METODE dan TABEL SIMPLEX

Mengubah bentuk baku model LP ke dalam bentuk tabel akan memudahkan proses perhitungan simplex. Langkah-langkah perhitungan dalam algoritma simplex adalah :

1. Berdasarkan bentuk baku, tentukan solusi awal (*initial basic feaseble solution*) dengan menetapkan *m – n* variabel non basis sama dengan nol.
2. Pilih sebuah *entering variable* diantara yang sedang menjadi variabel non basis, yang jika dinaikkan diatas nol, dapat memperbaiki nilai fungsi tujuan. Jika tidak ada, berhenti, berarti solusi sudah optimal. Jika tidak, melangkah ke langkah 3.
3. Pilih sebuah *leaving variable* diantara yang sedang menjadi variabel basis yang harus menjadi non basis (nilainya menjadi nol) ketika *entering variable* menjadi variabel basis.
4. Tentukan solusi yang baru dengan membuat *entering variable* dan *leaving variable* menjadi non basis. Kembali ke langkah 2.

<u>Contoh</u> :

Maksimumkan $Z = 3X_1 + 2X_2$

dengan syarat :

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\leq 15 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 28 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 20 \\ X_1 , X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bentuk baku model LP diatas adalah :

$$Z - 3X_1 - 2X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0 \longrightarrow \textbf{Persamaan tujuan}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 + X_2 + S_1 \quad\quad\quad &= 15 \\ 2X_1 + X_2 \quad + S_2 \quad &= 28 \\ X_1 + 2X_2 \quad\quad + S_3 &= 20 \end{aligned}\right] \longrightarrow \textbf{Persamaan kendala}$$

Lihat kembali langkah **nomor 1**, solusi awal ditentukan dari persamaan kendala dengan menetapkan 2 (dua) (= 5 – 3) variabel sama dengan nol, yang akan memberikan solusi yang unik dan layak. Dengan menetapkan $\mathbf{X_1}$ = 0 dan $\mathbf{X_2}$ = 0, diperoleh $\mathbf{S_1}$ = 15, $\mathbf{S_2}$ = 28, $\mathbf{S_3}$ = 20. Pada saat ini nilai **Z** = 0, kita dapat merangkum informasi diatas ke dalam bentuk tabel simplex awal seperti berikut :

Tabel Simplex Awal

basis	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	
Z	**1**	**-3**	**-2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**è fungsi tujuan Z**
S_1	0	1	1	1	0	0	15	**è persamaan const. 1**
S_2	0	2	1	0	1	0	28	**è persamaan const. 2**
S_3	0	1	2	0	0	1	20	**è persamaan const. 3**

NK (nilai kanan) adalah solusi dari permasalahan

Informasi pada tabel dibaca seperti berikut :

- Kolom basis menunjukkan variabel yang sedang menjadi basis yaitu S_1, S_2, S_3, yang nilainya diberikan pada kolom solusi (**NK**).
- Secara tidak langsung mengatakan bahwa variabel non basis X_1 dan X_2 (yang tidak ditunjukkan pada kolom basis) sama dengan nol.
- Nilai fungsi tujuan adalah Z - ((3 x 0) + (2 x 0) + (0 x 15) + (0 x 28) + (0 x 20)) = 0, seperti terlihat pada kolom NK.

Kapan solusi telah optimum ?

á Dengan memeriksa persamaan Z, terlihat bahwa variabel non basis yaitu X_1 dan X_2 , keduanya memiliki koefisien negatif, yang berarti mempunyai koefisien negatif pada fungsi tujuan yang asli.

á Karena tujuan kita adalah masalah maksimasi, maka nilai Z dapat diperbaiki dengan meningkatkan X_1 dan X_2 menjadi lebih besar dari nol. Yang diutamakan untuk dipilih adalah variabel yang memiliki nilai negatif terbesar.

á Ringkasnya, *optimality condition* metode simplex menyatakan bahwa dalam kasus maksimasi, jika variabel **non basis** memiliki koefisien non negatif pada persamaan Z, maka solusi optimum telah tercapai. Jika tidak, **variabel non basis** dengan **koefisien negatif terbesar dipilih sebagai *entering variabel***.

Penerapan *optimality condition* pada tabel simplex awal contoh diatas adalah :

ÿ Pilih $\mathbf{X_1}$ sebagai *entering variabel*. Kemudian leaving variabel harus salah satu dari variabel basis S_1 , S_2 , S_3.

ÿ Penentuan leaving variabel dilakukan dengan menggunakan *feasibility condition* yang menyatakan bahwa untuk masalah maksimasi maupun minimasi, **leaving variabel** adalah variabel basis yang memiliki rasio terkecil antara sisi kanan (NK) persamaan kendala dengan koefisien bersangkutan yang positip pada *entering variabel*.

ÿ Rasio dalam tabel simplex dapat dicari dengan cara :

1. Coret semua elemen pada persamaan kendala dibawah entering variabel.
2. Tidak termasuk persamaan tujuan, buat rasio antara sisi kanan dengan elemen yang dicoret dibawah entering variabel.

3. Leaving variabel adalah variabel basis yang memiliki rasio terkecil.
4. Kolom pada entering variabel dinamakan *entering coulumn* dan variabel basis yang berhubungan dengan leaving variabel dinamakan *pivot equation*.
5. Elemen pada perpotongan entering coulumn dengan pivot equation dinamakan pivot elemen.

basis	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Rasio
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	
S_1	0	1	1	1	0	0	15	15 : 1 = 15
S_2	0	**2**	1	0	1	0	28	**28 : 2 = 14**
S_3	0	1	2	0	0	1	20	20 : 1 = 20

Kolom X_1 adalah entering kolom dan persamaan S_2 adalah pivot equation

New Basic Solution ditentukan dengan menerapkan metode Gauss Jordan melalui perhitungan berikut :

1. ***new pivot equation = old pivot equation : pivot element***

2. untuk semua persamaan yang lain termasuk persamaan Z
   new equation = old equation – (entering colomn coef. x ***new pivot equation*****)**

Perhitungan pertama menghasilkan pivot elemen sama dengan 1 pada *pivot equation* yang baru, seperti ditunjukkan pada tabel berikut :

basis	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	
Z								
S_1								
X_1	0	1	1/2	0	1/2	0	14	**new pivot eq.**
S_3								

Perhatikan bahwa kolom solusi menghasilkan nilai baru **X_1** = 14, yang sama dengan rasio minimum pada *feasibility condition*. Tabel solusi baru yang diperbaiki dapat dibuat dengan melakukan perhitungan jenis kedua metode **Gauss Jordan**, kecuali baris **X_1** yang telah menjadi **new pivot equation**.

Untuk basis **Z** :

	1	-3	-2	0	0	0	0	
- 3 (	0	1	1/2	0	1/2	0	14)	-
	1	**0**	**-1/2**	**0**	**3/2**	**0**	**42**	

Untuk basis $\mathbf{S_1}$:

	0	1	1	1	0	0	15	
1 (	0	1	1/2	0	1/2	0	14)	-
	0	**0**	**1/2**	**1**	**-1/2**	**0**	**1**	

Untuk basis $\mathbf{S_3}$:

	0	1	2	0	0	1	20	
1 (	0	1	1/2	0	1/2	0	14)	-
	0	**0**	**3/2**	**0**	**-1/2**	**1**	**6**	

Tabel baru yang lengkap untuk iterasi pertama adalah sebagai berikut :

Tabel Simplex Iterasi I

basis	**Z**	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	**NK**
Z	1	0	-1/2	0	3/2	0	42
S_1	0	0	1/2	1	-1/2	0	1
$\mathbf{X_1}$	0	1	1/2	0	1/2	0	14
S_3	0	0	3/2	0	-1/2	1	6

Solusi yang baru memberikan nilai $\mathbf{X_1}$ = 14 dan $\mathbf{X_2}$ = 0. Nilai Z naik dari 0 menjadi **42**.

Berdasarkan tabel iterasi pertama, solusi tabel belum dapat dinyatakan optimal karena variabel non basis masih memiliki nilai negatif, maka *optimality condition* memilih $\mathbf{X_2}$ sebagai entering variabel karena koefisien pada persamaan **Z** sebesar **-1/2**. Feasibility condition menunjukkan bahwa $\mathbf{S_1}$ sebagai leaving variabel karena memiliki rasio terkecil (**2**)

basis	**Z**	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	**NK**	**Rasio**
Z	1	0	-1/2	0	3/2	0	42	
$\mathbf{S_1}$	0	0	**1/2**	1	-1/2	0	1	**1 : ½ = 2**
$\mathbf{X_1}$	0	1	1/2	0	1/2	0	14	14 : ½ = 28
$\mathbf{S_3}$	0	0	3/2	0	-1/2	1	6	$6 : {}^{3}/_{2} = 4$

Kolom X_2 adalah entering kolom dan S_1 adalah pivot equation

Perhitungan pertama menghasilkan pivot elemen : **2 x ½ = 1** pada *pivot equation* yang baru dan memperbaiki nili fungsi tujuan sebasar 1 (satu) seperti ditunjukkan pada tabel berikut :

basis	**Z**	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	**NK**	
Z								
X_2	0	0	1	2	-1	0	2	**new pivot eq.**
X_1								
S_3								

Kolom solusi menghasilkan nilai baru X_2 = 2, yang sama dengan rasio minimum pada *feasibility condition*. Tabel solusi baru yang diperbaiki dapat dibuat dengan melakukan perhitungan jenis kedua metode Gauss Jordan, kecuali baris X_2 yang telah menjadi **new pivot equation**.

Untuk basis **Z** :

	1	0	-1/2	0	3/2	0	42	
- 1/2 (	0	0	1	2	-1	0	2)	-
	1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**43**	

Untuk basis X_1 :

	0	1	1/2	0	1/2	0	14	
1/2 (	0	0	1	2	-1	0	2)	-
	0	**1**	**0**	**-1**	**1**	**0**	**13**	

Untuk basis S_3 :

	0	**0**	**3/2**	**0**	**-1/2**	**1**	**6**	
3/2 (	0	0	1	2	-1	0	2)	-
	0	**0**	**0**	**-3**	**1**	**1**	**3**	

Tabel baru yang lengkap untuk iterasi kedua dan merupakan tabel optimum adalah sebagai berikut :

Tabel Simplex Iterasi kedua (optimum)

basis	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	
Z	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**43**	**Optimum**
X_2	0	0	1	2	-1	0	**2**	
X_1	0	1	0	-1	1	0	**13**	
S_3	0	0	0	-3	1	1	**3**	

Solusi baru memberikan nilai X_1 = 13 dan X_2 = 2, sedangkan nilai **Z** = 43, dan ada sisa sumber daya yang ditunjukkan pada kendala (3) tiga. Tabel simplex iterasi kedua dapat dinyatakan optimum karena variabel non basis yang ada pada koefisien fungsi tujuan **Z** sudah tidak memiliki nilai negatif. Hal ini merupakan perhitungan metode simplex yang lengkap.

MASALAH MINIMASI

Dalam masalah maksimasi, biasanya memiliki kendala pertidaksamaan jenis ≤. Sekarang akan dijelaskan proses simplex untuk suatu masalah minimasi yang biasanya memiliki kendala pertidaksamaan jenis ≥. Masalah minimasi menggunakan langkah-langkah yang sama seperti pada masalah maksimasi, namun ada beberapa penyesuaian yang harus dibuat. Bagi kendala pertidaksamaan jenis ≤ maka variabel slack ditambahkan untuk menghabiskan sumber daya yang digunakan dalam kendala. Cara ini tidak dapat diterapkan pada kendala pertidaksamaan jenis ≥ dan kendala persamaan (=).

Contoh :

Minimumkan $Z = -3X_1 + X_2 + X_3$

dengan syarat :

$$
\begin{aligned}
X_1 - 2X_2 + X_3 &\le 11 \\
-4X_1 + X_2 + 2X_3 &\ge 3 \\
2X_1 - X_3 &= -1 \\
X_1, X_2, X_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Persamaan pada kendala ke tiga harus dirubah agar memiliki nilai kanan positip dengan cara dikalikan (-1), sehingga menjadi :

$-2X_1 + X_3 = 1$

Persamaannya berubah menjadi :

$$\text{Minimumkan} \quad Z = -3X_1 + X_2 + X_3$$

$$\begin{aligned}
\text{dengan syarat} \quad : \quad X_1 - 2X_2 + X_3 &\le 11 \\
-4X_1 + X_2 + 2X_3 &\ge 3 \\
-2X_1 + X_3 &= 1 \\
X_1, X_2, X_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

Bentuk baku diperoleh dengan **menambahkan variabel slack** pada kendala pertama, **mengurangkan variabel surplus** pada kendala kedua. Sehingga diperoleh :

$$Z + 3X_1 - X_2 - X_3 - 0S_1 - 0S_2 = 0 \longrightarrow \textbf{Persamaan tujuan}$$

$$\left.\begin{aligned}
X_1 - 2X_2 + X_3 + S_1 &= 11 \\
-4X_1 + X_2 + 2X_3 - S_2 &= 3 \\
-2X_1 + X_3 &= 1
\end{aligned}\right] \longrightarrow \textbf{Persamaan kendala}$$

Istilah *variabel slack* dan *variabel surplus* adalah berbeda dimana slack ditambahkan dan mencerminkan sumber daya yang tak terpakai, sementara surplus dikurangkan dan menunjukkan suatu kelebihan atas keperluannya, tetapi keduanya diberikan notasi serupa, yaitu **S**.

Kebutuhan utama metode simplex adalah solusi awal layak (*initial basic solution*). Tanpa ini maka tabel simplex tidak dapat dibuat. Dari masalah diatas, terdapat tiga (3) persamaan dan lima (5) variabel tak diketahui, yang berarti bahwa 2 variabel harus menjadi non basis (nilainya = 0) pada setiap solusi. Tak seperti kasus dimana terdapat variabel slack pada setiap persamaan, disini kita dapat menjamin bahwa dengan menetapkan suatu variabel sama dengan nol, variabel basis yang dihasilkan akan non negatif (berarti diperoleh solusi layak). Ada dua pendekatan untuk mendapatkan suatu solusi awal layak, yaitu :

ÿ **Coba-coba**

Disini suatu variabel basis dipilih secara sembarang untuk setiap kendala. Jika dihasilkan suatu solusi layak (nilai variabel basis pada kolom solusi non negatif), maka metode simplex dapat dimulai. Bisa jadi, nilai variabel basis pada kolom solusi adalah negatif, maka solusi yang diperoleh tak layak (melanggar kendala non negatif) dan metode simplex tidak dapat dimulai. Meskipun, coba-coba dapat diulangi lagi sampai diperoleh solusi awal layak, metode ini jelas tidak efisien.

ÿ **Menggunakan Artifisal Variabel**

Gagasan menggunakan artifisial variabel sangat sederhana. Tambahkan suatu artifisial variabel pada sisi kiri setiap persamaan variabel basis. Dinamakan variabel artifisial (sebagai lawan dari "*real decision variable*") karena ia tidak memiliki arti nyata. Artifisial digunakan hanya untuk memulai penyelesaian dan pada urutan selanjutnya mereka harus dijadikan nol pada solusi akhir, jika tidak, maka solusi yang dihasilkan akan menjadi tak layak.

Pada bentuk baku contoh minimasi diatas, **variabel slack** pada persamaan kendala pertama adalah **variabel basis**. Karena pada persamaan kedua dan ketiga tidak ada variabel slack (variabel basis), maka perlu ditambahkan variabel artifisial $\mathbf{A_1}$ dan $\mathbf{A_2}$ pada masing-masing kendala tersebut. Untuk tetap menjamin bentuk baku, A_1 dan A_2 dibatasi pada nilai non negatif. Sehingga diperoleh *artificial system* seperti :

$$
\begin{aligned}
X_1 - 2X_2 + X_3 + S_1 \quad\quad\quad\quad &= 11 \\
-4X_1 + X_2 + 2X_3 - S_2 + A_1 &= 3 \\
-2X_1 + X_3 \quad\quad\quad + A_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Terdapat 3 persamaan dan 7 bilangan tak diketahui, sehingga solusi awal layak harus memiliki 4 (= 7 – 3) variabel non basis yang sama dengan nol. Jika $\mathbf{X_1}=\mathbf{X_2}=\mathbf{X_3}=\mathbf{S_2}= 0$, maka $\mathbf{S_1} = 11$, $\mathbf{A_1} = 3$ dan $\mathbf{A_2} = 1$. Tetapi ini bukan solusi layak karena artifisial variabel benilai positif. Sehingga tujuan kita adalah memaksa artifisial variabel menjadi nol secepat mungkin. Ini dapat dicapai dengan memakai ***teknik M***.

METODE SIMPLEX M (BIG – M)

Pada pendekatan ini, artifisial variabel dalam fungsi tujuan diberi suatu biaya sangat besar (dalam perhitungan komputer biasanya 3 atau 4 kali besarnya dibanding bilangan lain dalam model). Dalam praktek, huruf **M** digunakan sebagai biaya dalam masalah minimasi dan **–M** sebagai keuntungan dalam masalah maksimasi dengan asumsi bahwa **M** adalah **suatu bilangan positif yang besar**.

Untuk menjelaskan teknik ini, lihat kembali masalah minimasi diatas. Untuk mengarahkan artifisial variabel menjadi nol, suatu biaya yang besar ditempatkan pada A_1 dan A_2, sehingga fungsi tujuannya menjadi :

Minimumkan $Z = -3X_1 + X_2 + X_3 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$

Tabel simplex awal dibentuk dengan S_1 , A_1 dan A_2 sebagai variabel basis seperti pada tabel berikut :

basis	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	NK
Z	**3-6M**	**-1+M**	**-1+3M**	**0**	**-M**	**0**	**0**	**4M**
S_1	1	-2	1	1	0	0	0	11
A_1	-4	1	2	0	-1	1	0	3
A_2	-2	0	1	0	0	0	1	1

Perhatikan koefisien pada persamaan Z dalam masalah minimasi lebih mudah diperoleh dengan menggunakan *Inner Product Rule*. Aturan ini juga berlaku untuk masalah maksimasi dan akan banyak bermanfaat dalam analisa sensitivitas. ***Inner Product Rule*** itu adalah :

$C_j = (v)(v_j) - c_j$, dimana

keterangan :

C_j : koefisien variabel j pada persamaan Z
v : vektor baris koefisien fungsi tujuan variabel basis
v_j : vektor kolom elemen dibawah variabel j
c_j : koefisien variabel j pada fungsi tujuan

$$C_{X1} = [0\ M\ M]\begin{bmatrix}1\\-4\\-2\end{bmatrix} - (-3) = 3-6M$$

$$C_{X2} = [0\ M\ M]\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} - 1 = -1+M$$

$$C_{X3} = [0\ M\ M]\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} - 1 = -1+3M$$

$$C_{S1} = [0\ M\ M]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$C_{S2} = [0\ M\ M]\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} - 0 = -M$$

$$C_{A1} = [0\ M\ M]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - M = 0$$

$$C_{A2} = [0\ M\ M]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - M = 0$$

$$C_{NK} = [0\ M\ M]\begin{bmatrix}11\\3\\1\end{bmatrix} - 0 = 4M$$

Kemudian perhitungan simplex dapat dimulai dengan penerapan optimality dan feasibility conditian pada tabel awal menghasilkan $\mathbf{X_3}$ sebagai entering variabel karena memiliki nilai positif yang paling besar dan $\mathbf{A_2}$ sebagai leaving variabel karena memiliki rasio positif paling kecil.

Tabel simplex awal

basis	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**A_2**	**NK**	**Rasio**
Z	3-6M	-1+M	-1+3M	0	-M	0	0	4M	
S_1	1	-2	1	1	0	0	0	11	11 : 1 = 11
A_1	-4	1	2	0	-1	1	0	3	3 : 2 = 1.5
A_2	-2	0	**1**	0	0	0	1	1	**1 : 1 = 1**

Dengan menggunakan cara yang sama pada masalah maksimasi maka perlu dihitung ***new pivot equation*** untuk $\mathbf{A_2}$, yang selanjutnya dengan memakai metode **Gauss Jordan** hitung nilai variabel basis yang lain.

Tabel simplex iterasi pertama

basis	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	1	-1+M	0	0	-M	0	1-3M	1+M	
S_1	3	-2	0	1	0	0	-1	10	*
A_1	0	**1**	0	0	-1	1	-2	1	**1 : 1 = 1**
X_3	-2	0	1	0	0	0	1	1	*

Iterasi pertama belum menghasilkan solusi dasar layak karena A_1 masih bernilai positif. Iterasi berikutnya menunjukkan bahwa X_2 sebagai entering varabel dan A_1 sebagai leaving variabel.

Tabel simplex iterasi kedua

basis	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	Rasio
Z	1	0	0	0	1	1-M	1-M	2	
S_1	**3**	0	0	1	-2	2	-5	12	**12 : 3 = 4**
X_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1	*
X_3	-2	0	1	0	0	0	1	1	*

Sekarang X_2 dan X_3 telah menjadi nol pada koefisien fungsi tujuan, sehingga iterasi kedua merupakan solusi dasar layak, tetapi ini bukan solusi optimal karena X_1 masih bernilai positif yang dapat memperbaiki fungsi tujuan jika menggantikan S_1 sebagai basis.

Tabel simplex iterasi ketiga (optimal)

basis	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	NK	
Z	0	0	0	-1/3	-1/3	(1/3)-M	(2/3)-M	**- 2**	**Optimum**
X_1	1	0	0	1/3	-2/3	2/3	-5/3	**4**	
X_2	0	1	0	0	-1	1	-2	**1**	
X_3	0	0	1	2/3	-4/3	4/3	-7/3	**9**	

Iterasi ketiga adalah **optimal** karena koefisien pada persamaan Z semuanya non positif, dengan X_1 = 4, X_2 = 1 dan X_3 = 9 sedangkan **Z** = -2.