2. Représentations fréquentielles (2/2) Transformée de Fourier

Pierre CHAINAIS

Des séries aux intégrales

A la recherche d'une description du contenu fréquentiel des signaux non-périodiques...

Pour les signaux périodiques, on avait :

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n\nu_0 t}$$

La version continue s'écrit :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

où la fonction $X(\nu)$ est appelée *transformée de Fourier* de $x(t)$:

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Définition

Pour les signaux périodiques, on avait :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-j2\pi n \nu_0 t} dt$$

La version continue est définie par :

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi \nu t} dt.$$

Remarque : cette transformation est bien définie mathématiquement si $|x(t)|$ est intégrable, c'est-à-dire si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$.

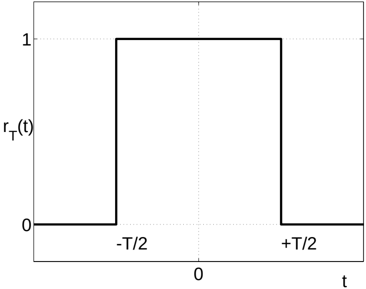
Autres notations possibles

$$\nu \to \omega,$$

$$\begin{cases} X_1(\omega) &= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ x(t) &= \displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2(\omega) &= \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ x(t) &= \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

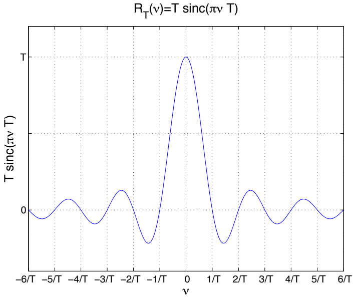
Fonction "porte" et sinus cardinal



$$r_T(t) = 1_{[-T/2, T/2]} \Longrightarrow R_T(\nu) = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi\nu t} dt$$

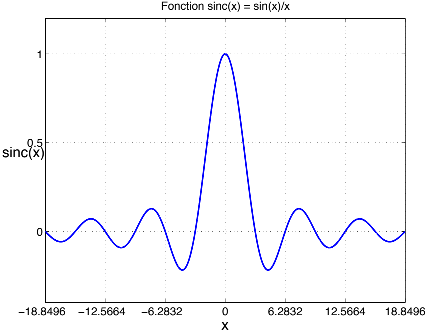
Fonction "porte" et sinus cardinal

$$r_T(t) = 1_{[-T/2, T/2]} \Longrightarrow R_T(\nu) = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi\nu t} dt$$



Fonction $R_T(\nu) = T\mathrm{sinc}(\pi\nu \cdot T)$.

A propos de sinus cardinal



Définition : $\text{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

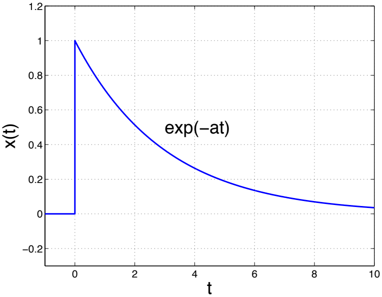
Propriétés :

- $\text{sinc}(0) = 1$
- $\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \text{sinc}(n\pi) = 0$

Exercice : exponentielle décroissante

$$x(t) = e^{-at}, \text{ pour } t > 0, \text{ nulle sinon :}$$

$$X(\nu) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-at - j2\pi\nu t\right) dt$$



Théorème de Gabor

$$\Delta t \cdot \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi}$$

De manière générale, les correspondances suivantes sont fondamentales :

$$\begin{array}{ccc} \text{limité en temps} & \Longleftrightarrow & \text{étendu en fréquence} \\ \text{étendu en temps} & \Longleftrightarrow & \text{limité en fréquence} \end{array}$$

Intégrale (cf. valeur moyenne)

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$$

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)d\nu$$

Linéarité

$$x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(\nu)$$

$$x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(\nu)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},$$

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \lambda_1 X_1(\nu) + \lambda_2 X_2(\nu)$$

Conjugaison complexe : symétrie hermitienne

$$x^*(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X^*(-\nu)$$

Cas particulier : si $x(t)$ est réel ($\in \mathbb{R}$) alors $x(t) = x^*(t)$ et on peut écrire

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A(\nu)\cos(2\pi\nu t) \; + \; B(\nu)\sin(2\pi\nu t)\; dt$$

et on repense aux a_n et b_n des séries de Fourier...

Inversion

$$x(-t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(-\nu)$$

Dilatation en temps, en fréquence

$$\forall a \neq 0, \quad x(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

Remarque : lors d'une dilatation, on a toujours $\quad \Delta t \cdot \Delta\nu = Cte.$

Exemple : bande magnétique qui passe trop rapidement, ou trop lentement...

Dérivation/intégration

$$y(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(\nu) = j2\pi\nu X(\nu)$$

$$z(t) = \int x(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Z(\nu) = \frac{1}{j2\pi\nu} X(\nu)$$

Remarque : repenser aux impédances complexes...

Transformée de Fourier des signaux de puissance finie

Transformée de Fourier d'une distribution d

- On peut définir la Transformée de Fourier $\mathcal{F}[d]$ d'une distribution d :

$$\langle \mathcal{F}[d], \varphi \rangle = \langle d, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

- ex : spectre des signaux périodiques et du signal constant.

Distribution de Dirac δ

$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\delta](t)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \delta(\nu)\Phi(\nu)d\nu = \Phi(0) \Longrightarrow \mathcal{F}[\delta] = 1$$

Elément neutre de l'opérateur de convolution :

$$y(t) = \delta * x(t) = x(t) \Longleftrightarrow Y(\nu) = 1 \cdot X(\nu) = X(\nu)$$

Translations en temps, en fréquence

$$y(t) = \delta * x(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad Y(\nu) = 1 \cdot X(\nu)$$

$$y(t) = \underbrace{\delta_\tau * x(t)}_{x(t-\tau)} \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad Y(\nu) = X(\nu) e^{-j2\pi\nu\tau}$$

$$z(t) = x(t) e^{j2\pi ft} \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad Z(\nu) = \underbrace{\delta_f * X(\nu)}_{X(\nu-f)}$$

Remarque : la modulation d'amplitude correspond à une translation en fréquence (hétérodynage).

Transformées de Fourier classiques

$$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$$

$e^{2i\pi\nu_0 t}$	$\delta_{\nu_0}(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$
$\cos(2\pi\nu_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta_{\nu_0}(\nu) + \delta_{-\nu_0}(\nu)]$
$\sin(2\pi\nu_0 t)$	$\frac{1}{2i}[\delta_{\nu_0}(\nu) - \delta_{-\nu_0}(\nu)]$
A	$A\delta(\nu)$
$A\delta(t)$	A
$A\delta(t - t_0)]$	$Ae^{-2i\pi\nu t_0}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)]$	$\frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \frac{n}{T_e})$
$r_T(t) = 1_{[-T/2,T/2]}(t)$	$R_T(\nu) = T\mathrm{sinc}(\pi\nu \cdot T)$

A retenir...

$$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$$

$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)d\nu$	$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$
$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$	$\lambda_1 X_1(\nu) + \lambda_2 X_2(\nu)$
$x(-t)$	$X(-\nu)$
$x^*(t)$	$X^*(-\nu)$
$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|} X\left(\frac{\nu}{a}\right)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(\nu)$
$y(t) = \underbrace{\delta_\tau * x(t)}_{x(t-\tau)}$	$Y(\nu) = X(\nu)e^{-j2\pi\nu\tau}$
$z(t) = x(t)e^{j2\pi ft}$	$Z(\nu) = \underbrace{\delta_f * X(\nu)}_{X(\nu-f)}$
$y(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$	$Y(\nu) = j2\pi\nu X(\nu)$
$z(t) = \int x(t)$	$Z(\nu) = \frac{1}{j2\pi\nu} X(\nu)$

Méthodologie : éviter d'écrire des intégrales !

TRES IMPORTANT !

En pratique :

- on apprend quelques transformées de Fourier usuelles,
- on exploite les propriétés de la TF.

Symétrie temps/fréquence dans $L^2(\mathbb{R})$:

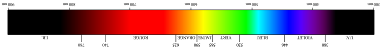
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt.$$

ON EVITE DE CALCULER DES INTEGRALES !

Fréquence physique, fréquence mathématique

Fréquence physique : nombre de fois qu'un phénomène se produit pendant une unité de temps $\Rightarrow$ Hertz.

- son grave/aigu [20 Hz - 20000 Hz],
- lumière rouge/bleue 

$\Rightarrow$ **positive** et a pour **unité** le Hertz **[Hz]** cf. $\exp(\pm i 2\pi\nu t)$

Fréquence mathématique : variable conjuguée du temps par transformée de Fourier, autrement dit ν indexe les fonctions exponentielles complexes $e^{i2\pi\nu t}$, $\nu \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ **positive ou négative** et **sans unité**. cf. $\exp(i2\pi\nu t)$
C'est une variable réelle, comme t.

Conséquence : densité spectrale d'énergie d'un signal réel

$$= |X(\nu)|^2 + |X(-\nu)|^2 = 2|X(\nu)|^2.$$

Théorème : égalité de Parseval

Egalité de Plancherel

La transformée de Fourier est une isométrie de L^2 : si x et y sont deux signaux d'énergies finies, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)Y^*(\nu)d\nu$$

Egalité de Parseval

En prenant $x \equiv y$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2\,d\nu$$

Densité spectrale d'énergie

pour les signaux d'énergie finie

On définit la **densité spectrale d'énergie** d'un signal $x(t)$ d'énergie finie par :

Densité spectrale d'énergie

$$DSE_x(\nu) = |X(\nu)|^2$$

On définit la **densité spectrale de puissance** d'un signal $x(t)$ de puissance finie à partir de la densité spectrale d'énergie $|X_T(\nu)|^2$ du signal :

$$x_T(t) = \mathbb{1}_{[-T/2,T/2]} \cdot x(t)$$

On remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(\nu)|^2 d\nu \to \infty$ quand $T \to +\infty$, mais que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(\nu)|^2}{T} d\nu = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2\, dt$ a une limite finie.

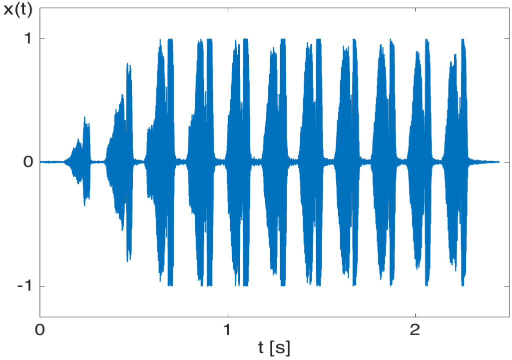
Cette limite est précisément $P(x)$. D'où :

Densité spectrale de puissance

$$DSP_x(\nu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(\nu)|^2$$

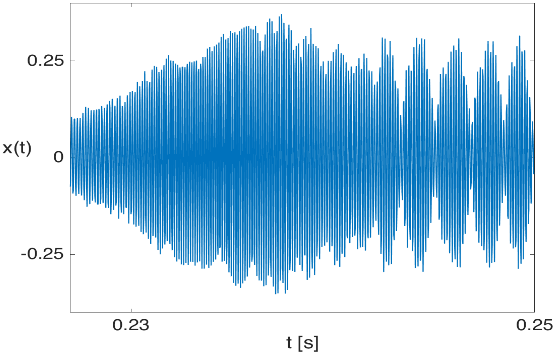
Energie et fréquences : le spectre d'énergie

pour les signaux d'énergie finie



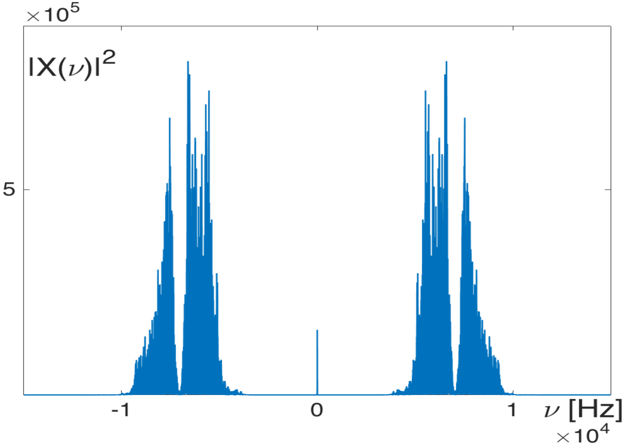
Energie et fréquences : le spectre d'énergie

pour les signaux d'énergie finie



Energie et fréquences : le spectre d'énergie

pour les signaux d'énergie finie



On définit la **fonction d'autocorrélation** d'un signal $x(t)$ d'énergie finie par :

Autocorrélation

$$\gamma_x(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\,dt$$

Propriété : "théorème de Wiener-Khintchine"

$$\gamma_x(\tau) \quad \overset{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} \Gamma_x(\nu) = DSE_x(\nu)$$

<u>Exercice :</u> démontrer cette propriété en utilisant l'égalité de Parseval-Plancherel.

On définit la **fonction d'autocorrélation** d'un signal $x(t)$ de puissance finie par :

Autocorrélation

$$\gamma_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t-\tau)\, dt$$

Propriété : "théorème de Wiener-Khintchine"

$$\gamma_x(\tau) \quad \overset{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} \Gamma_x(\nu) = DSP_x(\nu)$$

<u>Exercice :</u> démontrer cette propriété en utilisant l'égalité de Parseval-Plancherel.