Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

October 21, 2016

Contents

1 Einleitung

Webseite www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php Klausurzulassung: 50% Klausur 18.2.2017 9-12Uhr

2 Mengen und Zahlen

2.1 Logische Regeln und Zeichen

2.1.1 Quantoren

$\forall x$	für alle x
$\exists x$	es gibt (mindestens) ein x
$\exists! x$	es gibt genau ein x

2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \Rightarrow B$: wenn A gilt, gilt auch B, A ist **hinreichend** für B, daraus folgt: B ist **notwendig** für A, Ungültigkeit von B impliziert die Ungültigkeit von A ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
- $A \Leftrightarrow B$: A gilt, genau dann, wenn B gilt

2.1.3 Beweistypen

1. Direkter Schluss $A \Rightarrow B$
   (a) Beispiel m gerade Zahl $\Rightarrow m^2$ gerade Zahl

            i. Beweis m gerade $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $m = 2n \Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2k,\ \text{wobei } k = 2n^2 \in \mathbb{N} \square$

2. Beweis der Transponerten (der Kontraposition) Zum Beweis $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$ $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
    (a) Beispiel Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade
        i. Beweis Wir zeigen: m ist ungerade $\Rightarrow m^2$ ungerade

        $\exists n \in \mathbb{N}:\ m = 2n{+}1 \Rightarrow m^2 = (2n{+}1)^2 = 2k{+}1, k = 2n^2{+}2n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^2$ ungerade$\square$

3. Indirekter Schluss (Beweis durch Wiederspruch) Man nimmt an, dass $A \Rightarrow B$ nicht gilt, das heißt $A \wedge \neg B$ und zeigt, dass dann für eine Aussage C gelten muss $C \Rightarrow \neg C$, also ein Wiederspruch
    (a) Beispiel $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$
        i. Beweis Wir nehmen an, dass $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ Dann folgt: $\exists b, c \in \mathbb{Z}$ teilfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit $a = \frac{b}{c}$ Falls

        $$a^2 = 2 \Rightarrow (\frac{b}{c})^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2 \text{ gerade } \Rightarrow b \text{ ist gerade (schon gezeight) } =$$

        Außerdem $b^2 = 2c^2 \Rightarrow 2c^2 = 4d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c$ ist auch gerade. Also müssen b und c beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet $\square$

2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

1. Summenzeichen Wir definieren für $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m + \ldots + a_n$$

falls $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$$

falls $n < m$ (sogennante leere Summe)

2. Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot \ldots \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

2.2 Mengen

2.2.1 Definition

(Georg cantor 1885) Unger einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (welche die Elemente von M genannt werden), zu einem Ganzen M dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt x feststeht, ab gilt

- $x \in M$ (x Element von M)
- x $\neg\in$ M (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$
$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{ eine Menge } M \text{für die } x \in \ M \Leftrightarrow A(x)$$

2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion $A \subseteq M$ (A ist eine Teilmenge von M)
$$\forall\, x : (x \in A \Rightarrow x \in M)$$
, zum Beispiel $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
-
$$A = B \Leftrightarrow \forall\, x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$
-
$$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge) } \Leftrightarrow A \subset M \wedge A \neq M$$
-
$$\emptyset : \text{ leere Menge } \nexists x : x \in \emptyset$$
. Wir setzen fest, dass $\emptyset$ eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beipsiel
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$
- Durchschnitt
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
- Vereinigung
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
- Differenz (auch Komplement von B in A)
$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_a B \text{ (auch } B^c\text{)}$$