

Cours n°4 : Codage JPEG2000

- I. Les limites avec Fourier
- II. Transformée fenêtrée
- III. Transformée en Ondelettes Continue
- IV. Transformée en Ondelette Discrète
- V. Approche par bancs de filtres
- VI. Codage JPEG2000

I. Les limites avec Fourier

A propos de la transformée de Fourier ...

En considérant un signal à temps continu $s(t)$, d'énergie finie, i.e. $\|s\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < +\infty$, sa transformée de Fourier est définie comme :

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = \langle s(\cdot) | e^{2i\pi\nu\cdot} \rangle$$

Si le contenu temporel (ou spatial) est localisé, le contenu fréquentiel ne l'est pas, et inversement.

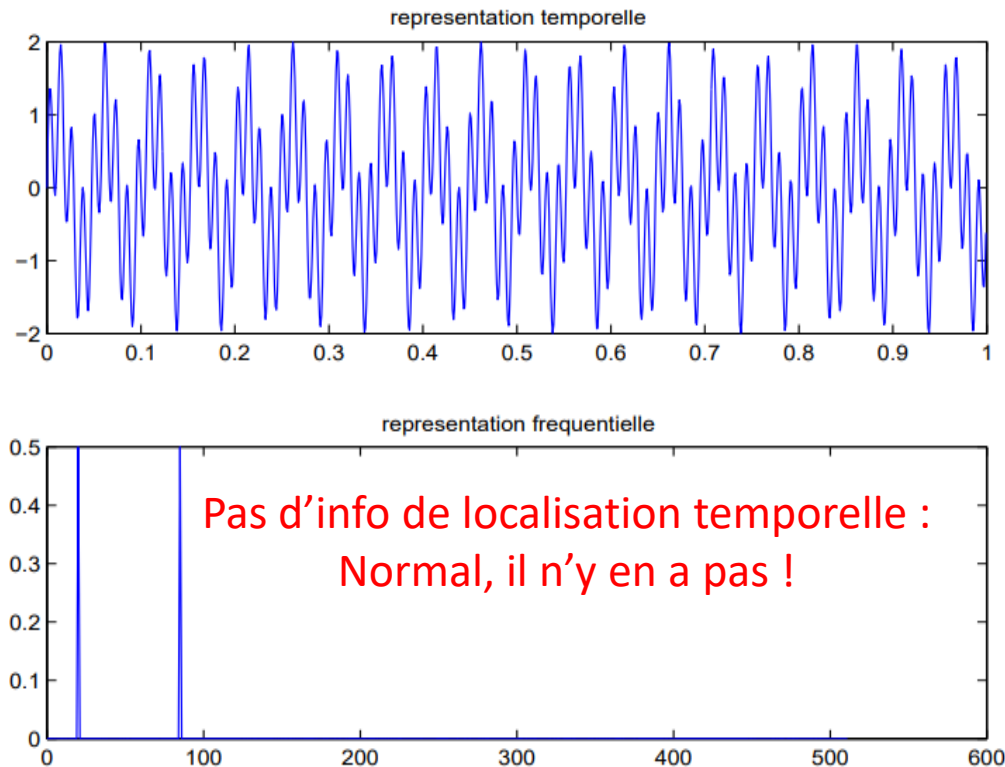
→ Principe d'incertitude de Gabor-Heisenberg : $\sigma_t \sigma_\nu > 1/4\pi$

→ Impossible d'avoir une localisation en temps (ou espace) et en fréquence !

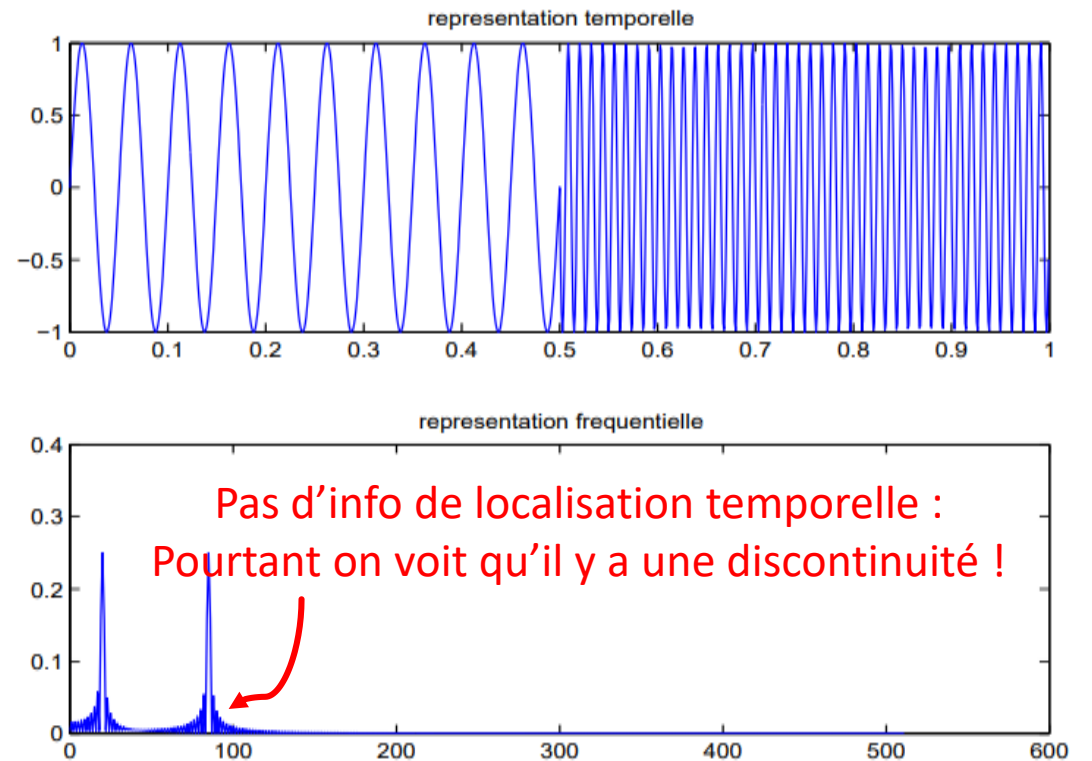
I. Les limites avec Fourier

Exemple avec 2 cosinus de fréquences différentes

Somme de cosinus : localisation fréquentielle



Deux cosinus à la suite : localisation temporelle



II. Transformée fenêtrée

Principe de la transformée fenêtrée : plusieurs transformées à court terme

En considérant une fenêtre $g(t)$, la transformée fenêtrée continue est définie comme :

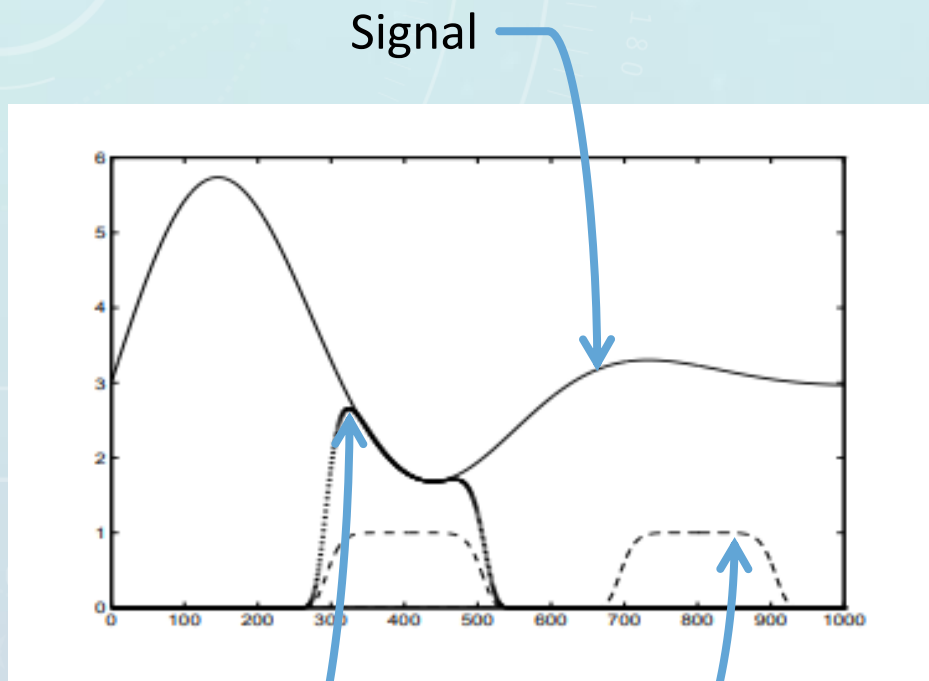
$$H_s(\nu, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \underbrace{h(t-b)e^{-2i\pi\nu t}}_{\overline{\psi_{\nu,b}(t)} = \text{fonction analysante}} dt = \langle s(\cdot) | h(\cdot - b)e^{2i\pi\nu \cdot} \rangle$$

Représenté par un
spectrogramme

$\overline{\psi_{\nu,b}(t)}$ = fonction analysante

Elle fournit une indication sur la quantité d'énergie présente dans le signal autour de la fréquence ν à l'instant b .

II. Transformée fenêtrée



Signal fenêtré

Fenêtre

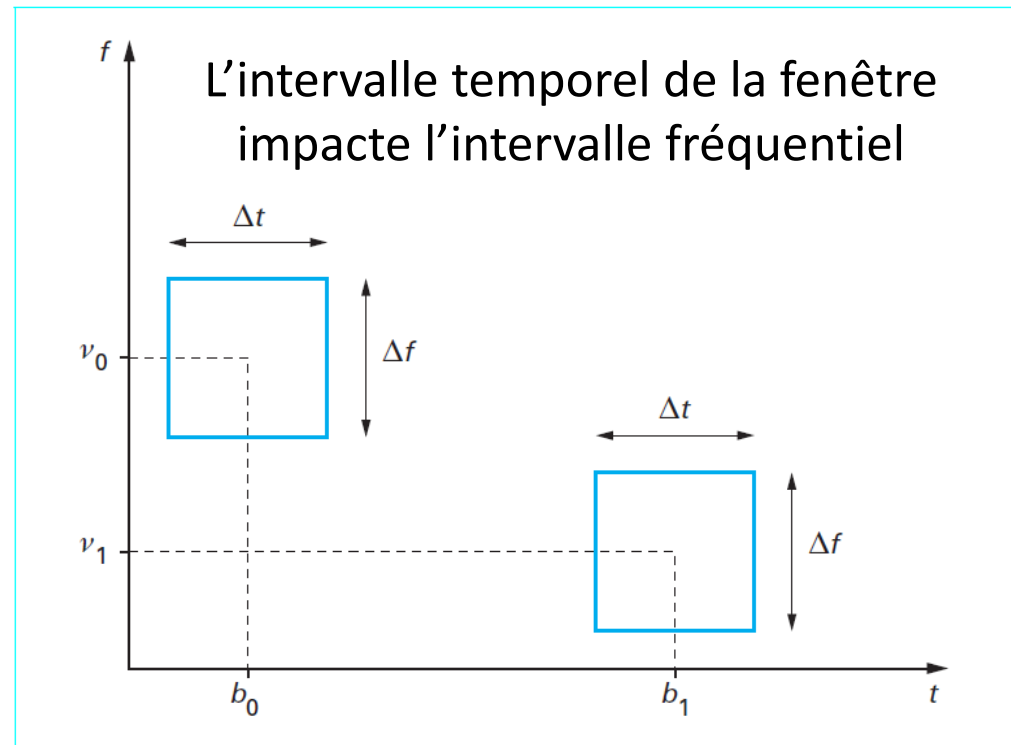
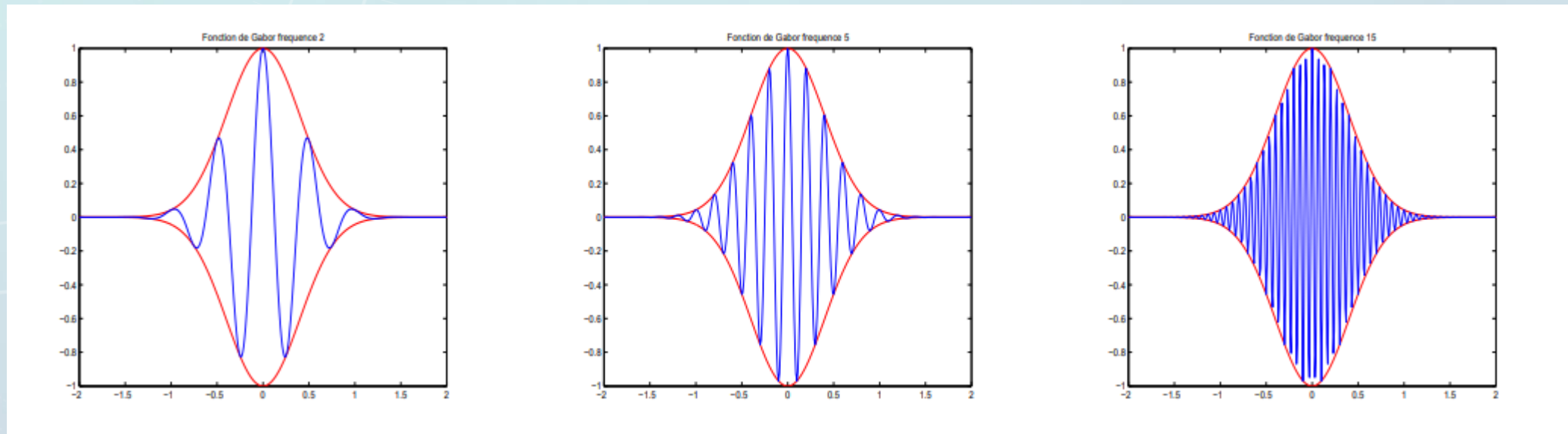


Figure 1 – Localisation temps-fréquence des fonctions d'une famille de Weyl-Heisenberg

II. Transformée fenêtrée

Cas de la transformée de Gabor

Fenêtre gaussienne : $g(t) = \frac{1}{\sigma} e^{-\pi\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$ → Fonction de Gabor : $\psi_{\nu,b}(t) = \frac{1}{\sigma} e^{-\pi\left(\frac{t-b}{\sigma}\right)^2} e^{2i\pi\nu t}$



La gaussienne est le meilleur compromis entre temps et fréquence.

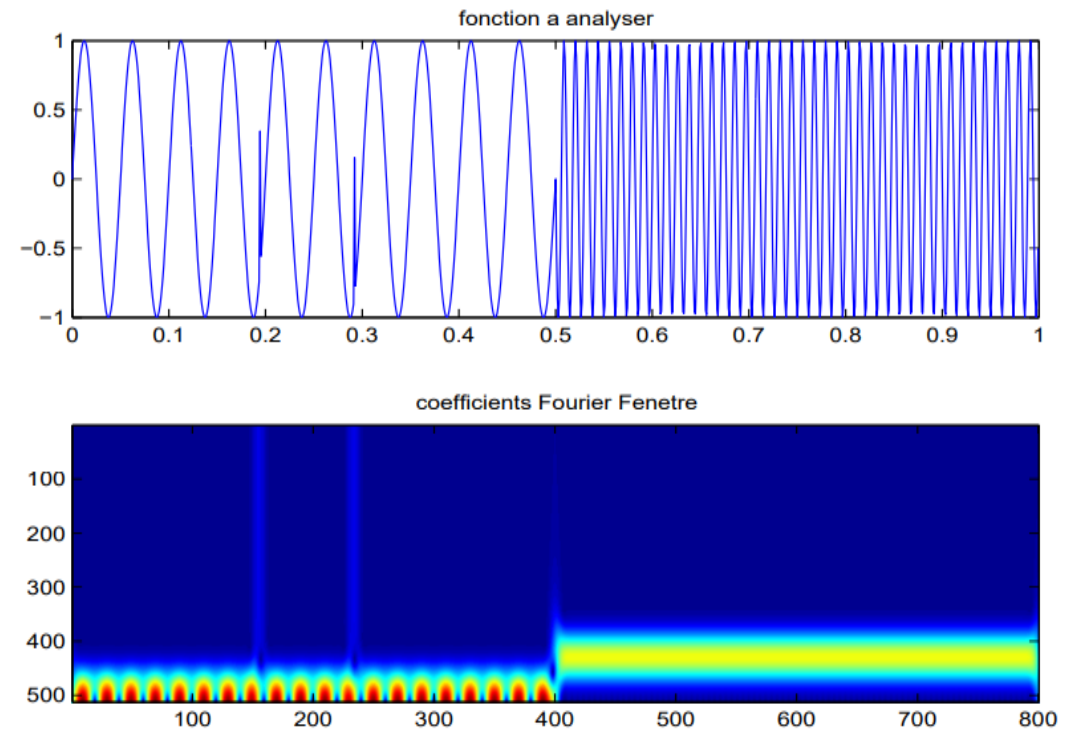
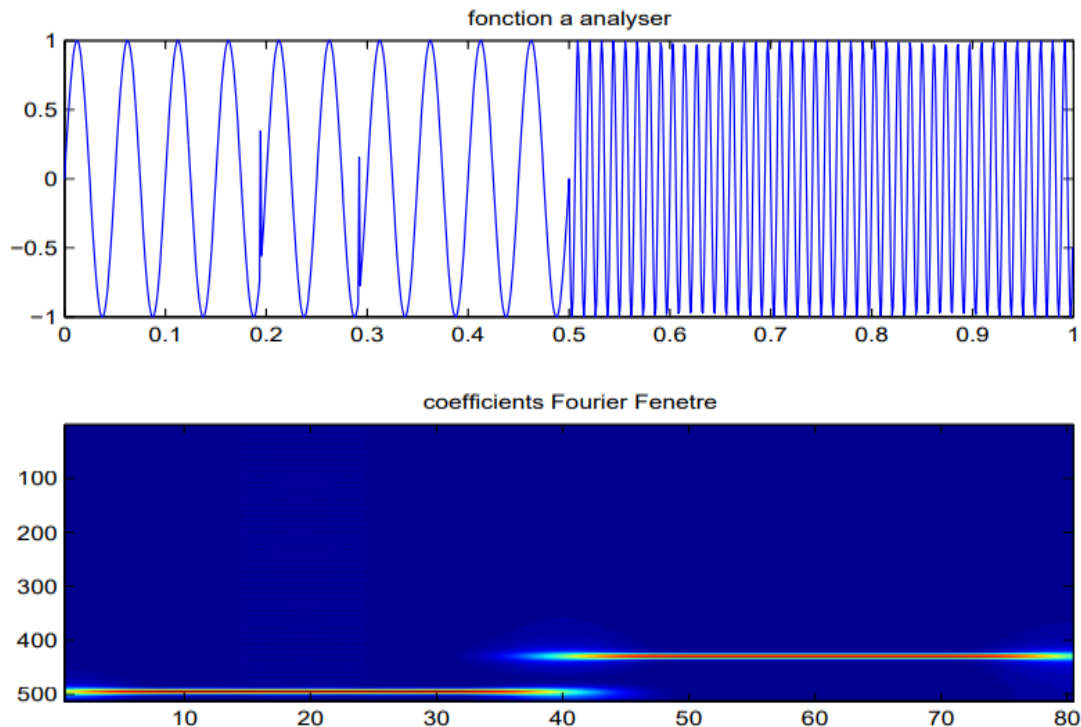
$$G_s(\nu, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \frac{1}{\sigma} e^{-\pi\left(\frac{t-b}{\sigma}\right)^2} e^{-2i\pi\nu t} dt = \left\langle s(\cdot) \left| \frac{1}{\sigma} e^{-\pi\left(\frac{\cdot-b}{\sigma}\right)^2} e^{2i\pi\nu \cdot} \right. \right\rangle$$

II. Transformée fenêtrée

Encore des limites ...

Grande fenêtre : on ne voit pas les discontinuités

Petite fenêtre : fréquences plus aussi précises



III. Transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes continue a pour but de généraliser encore plus la fonction de Gabor de telle sorte que :

$$W_s(\alpha, b) = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi(\alpha(t - b))} dt = \langle s(\cdot) | \sqrt{\alpha} \psi(\alpha(\cdot - b)) \rangle$$



Représenté par un
scalogramme


→ La fonction $\psi(t)$ est appelé ondelette mère, avec les $\psi_{\alpha,b}(t) = \sqrt{\alpha} \psi(\alpha(t - b))$ qui forment un ensemble de fonctions :

- contractées si $\alpha > 1$, ou dilatées si $\alpha < 1$, $(1/\alpha)$ étant le paramètre d'échelle,
- translatées avec b le paramètre de localisation.

III. Transformée en ondelettes continue

La transformée inverse est définie comme :

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(\alpha, b) \sqrt{\alpha} \psi(\alpha(t - b)) d\alpha db$$


$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(v)|^2}{|v|} dv < +\infty$$

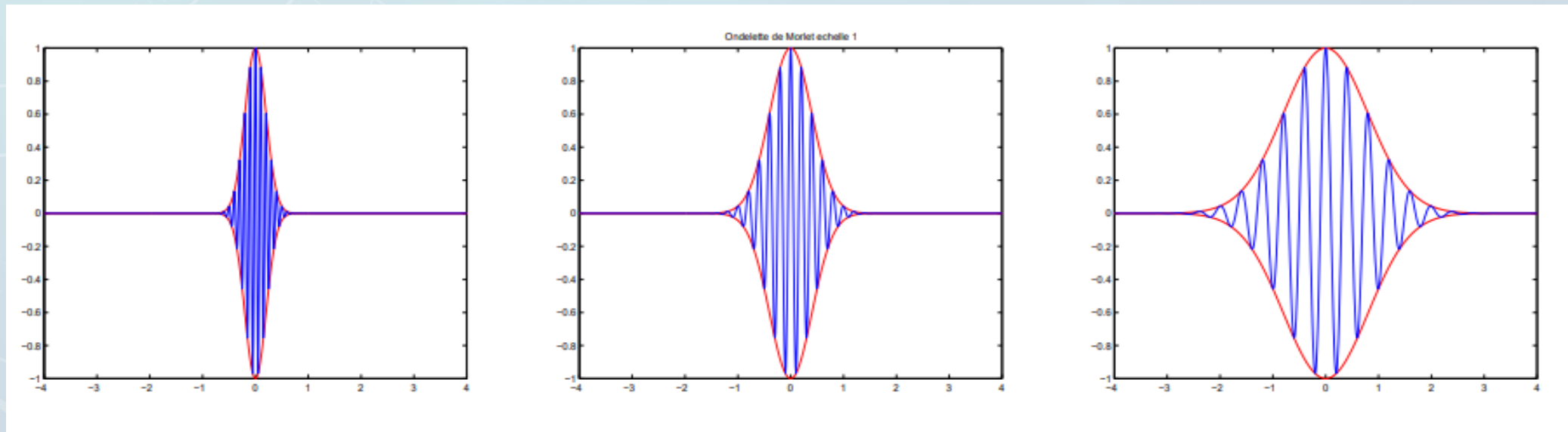
La propriété induite de $C_\psi < +\infty$ est que l'ondelette mère est de moyenne nulle car :

$$\psi(v = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

III. Transformée en ondelettes continue

L'analyse temps-échelle se révèle souvent mieux adaptée aux caractéristiques des signaux naturels et à notre façon de les percevoir (par rapport au temps-fréquence).

$$\text{Fonction d'ondelette : } \psi_{\alpha,b}(t) = \sqrt{\alpha} \psi(\alpha(t - b))$$



III. Transformée en ondelettes continue

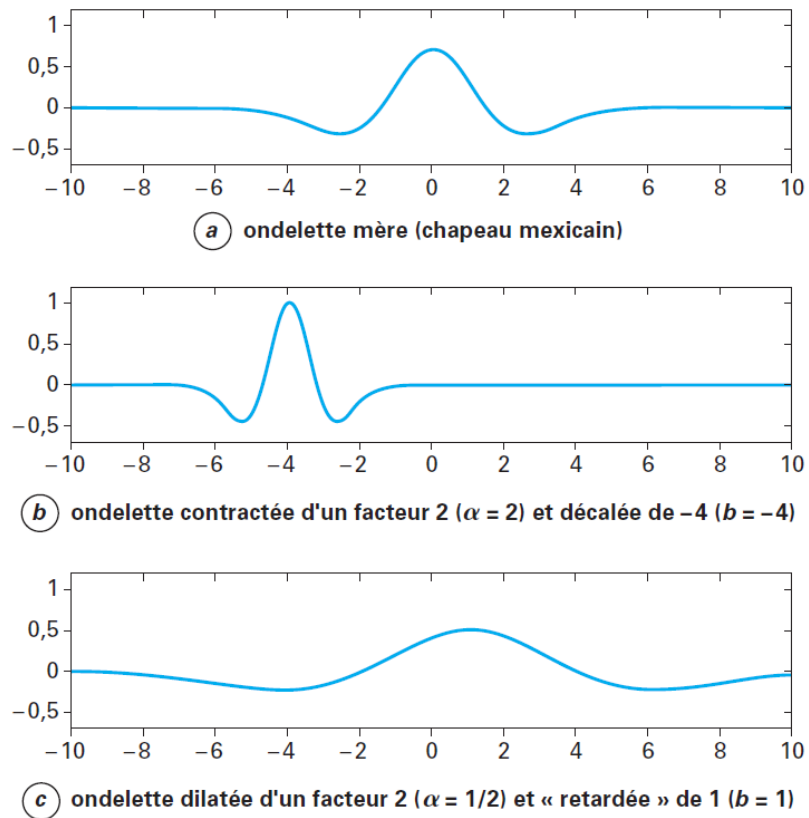


Figure 2 – Exemple de transformations continues en ondelettes

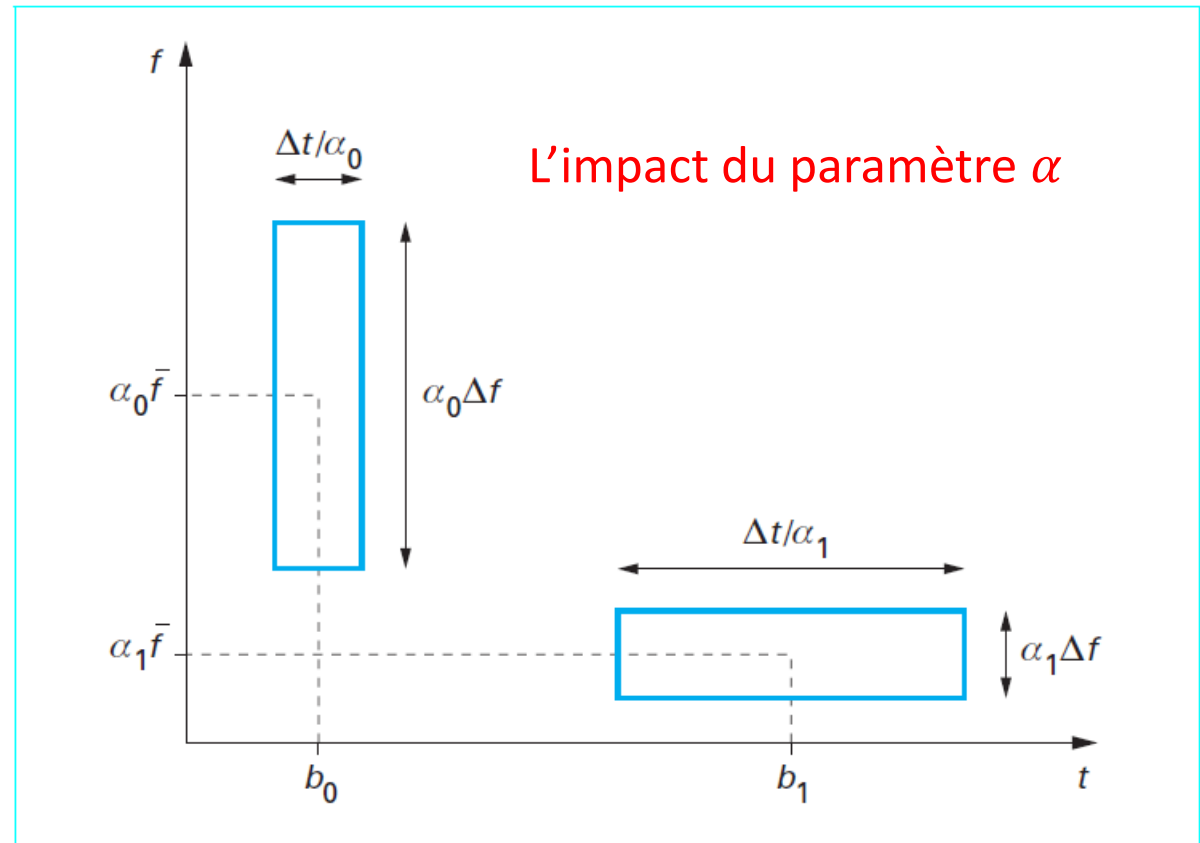


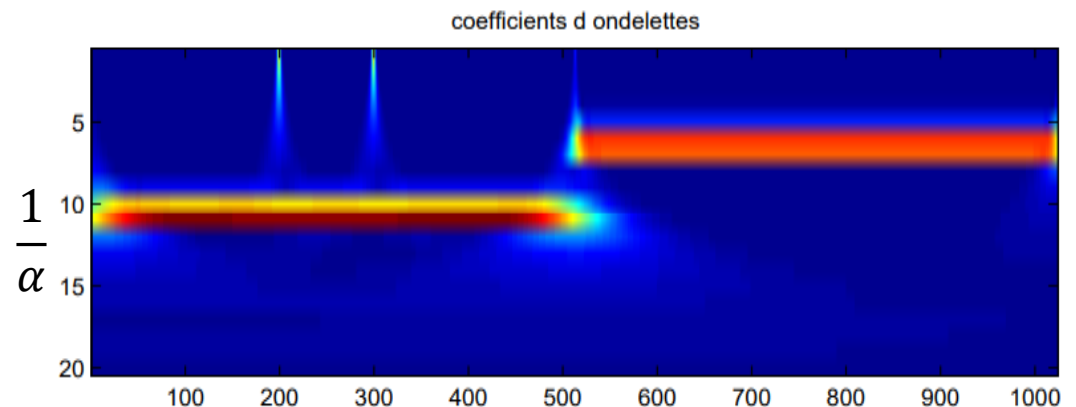
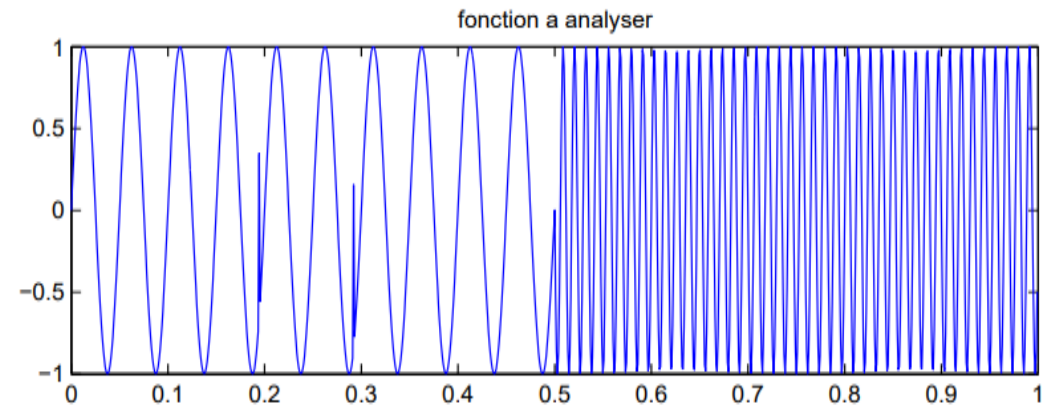
Figure 3 – Localisation temps-fréquence des ondelettes ($\alpha_0 > \alpha_1 > 0$)

III. Transformée en ondelettes continue

Les composantes fréquentielles sont analysées à une résolution adaptée à l'échelle :

- α grand : faible résolution temporelle
bonne résolution fréquentielle
- α petit : bonne résolution temporelle
faible résolution fréquentielle

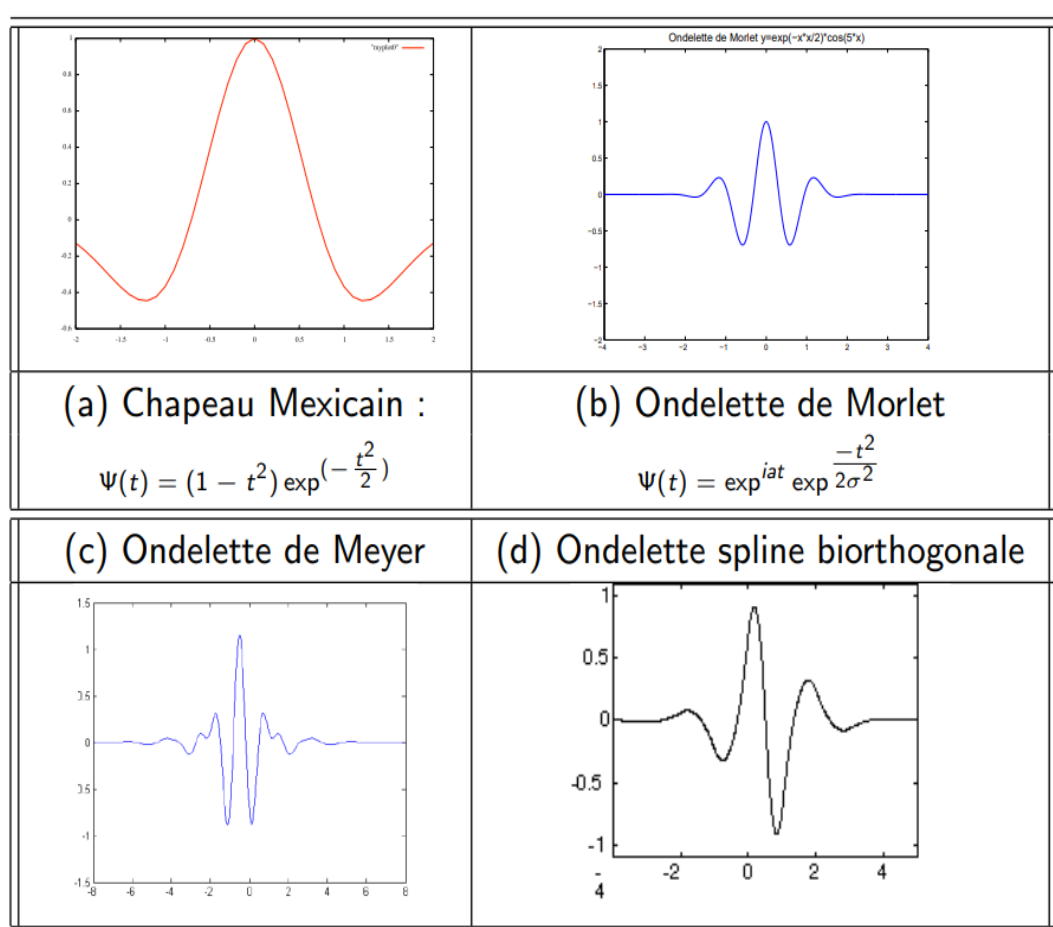
Les basses fréquences du signal sont moins bien localisées temporellement (voir apparaissent tout le temps) alors que les hautes fréquences au contraire sont transitoires et on veut s'intéresser à leur localisation.



III. Transformée en ondelettes continue

Différents exemples d'ondelettes

Quelques propriétés sur les ondelettes



→ Support borné (vu que ce sont des fenêtres ...)

→ Oscillantes et d'intégrale nulle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

→ De carré sommables

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 0$$

IV. Transformée en ondelettes discrète

Transformation de (α, b) en un pavage discret $(2^j, k 2^{-j})$ avec $k \in \llbracket 0, 2^j - 1 \rrbracket$

→ Transformations dyadiques

→ Les ondelettes $\psi_{\alpha,b}(t)$ deviennent alors $\psi_{j,k}(t)$ qui valent :

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k)$$

La transformée en ondelettes discrète (WDT pour Discrete Wavelet Transform) et sa transformée inverse prennent les formes suivantes :

$$W_s(j, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt$$

$$s(t) = \sum_j \sum_k W_s(j, k) \psi_{j,k}(t)$$

IV. Transformée en ondelettes discrète

Quel est l'ensemble de définition des ondelettes ?

Exemple : On définit $\psi(t)$ sur $t = [0,1]$ (i.e. ψ est non nulle sur cet intervalle).

Sur quels supports sont définis $\psi_{0,0}(t)$, $\psi_{1,0}(t)$, $\psi_{1,1}(t)$... ?

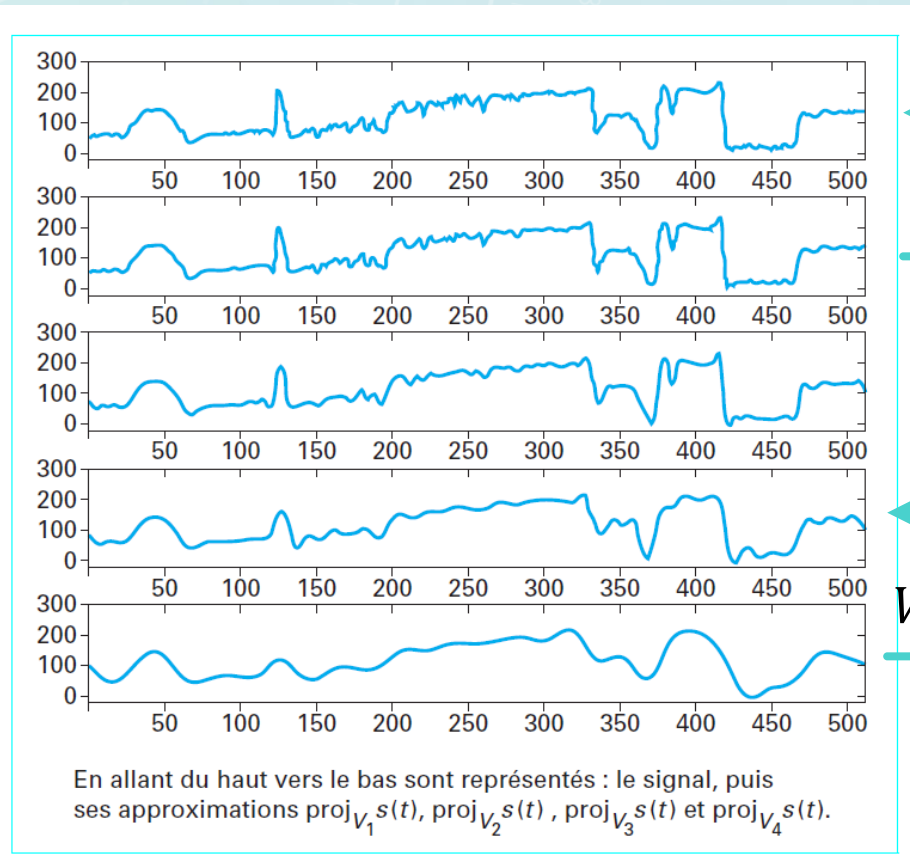
A l'échelle $j = 1$, les $\psi_{1,k}$ ont des supports disjoints. Il en va de même pour les échelles suivantes.

On voudrait aller plus loin et savoir si ces ondelettes forment une base orthonormée pour travailler avec de la même façon qu'avec la base de Fourier avec les exponentielles complexes par exemple.

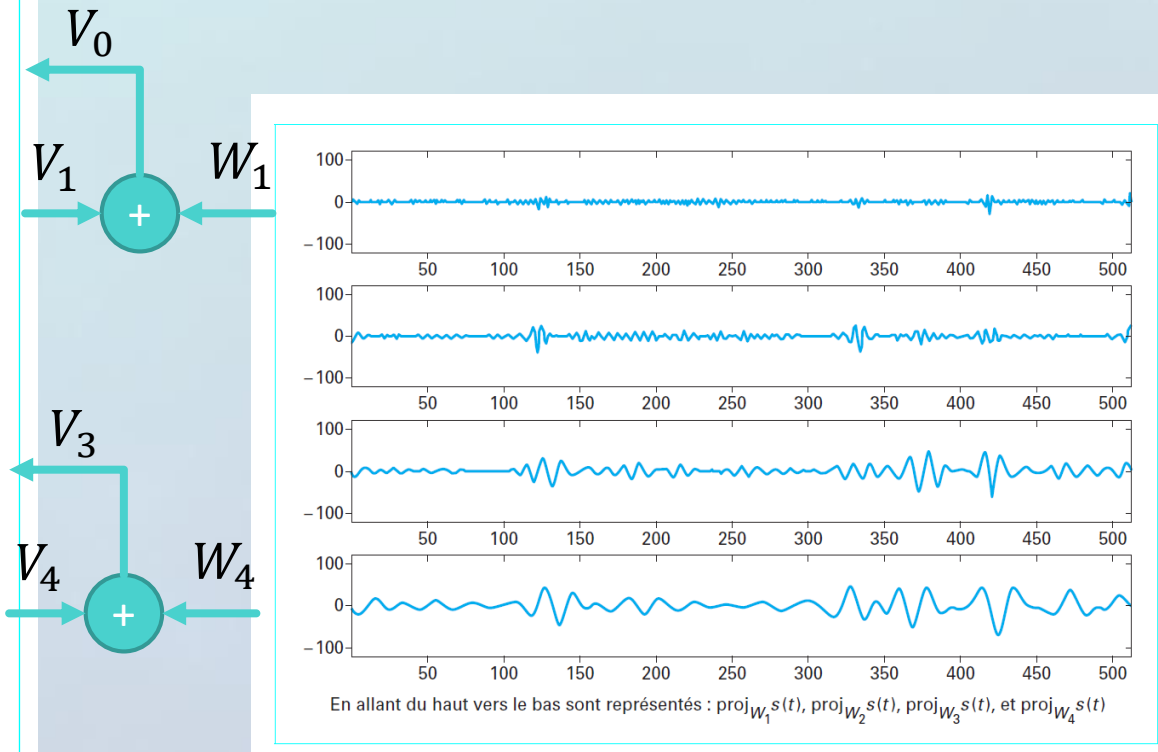
→ Pour formaliser ça : Analyse Multi-Résolution (voir au tableau)

IV. Transformée en ondelettes discrète

Différentes projections sur les espaces V_j



Résidus des projections sur les espaces V_j



V. Approche par bancs de filtres

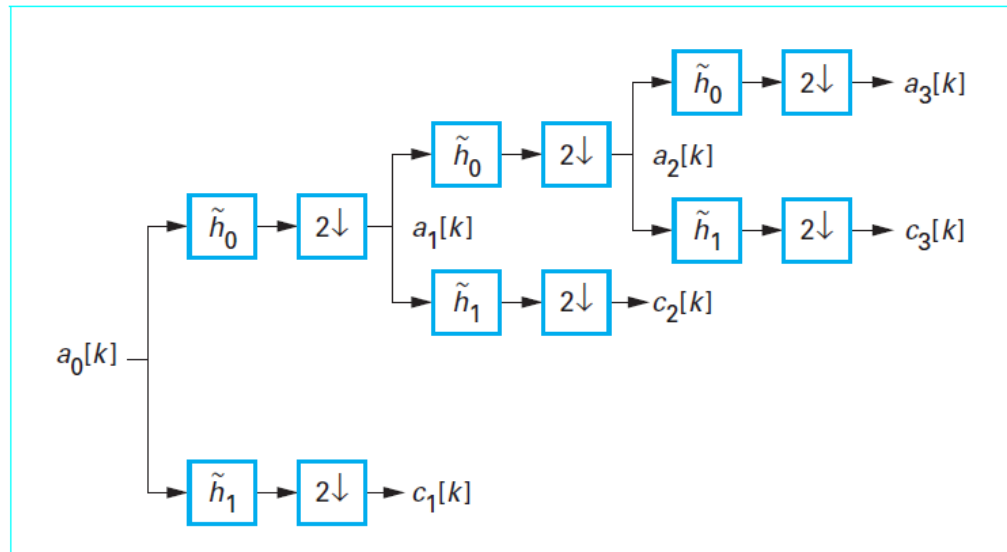


Figure 10 – Structure de décomposition en ondelettes sur 3 niveaux de résolution

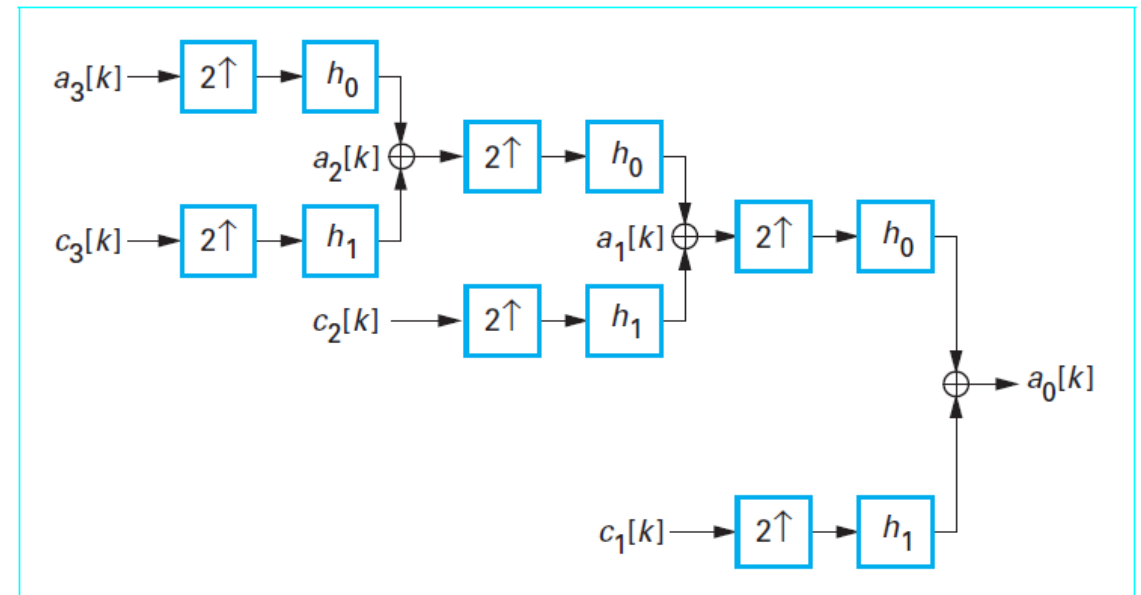
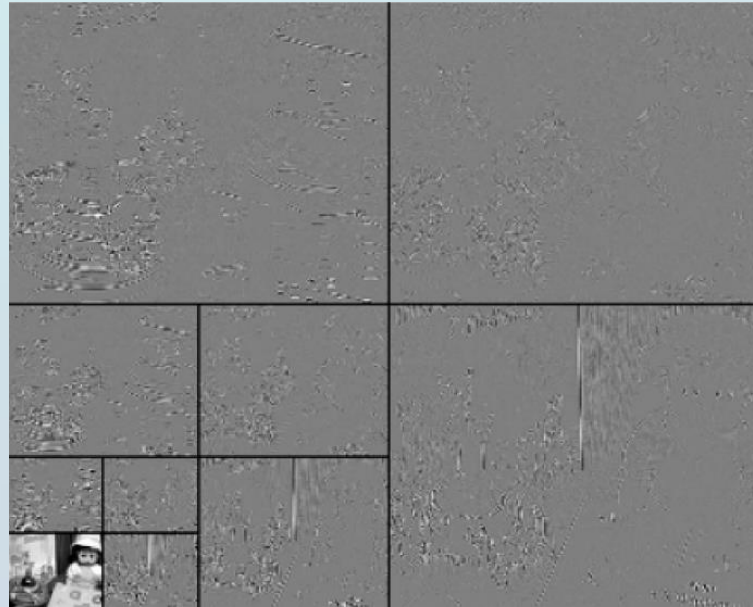


Figure 12 – Reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes

VI. Codage JPEG2000



VI. Codage JPEG2000

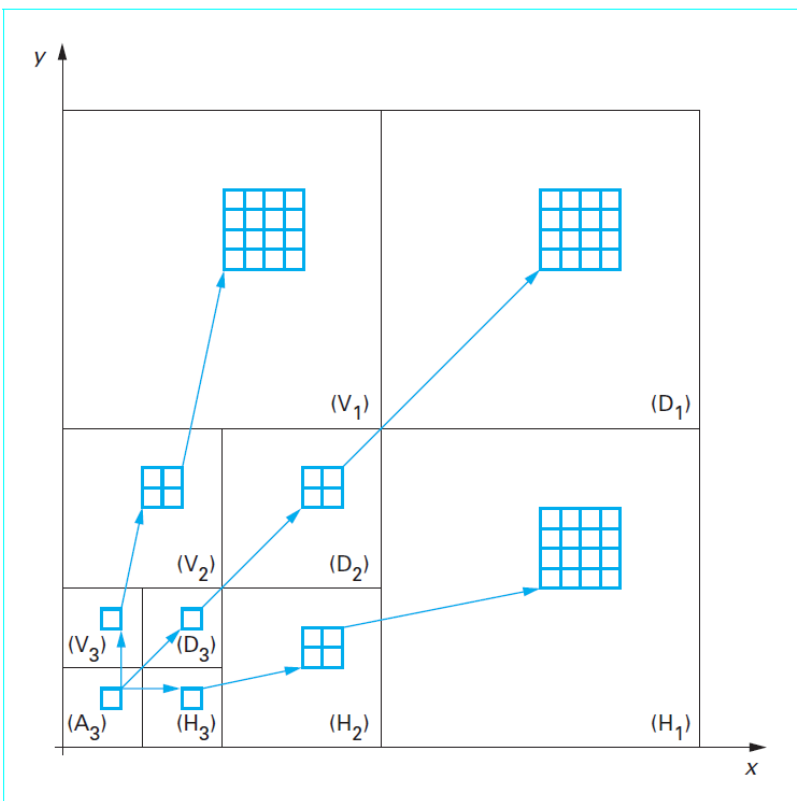


Figure 41 – Regroupement en arbres des coefficients d'ondelettes dans l'algorithme EZW (cas d'une décomposition sur 3 niveaux de résolution)

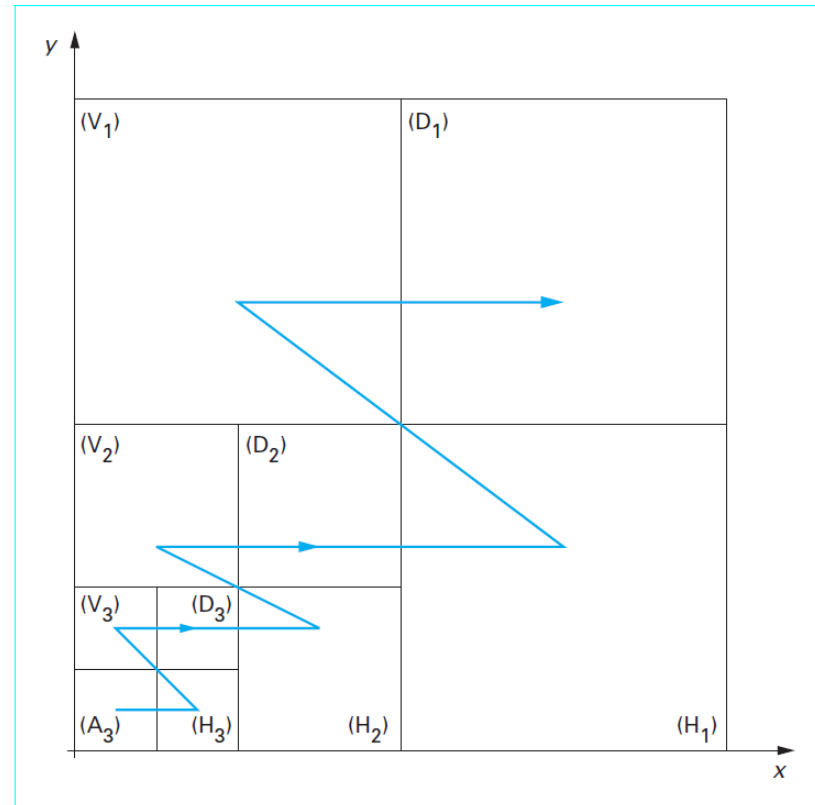


Figure 42 – Ordre de balayage des sous-bandes dans l'algorithme EZW (cas d'une décomposition sur 3 niveaux de résolution)

VI. Codage JPEG2000

JPEG2000 dans les formats vidéos

Le format MPEG-4

- Décimation des chrominances
- JPEG2000 pour les images
- Quantification uniforme à zone morte
- Encodage avec l'algorithme EZW
(*Embedded Zerotrees of Wavelet Coefficients*)

Le format DCP

- Utilisé pour le cinéma
- Codage des intra uniquement
- Permet de passer d'une résolution 4K à 2K avec simplement un changement d'échelle