

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКИ

## Интервальный анализ

### Отчёт по лабораторным работам №1 и №2

Выполнил:

Студент: Файзрахманов Артур Рафаэлевич

Группа: 5040102/30201

Принял:

к. ф.-м. н.

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург

2024 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>4</b>
2.1	Первый метод: нахождение $\operatorname{argmax}(Tol)$ . . . . .	4
2.2	Второй метод: нахождение оценки при помощи твинной арифметики . .	5
<b>3</b>	<b>Рализация</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>6</b>
4.1	Результаты для исходных данных . . . . .	6
4.2	Результаты для упрощенных синтетических данных . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Обсуждение</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Приложения</b>	<b>15</b>

## Список иллюстраций

1	Структурная схема калибровки DRS4 . . . . .	4
2	Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 7) .	7
3	Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 19)	7
4	Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 612)	8
5	Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 7). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный	8
6	Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 19). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный . . . . .	9
7	Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 612). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный . . . . .	9
8	Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 7), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом . . . . .	10
9	Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 19), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом . . . . .	10
10	Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 612), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом . . . . .	11

11	Tol, Uni и argmaxTol для датчика (0, 7) . . . . .	11
12	Tol, Uni и argmaxTol для датчика (0, 19) . . . . .	12
13	Tol, Uni и argmaxTol для датчика (0, 612) . . . . .	12
14	Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных . . . . .	13
15	Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных. Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный . . . . .	14
16	Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом . . . . .	14
17	Tol, Uni и argmaxTol для синтетических данных . . . . .	15

# 1 Постановка задачи

Чип быстрой аналоговой памяти PSI DRS4 имеет 8 каналов, каждый из которых содержит 1024 ячейки. Они включают конденсаторы для хранения значения заряда и электронные ключи для записи сигналов и считывания напряжений через АЦП (аналого-цифровой преобразователь). Ячейки объединяются в кольцевые буферы. При подаче сигнала синхронизации запись напряжений на конденсаторы прекращается, а номер ячейки (в которую была сделана последняя запись) запоминается.

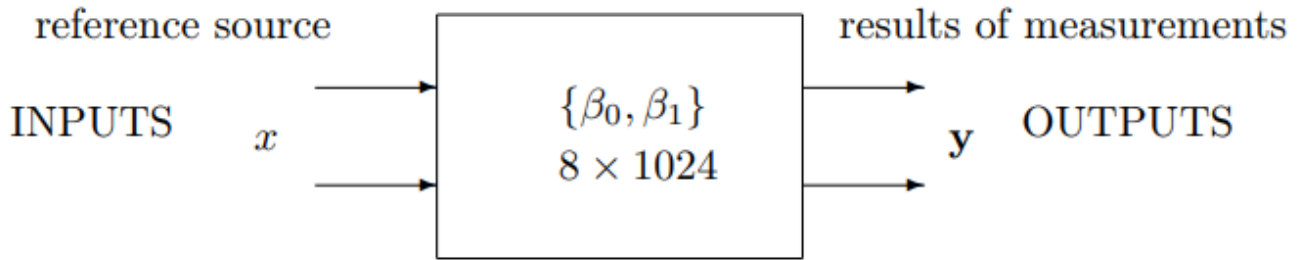


Рис. 1: Структурная схема калибровки DRS4

Ставится задача калибровки данного чипа. Для этого на входы платы подается набор напряжений постоянного значения, охватывающий рабочий диапазон микросхемы. Для каждого отдельного напряжения  $X$ , эта операция повторяется 100 раз. На основе полученных данных для каждой ячейки рассчитываются линейные регрессии.

Таким образом, калибровка сводится к определению параметров линейной регрессии

$$Y = \beta_0 X + \beta_1. \quad (1)$$

## 2 Теория

### 2.1 Первый метод: нахождение $\operatorname{argmax}(Tol)$

Поскольку показания датчиков обладают погрешностью, полученные данные на самом деле следует рассматривать как интервалы, центр которых совпадает с измеренными показаниями, а радиус  $\epsilon$  (в данном случае  $\frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384}$ ).

Так как показания независимы, можно рассмотреть произвольную ячейку из всех  $8 \times 1024$  ячеек. Тогда, для данной ячейки имеем  $100 \times 11$  пар значений  $(x, y)$ , где  $x$  – координата соответствующая поданному напряжению и лежит в границах  $[-0.5, 0.5]$ , а  $y$  координата представляет собой интервал с  $wid = 2/16384$ . Для того, чтобы найти точечную оценку коэффициентов калибровки, можно воспользоваться распознающим функционалом  $Tol$ .

$$Tol(x) = Tol(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \operatorname{rad} b_i - \left| \operatorname{mid} b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\}. \quad (2)$$

Где  $A$  – матрица:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$b$  – интервальный вектор:

$$\begin{pmatrix} [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon] \\ \vdots \\ [y_m - \epsilon, y_m + \epsilon] \end{pmatrix} \quad (4)$$

Особенностью данного функционала является то, что допустовое множество решений системы  $Ax = b$  можно описать как

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, A, b) \geq 0\} \quad (5)$$

Если  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol}), A, b) \geq 0$ , то система совместная и  $\arg \max(\text{Tol})$  можно считать результатом регрессии (а значит это вектор содержащий  $\beta_0, \beta_1$ ).

Однако часто система не является совместной. В таком случае следует рассмотреть множество  $\text{Tol}_i$

$$\text{Tol}_i(x, A, b) = \text{rad}(b_i) - \left| \text{mid}(b_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right|, \quad 1 \leq i \leq m \quad (6)$$

Если существует  $i$  для которого  $\text{Tol}_i < 0$ , то  $\text{Tol} < 0$ . При этом, чтобы  $\text{Tol}_i \geq 0$  достаточно подобрать достаточно большой  $\text{rad}(b_i)$ .

Таким образом, в случае отсутствия совместности, следует пройтись по строчкам матрицы и элементам  $b$ . Если для некоторых из них  $\text{Tol}_i < 0$ , то нужно "расширить" интервал в правой части, чтобы добиться  $\text{Tol}_i = 0$ . Тогда очевидно, что  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol}), A, b)$  будет равен 0, а  $\arg \max(\text{Tol})$  будет вектором искомых коэффициентов калибровки.

## 2.2 Второй метод: нахождение оценки при помощи твинной арифметики

У описанного выше метода есть два основных недостатка:

1. "Расширение" интервалов в правой части системы приводит к сильной погрешности на практике, т.к. интервалы расширяются в обе стороны: как в сторону регрессионной прямой, так и от нее.
2. Результатом данного метода является лишь точечная оценка.

В качестве альтернативы, предлагается другой метод, основанный на использовании твинной арифметики.

В первом методе брались все пары  $(x_i, [y_i - \epsilon, y_i + \epsilon])$  и работа велась со всеми интервалами. В данном методе предлагается разделить  $y_i$  в группы по 100 измерений в зависимости от соответствующего  $x_i$ . Тогда для каждого различного  $x_i$  для конкретного датчика получится набор значений по которому можно определить внутреннюю и внешнюю оценку, и для каждого  $x_i$  построишь твин  $[[y_i^{in}, \overline{y_i^{in}}], [y_i^{ex}, \overline{y_i^{ex}}]]$ .

Затем снова построим распознающий функционал  $\text{Tol}$ , но теперь

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} [y_1^{in}, \overline{y_1^{in}}] \\ [y_1^{ex}, \overline{y_1^{in}}] \\ [y_1^{in}, \overline{y_1^{ex}}] \\ [y_1^{ex}, \overline{y_1^{ex}}] \\ \vdots \\ [y_n^{ex}, \overline{y_n^{ex}}] \end{pmatrix} \quad (7)$$

Если  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) = 0$ , то так же возвращаем  $\arg \max(\text{Tol})$ .

Если  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) > 0$ , то можно найти множество значений  $(\beta_0, \beta_1)$ , при которых  $\text{Tol} > 0$  и вернуть его.

Если  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) < 0$  снова требуется решить проблему отсутствия совместности.

Для этого снова рассмотрим  $\text{Tol}_i$ , однако, вместо изменения правой части, будем убирать соответствующую строку из  $A$  и  $b$ . В силу того что для каждой пары  $(x_j, y_j)$  создается 4 уравнения, при удалении описанным способом несовместимых уравнений, уравнений останется больше, чем при первом способе. А значит решение будет точнее. При этом, в результате данной операции, возможна ситуация, когда  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) > 0$ .

### 3 Рализация

Данная работа реализована на языке программирования Python 3.10 с использованием пакетов matplotlib и intvalpy. Код отчёта подготовлен с использованием платформы Overleaf.

## 4 Результаты

### 4.1 Результаты для исходных данных

Каждому датчику в чипе были присвоены координаты в зависимости от канала и номера ячейки. Датчик получивший данные из канала  $j$  ( $1 \leq j \leq 8$ ) и находящийся в ячейке  $i$  ( $1 \leq j \leq 1024$ ) будет иметь координаты  $i, j$ . Рассматриваются данные датчиков

1. С координатами (0, 7)
2. С координатами (0, 19)

3. С координатами  $(0, 612)$

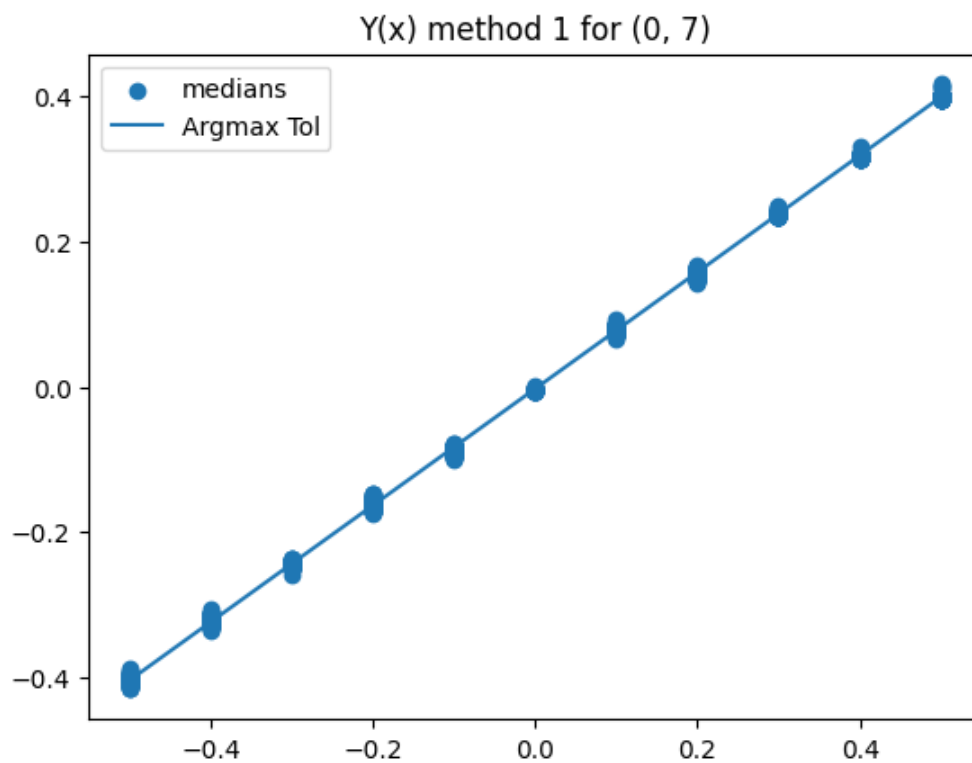


Рис. 2: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика  $(0, 7)$

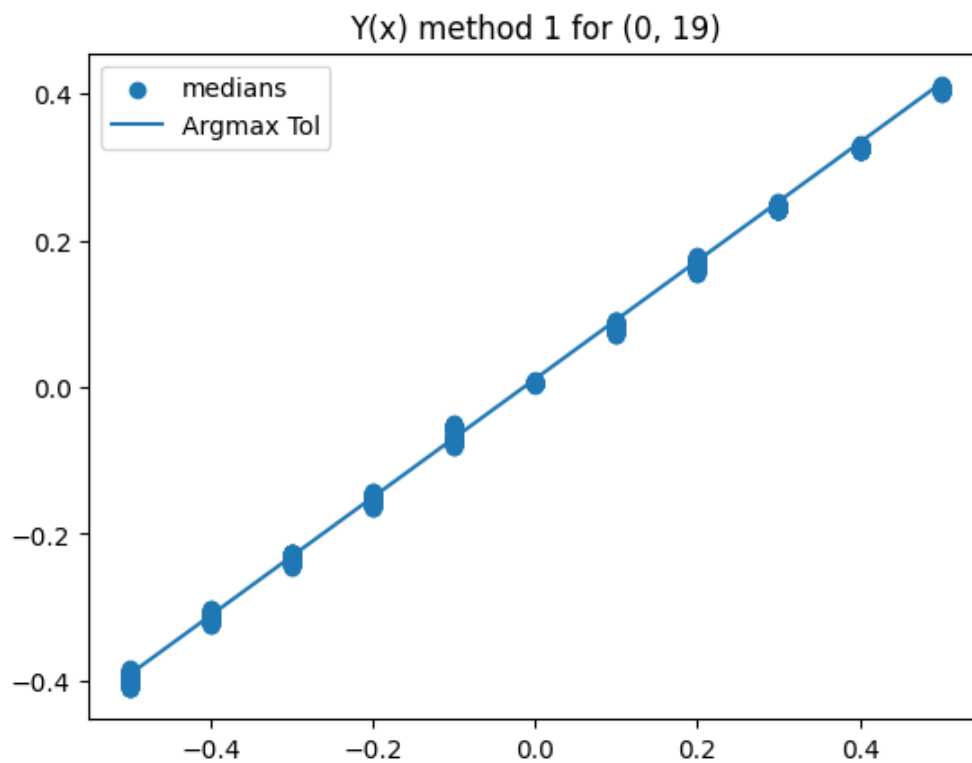


Рис. 3: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика  $(0, 19)$

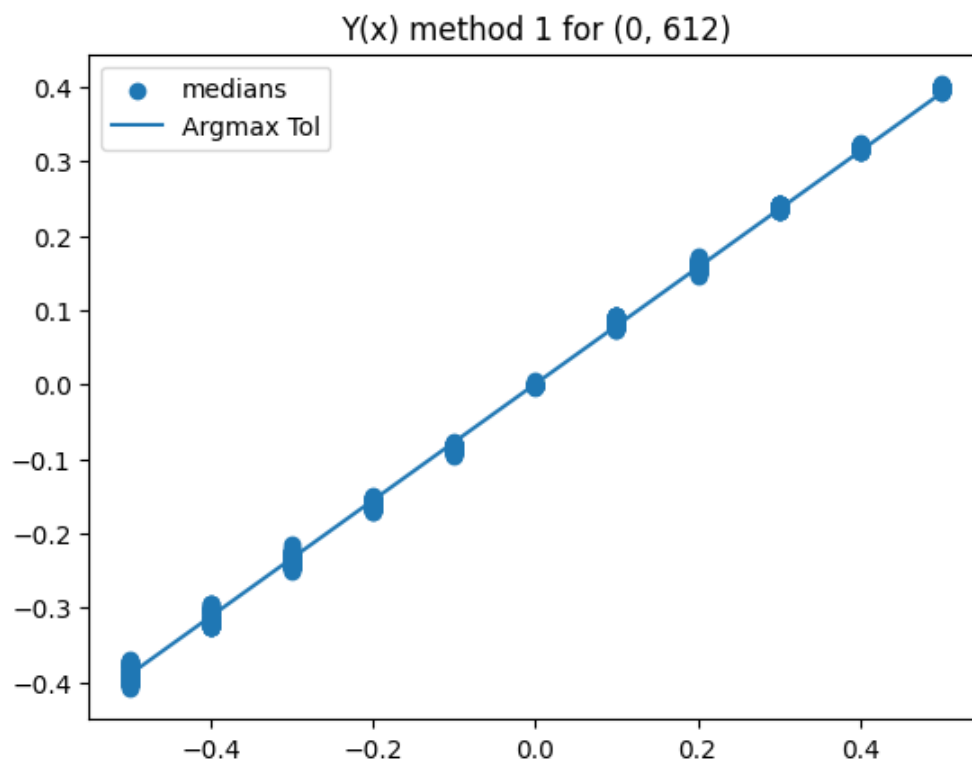


Рис. 4: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 612)

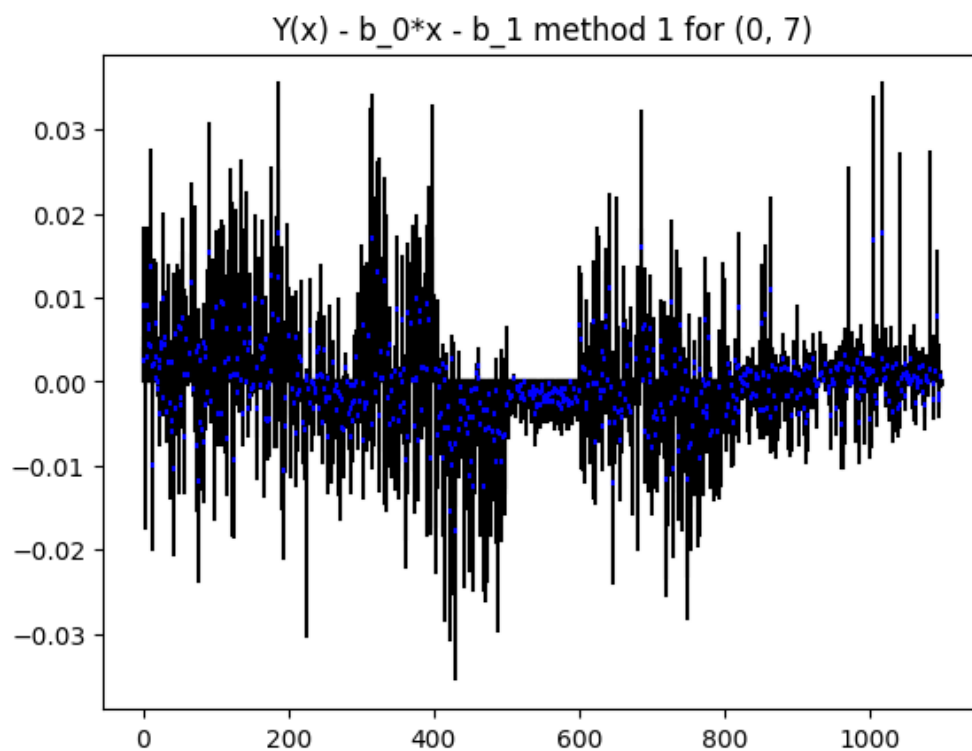


Рис. 5: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 7). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный



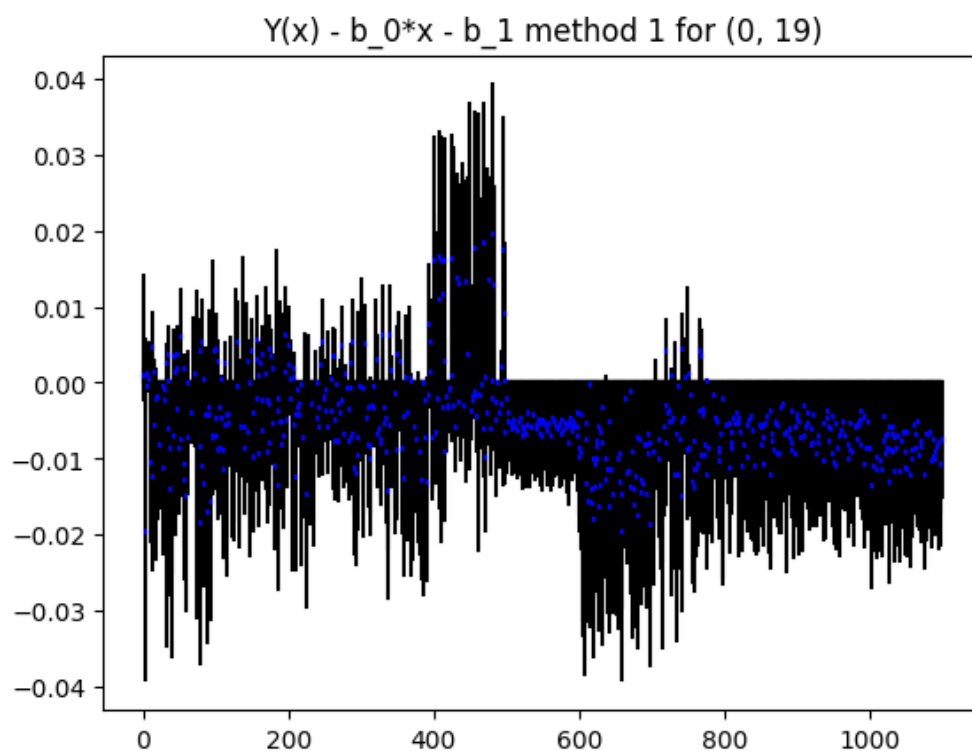


Рис. 6: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 19). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

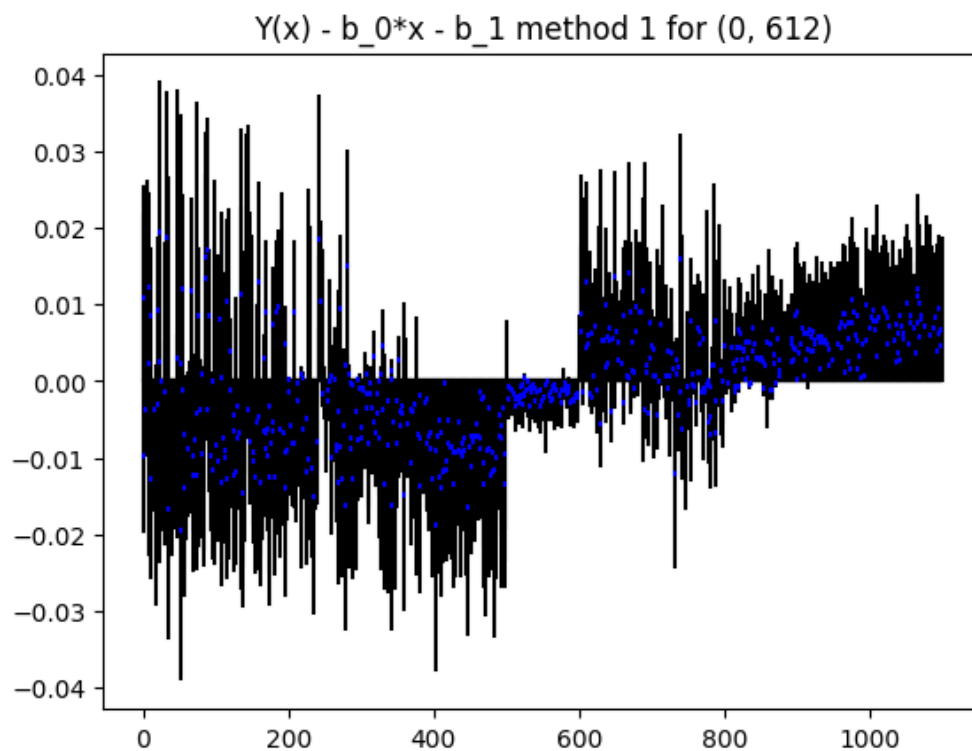


Рис. 7: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 612). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

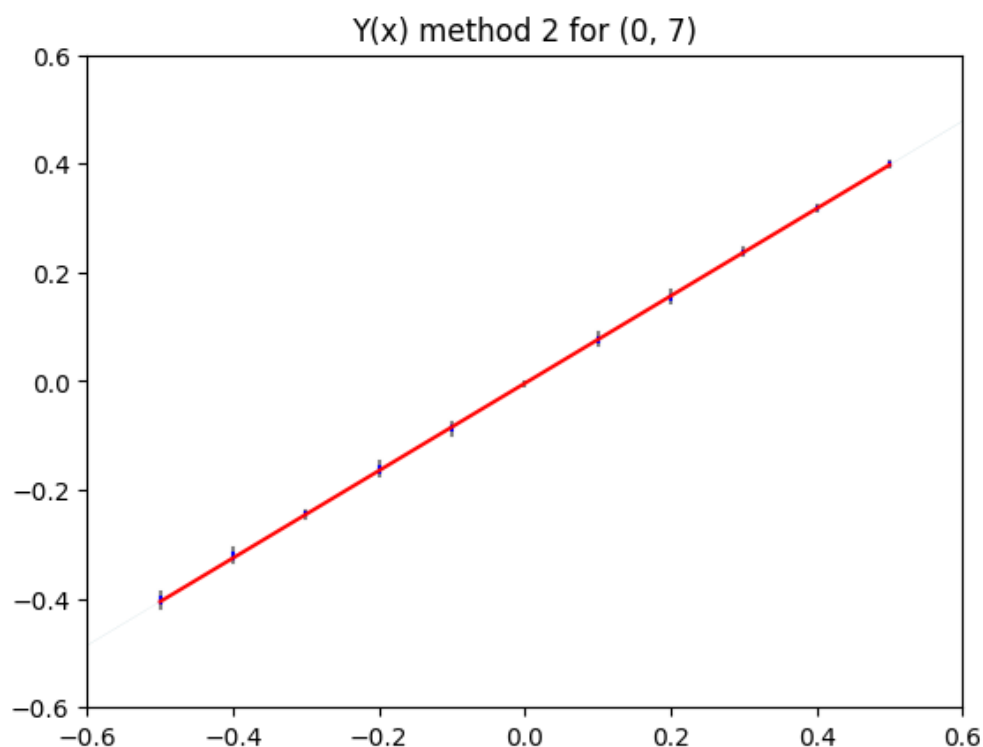


Рис. 8: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 7), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом

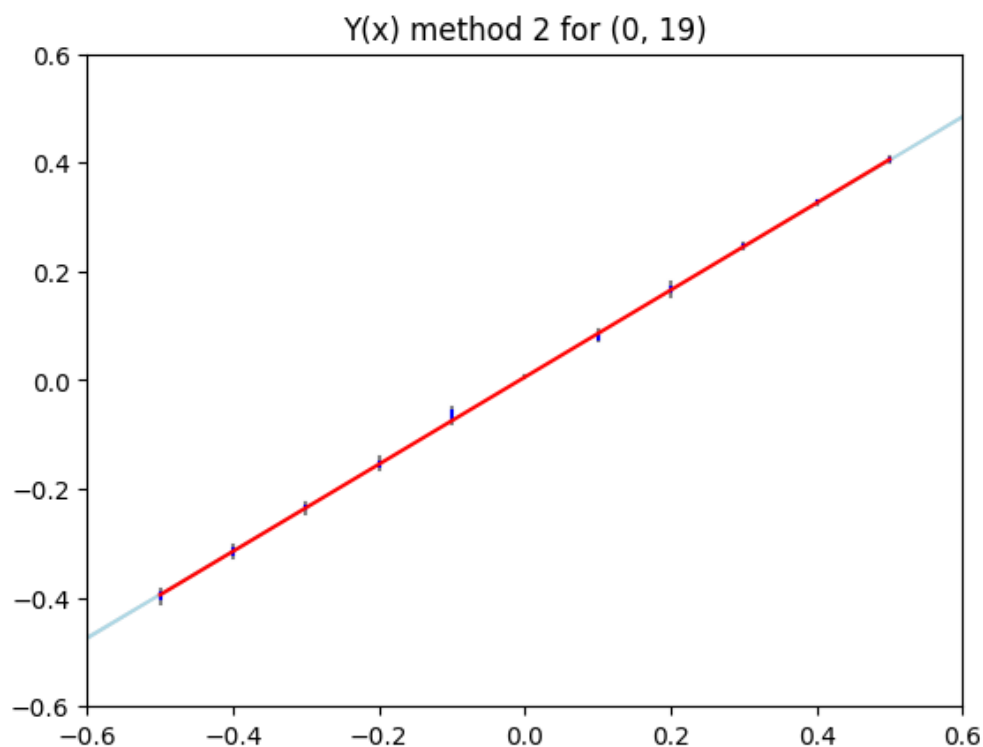


Рис. 9: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 19), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом

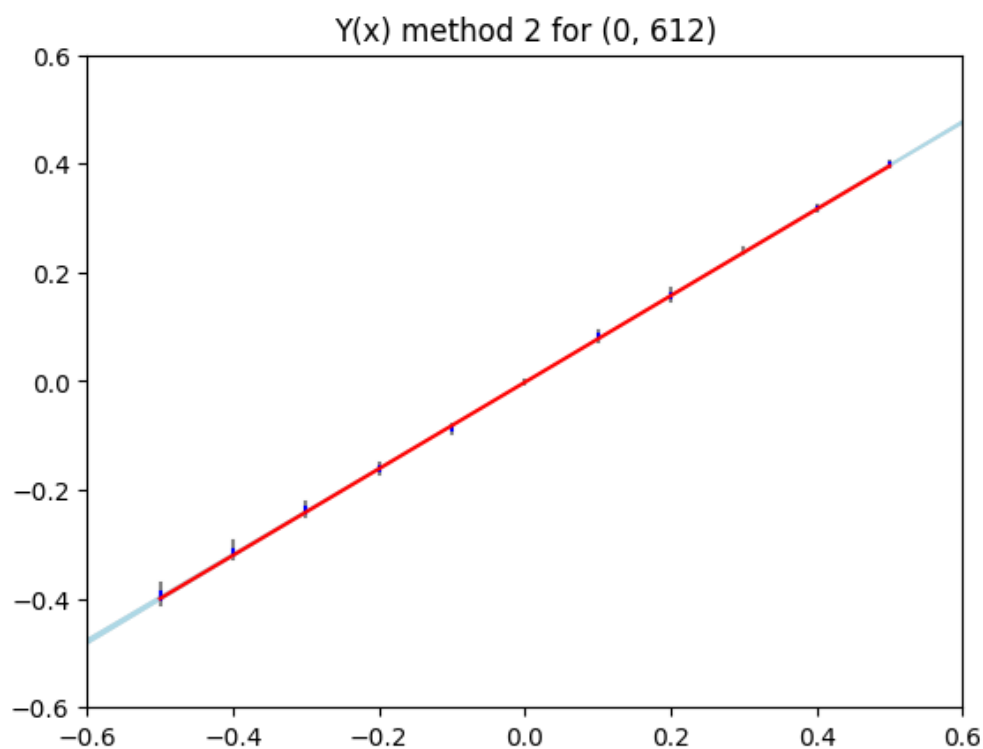


Рис. 10: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 612), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом

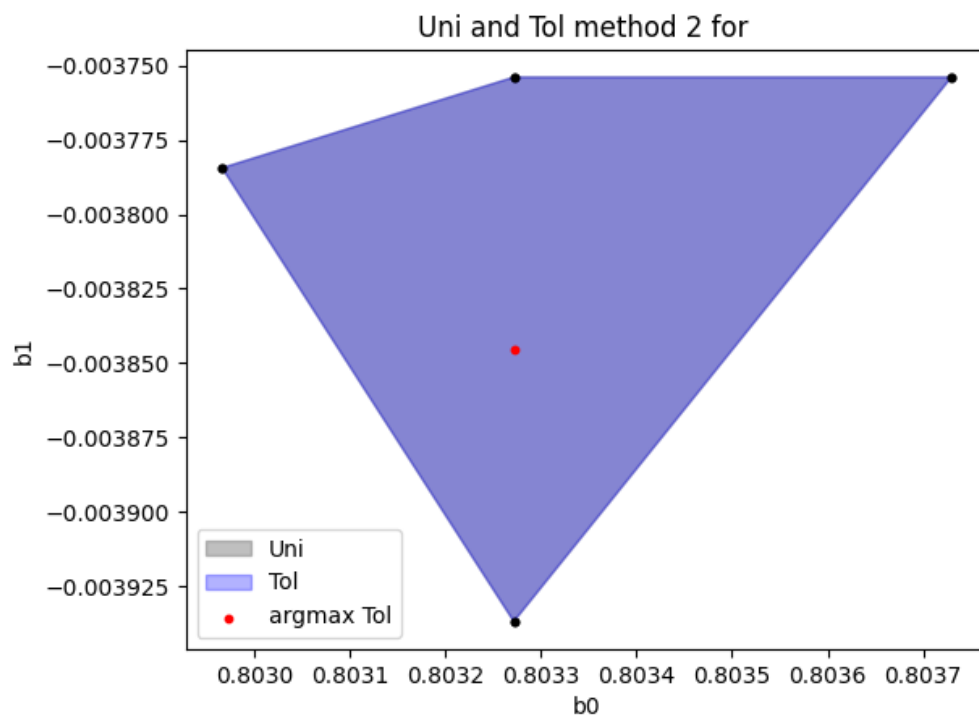
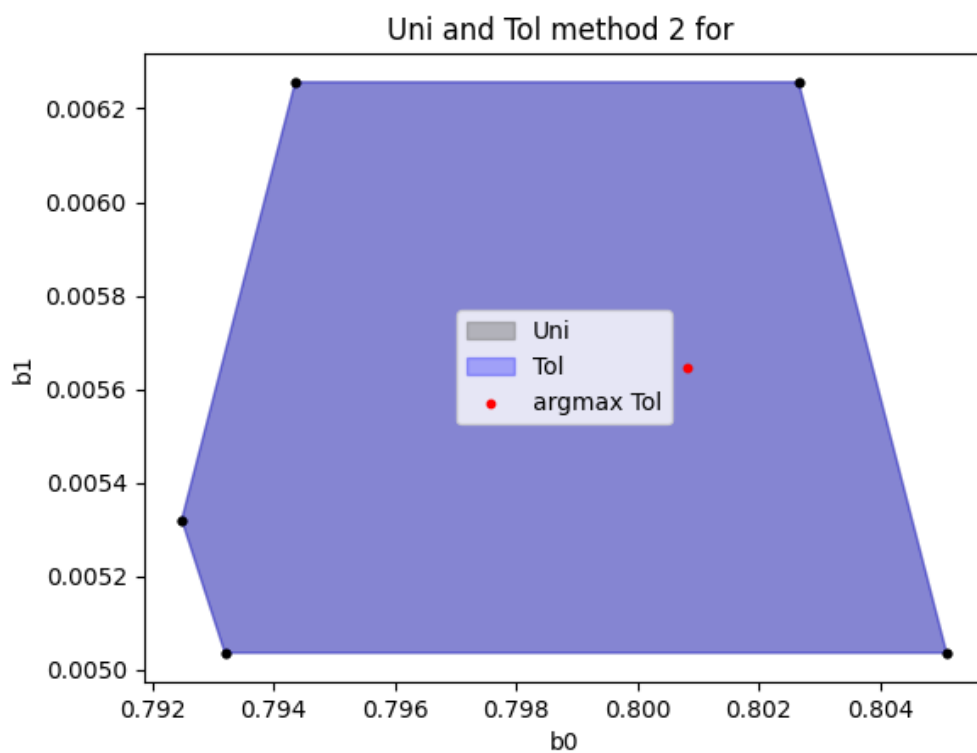
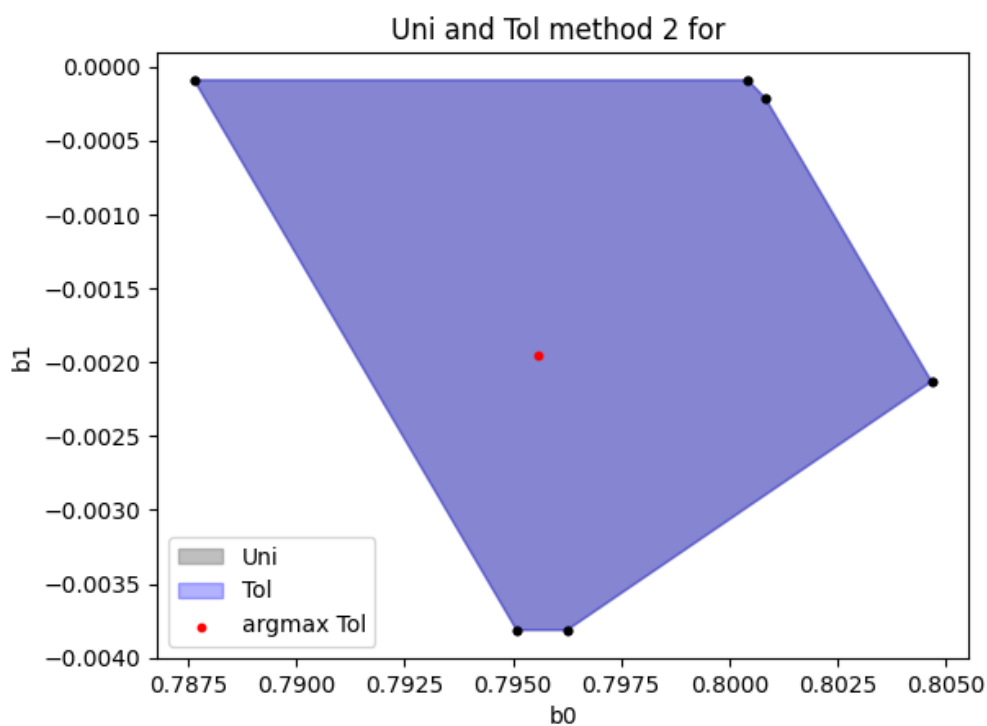


Рис. 11: Tol, Uni и  $\text{argmaxTol}$  для датчика (0, 7)

Рис. 12: Tol, Uni и  $\text{argmax Tol}$  для датчика (0, 19)Рис. 13: Tol, Uni и  $\text{argmax Tol}$  для датчика (0, 612)

Координаты датчика	Метод	$\beta_0$	$\beta_1$	Количество модификаций
(0, 7)	1	0.802	-0.0028	1083
(0, 7)	2	0.803	-0.0038	0
(0, 19)	1	0.806	0.0111	1097
(0, 19)	2	0.801	0.0056	10
(0, 612)	1	0.781	0.0007	1092
(0, 612)	2	0.795	-0.0019	18

Таблица 1: Численные результаты

## 4.2 Результаты для упрощенных синтетических данных

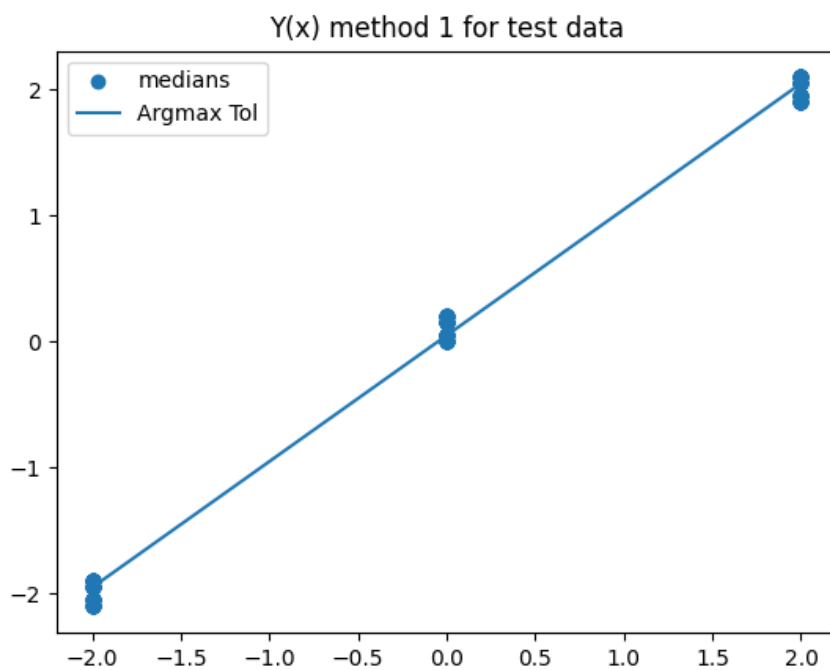


Рис. 14: Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных

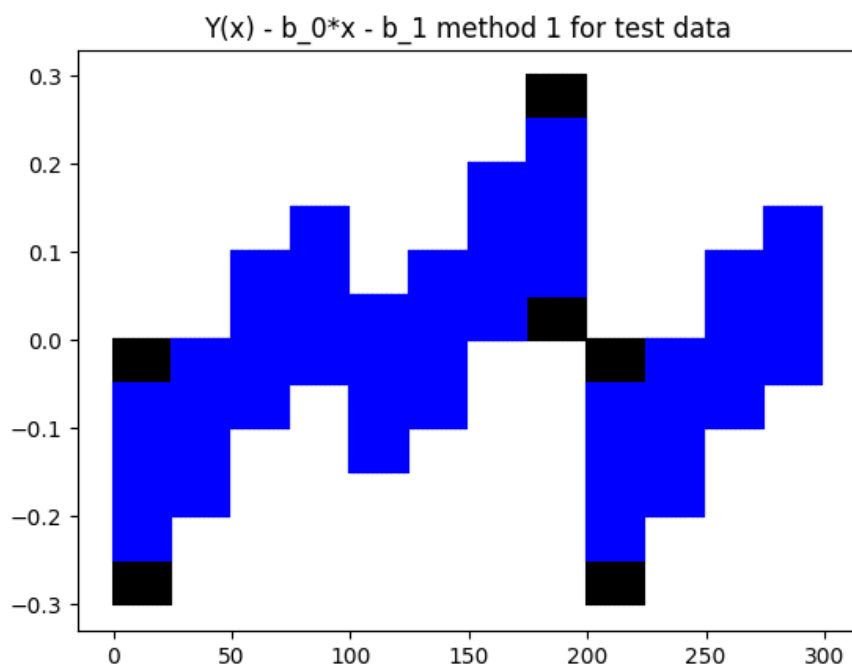


Рис. 15: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных. Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

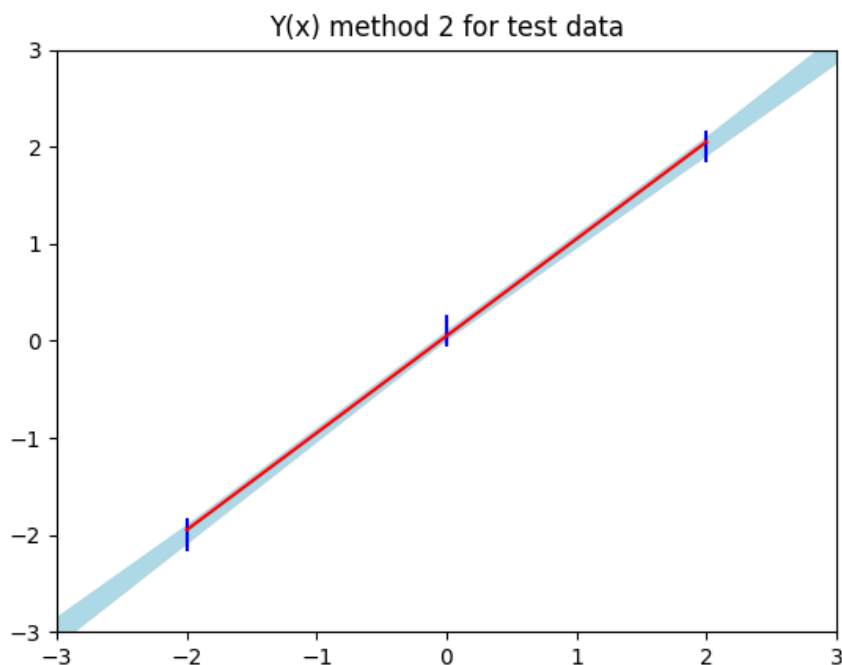


Рис. 16: Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом

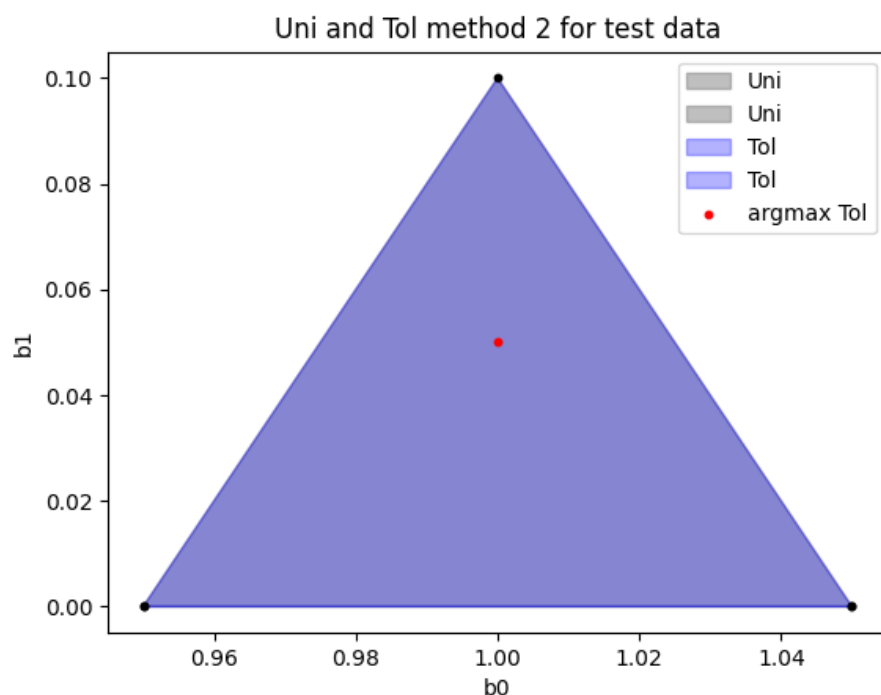


Рис. 17: Tol, Uni и argmaxTol для синтетических данных

## 5 Обсуждение

Исходя из представленных графиков, можно судить о том, что все описанные в теории этапы выполнены правильно. Также можно заметить что результаты полученные методами 1 и 2 являются близкими, но не совпадают. По количеству модифицированных значений в таблице 1 можно заметить, что датчик с координатами  $(0, 7)$  имеет наименьшее число выбросов из рассматриваемых, а датчик с координатами  $(0, 19)$  имеет наибольшее число выбросов из рассматриваемых.

## 6 Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и отчётом:  
<https://github.com/Nembos/interval>