Máster en Matemática Industrial, curso 2021–2022.
Dpto. de Matemática Aplicada – USC.
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Sistemas Dinámicos.

Parte de EDO – Práctica 1: θ-métodos.

Programa en Matlab® la resolución del problema de valor inicial (PVI) m-dimensional siguiente:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta, \end{cases} \tag{1}$$

mediante el θ-método. Se recuerda que este método define el vector y_{n+1} como la solución del sistema no lineal

$$y_{n+1} = y_n + h\{\theta f(x_n, y_n) + (1-\theta) f(x_{n+1}, y_{n+1})\}, \tag{2}$$

donde θ (*zeta*) es un parámetro real, si bien es costumbre tomarlo dentro del intervalo $[0, 1]$.

El programa debe incluir dos opciones para resolver (2): método de punto fijo y método de Newton.

El objetivo es, para una malla de N puntos `x = linspace(a,b,N)`, crear una matriz `yh` de dimensiones $N \times m$ que contenga en la columna j las aproximaciones de la componente j de la solución exacta. Por lo tanto, la primera fila de `yh` es siempre el vector η, y dar un paso de tiempo (equivalentemente, calcular y_{n+1}) significa calcular una nueva fila de `yh`.

Debe seguirse la estructura del programa de Euler explícito, cuyos ficheros se proporcionan al estudiante. Puede comprobarse que con cada ejecución se crean un fichero "output.txt" con resultados numéricos y también m salidas gráficas, una para cada componente de la solución.

El paso del método explícito al θ-método requiere realizar los siguientes cambios:

1. En el fichero "data.m", añadir: valor de θ, opción para resolver el sistema (2) (punto fijo o Newton), máximo número de iteraciones (para cualquiera de esos dos métodos), épsilon de parada (ϵ-test, también para cualquiera de esos dos métodos) y delta de parada (δ-test, solamente para Newton).

2. En el fichero "EEmethod.m": cambiar el nombre por "THETAmethod.m", eliminar la línea 34

   ```
   yh(i+1,:)  = yh(i,:)  + h*f(x(i),yh(i,:));
   ```

   (que es la fórmula del método explícito) y cambiarla por

   ```
   yh(i+1,:)  = fixedpoint(th,h,x(i),x(i+1),yh(i,:),maxit,epsi);
   ```

   o por

   ```
   yh(i+1,:)  = newton(th,h,x(i),x(i+1),yh(i,:),maxit,epsi,delta,m);
   ```

   según sea la opción escogida.

3. Crear los ficheros "fixedpoint.m" y "newton.m". Crear también el fichero "jacf.m" con la matriz jacobiana de f con respecto a y, que habrá que usar en el método de Newton.

4. En el fichero "prinEE": cambiar el nombre por "prinTHETA" y cambiar la línea

   ```
   [m,x,yh] = EEmethod(a,b,eta,N,dfreq,ex,ofi);
   ```

   por

   ```
   [m,x,yh] = THETAmethod(th,a,b,eta,N,dfreq,ex,ofi,maxit,epsi,delta,option);
   ```

5. En cada fichero, revisar las líneas comentadas y adaptarlas al nuevo método.

El fichero que se ejecuta es el `prinTHETA`, pues es el que llama a todos los demás.

Ejemplos de prueba

1. Resuelve la ecuación diferencial de segundo orden siguiente:

$$y'' + y = \cos(3x), \quad 0 \leq x \leq 3, \tag{3}$$

   con las condiciones iniciales $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. La solución exacta es $y(x) = \frac{9}{8}\cos(x) - \frac{1}{8}\cos(3x)$.

2. Integra el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = 2xy_4y_1, \\ y_2' = 10xy_4y_1^5, \\ y_3' = 2xy_4, \\ y_4' = -2x(y_3 - 1), \end{array}\right. \tag{4}$$

   con la condición inicial $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 1,\ y_4(0) = 1$, en el intervalo $[0, 1]$.

   Solución exacta: $y_1(x) = \exp(\sin(x^2)),\ y_2(x) = \exp(5\sin(x^2)),\ y_3(x) = \sin(x^2)+1,\ y_4(x) = \cos(x^2)$.

3. Resuelve, en el intervalo $[0, 5]$, el problema de valor inicial escalar siguiente:

$$y' + y = \mathrm{e}^{-x}y^2, \quad y(0) = 1. \tag{5}$$

   La solución exacta es $y(x) = \frac{2}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}} = \operatorname{sech} x$.

Nota 1. *Deberá observarse orden 1 de convergencia si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ y orden 2 si $\theta = \frac{1}{2}$. El θ-método que resulta al tomar $\theta = \frac{1}{2}$ se conoce con el nombre de método o regla del trapecio.*