Électif finance de marché
Pricing et hedging de dérivés : principes

P. Heinrich
(Département de mathématiques, ULille)

École Centrale Lille G2

2018-2019

Plan (6h cours)

Séance 1 : 2h ; séance 2 : 2h ; séance 3 : 2h.

1. Modélisation mathématique d'un marché financier (temps discret)
   1. Actif risqué, non risqué
   2. AOA : absence d'opporunité d'arbitrage
   3. Portefeuille autofinancé ; actif replicable ; marché complet
   4. Probabilité risque-neutre
2. Modèle binomial
   1. Sur 1 période, 2 périodes et N périodes
   2. Pricing et hedging
   3. Modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR)
3. Du temps discret au temps continu : passage à la limite dans CRR
   1. "Rappels" : convergence en loi
   2. Théorème central limite pour les tableaux triangulaires
   3. Formule de Black-Scholes
4. Élaboration d'un pricer (sous réserve)

Définition

Un actif contingent (ou conditionnel) est une variable aléatoire, notons-là H, qui est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Exemple classique : $H = \max(S_T - K, 0)$, le payoff d'une option d'achat européenne (european call), où S_T est la valeur de l'actif sous-jacent à la maturité T et K le prix d'exercice.

Définition

Un actif contingent H est réplicable (ou simulable) s'il existe une stratégie autofinancée $\mathbf{\Phi}$ telle que, à l'échéance T, on ait

$$\boxed{V_T^{\mathbf{\Phi}} = H}.$$

$\mathbf{\Phi}$ est alors appelé stratégie de réplication de H.

Définition

Une marché financier est dit complet si tout actif contingent est réplicable.

Soit un actif contingent H réplicable et notons $\mathbf{\Phi}$ une stratégie autofinancée telle que $V_T^{\mathbf{\Phi}} = H$. Supposons qu'il y ait une autre stratégie autofinancée $\mathbf{\Psi}$ telle que $V_T^{\mathbf{\Psi}} = H$. On sait alors que dans le cas d'un marché AOA, pour tout t, on a $V_t^{\mathbf{\Phi}} = V_t^{\mathbf{\Psi}}$.

Définition (prix de non-arbitrage)

Dans un marché AOA et complet, le prix (de non-arbitrage) à la date t d'un actif contingent H, notons-le π_t^H, est la valeur à la date t d'un portefeuille autofinancé $\mathbf{\Phi}$ répliquant H : $\boxed{\pi_t^H = V_t^{\mathbf{\Phi}}}$.
Cette valeur est unique.

Les problématiques fondamentales

1. Modéliser les cours des actifs risqués ;
2. Pricing : trouver, dans un modèle donné, le prix d'un actif contingent ;
3. Hedging : produire la richesse nécessaire à la livraison de l'actif.

Nous avons jusqu'à présent abordé une partie de la problématique du pricing.

On se donne des réels :

- $s > 0$: valeur initiale d'un actif risqué S_t^1,
- r : taux d'intérêt simple d'un actif sans risque S_t^0,
- d : rendement bas (down) de l'actif risqué,
- u : rendement haut (up) de l'actif risqué.

On suppose $0 < d < u$. Le modèle se décrit par :

- $\Omega = \{u, d\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\text{toutes les parties de } \Omega\}$, $\mathbf{P}$ une mesure de probabilité telle que $\mathbf{P}(\{u\}) \in]0, 1[$;
- Dynamique des actifs (exo : réprésentez-les) :

$$\begin{aligned} S_t^0(\omega) &= (1+r)^t \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega, \\ S_t^1(\omega) &= \begin{cases} su^t & \text{si } \omega = u, \\ sd^t & \text{si } \omega = d. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition

Dans ce modèle, l'AOA équivaut à $d < 1 + r < u$.

Démonstration. On va montrer $OA \iff 1 + r \notin]d, u[$.

$\Longrightarrow$ Soit $\mathbf{\Phi}_t = (\Phi_t^0, \Phi_t^1)$ une stratégie d'arbitrage ; elle vérifie

$$\Phi_t^0 + \Phi_t^1 s = 0, \Phi_1^0(1+r) + \Phi_1^1 S_1^1 \geq 0, \mathbf{P}(\Phi_1^0(1+r) + \Phi_1^1 S_1^1 > 0) > 0.$$

De la première égalité, on tire $\Phi_1^1 = -\Phi_1^0/s$ et on injecte dans la seconde inégalité de sorte que

$$\Phi_1^0 \left[(1+r) - (u\mathbf{1}_{\{u\}} + d\mathbf{1}_{\{d\}})\right] \geq 0.$$

Or Φ_1^0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable avec $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ (prévisibilité) et donc ne dépend pas de ω ; de plus Φ_1^0 ne peut être nul (pourquoi ?). On déduit $(1 + r - u) \times (1 + r - d) \geq 0$.

$\Longleftarrow$ Si $1 + r \leq d$: la stratégie statique $\mathbf{\Phi}_t = (-s, 1)$ est une stratégie d'arbitrage. Si $1 + r \geq u$: exo.

Soit H un actif contingent. Notant x la prime (le prix) de H à la date $t = 0$, cherchons $\boldsymbol{\Phi}_t = (\Phi_t^0, \Phi_t^1)$ autofinancé répliquant H. Ayant vendu H au prix x, on aimerait avoir

$$\begin{aligned} \Phi_1^0(1+r) + \Phi_1^1 S_1^1 &= H \quad \leftarrow \text{valeur à l'échéance} \qquad (1) \\ \Phi_1^0 + \Phi_1^1 s &= x \quad \leftarrow \text{condition d'autofinancement} \qquad (2) \end{aligned}$$

On résout (1) - constitué de 2 équations ! - et on obtient :

$$\Phi_1^1 = \underbrace{\frac{H(u) - H(d)}{su - sd}}_{\text{Delta de couverture}}, \quad \Phi_1^0 = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{uH(d) - dH(u)}{u-d}, \qquad (3)$$

et en reportant dans la troisième équation (2), il vient

$$x = \frac{1}{1+r}\left[\frac{1+r-d}{u-d} H(u) + \frac{u-(1+r)}{u-d} H(d)\right]. \qquad (4)$$

Sous la condition d'AOA $\boxed{d < 1 + r < u}$, l'unicité des valeurs de portefeuille implique alors que le prix de non-arbitrage π_0^H de l'actif contingent H est précisément la prime x exprimée par (4).

Soit une probabilité $\mathbf{P}_* = p_* \delta_u + (1 - p_*)\delta_d$ telle que

$$p_* = \frac{1 + r - d}{u - d} > 0 \quad \text{et donc} \quad 1 - p_* = \frac{u - (1 + r)}{u - d} > 0.$$

On note $\mathbf{E}_{\mathbf{P}_*}$ ou $\mathbf{E}_*$ l'espérance associée.

Avec ces notations, on constate que la prime de H vaut

$$\boxed{x = \pi_0^H = \frac{1}{1 + r}\mathbf{E}_*(H)} \tag{5}$$

Définition

Sur $(\Omega, \mathcal{F})$, une probabilité $\mathbf{Q}$ est dite équivalente à $\mathbf{P}$ si pour tout événement A, on a

$$\mathbf{Q}(A) = 0 \iff \mathbf{P}(A) = 0.$$

La probabilité $\mathbf{P}_*$ précédemment définie est *équivalente* à $\mathbf{P}$ (exo).

Théorème (admis)

Dans un modèle de marché AOA et complet, il existe une unique probabilité $\mathbf{P}_*$ équivalente à la probabilité de marché $\mathbf{P}$ telle que le prix (de non-arbitrage) d'un actif contingent soit égal à l'espérance sous $\mathbf{P}_*$ de sa valeur finale actualisée.
La probabilité $\mathbf{P}_*$ est dite risque-neutre (ou martingale).

Notons $\pi^H_{\text{marché}}$ le prix de marché de l'actif H au temps 0 et supposons $\pi^H_{\text{marché}} > \pi_0^H$. Montrer qu'il y a contradiction avec l'AOA.

Indication :

1. Au temps initial,
   - Vendre H au prix du marché $\pi^H_{\text{marché}}$,
   - Acheter Φ_1^1 unités d'actif risqué avec Φ_1^1 défini par le delta de couverture (3),
   - Acheter $\pi^H_{\text{marché}} - \Phi_1^1 s$ unités d'actif sans risque.
2. Calculer la valeur de ce portefeuille aux temps 0 et 1 et conclure.
3. Traiter aussi le cas $\pi^H_{\text{marché}} < \pi_0^H$.