EL ERROR

Metodos numericos para ingenieros

Introducción

En el vasto terreno del análisis numérico, uno de los desafíos primordiales radica en el minucioso examen de los errores inherentes a cada método de aproximación. Esta labor se enfoca en lograr una precisión y exactitud óptimas en el cálculo de las soluciones de un problema dado (P), al mismo tiempo que busca reducir al mínimo los errores presentes en la solución aproximada.

En un sinnúmero de aplicaciones ingenieriles, la consecución de una solución analítica se torna inviable. Como resultado, la certeza en la exactitud de nuestros métodos numéricos se vuelve esquiva, llevándonos a depender de estimaciones y aproximaciones de errores. En el ámbito profesional, los errores pueden generar consecuencias de alta magnitud, llegando incluso a desencadenar situaciones catastróficas. El fallo de una estructura o dispositivo no solo implica pérdidas económicas, sino que también pone en peligro vidas humanas

Cifras significativas

El concepto de cifras o dígitos significativos ha sido refinado para establecer una medida formal de la confiabilidad asociada a un valor numérico. Las cifras significativas en un número se refieren a aquellas que pueden emplearse con seguridad y consisten en los dígitos conocidos con certeza, sumados a uno estimado adicional.

El concepto de cifras significativas tiene dos implicaciones importantes en el estudio de los métodos numéricos:

1. **Los métodos numéricos dan resultados aproximados:** en consecuencia, surge la necesidad de elaborar criterios que delimiten el nivel de confiabilidad inherente a estos resultados. Una metodología efectiva para lograrlo consiste en utilizar las cifras significativas como punto de referencia. Como ilustración, podríamos establecer que una aproximación resulta aceptable si se mantiene en concordancia con, al menos, cuatro cifras significativas. Este enfoque proporciona un parámetro concreto para evaluar la precisión y la validez de los resultados obtenidos

2. **La existencia de los números infinitos:** Aunque ciertas cantidades tales como π, e, o $\sqrt{7}$ representan cantidades específicas, no se pueden expresar exactamente con un número finito de dígitos. Por ejemplo:

$$\pi = 3.141592653589793238462643...$$

Como las computadoras retienen sólo un número finito de cifras significativas, tales números jamás se podrán representar con exactitud. A la omisión del resto de cifras significativas se le conoce como error de redondeo.

Exactitud y precisión

En el mundo de la ingeniería y la ciencia, dos conceptos fundamentales gobiernan la confiabilidad de nuestras mediciones: la exactitud y la precisión.

La **exactitud** se refiere a cuán cerca está un valor medido o calculado del valor verdadero. En otras palabras, busca la concordancia entre lo que obtenemos y la realidad subyacente.

La **precisión**, por otro lado, se centra en cuán cercanos están entre sí varios valores medidos o calculados. En esencia, es una medida de la consistencia y reproducibilidad de nuestras mediciones.

Ejemplo del Blanco de Tiro: Una Analogía Ilustrativa

Imaginemos que estamos en una competencia de tiro al blanco. Cada agujero en el blanco representa una predicción generada mediante técnicas numéricas, mientras que el centro del blanco es la verdad objetiva que buscamos alcanzar.

La *inexactitud* (también conocida como sesgo) se refiere a un desvío sistemático del valor verdadero. Esto significa que incluso si los disparos están agrupados cerca entre sí, si todos apuntan a la misma zona equivocada, existe un sesgo y, por lo tanto, inexactitud.

Por otro lado, la *imprecisión* (también llamada incertidumbre) mide la extensión de la dispersión de los disparos en el blanco. Si los disparos están distribuidos ampliamente, la imprecisión es mayor. Una mayor precisión, por el contrario, implica que los disparos están agrupados en un área más pequeña y definida en el blanco.

En resumen, la *exactitud* busca la veracidad de nuestros resultados en relación con el valor real, mientras que la precisión se enfoca en la consistencia y cercanía entre múltiples mediciones o predicciones.

Mantener un equilibrio adecuado entre la exactitud y la precisión es esencial para lograr mediciones confiables y para fundamentar conclusiones sólidas en el ámbito de la ingeniería y la ciencia.

Definición de error

En el contexto de la ingeniería, los errores numéricos se originan a partir de la necesidad de emplear aproximaciones para representar operaciones y magnitudes matemáticas precisas. Estos errores abarcan los de truncamiento, generados por la utilización de aproximaciones como un método matemático riguroso, así como los errores de redondeo, que emergen cuando números con un límite de cifras significativas son empleados para representar valores precisos. En ambos casos, la relación entre el resultado exacto o verdadero y su contraparte aproximada está definida por:

$$Valor\ verdadero = Valor\ aproximado + error$$

De forma análoga el error numérico

$$E_t = Valor\ verdadero - Valor\ aproximado$$

Donde E_t se usa para denotar el valor exacto del error.

Esta definición presenta una limitación al no considerar la escala de magnitud del valor que se está estimando. Para ilustrar este punto, si se comete un error de un centímetro, su impacto varía considerablemente dependiendo de si se está midiendo un remache o un puente completo. Una estrategia para abordar esta disparidad en las magnitudes de las cantidades evaluadas es la normalización del error con respecto al valor verdadero. En otras palabras, se busca establecer una relación entre el error cometido y el valor real. Esto se expresa como:

$$Error\ relativo\ fraccional\ verdadero = \frac{Error\ verdadero}{Valor\ verdadero}$$

Que también se puede multiplicar por cien para encontrar el valor porcentual verdadero.

Ejemplo: Cálculo de errores

Suponga que se tiene que medir la longitud de un puente y la de un remache, y se obtiene 9 999 y 9 cm, respectivamente. Si los valores verdaderos son 10 000 y 10 cm, calcule

a) El error verdadero
b) El error relativo porcentual verdadero en cada caso.

Solución

a) El error en la medición del puente es:

$E_t = 10.000 - 9.999 = 1\,cm$

El error en la medición del remache es:

$E_t = 10 - 9 = 1\,cm$

b) El error relativo porcentual para el puente es:

$\varepsilon_t = \frac{1}{10.000} * 100 = 0,01\%$

El error relativo porcentual para el remache es:

$\varepsilon_t = \frac{1}{10} * 100 = 10\%$

Uno de los retos que enfrentan los métodos numéricos es el de determinar estimaciones del error en ausencia del conocimiento de los valores verdaderos. Por ejemplo, ciertos métodos numéricos usan un método iterativo para calcular los resultados. En tales métodos se hace una aproximación considerando la aproximación anterior. Este proceso se efectúa varias veces, para calcular en forma sucesiva, esperando cada vez mejores aproximaciones.

$$\varepsilon_a = \frac{aproximación\ actual - aproximación\ anterior}{aproximación\ actual} * 100$$

Es conveniente también relacionar estos errores con el número de cifras significativas en la aproximación. Es posible demostrar que si el siguiente criterio se cumple, se tendrá la seguridad que el resultado es correcto en al menos n cifras significativas

$\varepsilon_s = (0.5 * 10^{2-n})\%$

Errores de redondeo

Los errores de redondeo se originan en la computación debido a la limitación en la cantidad de cifras significativas utilizadas en los cálculos. Específicamente, números como π (pi), no pueden ser expresados con precisión en un número fijo de cifras significativas. Como resultado, la computadora no puede representar estos números de manera exacta. Además, debido a que las computadoras emplean una representación en base 2 en lugar de la base 10, también existe la dificultad de representar ciertos números en base 10 de manera exacta en la base 2 de la computadora. Esta discrepancia entre la representación aproximada y la omisión de cifras significativas se conoce como error de redondeo.

Estos errores se deben a la necesidad de trabajar con números que la máquina pueda manejar, y están principalmente relacionados con la herramienta de cálculo utilizada. Los errores de redondeo tienen un impacto significativo y pueden influir considerablemente en los resultados, lo que destaca su importancia en los cálculos.

El proceso de redondeo se refiere a la aproximación de un número x a un número con un número determinado de dígitos o cifras significativas. Esta aproximación se elige de manera que el error sea mínimo. Al abordar la cuestión de redondear hacia arriba o hacia abajo un número decimal que termina en 5 con (n + 1) dígitos, se ha establecido que es más efectivo optar por el redondeo de un número con n dígitos cuando el enésimo dígito es par. Aunque esta estrategia puede parecer inusual en principio, resulta ser esencial para lograr un redondeo coherente. En esencia, las computadoras emplean esta técnica al realizar aritmética de punto flotante y al representar números decimales.

Controlar y comprender los errores de redondeo es fundamental, ya que estos errores pueden tener un impacto significativo en los resultados de los cálculos y las aplicaciones prácticas en la ingeniería y otras disciplinas.

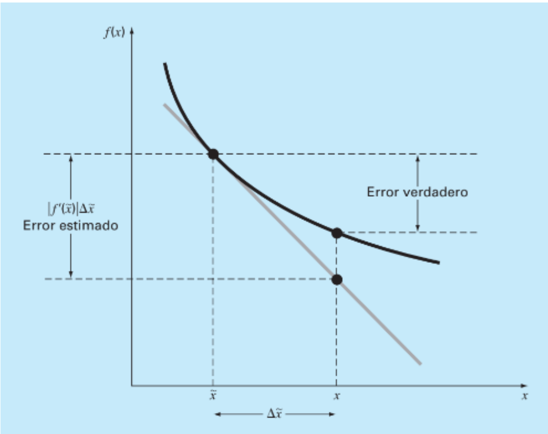
Errores de truncamiento y series de taylor

Propagación del error

Consiste en estudiar cómo los errores en los números pueden propagarse a través de las funciones matemáticas. Por ejemplo, si se multiplican dos números que tienen errores, nos gustaría estimar el error de este producto.

Función de una sola variable

Suponga que se tiene la función $f(\bar{X})$ que es dependiente de una sola variable independiente x. Considere que $\bar{X}$ es una aproximación de x. Por lo tanto, se desearía evaluar el efecto de la discrepancia entre x y $\bar{X}$ en el valor de la función. Esto es, se desearía estimar:
$\Delta f(\bar{X}) = |f(x) - f(\bar{X})|$



Funciones de más de una variable

El enfoque anterior puede generalizarse a funciones que sean dependientes de más de una variable independiente, lo cual se realiza con una versión para varias variables de la serie de Taylor. Por ejemplo, si se tiene una función de dos variables independientes, u y v, la serie de Taylor se escribe como:

$$f(u_{i+1}, v_{i+1}) = f(u_i, v_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+1} + u_i) + \frac{\partial f}{\partial v}(v_{i+1} + v_i) + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_{i+1} + u_i)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u_{i+1} + u_i)(v_{i+1} + v_i) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_{i+1} + v_i)^2\right]$$

Estabilidad y condición

La condición de un problema matemático relaciona su sensibilidad con los cambios en los datos de entrada. Se dice que un cálculo es numéricamente inestable si la inexactitud de los valores de entrada se aumenta considerablemente por el método numérico.
Estas ideas pueden estudiarse usando una serie de Taylor de primer orden:

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Esta relación se emplea para estimar el error relativo de f(x) como en:

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{f(x)} \equiv \frac{f'(\bar{x})(x - \bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

El error relativo de x está dado por:

$$\frac{x - \bar{x}}{\bar{x}}$$

Un número de condición puede definirse como la razón entre estos errores relativos

$$\text{Número de condición} = \frac{\tilde{x}\, f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

El número de condición proporciona una medida de qué tanto una inexactitud de x se aumenta por f(x).

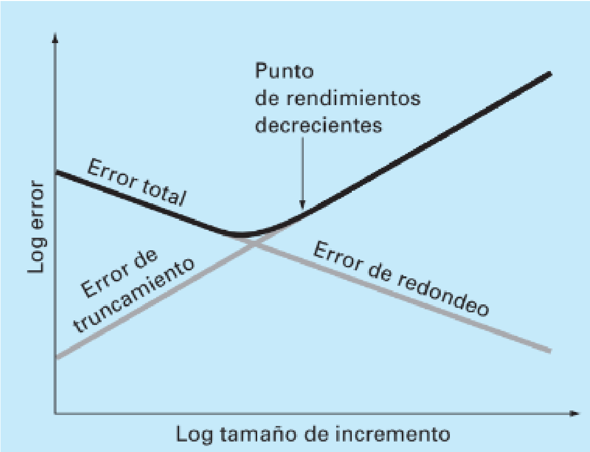
Error numerico total

El error numérico total es la suma de los errores de truncamiento y de redondeo.

- Error de redondeo: Por lo general, la única forma para minimizar los errores de redondeo consiste en incrementar el número de cifras significativas en la computadora. Además, el error de redondeo aumentará debido a la cancelación por resta o debido a que en el análisis aumenta el número de cálculos.

- Error de truncamiento: se reduce disminuyendo el tamaño del incremento. Como una disminución al tamaño del incremento puede llevar a una cancelación por resta o a un incremento de los cálculos, los errores de truncamiento disminuyen conforme los errores de redondeo se incrementan.

La estrategia para disminuir un componente del error total conduce a un incremento en el otro componente. En un cálculo, se podría disminuir el tamaño del incremento para minimizar los errores de truncamiento únicamente para descubrir que el error de redondeo empieza a dominar la solución y error total crece



Se deberá seleccionar un tamaño de incremento grande con la finalidad de disminuir la cantidad de cálculos y errores de redondeo para no tener como consecuencia grandes errores de truncamiento.

En casos reales estas situaciones son relativamente poco comunes, porque muchas computadoras utilizan suficientes cifras significativas para que los errores de redondeo no predominen. Aunque, algunas veces estos errores ocurren y surge una clase de “principio numérico de incertidumbre” que da un límite absoluto sobre la exactitud que puede obtenerse usando ciertos métodos numéricos computarizados.

Control de errores numéricos

No hay una forma sistemática ni general para evaluar el error numérico en todos los problemas. En muchos casos, la estimación del error se basa en la experiencia y en el buen juicio del ingeniero. Aunque el análisis de error es hasta cierto punto un arte, se sugieren algunos lineamientos prácticos de cálculo:

- tratar de evitar la resta de dos números casi iguales. Cuando esto ocurre, casi siempre se pierden cifras significativas. Algunas veces puede reordenar o reformularse el problema para evitar la cancelación por resta. Y si esto no es posible, se utiliza la aritmética de precisión extendida.
- Cuando se suman o se restan números, es mejor ordenarlos y trabajar primero con los números más pequeños, lo cual evita perder cifras significativas.

Otra manera de predecir el error numérico total es usando formulaciones teóricas. La serie de Taylor es la primera herramienta de análisis tanto para el error de truncamiento como para el error de redondeo.

La tendencia es avanzar con los cálculos numéricos e intentar estimar la exactitud de sus resultados. Esto algunas veces se puede hacer observando si los resultados satisfacen alguna condición o ecuación de prueba. También se pueden sustituir los resultados en la ecuación original para verificar si se satisface dicha ecuación.

Por último, es necesario estar preparado para realizar experimentos numéricos que aumenten su conocimiento de los errores de cálculo y de posibles problemas mal condicionados. Estos experimentos pueden consistir en repetir los cálculos con diferentes tamaños de incremento o método, y comparar los resultados.

Es de gran utilidad probar distintos algoritmos numéricos que tengan diferente fundamento matemático, que se basan en distintas estrategias de cálculo o que tengan diferentes características de convergencia y de estabilidad.

Cuando los resultados del cálculo numérico son extremadamente críticos y pueden implicar la pérdida de vidas humanas o tener severas repercusiones económicas, es apropiado tomar precauciones especiales. Esto implicaría el uso de dos o más técnicas independientes para resolver el mismo problema y luego comparar los resultados.

Equivocaciones, errores de formulación e incertidumbre en los datos

En esta presentación, explicaremos tres aspectos cruciales que influyen en la validez y confiabilidad de nuestros resultados: las equivocaciones, los errores de formulación y la incertidumbre en los datos. A medida que profundicemos en estos temas, comprenderemos cómo estos factores pueden afectar nuestras soluciones.

- Errores por Equivocación: Las equivocaciones pueden manifestarse en cualquier etapa del proceso de modelación matemática y contribuir a otras fuentes de error. Prevenir estas equivocaciones depende del sólido entendimiento de los principios fundamentales y de la atención dedicada al enfoque y diseño de la solución del problema. A menudo se pasan por alto en el análisis numérico debido a su inevitabilidad hasta cierto grado.
- Errores de Formulación: Los errores de formulación se deben a la incompletitud de un modelo matemático, resultando en sesgos. Un ejemplo es la falta de consideración de efectos relativistas en la segunda ley de Newton. Aunque esto no invalida la solución de un ejemplo específico, si se presentan errores significativos en la formulación, las soluciones analíticas y numéricas pueden volverse incorrectas. Estos problemas también son discutidos en aplicaciones de ingeniería, donde el uso de un modelo defectuoso generará resultados incorrectos.
- Incertidumbre en los datos: Errores pueden introducirse en el análisis debido a la incertidumbre en los datos físicos sobre los cuales se basa el modelo. Por ejemplo, en el caso de medir la velocidad de un paracaidista en caída, cada medición contendrá incertidumbre debido a las variaciones en la caída. Estos errores pueden afectar la precisión y exactitud del análisis. Los errores de medición se pueden cuantificar utilizando estadísticos descriptivos para resumir la distribución y dispersión de los datos.

Error Absoluto y Relativo

El error absoluto y el error relativo son conceptos importantes en la aproximación de números. Supongamos que tenemos dos números, α y β, donde uno se considera una aproximación del otro. El error absoluto de β como aproximación a α es la diferencia entre el valor exacto (α) y el valor aproximado (β), representado como $|\alpha - \beta|$. El error relativo de β como aproximación a α se calcula dividiendo el error absoluto entre el valor exacto (α) y tomando el valor absoluto, representado como $|\alpha - \beta| / |\alpha|$. El error relativo es especialmente útil para comparar aproximaciones en relación con la magnitud del valor exacto y proporciona una idea de qué tan precisa es la aproximación.

En términos prácticos, el error relativo suele ser más importante que el error absoluto. Por ejemplo, si tenemos dos conjuntos de aproximaciones, uno para $\alpha 1$ y otro para $\alpha 2$, los errores absolutos podrían ser iguales en ambos casos (por ejemplo, 10^-3). Sin embargo, los errores relativos podrían ser diferentes (por ejemplo, 3/4 * 10^-3 y 1, respectivamente). Esto resalta que la aproximación $\beta 1$ es buena para $\alpha 1$, mientras que $\beta 2$ es una aproximación pobre para $\alpha 2$.

La noción de "exactitud a n dígitos significativos" implica que podemos confiar en los primeros n dígitos (empezando por el dígito diferente de cero en el extremo izquierdo) de un número. Esto significa que estos dígitos son los más importantes y relevantes en términos de representar con precisión el valor.

El redondeo reduce el número de dígitos significativos en un número. Cuando redondeamos, ajustamos el número para que tenga menos dígitos diferentes de cero. Hay diversas reglas para redondear, y una de ellas es el "redondeo parejo" o "redondeo estadístico". Esta regla tiende a minimizar el error total de redondeo al igualar la cantidad de números redondeados hacia arriba y hacia abajo, lo que es especialmente útil en conjuntos grandes de datos.

En resumen, el error absoluto y el error relativo son medidas clave para evaluar la calidad de las aproximaciones numéricas. El error relativo, en particular, es útil para comparar aproximaciones en función de la magnitud del valor exacto. Además, la noción de dígitos significativos y el proceso de redondeo son importantes para entender cómo representamos y trabajamos con números en cálculos numéricos

Punto Flotante

La representación de punto flotante es una manera de expresar números fraccionarios en una computadora. Se basa en dividir el número en dos partes: la mantisa (o significando) y el exponente (o característica). Esto permite representar números muy grandes o muy pequeños con una cantidad finita de dígitos.

Imagina que tienes el número 156.78 que deseas representar en un sistema de punto flotante. La representación se realizaría de la siguiente manera:

Mantisa (m): La parte fraccionaria del número. En este caso, sería 0.15678.

Base (b): El sistema numérico utilizado. En este caso, estamos utilizando un sistema decimal, por lo que b sería 10.

Exponente (e): La parte entera que define cuántas veces se debe multiplicar la mantisa por la base elevada a este exponente para obtener el número original. En este caso, para convertir 156.78 a notación científica, sería 1.5678 × 10^2.

La notación de punto flotante sería m · b^e = 0.15678 × 10^2, lo que es equivalente a 156.78. Esto significa que el número se representa separando la mantisa y el exponente, y luego combinándolos multiplicando la mantisa por la base elevada al exponente.

Esta representación es fundamental en la aritmética de coma flotante que se utiliza en las computadoras para realizar cálculos con números fraccionarios y para representar números que tienen una amplia gama de magnitudes. Sin embargo, es importante recordar que la representación de punto flotante tiene limitaciones en términos de precisión y puede dar lugar a errores numéricos en ciertos cálculos.