值，我们说在一个更新循环的最后 x 时间内系统关着而其余时间开着。因此，在一次循环中关着的时间是 $\min(x, X)$，从而

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{Y(t) \le x\right\} = \lim_{t\to\infty} P\left\{\text{在}t\text{时刻关着}\right\}$$
$$= \frac{E[\min(X,x)]}{E(X)}$$
$$= \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} \overline{F}(y)dy$$

注：为什么剩余寿命与年龄在一个很长时间过程中的极限分布是相同的？

为理解这点，我们假设时间起始于 $t \to -\infty$，即把时间倒回去观察，那么相继事件之间的间隔仍然是独立且具有同分布 F 的，因此往回观察看到的是一个分布相同的更新过程。当往回观察时，在时刻 t 的剩余寿命正是原过程在时刻 t 的年龄，因此它们具有相同的极限分布是可以理解的。

命题 4.6 检查悖论：对任意的 $x > 0$，包含点 t 的更新区间长度大于 x 较之于一个普通的更新区间长度大于 x 可能更大。

注意到，$X_{N(t)+1} = T_{N(t)+1} - T_{N(t)} = A(t) + Y(t)$，于是 $X_{N(t)+1}$ 表示含点 t 的更新区间长度。即命题 4.6 可表示为

$$P\left\{X_{N(t)+1} > x\right\} \ge \overline{F}(x)$$

证明：

利用交错更新理论我们还可得到 $X_{N(t)+1}$ 的极限分布。

$$P\left\{X_{N(t)+1} > x\right\} = P\left\{\text{包含}t\text{的更新区间长度} > x\right\} = P\left\{\text{在时刻}t\text{开着}\right\}$$

因此，根据定理 4.6，若 F 不是格点的，可得

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{X_{N(t)+1} > x\right\} = \frac{E[\text{循环中的开时}]}{\mu}$$

$$= \frac{E[X \mid X > x]\overline{F}(x)}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_x^{+\infty} y dF(y)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} P\left\{X_{N(t)+1} \le x\right\} = \frac{1}{\mu}\int_0^x y dF(y)$$

命题 4.7 若到达时间间隔不是格点的，且 $E[X^2] < \infty$，则 $\lim_{t\to\infty} E[Y(t)] = \dfrac{E[X^2]}{2\mu}$。

证明：P86

命题 4.8 平均剩余寿命的极限：若到达时间间隔分布不是格点的，且 $E[X^2] < \infty$，则

$$\lim_{t\to\infty} E[Y(t)] = \frac{E[X^2]}{2\mu}$$

证明：我们从计算非格点的更新过程的平均剩余寿命开始，关于 $T_{N(t)}$ 取条件并利用引理 4.1 可得

$$E[Y(t)] = E[Y(t) \mid T_{N(t)} = 0]\overline{F}(t) + \int_0^t E[Y(t) \mid T_{N(t)} = 0] dM(y)$$

其中，

$$E[Y(t) \mid T_{N(t)} = 0] = E[X - t \mid X > t]$$

$$E[Y(t) \mid T_{N(t)} = y] = E[X - (t-y) \mid X > t - y]$$

上式成立是因为 $T_{N(t)} = y$ 意味着在 y 有一更新且下一个更新到达的时间（记为 X ）要大于 $t-y$。因此，

$$E[Y(t)] = E[X - t \mid X > t]\overline{F}(t) + \int_0^t E[X - (t-y) \mid X > t - y] dM(y)$$

可以证明，若 $E[X^2] < \infty$，函数 $h(t) = E[X - t \mid X > t]\overline{F}(t)$ 满足关键更新定理中的条件，因此根据关键更新定理可得

$$E[Y(t)] \to \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} E[X-t \mid X>t]\overline{F}(t)dt$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\int_t^{\infty}(x-t)dF(x)dt$$

$$\overset{\text{交换积分次序}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\int_0^{x}(x-t)dtdF(x)$$

$$=\frac{1}{2\mu}\int_0^{\infty}x^2dF(x)$$

$$=\frac{E[X^2]}{2\mu}$$

命题 4.9 若 $E[X^2]<\infty$ 且 F 是非格点的，则当 $t\to\infty$ 时

$$M(t)-\frac{t}{\mu}\to\frac{E[X^2]}{2\mu^2}-1$$

证明：由 $T_{N(t)+1}=t+Y(t)$，取期望并利用命题 4.4 的结论可得

$$E(T_{N(t)+1})=\mu(M(t)+1)=t+E[Y(t)] \Leftrightarrow M(t)-\frac{t}{\mu}=\frac{E[Y(t)]}{\mu}-1$$

利用命题 4.8 的结论代入可得

$$M(t)-\frac{t}{\mu}\to\frac{E[X^2]}{2\mu^2}-1$$

4.4.2 延迟更新过程

我们考虑这样一个计数过程，它的第一个到达间隔与其余的有不同的分布，如机器维修问题，假设在观察之前第一个设备已经使用过一段时间了，那自然认为第一个设备与其后的设备使用时间具有不同的分布；但各到达时间间隔的独立性仍然保持。对于由此确定的计数过程称为延迟更新过程，具体定义如下：

定义 4.5 延迟更新过程：设 $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$ 为一列独立非负随机变量，表示事件到达时间间隔，其中 X_1 具有分布 G，而 $X_n, n\geq 2$ 具有分布 F。令 $T_0=0, T_n=\sum_{i=1}^{n}X_i, n\geq 1$，且定义

$$N_D(t)=\sup\{n: T_n\leq t\}$$

则称随机过程 $\{N_D(t), t\geq 0\}$ 为延迟更新过程。

类似于通常的更新过程，我们可以证明得到延迟更新过程仍然满足上述三个更新定理的一些重要结论：

（1）$M_D(t)=E[N_D(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}G*F_{n-1}(t)$，其中 $F_0(t)\equiv 1$，$*$ 表示卷积符号；

（2）$\frac{N_D(t)}{t}\overset{t\to\infty}{\to}\frac{1}{\mu},w.p.1(\text{以概率}1)$，其中 $\mu=\int_0^{+\infty}xdF(x)$；

（3）$\frac{M_D(t)}{t}\overset{t\to\infty}{\to}\frac{1}{\mu},w.p.1(\text{以概率}1)$；

（4）若 F 是非格点的，则当 $t\to\infty$ 时

$$M_D(t+a)-M_D(t)\to\frac{a}{\mu},\forall a\geq 0$$

（5）若 F,G 是格点的，周期为 d，则当 $n\to\infty$ 时

$$E[\text{在时刻}nd\text{的更新次数}]\to\frac{d}{\mu}$$

（6）若 F 是非格点的，$\mu<\infty$，且 h 满足关键更新定理中的条件，则

$$\int_0^{+\infty}h(t-x)dM_D(x)\to\frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty}htdt$$

4.4.3 更新回报（酬劳）过程

考虑一个更新过程 $\{N(t),t\geq 0\}$，其到达时间间隔 $X_n,n\geq 1$ 具有分布 F。假设每一次更新发生时都可以收到一份酬劳。以 R_n 记在第 n 次更新时刻所获得的酬劳。我们假定 $R_n,n\geq 1$ 服从独立同分布，但允许 R_n 依赖于 X_n，即酬劳与等待的时间有关；假定 $(X_n,R_n),n\geq 1$ 服从独立同分布。令

$$R(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}R_n$$

则 $R(t)$ 表示到时间 t 为止所得的全部酬劳。

令 $E[R]=E[R_n],E[X]=E[X_n]$

定理 4.7 若 $E[R]<\infty,E[X]<\infty$，则

（1）$\frac{R(t)}{t}\overset{t\to\infty}{\to}\frac{E[R]}{E[X]},w.p.1$；（2）$\frac{E[R(t)]}{t}\overset{t\to\infty}{\to}\frac{E[R]}{E[X]},w.p.1$

证明：（1）因

$$\frac{R(t)}{t}=\frac{\sum_{n=1}^{N(t)}R_n}{t}=\frac{\sum_{n=1}^{N(t)}R_n}{N(t)}\cdot\frac{N(t)}{t}$$

由强大数定律可得，当$t\to\infty$时

$$\frac{\sum_{n=1}^{N(t)}R_n}{N(t)}\to E[R],\frac{N(t)}{t}\to\frac{1}{E[X]}$$

因此（1）得证。

（2）注意到，$N(t)+1$是序列$X_1,X_2,\cdots$的一个停时，也是$R_1,R_2,\cdots$的一个停时（思考为什么？）。于是由瓦尔德等式可得

$$E[\sum_{n=1}^{N(t)}R_n]=E[\sum_{n=1}^{N(t)+1}R_n]-E[R_{N(t)+1}]=(M(t)+1)E[R]-E[R_{N(t)+1}]$$

从而，

$$\frac{E[R(t)]}{t}=\frac{M(t)+1}{t}E[R]-\frac{E[R_{N(t)+1}]}{t}$$

因此，我们只需要证明当$t\to\infty$时，$\frac{E[R_{N(t)+1}]}{t}\to 0$，再由基本更新定理即可推得（2）的结论。令$g(t)=E[R_{N(t)+1}]$，关于$T_{N(t)+1}$取条件得

$$g(t)=E[R_{N(t)+1}\big|T_{N(t)+1}=0]\overline{F}(t)+\int_0^t E[R_{N(t)+1}\big|T_{N(t)+1}=s]\overline{F}(t-s)dM(s)$$

其中，

$$E[R_{N(t)+1}\big|T_{N(t)+1}=0]=E[R_1\big|X_1>t]$$

$$E[R_{N(t)+1}\big|T_{N(t)+1}=s]=E[R_n\big|X_n>t-s]$$

所以

$$g(t)=E[R_1\big|X_1>t]\overline{F}(t)+\int_0^t E[R_n\big|X_n>t-s]\overline{F}(t-s)dM(s)$$

令$h(t)=E[R_1\big|X_1>t]\overline{F}(t)=\int_t^{+\infty}E[R_1\big|X_1=x]dF(x)$。注意到

$$E(|R_1|)=\int_t^{+\infty}E[|R_1|\big|X_1=x]dF(x)<\infty$$

得，当$t\to\infty$时，$h(t)\to 0$，且$h(t)\le E(|R_1|)<\infty,\forall t$。因此，可选取$T$使$|h(t)|<\varepsilon,\forall t\ge T$，利用基本更新定理可得

$$\begin{aligned}
&\frac{|g(t)|}{t} \\
&\le \frac{|h(t)|}{t} + \int_0^{t-T} \frac{|h(t-x)|}{t} dM(x) + \int_{t-T}^{t} \frac{|h(t-x)|}{t} dM(x) \\
&\le \frac{\varepsilon}{t} + \frac{\varepsilon M(t-T)}{t} + E(|R_1|)\frac{M(t)-M(t-T)}{t} \\
&\xrightarrow{t\to\infty} \frac{\varepsilon}{E[X]} \\
&\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0
\end{aligned}$$

上式成立是由于ε可取任意小，因此$\dfrac{g(t)}{t}\to 0$成立，即当$t\to\infty$时，$\dfrac{E[R_{N(t)+1}]}{t}\to 0$。因此

$$\frac{E[R(t)]}{t} = \frac{M(t)+1}{t}E[R] - \frac{E[R_{N(t)+1}]}{t} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{E[R]}{E[X]}$$

即（2）结论得证。

例 4.5 假设乘客按照一个更新过程来到一车站，其平均到达时间间隔为μ。当有N个人在车站上等待时，就开出一辆车。若每当有n个乘客等待时车站就以每单位时间nc元的比率开支费用，且每开出一辆车要多开支K元，那么此车站每单位时间的平均费用是多少？

解：每当一辆车开出我们可以理解为完成一次循环，则题设过程是一更新酬劳过程。一次循环的平均长度是到达N个顾客所需的平均时间，而因为平均到达时间间隔为μ，则

$$E[\text{循环的长度}] = N\mu$$

若以X_n记一次循环中第n个与第$n+1$个到达之间的时间，则一个循环的平均费用可表示为

$$\begin{aligned}
&E[\text{一次循环的费用}] = E[cX_1 + 2cX_2 + \cdots + (N-1)cX_{N-1}] + K \\
&= \frac{c\mu N(N-1)}{2} + K
\end{aligned}$$

因此，平均费用是

$$\frac{E[\text{一次循环的费用}]}{E[\text{循环的长度}]} = \frac{\frac{c\mu N(N-1)}{2}+K}{N\mu} = \frac{c(N-1)}{2} + \frac{K}{N\mu}$$

4.5 更新方程及应用

在前述内容中我们介绍了更新函数$M(t)$的概念。在$M(t)$导数存在的条件下，其一阶

导数 $M'(t)$ 称为更新密度，记为 $m(t)$。由 $M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$ 两边求导得

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)$$

其中 $f_n(t)$ 是 $F_n(t)$ 的密度函数。

定理 4.8 $M(t)$ 和 $m(t)$ 分别满足积分方程

$$M(t)=F(t)+\int_0^t M(t-s)dF(s)$$
$$m(t)=f(t)+\int_0^t m(t-s)f(s)ds$$

其中 $f(t)=F'(t)$。

证明：证明过程利用了卷积知识，在此略过。

定义 4.6 更新方程：称如下形式的积分方程为更新方程：

$$K(t)=H(t)+\int_0^t K(t-s)dF(s)$$

其中，$H(t),F(t)$ 为已知，且当 $t<0$ 时 $H(t),F(t)$ 均为 0。当 $H(t)$ 在任何敬意上有界时，更新方程为适定（proper）更新方程，简称为更新方程。

注：定理 4.8 中的两个积分方程是特殊形式的更新方程。

定理 4.9 设更新方程（定义 4.6）中 $H(t)$ 为有界函数，则方程存在唯一的在有限区间内有界的解

$$K(t)=H(t)+\int_0^t H(t-s)dM(s)$$

其中 $M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$ 是分布函数 $F(t)$ 的更新函数。

证明：证明过程利用了卷积知识，在此略过。

例 4.6 更新方程在人口学中的一个应用

考虑一个确定性的人口模型：$B(t)$ 表示在时刻 t 女婴的出生率，即在 $[t,t+dt]$ 时间内有 $B(t)dt$ 个女婴出生。已知过去的 $B(t)(t\le 0)$，要预测未来的 $B(t)(t>0)$，为此假定生存函数 $S(x)$（指一个新生女婴能够活到年龄 x 的概率）及生育的年龄强度 $\beta(x)(x>0)$（指年龄为 x 的母亲生育女婴的速率，即 $\beta(x)dt$ 为这个母亲在长度为 dt 的时间区间内生下的女婴数）已知。

在时刻t，有$B(t-x)S(x)dx$ 个女性的年龄在x到$x+dx$之间（指x年前出生的女婴存活到x年后的人数），在此时刻，单位时间内该群体将生育$B(t-x)S(x)\beta(x)dx$个女婴。由此，每单位时间内所有育龄段的女性所生育的女婴数应为

$$B(t)=\int_0^\infty B(t-x)S(x)\beta(x)dx$$

根据过去与未来的生育情况，将上述积分分为两段

$$B(t)=\int_t^\infty B(t-x)S(x)\beta(x)dx+\int_0^t B(t-x)S(x)\beta(x)dx$$

对比定义 4.6 中的更新方程形式，令 $f(x)=S(x)\beta(x)$，$H(t)=\int_t^\infty B(t-x)S(x)\beta(x)dx$，做变量替换$x=y+t$，则

$$H(t)=\int_0^\infty B(-y)S(y+t)\beta(y+t)dy$$

注意到，$H(t)dt$是年龄为t或更大的女性在时间$[t,t+dt]$之间生育的女婴数，此外，每一个新生的女婴将期待在年龄x到$x+dx$之间生育 $f(x)dx$个女婴。于是，每一新生女婴在死亡或生存到年龄x之前（不论哪种情况先发生）将期待生育$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，从而在她一生中将期待生育$F(\infty)$个女婴。

若$F(\infty)>1$，可以解得$B(t)\sim Ce^{-Rt},t\to\infty$（解过程略），其中$C$为常数，$R$满足方程

$$\int_0^\infty e^{Ry}S(y)\beta(y)dy=1$$

即出生率（以及具有此速率的人群）将以渐近指数增长。

若$F(\infty)<1$，$k>0$，$B(t)$渐近指数地趋于 0，也就是说人群最终要消亡。只有当$F(\infty)=1$时，出生率将最终趋于一个有限的正数。

4.6 林德伯格－克莱姆（Lundberg-Cramer）破产论

作为更新理论的应用，本节给出林德伯格－克莱姆经典破产模型（简称为 L-C 模型）的描述，并依据更新理论证明其基本定理。

设保险公司在时刻t的盈余（surplus）可表示为

$$U(t)=u+ct-\sum_{k=1}^{N(t)}X_k,t\ge 0$$

其中u是初始资本，c是保险公司单位时间内征收的保险费率，$X_k,k\ge 1$表示第k次索赔额，

$N(t)$ 表示到时刻 t 发生的索赔次数。

$\{U(t), t \geq 0\}$ 的一条样本路径图（图 4.1）.

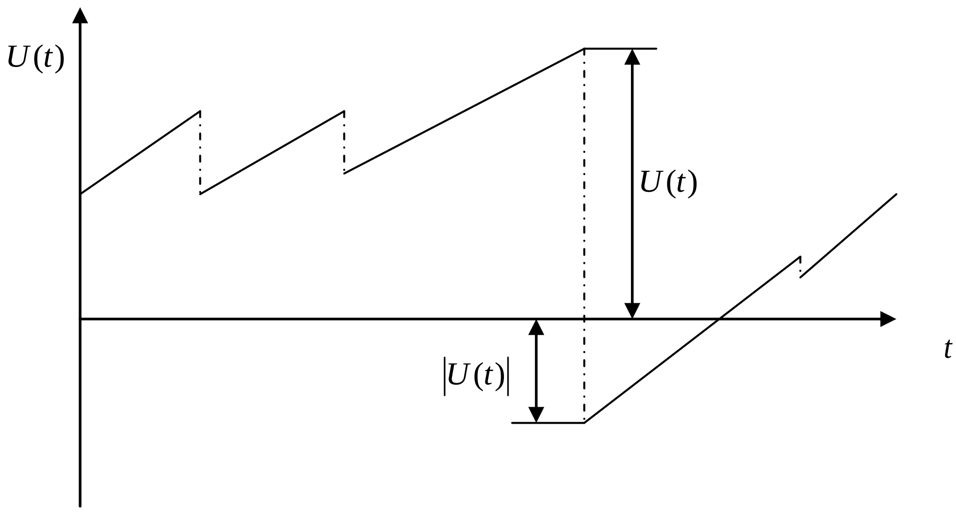

图 4.1：盈余过程的一条样本路径

上述模型是 L-C 经典破产模型。此模型有以下三个基本假定。

假定 1：$\{X_k, k \geq 1\}$ 是恒正的独立同分布的随机变量序列，记 $F(x) = P\{X_1 \leq x\}, \forall x \geq 0$，$\mu = EX_1 = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$；$\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松过程并且与 $\{X_k, k \geq 1\}$ 相互独立。

记 $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \forall x \geq 0$，表示至时刻 t 为止的索赔总额（aggregate claim）。由模型的独立性假设可知

$$E[S(t)] = E[N(t)]EX_1 = \lambda \mu t$$

保险公司为动作上的安全，要求

$$ct - E[S(t)] = (c - \lambda\mu)t > 0, t \geq 0$$

因此，需要第二个假定：

假定 2：$c = (1+\theta)\lambda\mu$，其中 $\theta > 0$，称为相对安全负载（relative security loading）。

由泊松过程具有平稳独立增量以及 L-C 模型的独立性假设可知，$\{ct - S(t), t \geq 0\}$ 为平稳的独立增量过程。于是由强大数定律得

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = +\infty, a.s.$$

但这并不能排除在某一瞬时盈余过程可能取负值，这时称保险公司“破产”，称 $T = \inf\{t, U(t) <\}$(为破产时刻。所以，L-C 模型研究的是保险公司最终破产的概率

$$\Psi(u) = P\{T < \infty | U(0) = u\}, u \geq 0$$

以下简称为破产概率。破产概率可以作为评价保险公司偿付能力的一个数量指标。L-C 的结果可直观地表示为：当初始准备金 u 充分大时，保险公司在经营“小索赔”以情形的保险业务时，破产是不易发生的。所谓的“小索赔”的含义由下述假定给出：

假定 3（调节系数存在惟一性假定）：首先，要求个体索赔额的矩母函数

$$\varphi_X(t) = E(e^{rX}) = \int_0^\infty e^{rx} dF(x) = 1 + r\int_0^\infty e^{rx}[1 - F(x)]dx$$

至少在包含原点的某个领域内存在；其次，要求方程

$$\varphi_X(r) = 1 + \frac{c}{\lambda} r$$

存在正解。

注：（1）由于 $\varphi_X(r)$ 在其收敛域内是严格增加的凸函数，故方程 $\varphi_X(r) = 1 + \frac{c}{\lambda} r$ 若有正解，则必是惟一的，记为 R，并称之为调节系数，满足

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}[1 - F(x)]dx = 1$$

注意到，

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [1 - F(x)]dx = \frac{\lambda}{c}\mu = \frac{1}{1+\theta} < 1$$

可知，非负函数 $\frac{\lambda}{c}[1 - F(x)], x \geq 0$ 不是一个概率密度函数。但若令

$$f(x) = \frac{\lambda}{c} e^{Rx}[1 - F(x)]$$

则由 $\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}[1 - F(x)]dx = 1$ 可知，$f(x)$ 是一个概率密度函数，这解释了调节系数 R 名称的由来。

（2）记 $V(t) = ct - S(t)$。由于 $\{V(t), t \geq 0\}$ 为齐次的平稳独立增量过程，故有

$$M_{V(t)}(r) = E(e^{rV(t)}) = (M_{V(t)})'$$

又因

$$\begin{aligned}
& M_{V(1)}(r) = E(e^{rV(1)}) \\
& = E(e^{r(c - S(1))}) \\
& = e^{cr} E(e^{-rS(1)}) \\
& = e^{cr} e^{\lambda[M_X(-r) - 1]} \\
& = e^{[\lambda M_X(-r) - \lambda + cr]}
\end{aligned}$$

以及调节系数的定义可知

$$M_{V(1)}(-R)=1$$

类似地可进一步推得

$$M_{V(t)}(-R)=1$$

总之，若调节系数存在，则它是方程

$$\varphi_X(r)=1+\frac{c}{\lambda}r$$

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{rx}[1-F(x)]dx=1$$

$$M_{V(t)}(-r)=1$$

的惟一正根。

我们有下述定理：

定理 4.10 若假定 1－3 成立，则有

（1）$\Psi(0)=\dfrac{1}{1+\theta}$；

（2）Lundberg 不等式：$\Psi(u)\le e^{-Ru},\forall u\ge 0$；

（3）Lundberg-Cramer 近似：存在正常数 C，使得 $\Psi(u)\sim Ce^{-Ru},u\to\infty$，即

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\Psi(u)}{Ce^{-Ru}}=1$$

证明：我们将给出（1）和（3）的证明，（2）的证明需用到鞅的相关知识，将在第 6 章给出（可参见 P122）。

记

$$R(u)=1-\Psi(u)=P\{U(t)\ge 0|U(0)=u\}$$

表示初始盈余为 u 时，保险公司永不破产的概率，也称为生存概率。

首先，根据首次索赔发生的时刻 T_1 和首次索赔额 X_1 的大小，对生存概率应用全概率公式，得

$$R(u)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left(\int_0^{u+ct}R(u+ct-z)dF(z)\right)dt$$

做变换 $x=u+ct$ 得

$$R(u)=\frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda}{c}u}\int_u^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}x}\left(\int_0^x R(x-z)dF(z)\right)dt$$

对上式两端对 u 求导得

$$R'(u)=\frac{\lambda}{c}R(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u R(u-z)dF(z)$$

对上式两端求积分得

$$R(t)-R(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^t R(u)du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u R(u-z)d[1-F(z)]du$$

由分部积分公式得到

$$\int_0^u R(u-z)d[1-F(z)]=R(0)[1-F(u)]-R(u)+\int_0^u R'(u-z)[1-F(z)]dz$$

代入可得

$$R(t)-R(0)=\frac{\lambda}{c}R(0)\int_0^t[1-F(u)]du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u R'(u-z)[1-F(z)]dzdu$$

对上式中的二重积分交换积分次序可得

$$\int_0^t\int_0^u R'(u-z)[1-F(z)]dzdu=\int_0^t\int_z^t R'(u-z)[1-F(z)]dudz=\int_0^t[R(t-z)-R(0)][1-F(z)]dz$$

代入可得

$$R(t)-R(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^t R(t-z)[1-F(u$$

由于 $\lim\limits_{u\to\infty}R(u)=1$，令 $t\to\infty$，可得

$$1=R(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^t[1-F(z)]dz=R(0)+\frac{\lambda}{c}\mu$$

于是有

$$\Psi(0)=1-R(0)=\frac{\lambda}{c}\mu=\frac{1}{1+\theta}$$

则（1）得证。

把 $\Psi(0)=1-R(0)=\frac{\lambda}{c}\mu=\frac{1}{1+\theta}$ 代入 $R(t)-R(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^t R(t-z)[1-F(u)]dz$ 可得

$$R(t)=1-\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^t R(t-z)[1-F(z)]dz$$

$$=1-\frac{\lambda}{c}\int_t^\infty[1-F(z)]dz-\frac{\lambda}{c}\int_0^t[1-R(t-z)][1-F(z)]dz$$

从而得

$$\Psi(t)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\Psi(t-z)[1-F(z)]dz$$

由于

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty[1-F(z)]dz=\frac{\lambda}{c}\mu=\frac{1}{1+\theta}<1$$

所以，$\Psi(t)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\Psi(t-z)[1-F(z)]dz$ 是更新方程。在方程两端乘以 e^{Ru}（R 为调节系数），并令

$$A(t)=e^{Rt}\Psi(t),a(t)=\frac{\lambda}{c}e^{Rt}\int_t^\infty[1-F(z)]dz,f(z)=\frac{\lambda}{c}e^{Rz}[1-F(z)]$$

即得

$$A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-z)f(z)dz$$

又由调节系数的定义可知

$$\int_0^\infty f(z)dz=1$$

从而方程 $A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-z)f(z)dz$ 是适定更新方程。易见 $a(t)$ 为单调递减函数，并且

$$\int_0^\infty a(t)dt=\frac{1}{R}\frac{\theta}{1+\theta}=C_1$$

于是 $a(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上满足更新定理中的条件。因此由关键更新定理可得

$$\lim_{t\to\infty}e^{Rt}\Psi(t)=\lim_{t\to\infty}A(t)=\frac{C_1}{\int_0^\infty zf(z)dz}=C$$

上式表明

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Psi(t)}{Ce^{-Rt}}=1$$

从而式（3）中 Lundberg-Cramer 近似得证。