Jean-Pierre Florens’notes

Notations:

*y*1 = *η* + *ϕ*(*X*1) + *U*1 *y*2 = *η* + *ϕ*(*X*2) + *U*2

*→ y* = *y*2 *− y*1 = *ϕ*(*X*2) *− ϕ*(*X*1) + *U*

Hypothèse d’échangrabilité

• (*y*1*, y*2*, X*1*, X*2) est distribué comme (*y*2*, y*1*, X*2*, X*1)

• *X*1 et *X*2 ont même loi marginale et *L*2*X* est l’ensemble de fonctions de carré intégrable pour cette loi.

*ϕ ∈ L*2*X*

Minimisation:

Proposition : *ϕ* = arg min *E*(*y − ϕ*(*X*2) + *ϕ*(*X*1))2si et seulement si *ϕ* est solution de *E*(*y | X*2 = *x*) = *ϕ*(*x*) *− E*(*ϕ*(*X*1) *| X*2 = *x*)

(ou de manière équivalente de *E*(*y | X*1 = *x*) = *E*(*ϕ*(*X*2) *| Xi* = *x*) *− ϕ*(*x*)) Démontration : La condition de premier ordre de la minimisation s’écrit:

*E* [(*−ϕ*˜(*X*2) + ˜*ϕ*(*X*1))(*y − ϕ*(*X*2) + *ϕ*(*X*1)] = 0 *∀ϕ*˜ *∈ L*2*X.*

(On peut l’obtenir par dérivée de Gâteaux en remplacant *ϕ* par *ϕ* + *αϕ*˜. On dérivera par rapport á *α* et on fait *α* = 0).

L’ échangeabilité implique que

*E* [(*−ϕ*ˆ(*X*2)(*y − ϕ*(*X*2) + *ϕ*(*X*1)] = *E*( ˆ*ϕ*(*X*1)(*y − ϕ*(*X*2) + *ϕ*(*X*1)) et donc on doit résoudre *E*( ˜*ϕ*(*X*2)(*y − ϕ*(*X*2) + *ϕ*(*X*1)) = 0 *∀ϕ*˜ Soit *E*(*y | X*2) *− ϕ*(*X*2) + *E*(*ϕ*(*X*1) *|* (*X*2)) = 0 d’où la solution. Cas sans échangeabilité

On suppose dans un premier temps que les deux fonctions sont différentes et on écrit *y* = *ϕ*2(*X*2) *− ϕ*1(*X*1) + *U*

(*ϕ*2 *∈ L*2*X*2*, ϕ*1 *∈ L*2*X*1) et on minimise *E*(*y − ϕ*2(*X*2) + *ϕ*1(*X*1)2 par rapport á *ϕ*1 et *ϕ*2. On a les conditions du premier ordre

1

*E*( ˆ*ϕ*2(*X*2)(*y − ϕ*2(*X*2) + *ϕ*1(*X*1)) = 0

*E*( ˆ*ϕ*1(*X*1)(*y − ϕ*2(*X*2) + *ϕ*1(*X*1)) = 0

*⇔ E*(*y | X*2) = *E*(*y*(*X*2) *− ϕ*2(*X*2) + *E*(*ϕ*1(*X*1) *| X*2)

*E*(*y | X*2) = *E*(*y | X*1) *− E*(*ϕ*2(*X*2) *| X*1) + *ϕ*1(*X*1)

Par substitution on a:

*E*(*y | X*2) *− E*(*E*(*y | X*1) *| X*2) = *ϕ*2(*X*2) *− E*(*E*(*ϕ*2(*X*2) *| X*1) *| X*2) avec *X*2 = *x*

et

*E*(*Y | X*1) *− E*(*E*(*y | X*2) *| X*1) = *E*(*E*(*ϕ*1(*X*1) *| X*2) *| X*1) *− ϕ*1(*X*1) avec *X*1 = *x*

De chaque équation on tire *ϕ*1 et *ϕ*2 par résolution d’une équation de type II et on peut ensuite estimer *ϕ* par 12(*ϕ*1 + *ϕ*2). On peut aussi empiler les deux équations avec *ϕ*1 = *ϕ*2 et résoudre en *ϕ*.

2