《计算机图形学》系统报告

181860155 朱晓晴 heloize@126.com

2020 年 11 月

1 综述

在 9 月提交中，主要完善了 cg_cli.py 和 cg_algorithms.py 两个模块。在 cg_cli.py 中，补充了对 drawPolygon、drawEllipse 等指令的解析。在 cg_algorithms.py 中，完成了线段绘制算法（draw_line 函数）和椭圆绘制算法（draw_ellipse 函数）。

在 10 月提交中，主要完善了 cg_cli.py 和 cg_algorithms.py 两个模块。在 cg_cli.py 中，补充了对 drawCurve、translate、rotate、scale 和 clip 等指令的解析。在 cg_algorithms.py 中，完成了曲线绘制算法（draw_curve 函数）、平移算法（translate 函数）、旋转算法（rotate 函数）、缩放算法（scale 函数）和线段裁剪算法（clip 函数）。至此，所有指令的算法已全部完成。

在 11 月提交中，主要完成了 cg_gui.py 中图形界面的基本功能，即将 cg_cli.py 中的所有操作可视化。同时，根据图形界面的显示需要，在 cg_algorithms.py 中添加了相应的函数，例如 draw_polygon_gui。至此，要求实现的功能已全部完成。

2 算法介绍

2.1 算法原理

2.1.1 绘制线段

要求：根据给定两点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 绘制线段。

绘制线段共需完成 2 种算法：DDA 算法和 Bresenham 算法。

DDA 算法

斜率 $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$，若 $|m| \leqslant 1$，以 $x_0 < x_1$ 为例进行说明。以单位间隔 $(x_{k+1} - x_k = 1)$ 对 x 进行采样，并计算对应的 y 值:

$y_{k+1} = y_k + m \ (k = 0, 1, ...)$

若 $|m| > 1$，以 $y_0 < y_1$ 为例进行说明。以单位间隔 $(\Delta y = 1)$ 对 y 进行采样，并计算对应的 x 值:

$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{m} \ (k = 0, 1, ...)$

Bresenham 算法

将 (x_0, y_0) 作为第一个点，$m \geqslant 0$，决策参数初值为 $p_0 = 2\Delta y - \Delta x$；$m < 0$，决策参数初值为 $p_0 = 2\Delta y + \Delta x$。

$|m| \leqslant 1$ 时，以 $x_0 < x_1$ 的情况为例进行说明。

若 $m \geqslant 0$，在每个 x_k 处进行检测 p_k：

$p_k \geqslant 0$，下一个点为 $(x_{k+1}, y_k + 1)$，下一个决策参数 $p_{k+1} = p_k + 2\Delta y - 2\Delta x$；

$p_k < 0$，下一个点为 (x_{k+1}, y_k)，下一个决策参数 $p_{k+1} = p_k + 2\Delta y$。

若 $m < 0$，在每个 x_k 处进行检测 p_k：

$p_k \geqslant 0$，下一个点为 (x_{k+1}, y_k)，下一个决策参数 $p_{k+1} = p_k + 2\Delta y$；

$p_k < 0$，下一个点为 $(x_{k+1}, y_k - 1)$，下一个决策参数 $p_{k+1} = p_k + 2\Delta y + 2\Delta x$。

$|m| > 1$ 时，以且 $y_0 < y_1$ 的情况为例进行说明。

若 $m \geqslant 0$，在每个 y_k 处进行检测 p_k：

$p_k \geqslant 0$，下一个点为 $(x_k + 1, y_{k+1})$，下一个决策参数 $p_{k+1} = p_k + 2\Delta x - 2\Delta y$；

$p_k < 0$，下一个点为 (x_k, y_{k+1})，下一个决策参数 $p_{k+1} = p_k + 2\Delta x$。

若 $m < 0$，在每个 y_k 处进行检测 p_k：

$p_k \geqslant 0$，下一个点为 (x_k, y_{k+1})，下一个决策参数 $p_{k+1} = p_k + 2\Delta x$；

$p_k < 0$，下一个点为 $(x_k - 1, y_{k+1})$，下一个决策参数 $p_{k+1} = p_k + 2\Delta x + 2\Delta y$。

2.1.2 绘制椭圆

要求：根据给定的椭圆矩形包围框左上角坐标 (x_0, y_0) 和右下角坐标 (x_1, y_1) 绘制椭圆。

中点圆生成算法

计算出椭圆中心 (x_c, y_c)，长短轴径 r_x 和 r_y。

（1）区域 1 中（| 切线斜率 |$\leqslant 1$）

计算得中心在原点的椭圆上的第一个点 $(0, r_y)$。在区域 1 每个 x_k 处，计算相应的决策参数：

$$p1_k = r_y^2(x_k+1)^2 + r_x^2(y_k - \frac{1}{2})^2 - r_x^2 r_y^2$$

并对决策参数进行检测：

$p1_k < 0$，下一个点为 (x_{k+1}, y_k)；

$p1_k \geqslant 0$，下一个点为 $(x_{k+1}, y_k - 1)$。

循环直到 $2r_y^2 x \geqslant 2r_x^2 xy$。

（2）区域 2 中（| 切线斜率 |> 1）

在区域 2 每个 y_k 处，计算相应的决策参数：

$$p2_k = r_y^2(x_k + \frac{1}{2})^2 + r_x^2(y_k - 1)^2 - r_x^2 r_y^2$$

并对决策参数进行检测：

$p2_k \leqslant 0$，下一个点为 (x_k, y_{k+1})；

$p2_k > 0$，下一个点为 $(x_k - 1, y_{k+1})$。

循环直到 $y = 0$。

最后，计算出其他三个象限中的点，并将所有的点平移到中心为 (x_c, y_c) 的椭圆轨迹上。

2.1.3 绘制曲线

要求：根据给定的若干控制点绘制曲线。

绘制曲线共需完成 2 种算法：Bezier 算法和 B-spline 算法。

Bezier 曲线

给定任一参数 u，$u \in [0,1]$，利用 de Castelijau 递推算法来产生曲线上的点。计算公式为：

$$P_i^r = \begin{cases} P_i & r = 0 \\ (1-u)P_i^{r-1} + uP_{i+1}^{r-1} & r = 1,2,...,n;\ i = 0,1,...,n-r \end{cases}$$

$r = 0$ 时，对应的顶点是曲线的控制点；r 不断增加时，每两个顶点生成一个新的顶点，对应的顶点数递减，直到只剩下一个顶点。

在 [0,1] 内对 u 取值，对任一 u 的取值，运行 de Castelijau 递推算法，得到 Bezier 曲线上的一个点。最后，即可得到 Bezier 曲线。

B-spline 曲线

实验要求 B-Spline 绘制出的曲线为三次均匀 B 样条曲线，设共给定 $n+1$ 个控制点。

在定义域 $[u_3, u_{n+1}]$ 中对 u 取值，对任一 u 的取值，利用 deBoox-Cox 递推公式

$$B_{i,k}(u) = [\frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i}]B_{i,k-1}(u) + [\frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}}]B_{i+1,k-1}(u)$$

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u \in [u_i, u_{i+1}] \\ 0 & u \notin [u_i, u_{i+1}] \end{cases}$$

计算出每个顶点的 B-Spline 基函数 $B_{i,k}(u)$。再根据 B-Spline 曲线公式

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,k}(u), u \in [u_3, u_{n+1}]$$

计算得曲线上的某一点。最后，即可得到 B-Spline 曲线。

2.1.4 图元平移

要求：根据给定的平移向量 (dx, dy) 平移指定图元。

对于指定图元的任一图元参数 $P_1(x_1, y_1)$，根据以下公式计算出新点 $P_2(x_2, y_2)$ 的坐标：

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + dx \\ y_2 = y_1 + dy \end{cases}$$

2.1.5 图元旋转

要求：根据给定的旋转中心 (x, y) 和顺时针旋转角度 r 旋转指定图元。

首先，以 (x, y) 为原点旋转图元。对于指定图元的任一图元参数 $P_1(x_1, y_1)$，根据以下公式计算出点 $P_2(x_2, y_2)$ 的坐标：

$$\begin{cases} x_2 = (x1-x)cos(-r) - (y1-y)sin(-r) \\ y_2 = (x1-x)sin(-r) + (y1-y)cos(-r) \end{cases}$$

再以 (x, y) 为平移向量，平移 $P_2(x_2, y_2)$ 得到新点 $P_3(x_3, y_3)$：

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + x \\ y_3 = y_2 + y \end{cases}$$

2.1.6 图元缩放

要求：根据给定的缩放中心 (x, y) 和缩放倍数 s 缩放指定图元。

首先，以 (x, y) 为原点缩放图元。对于指定图元的任一图元参数 $P_1(x_1, y_1)$，根据以下公式计算出点 $P_2(x_2, y_2)$ 的坐标：

$$\begin{cases} x_2 = (x1 - x) * s \\ y_2 = (x1 - x) * s \end{cases}$$

再以 (x, y) 为平移向量，平移 $P_2(x_2, y_2)$ 得到新点 $P_3(x_3, y_3)$：

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + x \\ y_3 = y_2 + y \end{cases}$$

2.1.7 裁剪线段

要求：根据给定的裁剪窗口的左上角顶点坐标 (x_{min}, y_{max}) 和右下角顶点坐标 (x_{max}, y_{min}) 裁剪指定线段。

线段裁剪共需完成 2 种算法：Cohen-Sutherland 算法和 Liang-Barsky 算法。

Cohen-Sutherland 算法

Cohen-Sutherland 算法的流程如图 1 所示，对线段端点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 编码的规则如图 2 所示。

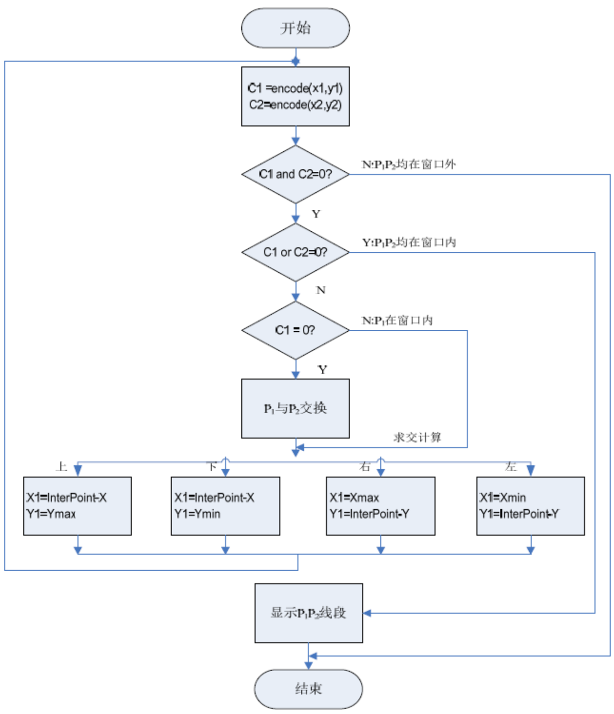


图 1: Cohen-Sutherland 算法流程图

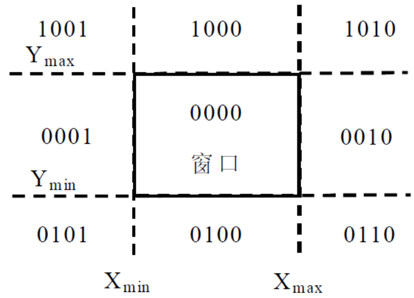


图 2: 区域编码

Liang-Barsky 算法

定义如下 8 个参数：

$$\begin{cases} p_1 = -\Delta x, q_1 = x_0 - x_{min} \\ p_2 = \Delta x, q_2 = x_{max} - x_0 \\ p_3 = -\Delta y, q_3 = y_0 - y_{min} \\ p_4 = \Delta y, q_4 = y_{max} - y_0 \end{cases}$$

初始化 $u_1 = 0$，$u_2 = 1$。对任一组 p_k 和 q_k，做如下检测：

$p_k = 0$ 时，若 $q_k < 0$，线段在裁剪窗口外，舍弃该线段，算法结束；

$p_k < 0$ 时，令 u_1 为其本身和 $\frac{q_k}{p_k}$ 中的较大值；

$p_k > 0$ 时，令 u_2 为其本身和 $\frac{q_k}{p_k}$ 中的较小值。

参数更新后，若 $u_1 > u_2$，舍弃该线段，算法结束。

2.2 对比分析

2.2.1 绘制线段

Naive 算法以单位间隔对 x 取样，并根据直线方程计算出相应的 y 坐标，以此得到线段上所有的点。这一过程需要做大量乘法运算，算法运行速度慢，且对硬件要求较高。此外，Naive 算法不对斜率绝对值大于 1 和小于 1 的两种情况区别处理，而是统一地以单位间隔对 x 取样。因而，当斜率绝对值大于 1 时，易出现直线取样点稀疏的问题。

DDA 算法针对上述缺陷做出了优化，它利用光栅特性消除了直线方程中的乘法，在 x 和 y 方向使用合适的增量逐步推导出各像素点的位置，两种算法的对比如图 3 所示。然而，DDA 算法仍有不足之处，算法中的浮点运算和取整操作十分耗时，且取整误差的积累会导致长线段的像素位置偏离实际位置。

Bresenham 算法在每个已确定的像素点处计算决策参数，选择距离实际线段较近的点作为下一个绘制的点。相较于 DDA 算法，这一做法有利于控制绘制出的直线对实际线段的偏离程度。

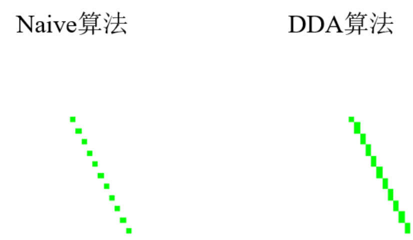


图 3: Naive 算法和 DDA 算法效果对比

2.2.2 绘制曲线

绘制曲线使用了 Bezier 曲线和 B-Spline 曲线，两者在基函数和局部控制能力上存在较大差异。

在基函数方面，Bezier 曲线基函数的次数始终等于控制顶点数减 1，灵活性不足。而 B-Spline 曲线基函数的次数则与控制顶点数无关。

在局部控制能力上，修改 Bezier 曲线的某一个控制顶点，会影响整条曲线的走向，Bezier 曲线在局部性上有所欠缺。而修改 B-Spline 曲线的某一个控制顶点，只影响曲线的某一部分，B-Spline 曲线的局部性较好。

3 系统介绍

3.1 交互逻辑

目前，系统沿用 demo 的框架，即命令行和可视化界面两种运行方式。

以命令行方式运行时，系统逐行读取指令文件，解析指令并调用 cg_algorithms.py 模块中的相关算法。

以可视化界面运行时，通过鼠标事件获取所需参数，调用 cg_algorithms.py 模块中的相关算法，再以可视化方式直接呈现结果。

下面简要介绍可视化界面各个功能的底层实现逻辑和交互方式。

设置画笔

实现逻辑：调用现成的 QColorDialog.getColor 函数，显示出常见的调色界面，并记录下函数返回值，作为系统当前的画笔颜色。为 MyItem 类添加成员变量 color，以记录图元颜色。新建 MyItem 实例时，令该图元的颜色为系统当前的画笔颜色，即可实现要求的功能。

交互方式：点击“文件-设置画笔”，在弹出的颜色选择面板（如图 4 所示）中选择画笔颜色，选择完毕后点击“OK”按钮。

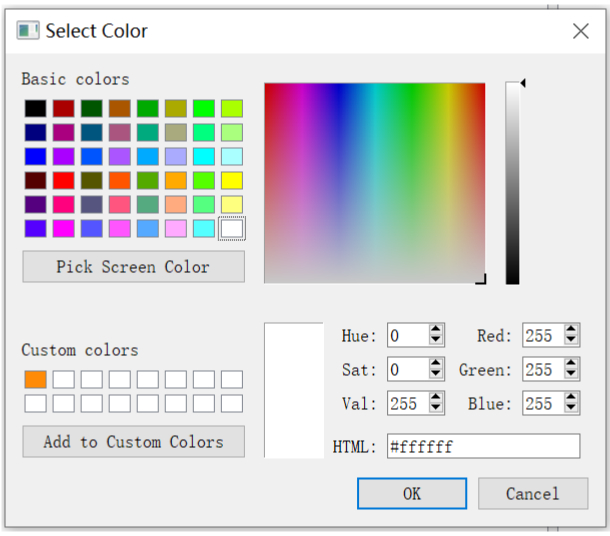


图 4: 颜色选择面板

重置画布

实现逻辑：利用现成的 QDialog 类生成输入窗口，得到输入的数据后，首先清除 item 及其在图元列表中的表现，然后根据获得的数据重新设置 scene 和 canvas 的宽度和高度。

交互方式：点击“文件-重置画布”，在弹出的输入窗口（如图 5 所示）中输入画布的宽度和高度值，填写完毕后点击“确定”按钮。

图 5: 输入窗口

保存画布

实现逻辑：调用现成的 QFileDialog.getSaveFileName 函数，显示出常见的文件保存界面。再调用 QGraphicsView.grab 函数截取画布，并将返回的数据保存为位图。

交互方式：点击“文件-保存画布”，在弹出的文件保存窗口（如图 6 所示）中确定文件名称和保存的位置，完成后点击“保存”按钮。

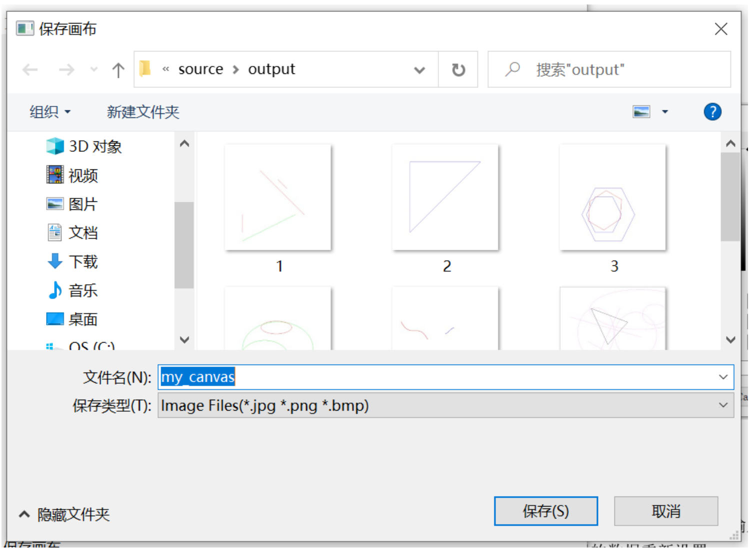


图 6: 文件保存窗口

绘制线段

实现逻辑：点击鼠标时，将当前坐标作为线段的两个端点，再将两个端点的坐标作为参数传给 alg.draw_line 函数，得到新的线段。鼠标移动时，将线段第二个端点更新为当前坐标。

交互方式：点击“绘制-线段-算法”，按住鼠标拖拽出线段后松开鼠标，绘制示例如图 7 所示。

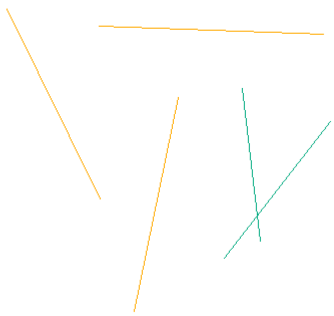


图 7: 绘制线段示例

绘制多边形

实现逻辑：点击鼠标时，如果当前的点在第一个顶点为圆心的半径 10 个像素的圆内，则认为已经绘制完毕；否则，把当前坐标加入多边形的顶点列表。鼠标移动时，将顶点列表的最后一个坐标更新为当前坐标。

交互方式：点击“绘制-多边形-算法”，依次点击多边形各个顶点（也可拖拽），最后需再次点击第一个顶点，表示绘制结束，绘制示例如图 8 所示。

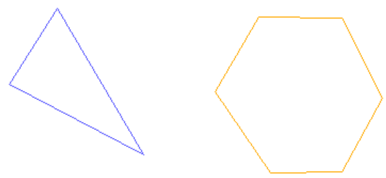


图 8: 绘制多边形示例

绘制椭圆

实现逻辑：点击鼠标时，将当前坐标作为椭圆绑定矩形的对角顶点坐标，再将两个顶点的坐标作为参数传给 alg.draw_ellipse 函数，得到新的椭圆。鼠标移动时，将第二个对角顶点坐标更新为当前坐标。

交互方式：点击“绘制-椭圆”，按住鼠标拖拽出椭圆后松开鼠标，绘制示例如图 9 所示。

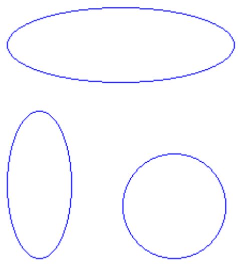


图 9: 绘制椭圆示例

绘制曲线

实现逻辑：点击鼠标时，把当前坐标加入曲线的控制点列表。鼠标移动时，将控制点列表的最后一个坐标更新为当前坐标。按回车键时，绘制结束。

交互方式：点击“绘制-曲线-算法”，依次点击曲线各个控制点，最后按回车键表示绘制结束，绘制示例如图 10 所示。

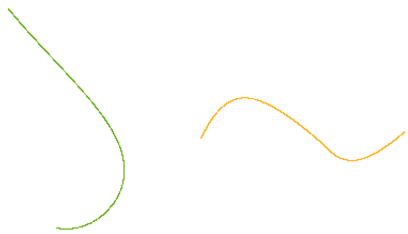
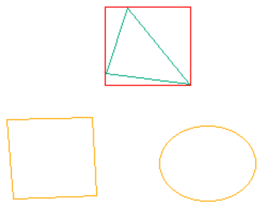


图 10: 绘制曲线示例

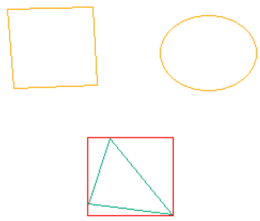
平移

实现逻辑：点击鼠标时，将当前坐标作为平移向量的起点和终点坐标，再将平移向量的坐标作为参数传给 alg.translate 函数，得到平移后的图元。鼠标移动时，将平移向量的终点坐标更新为当前坐标。

交互方式：点击“编辑-平移”，按住鼠标将图元拖拽到目标位置，再松开鼠标，示例如图 11 所示。



(a) 平移前



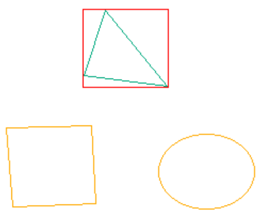
(b) 平移后

图 11: 平移示例

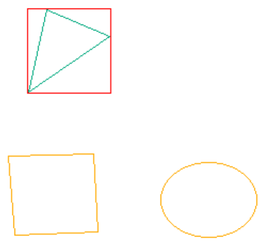
旋转

实现逻辑：旋转分为两个阶段，第一阶段，点击鼠标时将当前坐标作为旋转中心，移动鼠标时将旋转中心更新为当前坐标；第二阶段，点击鼠标时将当前坐标作为旋转弧线的起点和终点，移动鼠标时将弧线的终点更新为当前坐标。再将旋转中心坐标和根据弧线计算出的旋转角度作为参数传给 alg.rotate 函数，得到旋转后的图元。

交互方式：点击“编辑-旋转”，首先点击旋转中心，接着按住鼠标拖拽出旋转的弧线，再松开鼠标，示例如图 12 所示。



(a) 旋转前



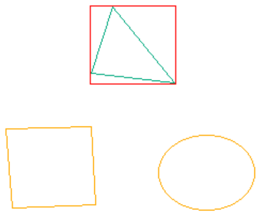
(b) 旋转后

图 12: 旋转示例

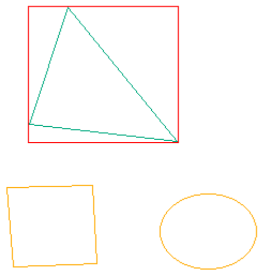
缩放

实现逻辑：缩放分为两个阶段，第一阶段，点击鼠标时将当前坐标作为缩放中心，移动鼠标时将缩放中心更新为当前坐标；第二阶段，点击鼠标时将当前坐标作为缩放线段的起点和终点，移动鼠标时将缩放线段的终点更新为当前坐标。令缩放倍数等于缩放线段长度与 80 的比值，将缩放中心坐标和缩放倍数作为参数传给 alg.scale 函数，得到缩放后的图元。

交互方式：点击“编辑-缩放”，首先点击缩放中心，接着按住鼠标拖拽指导图元变为目标大小，再松开鼠标，示例如图 13 所示。



(a) 缩放前



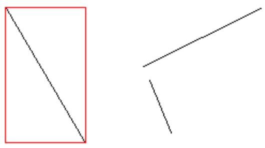
(b) 缩放后

图 13: 缩放示例

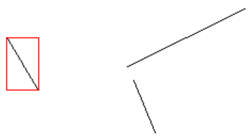
裁剪

实现逻辑：点击鼠标时，将当前坐标作为裁剪窗口的对角顶点坐标，再将两个顶点坐标作为参数传给 alg.clip 函数，得到裁剪后的图元。鼠标移动时，将裁剪窗口的第二个对角顶点坐标更新为当前坐标。

交互方式：点击“编辑-裁剪”，按住鼠标拖拽出裁剪矩形的对角线，得到裁剪后的线段，示例如图 14 所示。



(a) 裁剪前



(b) 裁剪后

图 14: 裁剪示例

3.2 设计思路

后续将着重优化图形界面，计划在图形界面中做出以下修改：

（1）对用户隐藏图元序号，可以直接通过鼠标选中图元，并对图元进行平移操作；

（2）优化曲线绘制交互，用鼠标操作代替按下回车键来标志绘制结束；

（3）优化平移功能，目前在画布任意处拖拽出平移向量都能平移图元，但这一操作与常见画图软件的平移操作不一致。后续，考虑将平移向量的起点限定在选定图元的绑定矩形中。

（4）优化裁剪功能，目前裁剪时随着裁剪窗口的变化，裁剪后的线段实时更新，不便观察完整线段与裁剪窗口的位置关系。后续，考虑在裁剪窗口未确定时保留原来的完整线段，使操作更为自然便利。

（5）目前保存画布时调用 grab 函数，然而当启用滚动条时，这一方法无法保存完整的画布。因此，11 月提交的代码中禁用滚动条，以保存完整画布。后续，考虑启用滚动条，以便扩大画布尺寸。

（6）优化图形界面，目前绘制图元、编辑图元都需要点击菜单栏若干次，操作不够便捷。后续，考虑将各个功能分散为菜单栏的图标。

（7）添加额外的功能，如多边形填充、撤销、复制等。

4 总结

11 月提交中，运用了目前已讲到图形学基础知识，并自学了解了绘制图元和编辑图元的若干算法。通过实现所有指令的算法和图形界面，加深了对图形显示原理的理解。同时，通过反复测试找出了之前提交代码中的若干错误，如公式错误、代码编写错误等。在纠正代码错误的过程中，加深了对算法公式推导过程和 Python 语言的理解程度。

目前对图形界面的理解较浅，尚未基于 demo 的图形界面框架做出显著改动，主要着眼于在图形界面实现实验要求的基本功能。后续将着重优化图形界面，使得整个图形学系统功能更为多样，使用更为便利。

参考文献

[1] 孙正兴等. 计算机图形学教程 [M]. 机械工业出版社, 2006.

[2] 计算向量夹角
https://blog.csdn.net/qq_42423940/article/details/83757427