

Lineare Algebra (Vogel)

Robin Heinemann

November 2, 2016

Contents

1	Einleitung	2
1.1	Plenarübung	2
1.2	Moodle	2
1.3	Klausur	2
2	Grundlagen	3
2.1	Naive Aussagenlogik	3
2.2	Beweis	5
2.2.1	beweisen	5
2.2.2	Beweismethoden for diese Implikation $A \Rightarrow B$	5
2.3	Existenz- und Allquantor	6
2.3.1	Existenzquantor	6
2.3.2	Allquantor	7
2.3.3	Negation von Existenz- und Allquantor	7
2.3.4	Spezielle Beweistechniken für Existenz und Allaussagen	7
2.4	Naive Mengenlehre	7
2.4.1	Schreibweise	7
2.4.2	Angabe von Mengen	8
2.4.3	leere Menge	8
2.4.4	Zahlenbereiche	8
2.4.5	Teilmenge	9
2.4.6	Durschnitt	9
2.4.7	Vereinigung	9
2.4.8	Differenz	9
2.4.9	Bemerkung zu Vereinigung und Durschnitt	10
2.4.10	Bemerkung zu Äquivalenz von Mengen	10
2.4.11	Kartesisches Produkt	11

2.4.12	Potenzmenge	11
2.4.13	Kardinalität	11
2.4.14	Bemerkung zu natürlichen Zahlen	12
2.4.15	Prinzip der vollständigen Induktion	12
2.5	Relationen	12
2.5.1	Definiton	12
2.5.2	Eigenschaften von Relationen	13
2.5.3	Halbordnung / Totalordnung	14
2.5.4	Größtes / kleistes Element	14
2.5.5	maximales / minimales Element	15
2.5.6	Äquivalenzrelation	15
2.6	Abbildungen	17
2.6.1	Definition	17
2.6.2	Beispiel	17
2.6.3	Anmerkung über den Begriff der Familie	18
2.6.4	Bild	18
2.6.5	Restriktion	19
2.6.6	Komposition	19
2.6.7	Eigenschaften von Abbildungen	19

1 Einleitung

Übungsblätter/Lösungen: jew. Donnerstag / folgender Donnerstag Abgabe
Donnerstag 9:30 50% der Übungsblätter

1.1 Plenarübung

Aufgeteilt

1.2 Moodle

Passwort: vektorraumhomomorphismus

1.3 Klausur

24.02.2017

2 Grundlagen

2.1 Naive Aussagenlogik

naive Logik: wir verwenden die sprachliche Vorstellung (\neq mathematische Logik: eigne Vorlesung) Eine Aussage ist ein feststehender Satz, dem genau einer der Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" zugeordnet werden kann. Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen kompliziertere Aussagen bilden. Angabe der Wahrheitswertes der zusammengesetzten Aussage erfolgt durch Wahrheitstafeln (liefern den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage, aus dem Wahrheitswert der einzelnen Aussagen). Im folgenden seien A und B Aussagen.

- Negation (NICHT-Verknüpfung)

- Symbol: \neg
- Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

- Beispiel: A : 7 ist eine Primzahl (w) $\neg A$: 7 ist keine Primzahl (f)

- Konjunktion (UND-Verknüpfung)

- Symbol: \wedge
- Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

- Disjunktion (ODER-Verknüpfung)

- Symbol: \vee
- Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

- exklusives oder: $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$
- Beispiel A : 7 ist eine Primzahl (w), B : 5 ist gerade (f)
 - $A \wedge B$ 7 ist eine Primzahl und 5 ist gerade (f)
 - $A \vee B$ 7 ist eine Primzahl oder 5 ist gerade (w)
- Implikation (WENN-DANN-Verknüpfung)
 - Symbol: \Rightarrow
 - Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w
 - Sprechweise: A impliziert B , aus A folgt B , A ist eine hinreichende Bedingung für B (ist $A \Rightarrow B$ wahr, dann folgt aus A wahr, B ist wahr), B ist eine notwendige Bedingung für A (ist $A \Rightarrow B$ wahr, dann kann A nur dann wahr sein, wenn Aussage B wahr ist)
 - Beispiel Es seien $m, n \in \mathbb{N}$
 - * A : m ist gerade
 - * B : mn ist gerade
 - * Dann gilt $\forall m, n \in \mathbb{N} A \Rightarrow B$ wahr
 - Fallunterscheidung:
 - m gerade, n gerade, dann ist A wahr, B wahr, d.h. $A \Rightarrow B$ wahr
 - m gerade, n ungerade, dann ist A wahr, B falsch, d.h. $A \Rightarrow B$ falsch
 - m ungerade, n gerade, dann ist A falsch, B wahr, d.h. $A \Rightarrow B$ wahr
 - m ungerade, n ungerade, dann ist A falsch, B falsch, d.h. $A \Rightarrow B$ wahr
- Äquivalenz (GENAU-DANN-WENN-Verknüpfung)
 - Symbol \Leftrightarrow
 - Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

- Sprechweise: A gilt genau dann, wenn B gilt, A ist hinreichend und notwendig für B

Die Aussagen $A \Leftrightarrow B$ und $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ sind gleichbedeutend:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

- Beispiel: Es sei n eine ganze Zahl

$A : n - 2 > 1$

$B : n > 3$

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $A \Leftrightarrow B$ $C : n > 0$

$D : n^2 > 0$

Für $n = -1$ ist die Äquivalenz $C \Leftrightarrow$ falsch (C falsch, D wahr)

Für alle ganzen Zahlen n gilt zumindest die Implikation $C \Rightarrow D$

2.2 Beweiss

Mathematische Sätze, Bemerkungen, Folgerungen, etc. sind meistens in Form wahrer Implikationen formuliert

2.2.1 beweisen

Begründen warum diese Implikation wahr ist

2.2.2 Beweismethoden for diese Implikation $A \Rightarrow B$

- direkter Beweis ($A \Rightarrow B$)
- Beweis durch Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
- Widerspruchsbeweis ($\neg(A \wedge \neg B)$)

Diese sind äquivalent zueinander

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

1. Beispiel m, n natürliche Zahlen

$$A : m^2 < n^2$$

$$B : m < n$$

Wir wollen zeigen, dass $A \Rightarrow B$ für alle natürlichen Zahlen m, n wahr ist

- direkter Beweis:

$$A : m^2 < n^2 \Rightarrow 0 < n^2 - m^2 \Rightarrow 0 < (n-m) \underbrace{(n+m)}_{>0} \Rightarrow 0 < n-m \Rightarrow m < n$$

- Beweis durch Kontraposition:

$$\neg B : m \geq n \Rightarrow m^2 \geq nm \wedge mn \geq n^2 \Rightarrow m^2 \geq n^2 \Rightarrow \neg A$$

- Beweis durch Widerspruch:

$$A \wedge \neg B \Rightarrow m^2 < n^2 \wedge n \leq m \Rightarrow m^2 < n^2 \wedge mn \leq m^2 \wedge n^2 \leq mn \Rightarrow mn \leq m^2 < n^2 \leq mn$$

Widerspruch

2.3 Existenz- und Allquantor

2.3.1 Existenzquantor

$\exists x A(x)$ Aussage, die von Variable x abhängt

$\exists x : A(x)$ ist gleichbedeutend mit "Es existiert ein x , für das $A(x)$ wahr ist" (hierbei ist "existiert ein x " im Sinne von "existiert mindestens ein x " zu verstehen)

Beispiel:

$$\exists n \in \mathbb{N} : n > 5 \quad (\text{w})$$

$\exists! x : A(x)$ ist gleichbedeutend mit "Es existiert genau ein x , für das $A(x)$ wahr ist" \

2.3.2 Allquantor

$\forall x : A(x)$ ist gleichbedeutend mit "Für alle x ist $A(x)$ wahr" Beispiel:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 4n \text{ ist gerade}$$

2.3.3 Negation von Existenz- und Allquantor

$$\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$$

$$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$$

2.3.4 Spezielle Beweistechniken für Existenz und Allaussagen

- Angabe eines Beispiel, um zu zeigen, dass eine Existenzaussage wahr ist.

Beispiel:

$$\exists n \in \mathbb{N} : n > 5 \text{ ist wahr, denn für } n = 7 \text{ ist die Aussage } n > 5 \text{ wahr}$$

- Angabe eines Gegenbeispiel, um zu zeigen, dass eine Allaussage falsch ist.

Beispiel:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 5 \text{ ist falsch, dann für } n = 7 \text{ ist die Aussage } n \leq 5 \text{ falsch}$$

2.4 Naive Mengenlehre

Mengenbegriff nach Cantor:

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (die Elemente genannt werden) zu einem Ganzen

2.4.1 Schreibweise

- $x \in M$, falls x ein Element von M ist
- $x \notin M$, falls x kein Element von M ist
- $M = N$, falls M und N die gleichen Elemente besitzen, $M \subseteq N \wedge N \subseteq M$

2.4.2 Angabe von Mengen

- Reihenfolge ist irrelevant ($\{1,2,3\}=\{1,3,2\}$)
- Elemente sind wohlunterschieden $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$
- Auflisten der Elemente $M = \{a, b, c, \dots\}$
- Beschreibung der Elemente durch Eigenschaften: $M = \{x \mid E(x)\}$
(Elemente x, für die E(x) wahr)
 - Beispiel:

$$\{2, 4, 6, 8\} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ gerade}, 1 < x < 10\}$$

2.4.3 leere Menge

Die leere Menge \emptyset enthält keine Elemente

1. Beispiel

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < -5\} = \emptyset$$

2.4.4 Zahlenbereiche

Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

Menge der natürlichen Zahlen mit Null:

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Menge der Ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2\}$$

Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Menge der reellen Zahlen: \mathbb{R}

2.4.5 Teilmenge

A, B seien Mengen.

A heißt Teilmenge von B ($A \subseteq B$) $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \forall x \in A : x \in B$ A heißt echte Teilmenge von B ($A \subset B$) $\stackrel{\text{Def}}{\iff} A \subseteq B \wedge A \neq B$

1. Anmerkung Offenbar gilt für Mengen A, B :

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

\emptyset ist Teilmenge jeder Menge

2. Beispiel

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

2.4.6 Durchschnitt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

1. Beispiel

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{3, 4, 6, 7\}, A \cap B = \{3, 7\}$$

2.4.7 Vereinigung

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

1. Beispiel

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{3, 4, 6, 7\}, A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

2.4.8 Differenz

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Im Fall $B \subseteq A$ nennt man $A \setminus B$ auch das Komplement von B in A und schreibt $\downarrow_A(B) = A \setminus B$

1. Beispiel

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{3, 4, 6, 7\}, A \setminus B = \{2, 5\}$$

2.4.9 Bemerkung zu Vereinigung und Durchschnitt

A, B seien zwei Mengen. Dann gilt

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1. Beweis

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

" \subseteq " Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann ist $x \in A \wedge x \in B \cup C$

- 1. Fall: $x \in A \wedge x \in B$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- 2. Fall $x \in A \wedge x \in C$

$$\Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Damit ist " \subseteq " gezeigt. " \supseteq " Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

Damit ist " \supseteq " gezeigt.

2.4.10 Bemerkung zu Äquivalenz von Mengen

Seien A, B Mengen, dann sind äquivalent:

1. $A \cup B = B$

2. $A \subseteq B$

1. Beweis Wir zeigen $1) \Rightarrow 2)$ und $2) \Rightarrow 1)$.

$$1) \Rightarrow 2) : \text{Es gelte } A \cup B = B, \text{ zu zeigen ist } A \subseteq B \text{ Sei } x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cup B = B$$

$$2) \Rightarrow 1) : \text{Es gelte } A \subseteq B, \text{ zu zeigen ist } A \cup B = B$$

" \subseteq ": Sei $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B$ " \supseteq ": $B \subseteq A \cup B$
klar

2.4.11 Kartesisches Produkt

Seien A, B Mengen

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

heißt das kartesische Produkt von A und B . Hierbei ist $(a, b) = (a', b') \stackrel{\text{Def}}{\iff} a = a' \wedge b = b'$

1. Beispiel

•

$$\{1, 2\} \times \{1, 3, 4\} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$$

•

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

2.4.12 Potenzmenge

A sei eine Menge

$$\mathcal{P}(A) := \{M \mid M \subseteq A\}$$

heißt die Potenzmenge von A

1. Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

2.4.13 Kardinalität

M sei eine Menge. Wir setzen

$$|M| := \begin{cases} n & \text{falls } M \text{ eine endliche Menge ist und } n \text{ Elemente enthält} \\ \infty & \text{falls } M \text{ nicht endlich ist} \end{cases}$$

$|M|$ heißt Kardinalität von A

1. Beispiel

- $|\{7, 11, 16\}| = 3$
- $|\mathbb{N}| = \infty$

2.4.14 Bemerkung zu natürlichen Zahlen

Für die natürlichen Zahlen gilt das Induktionsaxiom Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge, für die gilt:

$$1 \in M \wedge \forall n \in M : n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$$

dann ist $M = \mathbb{N}$

2.4.15 Prinzip der vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Die Aussagen $A(n)$ gelten für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn man folgendes zeigen kann:

- (IA) $A(1)$ ist wahr
- (IS) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$

Der Schritt (IA) heißt Induktionsanfang, die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ heißt Induktionsschritt

1. Beweis Setze $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}$ Wegen (IA) ist $1 \in M$, wegen (IS) gilt: $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$
Nach Induktionsaxiom folgt $M = \mathbb{N}$, das heißt $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$
2. Beispiel Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage: $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Wir zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, und zwar durch vollständige Induktion

- (IA) $A(1)$ ist wahr, denn $1 = \frac{1(1+1)}{2}$
- (IS) zu zeigen: $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$
Es gelte $A(n)$, das heißt $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ist wahr

$$\Rightarrow 1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \square$$

2.5 Relationen

2.5.1 Definiton

Eine Relation auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$ Wir schreiben $a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff} (a, b) \in R$ ("a steht in Relation zu b")

- anschaulich: eine Relation auf M stellt eine "Beziehung" zwischen den Elementen von M her.
 - Für $a, b \in M$ gilt entweder $a \sim b$ oder $a \not\sim b$, denn: entweder ist $(a, b) \in R$ oder $(a, b) \notin R$
1. Anmerkung Aufgrund der obigen Notation spricht man in der Regel von Relation " \sim " auf M als von der Relation $R \subseteq M \times M$
 2. Beispiel $M = \{1, 2, 3\}$. Durch $R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3)\} \subseteq M \times M$ ist eine Relation auf M gegeben. Es gilt dann: $1 \sim 1, 1 \sim 2, 3 \sim 3$ (aber zum Beispiel: $1 \not\sim 3, 2 \not\sim 1, 2 \not\sim 3$)

2.5.2 Eigenschaften von Relationen

M Menge, \sim Relation auf M

\sim heißt:

- reflexiv $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$ für alle $a \in M$ gilt $a \sim a$
 - symmetrisch $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$ für alle $a, b \in M$ gilt: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
 - antisymmetrisch $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$ für alle $a, b \in M$ gilt: $a \sim b \wedge b \sim a \Rightarrow a = b$
 - transitiv $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$ für alle $a, b, c \in M$ gilt: $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$
 - total $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$ für alle $a, b \in M$ gilt: $a \sim b \vee b \sim a$
1. Beispiel Sei M die Menge der Studierenden in der LA1-Vorlesung
 - (a) Für $a, b \in M$ sei $a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ a hat den selben Vornamen wie b
 \sim reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, transitiv, nicht total
 - (b) Für $a, b \in M$ sei $a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ Matrikelnummer von a ist kleiner gleich als die Matrikelnummer von b
 \sim ist reflexiv, nicht symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, total
 - (c) Für $a, b \in M$ sei $a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ a sitzt auf dem Platz recht von b
 \sim ist nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht transitiv, nicht total

2.5.3 Halbordnung / Totalordnung

\sim heißt

- Halbordnung auf $M \stackrel{\text{Def}}{\iff} \sim$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv
- Totalordnung auf $M \stackrel{\text{Def}}{\iff} \sim$ ist eine Halbordnung und \sim ist total

In diesen Fällen sagt man auch: Das Tupel (M, \sim) ist eine halbgeordnete, beziehungsweise totalgeordnete Menge.

1. Beispiel

- (a) \leq auf \mathbb{N} ist eine Totalordnung
 - (b) Sei $M = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. \subseteq ist auf M eine Halbordnung, aber keine Totalordnung (es ist zum Beispiel weder $\{1\} \subseteq \{3\}$ noch $\{3\} \subseteq \{1\}$)
2. Anmerkung Wegen der Analogie zur \leq auf \mathbb{N} bezeichnen wir Halbordnungen in der Regel mit \leq

2.5.4 Größtes / kleinstes Element

(M, \leq) halbgeordnete Menge, $a \in M$
 a heißt ein

- größtes Element von $M \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ Für alle $x \in M$ gilt $x \leq a$
- kleinstes Element von $M \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ Für alle $x \in M$ gilt $a \leq x$

1. Bemerkung (M, \leq) halbgeordnete Menge

Dann gilt: Existiert in M ein größtes (beziehungsweise kleinstes) Element, so ist dieses eindeutig bestimmt

- (a) Beweis Es seien $a, b \in M$ größte Elemente von M
 $\Rightarrow x \leq a$ für alle $x \in M$, also auch $b \leq a$
Außerdem: $x \leq b$ für alle $x \in M$, also auch $a \leq b$
 $\xrightarrow{\text{Antisymmetrie}} a = b$

Analog für kleinstes Element

- (b) Anmerkung Dies sagt nichts darüber aus, ob ein größtes (beziehungsweise kleinstes) Element in M überhaupt existiert.

2. Beispiel

- (a) In (\mathbb{N}, \leq) ist 1 das kleinste Element, ein größtes Element gibt es nicht
- (b) $(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}, \subseteq)$ ist eine halbgeordnete Menge ohne kleinstes beziehungsweise größtes Element

2.5.5 maximales / minimales Element

(M, \leq) halbgeordnete Menge, $a \in M$
 a heißt ein

- maximales Element von $M \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ für alle $x \in M$ gilt: $a \leq x \Rightarrow a = x$
 - minimales Element von $M \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ für alle $x \in M$ gilt: $x \leq a \Rightarrow a = x$
1. Beispiel In $(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}, \subseteq)$ sind $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ maximale Elemente und $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ sind minimale Elemente.
 2. Bemerkung (M, \leq) halbgeordnete Menge, $a \in M$
 Dann gilt: Ist a ein größtes (beziehungsweise kleinstes) Element von M , dann ist a ein maximales (beziehungsweise minimales) Element von M .

- (a) Beweis Sei a ein größtes Element von M .
 zu zeigen ist: Für alle $x \in M$ gilt $a \leq x \Rightarrow a = x$ Sei $x \in M$ mit $a \leq x$. Da a größtes Element von M ist, gilt auch $x \leq a$
 $\stackrel{\text{Antisymmetrie}}{\iff} a = x$
 Analog für kleinstes Element.

2.5.6 Äquivalenzrelation

M Menge, \sim auf M

\sim heißt Äquivalenzrelation $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
 In dem Fll sagen wir für $a \sim b$ auch a ist äquivalent zu b . Für $a \in M$ heißt $[a] := \{b \in M \mid b \sim a\}$ heißt die Äquivalentklasse von a . Elemente aus $[a]$ nennt man Vertreter oder Repräsentanten von a

1. Beispiel M Menge aller Bürgerinnen und Bürger Deutschlands.
 Wir definieren für $a, b \in M$ $a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff} a$ und b sind im selben Jahr geboren.
 \sim ist ein Äquivalenzrelation.
 Jérôme Boateng wurde 1988 geboren. $[\text{Jérôme Boateng}] = \{b \in$

$M \mid b$ ist im selben Jahr geboren wie Jérôme Boateng} = $\{b \in M \mid b \text{ wurde 1988 geboren}\}$ Weitere Vertreter von $[\text{Jérôme Boateng}]$ sind zum Beispiel Mesut Özil, Mats Hummels. Es ist $[\text{Jérôme Boateng}] = [\text{Mesut Özil}] = [\text{Mats Hummels}]$. Man sieht in diesem Beispiel: Die Menge M zerfällt komplett in verschiedene Äquivalenzklassen:

- Jeder Bürger / jede Bürgerin Deutschlands ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten
- Jede zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt (haben leeren Durchschnitt)

2. Bemerkung M Menge, \sim Äquivalenzrelation auf M

Dann gilt:

- (a) Jedes Element von M liegt in genau einer Äquivalenzklasse
- (b) Je zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt

Man sagt auch: Die Äquivalenzklassen bezüglich " \sim " bilden eine **Partition** von M .

(a) Beweis

i. Sei $a \in M$

zu zeigen: Es gibt genau eine Äquivalenzklasse, in der a liegt

A. Es gibt eine Äquivalenzklasse, in der a liegt, denn $a \in [a]$, denn $a \sim a$

B. Ist $a \in [b]$ und $a \in [c]$, dann ist $[b] = [c]$ (d.h. a liegt in höchstens einer Äquivalenzklasse)

denn: Seien $b, c \in M$ mit $a \in [b]$ und $a \in [c] \Rightarrow a \sim b$

und $a \sim c \xrightarrow{\text{Symmetrie}} b \sim a \text{ und } a \sim c \xrightarrow{\text{Transitivität}} b \sim c$

Behauptung $[b] = [c]$ denn: " \subseteq " Sei $x \in [b] \Rightarrow x \sim b$

$b \xrightarrow{\text{Transitivität}} x \sim c \Rightarrow x \in [c]$ denn: " \supseteq " Sei $x \in [c] \Rightarrow$

$x \sim c \xrightarrow{\text{Transitivität}} x \sim b \Rightarrow x \in [b]$

ii. Sind $b, c \in M$ mit $[b] \cap [c] \neq \emptyset$, dann existiert ein $a \in [b] \cap [c]$, und es folgt wie in 2.:

$[b] = [c]$ Für $b, c \in M$ gilt also entweder $[b] \cap [c] = \emptyset$ oder $[b] = [c]$ \square

3. Faktormenge M Menge, \sim Äquivalenzrelation auf M $M / \sim := \{[a] \mid a \in M\}$ (Menge der Äquivalenzklassen) heißt die Faktormenge (Quotientenmenge) von M nach \sim

(a) Beispiel

$$M = \{1, 2, 3, -1, -2, -3\}$$

Für $a, b, c \in M$ setzen wir $a \sim b \stackrel{\text{Def.}}{\iff} |a| = |b|$ Das ist eine Äquivalenzrelation auf M Es ist $\sim^1 = \{1, -1\}, \sim^2 = \{2, -2\}, \sim^3 = \{3, -3\}$
Somit: $M/\sim := \{\sim^1, \sim^2, \sim^3\} = \{\{1, -1\}, \{2, -2\}, \{3, -3\}\}$

(b) Anmerkung Der Übergang zur Äquivalenzklassen soll (für eine jeweils gegebene Relation) irrelevante Informationen abstreifen.

2.6 Abbildungen

naive Definition:

Eine Abbildung f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem $n \in M$ genau ein Element aus N zuordnet, dieses wird mit $f(n)$ bezeichnet. **Notation:**

$$f : M \rightarrow N, m \mapsto f(m)$$

Zwei Abbildungen $f, g : M \rightarrow N$ sind gleich, wenn gilt $\forall n \in M : f(n) = g(n)$ M heißt die Definitionsmenge von f , N heißt die Zielmenge von f

2.6.1 Definition

Eine Abbildung f von M nach N ist ein Tupel (M, N, G_f) , wobei G_f eine Teilmenge von $M \times N$ mit der Eigenschaft ist, dass für jedes Element $m \in M$ genau ein Element $n \in N$ mit $(m, n) \in G_f$ existiert. (für dieses Element n schreiben wir auch $f(m)$). G_f heißt der Graph von f .

2.6.2 Beispiel

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x + 1)$
3. M Menge, $id_M : M \rightarrow M, m \mapsto m$ heißt Identität (identische Abbildung) auf M
4. I, M Mengen: Eine über I indizierte Familie von Elementen von M ist eine Abbildung:
 $m : I \rightarrow M, i \mapsto m(i) =: m_i$. Wir schreiben für die Familie auch kurz $(m_i)_{i \in I}$. I heißt Indexmenge der Familie.

¹DEFINITION NOT FOUND.

²DEFINITION NOT FOUND.

³DEFINITION NOT FOUND.

5. Spezialfall von 4.: $I = \mathbb{N}, M = \mathbb{R} : ((m_i)_{i \in \mathbb{N}})$ nennt man auch Folge reeller Zahlen.

2.6.3 Anmerkung über den Begriff der Familie

Über den Begriff der Familie lassen sich diverse Konstruktionen aus der naiven Mengenlehre verallgemeinern. Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, dann ist:

$$\begin{aligned}\cup_{i \in I} M_i &:= \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\} \\ \cap_{i \in I} M_i &:= \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\} \\ \prod_{i \in I} M_i &:= \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : x_i \in M_i\}\end{aligned}$$

2.6.4 Bild

m, N Mengen, $f : M \rightarrow N$ Abbildung.

Sind $m \in M, n \in N$ mit $n = f(m)$ dann nennen wir n ein **Bild** von m unter f und wir nennen m ein **Urbild** von n unter f .

1. Anmerkung In obiger Situation ist das Bild von m unter f eindeutig bestimmt (nach der Definition einer Abbildung) Urbilder sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, und im Allgemeinen besitzt nicht jedes Element aus N ein Urbild.
2. Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, dann ist $4 = f(2) = f(-2)$, das heißt 2 und -2 sind Urbilder von 4, das Element -5 hat kein Urbild unter f , denn es existiert kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -5$
3. Definition M, N Mengen, $f : M \rightarrow N$ Abbildung, $A \subseteq M, B \subseteq N$
 $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq N$ heißt das Bild von A unter f .
 $f^{-1}(B) := \{m \in M \mid f(m) \in B\} \subseteq M$ heißt das Urbild von B unter f

(a) Beispiel

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \\ f(\{1, 2, 3\}) &= \{1, 4, 9\} \\ f^{-1}(\{4, -5\}) &= \{2, -2\} \\ f^{-1}(\{4\}) &= \{2, -2\} \\ f^{-1}(\{-5\}) &= \emptyset \\ f(\mathbb{R}) = x^2 \mid x \in \mathbb{R} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} =: \mathbb{R}_{\geq 0}\end{aligned}$$

2.6.5 Restriktion

M, N Mengen, $f : M \rightarrow N$ Abbildung, $A \subseteq M$

$$f|_A : A \rightarrow N, m \mapsto f(m)$$

heißt die Restriktion von f auf A . Ist $B \subseteq N$ mit $f(A) \subseteq B$, dann setzen wir

$$f|_A^B : A \rightarrow B, m \mapsto f(m)$$

Ist $f(M) \subseteq B$ dann setzen wir:

$$f|^B := f|_M^B, M \rightarrow B, m \mapsto f(m)$$

2.6.6 Komposition

L, M, N Mengen, $f : L \rightarrow M, g : M \rightarrow N$ Abbildung

$$g \circ f : L \rightarrow N, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

heißt die Komposition (Hintereinanderausführung) von f und g

1. Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 1 \\ \Rightarrow g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

2. Assoziativität L, M, N, P Mengen, $f : L \rightarrow M, g : M \rightarrow N, h : N \rightarrow P$
Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

das heißt die Verknüpfung von Abbildungen ist assoziativ.

(a) Beweis Für $x \in L$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) \square$$

2.6.7 Eigenschaften von Abbildungen

M, N Mengen, $f : M \rightarrow N$ Abbildung

1. Injektivität f heißt injektiv:

$$\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall m_1, m_2 \in M : f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow \forall m_1, m_2 \in M : m_1 \neq m_2 \Rightarrow f(m_1) \neq f(m_2)$$

2. Surjektivität f heißt surjektiv:

$$\stackrel{\text{Def}}{\iff} \forall n \in M : \exists m \in M : f(m) = n \iff f(M) = N$$

3. Bijektivität f heißt bijektiv: $\stackrel{\text{Def}}{\iff} f$ ist injektiv und surjektiv

4. Beispiel

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist:

- nicht injektiv, denn $f(2) = f(-2)$, aber $2 \neq -2$
- nicht surjektiv, denn es existiert kein $m \in \mathbb{R}$ mit $f(m) = -1$
- nicht bijektiv

(b) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist:

- injektiv, denn für $m_1, m_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1^2 = m_2^2 \xrightarrow{m_1, m_2 > 0} m_1 = m_2$
- nicht surjektiv, denn es existiert kein $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(m) = -1$
- nicht bijektiv

(c) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ ist:

- injektiv, denn für $m_1, m_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1^2 = m_2^2 \xrightarrow{m_1, m_2 > 0} m_1 = m_2$
- surjektiv, denn für $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $f(\sqrt{m}) = (\sqrt{m})^2 = m$
- bijektiv

5. Bemerkung M, N Mengen, $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow M$ mit $g \circ f = id_M$
Dann ist f injektiv und g surjektiv.

(a) Beweis

i. f ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} \text{Seien } m_1, m_2 \in M \text{ mit } f(m_1) = f(m_2) &\Rightarrow g(f(m_1)) = g(f(m_2)) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(m_1) = (g \circ f)(m_2) \Rightarrow id_M(m_1) = id_M(m_2) \\ &\Rightarrow m_1 = m_2 \end{aligned}$$

ii. g ist surjektiv, denn:

$$\text{Sei } m \in M \text{ Dann ist } m = id_M(m) = (g \circ f)(m) = g(f(m))$$