Lineare Algebra (Vogel)

Robin Heinemann

October 21, 2016

Contents

1 Einleitung **2**
1.1 Plenarübung 2
1.2 Moodle 2
1.3 Klausur 2

2 Grundlagen **2**
2.1 Naive Aussagenlogik 2
2.2 Beweis 5
2.2.1 beweisen 5
2.2.2 Beweismethoden for diese Implikation $A \Rightarrow B$ 5
2.3 Existenz- und Allquantor 6
2.3.1 Existenzquantor 6
2.3.2 Allquantor 6
2.3.3 Negation von Existenz- und Allquantor 6
2.3.4 Spezielle Beweistechniken für Existenz und Allaussagen 7
2.4 Naive Mengenlehre 7
2.4.1 Schreibweise 7
2.4.2 Angabe von Mengen 7
2.4.3 leere Menge 8
2.4.4 Zahlenbereiche 8
2.4.5 Teilmenge 8
2.4.6 Durschnitt 9
2.4.7 Vereinigung 9
2.4.8 Differenz 9
2.4.9 Bemerkung zu Vereinigung und Durschnitt 9
2.4.10 Bemerkung zu Äquivalenz von Mengen 10
2.4.11 Kartesisches Produkt 10

2.4.12 Potenzmenge 10
2.4.13 Kardinalität 11
2.4.14 Bemerkung zu natürlichen Zahlen 11
2.4.15 Prinzip der vollständigen Induktion 11

1 Einleitung

Übungsblätter/Lösungen: jew. Donnerstag / folgender Donnerstag Abgabe Donnerstag 9:30 50% der Übungsblätter

1.1 Plenarübung

Aufgeteilt

1.2 Moodle

Passwort: vektorraumhomomorphismus

1.3 Klausur

24.02.2017

2 Grundlagen

2.1 Naive Aussagenlogik

naive Logik: wir vewenden die sprachliche Vorstellung ($\neq$ mathematische Logik: eigne Vorlesung) Eine Aussage ist ein festehender Satz, dem genau einer der Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" zugeordnet werden kann. Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen kompliziertere Aussagen bilden. Angabe der Wahrheitswertes der zusammengesetzten Aussage erfolgt duch Wahrheitstafeln (liefern den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage, aus dem Wahrheitswert der einzelnen Aussagen). Im folgenden seien A und B Aussagen.

- Negation (NICHT-Verknüpfung)
  - Symbol: $¬
  - Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

  - Beispiel: A: 7 ist eine Primzahl (w) $\neg A$: 7 ist keine Primzahl (f)

- Konjunktion (UND-Verknüpfung)
  - Symbol $\wedge$
  - Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

- Disjunktion (ODER-Verknüpfung)
  - Symbol: $\vee$
  - Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

  - exklusives oder: $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$

- Beispiel A: 7 ist eine Primzahl (w), B: 5 ist gerade (f)
  - $A \wedge B$ 7 ist eine Primzahl und 5 ist gerade (f)
  - $A \vee B$ 7 ist eine Primzahl oder 5 ist gerade (w)

- Implikation (WENN-DANN-Verknüpfung)
  - Symbol: $\Rightarrow$
  - Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

- Sprechweise: A impliziert B, aus A folgt B, A ist eine hinreichende Bedingung für B (ist $A \Rightarrow B$ wahr, dann folgt aus A wahr, B ist wahr), B ist eine notwendige Bedingung für A (ist $A \Rightarrow B$ wahr, dann kann A nur dann wahr sein, wenn Aussage B wahr ist)
- Beispiel Es seinen $m, n \in \mathbb{N}$
  * A: m ist gerade
  * B: mn ist gerade
  * Dann gilt $\forall\, m, n \in \mathbb{N}\ A \Rightarrow B$ wahr
    Fallunterscheidung:
    · m gerade, n gerade, dann ist A wahr, B wahr, d.h. $A \Rightarrow B$ wahr
    · m gerade, n ungerade, dann ist A wahr, B wahr, d.h. $A \Rightarrow B$ wahr
    · m ungerade, n gerade, dann ist A falsch, B wahr, d.h. $A \Rightarrow B$ wahr
    · m ungerade, n ungerade, dann ist A falsch, B falsh, d.h. $A \Rightarrow B$ wahr

- Äquivalenz (GENAU-DANN-WENN-Verknüpfung)
  - Symbol $\Leftrightarrow$
  - Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow$ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

  - Sprechweise: A gilt genau dann, wenn B gilt, A ist hinreichend und notwendig für B
    Die Aussagen $A \Leftrightarrow B$ und $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ sind gleichbedeutend:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

– Beispiel: Es sei n eine ganze Zahl
  $A: \; n - 2 > 1$
  $B: \; n > 3$
  $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt $A \Leftrightarrow B$ $C: \; n > 0$
  $D: \; n^2 > 0$
  Für $n = -1$ ist die Äquivalenz $C \Leftrightarrow$ falsch (C falsch, D wahr)
  Für alle ganzen Zahlen n gilt zumindest die Implikation $C \Rightarrow D$

2.2 Beweis

Mathematische Sätze, Bemerkungen, Folgerungen, etc. sind meistens in Form wahrer Implikationen formuliert

2.2.1 beweisen

Begründen warum diese Implikation wahr ist

2.2.2 Beweismethoden for diese Implikation $A \Rightarrow B$

- direkter Beweis ($A \Rightarrow B$)
- Beweis durch Kontraposition ($\neq B \Rightarrow \neg A$)
- Widerspruchbeweis ($\neg(A \wedge \neg B)$)

Diese sind äquivalent zueinander

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

1. Beispiel m, n natürliche Zahlen

$$A: \; m^2 < n^2$$

$$B: \; m < n$$

   Wir wollen zeigen, dass $A \Rightarrow B$ für alle natürlichen Zahlen m, n wahr ist

- direkter Beweis:

  $$A:\ m^2 < n^2 \Rightarrow 0 < n^2 - m^2 \Rightarrow 0 < (n-m)\underbrace{(n+m)}_{>0} \Rightarrow 0 < n-m \Rightarrow m < n$$

- Beweis durch Kontraposition:

  $$\neg B:\ m \geq n \Rightarrow m^2 \geq nm \wedge mn \geq n^2 \Rightarrow m^2 \geq n^2 \Rightarrow \neg A$$

- Beweis durch Widerspruch:

  $$A \wedge \neg B \Rightarrow m^2 < n^2 \wedge n \leq m \Rightarrow m^2 < n^2 \wedge mn \leq m^2 \wedge n^2 \leq mn \Rightarrow mn \leq m^2 < n^2 \leq mn$$

  Wiederspruch

2.3 Existenz- und Allquantor

2.3.1 Existenzquantor

\$A(x) Aussage, die von Variable x abhängt
$\exists x:\ A(x)$ ist gleichbedeutend mit "Es existiert ein x, für das $A(x)$ wahr ist" (hierbei ist "existiert ein x" im Sinne von "existiert mindestens ein x" zu verstehen)
Beispiel:

$$\exists n \in \mathbb{N}:\ n > 5 \quad \text{(w)}$$

$\exists! x:\ A(x)$ ist gleichbedeutend mit "Es existiert genau ein x, für dass $A(x)$ wahr ist" \

2.3.2 Allquantor

$\forall\, x:\ A(x)$ ist gleichbedeutend mit "Für alle x ist A(x) wahr" Beispiel:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : 4n \text{ ist gerade}$$

2.3.3 Negation von Existenz- und Allquantor

$$\neg(\exists x:\ A(x)) \Leftrightarrow \forall\, x:\ \neg A(x)$$

$$\neg(\forall\, x:\ A(x)) \Leftrightarrow \exists x:\ \neg A(x)$$

2.3.4 Spezielle Beweistechniken für Existenz und Allaussagen

- Angabe eines Beispiel, um zu zeigen, dass deine Existenzaussage wahr ist.
  Beispiel:

  $$\exists n \in \mathbb{N}: \; n > 5 \text{ist wahr, denn für } n = 7 \text{ ist die Aussage } n > 5 \text{ wahr}$$

- Angabe eines Gegenbeispiel, um zu zeigen, dass eine Allausage falsch ist.
  Beispiel:

  $$\forall \, n \in \mathbb{N}: \; n \leq 5 \text{ist flasch, dann für } n = 7 \text{ ist die Aussage } n \leq 5 \text{ falsch}$$

2.4 Naive Mengenlehre

Mengenbegriff nach Cantor:
Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten userer Anschauung oder useres Denkens (die Elemente genannt werden) zu einem Ganzen

2.4.1 Schreibweise

- $x \in M$, falls x ein Element von M ist
- $x \notin M$, falls x kein Element von M ist
- $M = N$, falls M und N die gleichen Elemente besitzen, $M \subseteq N \land N \subseteq M$

2.4.2 Angabe von Mengen

- Reihenfolge ist unrelevant (\${1,2,3}={1,3,2})
- Elemente sind wohlunterschieden $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$
- Auflisten der Elemente $M = \{a, b, c, \ldots\}$
- Beschreibung der Elemente durch Eigenschaften: $M = \{x \mid E(x)\}$ (Elemente x, für die E(x) wahr)
  - Beispiel:

    $$\{2, 4, 6, 8\} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ gerade}, 1 < x < 10\}$$

2.4.3 leere Menge

Die leere Menge $\emptyset$ enthält keine Elemente

1. Beispiel
$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < -5\} = \emptyset$$

2.4.4 Zahlenbereiche

Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Menge der natürlichen Zahlen mit Null:

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Menge der Ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2\}$$

Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

2.4.5 Teilmenge

A, B seien Mengen.
A heißt Teilmenge von B ($A \subseteq B$) $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in A : x \in B$ A heißt echte Teilmenge von B ($A \subset B$) $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \wedge A \neq B$

1. Anmerkung Offenbar gilt für Mengen A, B:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

   $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge

2. Beipspiel
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

2.4.6 Durschnitt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

1. Beispiel

$$A = \{2,3,5,7\}, B = \{3,4,6,7\}, A \cap B = \{3,7\}$$

2.4.7 Vereinigung

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

1. Beispiel

$$A = \{2,3,5,7\}, B = \{3,4,6,7\}, A \cup B = \{2,3,4,5,6,7\}$$

2.4.8 Differenz

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Im Fall $B \subseteq A$ nennt man $A \setminus B$ auch das Komplement von B in A und schreibt $\rfloor_A(B) = A \setminus B$

1. Beispiel

$$A = \{2,3,5,7\}, B = \{3,4,6,7\}, A \setminus B = \{2,5\}$$

2.4.9 Bemerkung zu Vereinigung und Durschnitt

A, B seien zwei Mengen. Dann gilt

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1. Beweis

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

"$\subseteq$" Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann ist $x \in A \wedge x \in B \cup C$

- 1. Fall: $x \in A \wedge x \in B$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- 2. Fall $x \in A \wedge x \in C$

$$\Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Damit ist "$\subseteq$" gezeigt. "$\supseteq$" Sei $x∈ (A∩ B) ∪ (A∩ C)

$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow x \in A \wedge x$

Damit ist "$\supseteq$" gezeigt.

2.4.10 Bemerkung zu Äquivalenz von Mengen

Seien A, B Mengen, dann sind äquivalent:

1. $A \cup B = B$
2. $A \subseteq B$

1. Beweis Wir zeigen 1) $\Rightarrow$ 2) und 2) $\Rightarrow$ 1.

   $1) \Rightarrow 2):$ Es gelte $A \cup B = B$, zu zeigen ist $A \subseteq B$Sei $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cup B = B$

   $$2) \Rightarrow 1): \text{ Es gelte } A \subseteq B, \text{ zu zeigen ist } A \cup B = B$$

   "$\subseteq$": Sei $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B$ "$\supseteq$": $B \subseteq A \cup B$ klar

2.4.11 Kartesisches Produkt

Seien A, B Mengen

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

heipt das kartesische Produkt von A und B. Hierbei ist $(a, b) = (a', b') \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} a = a' \wedge b = b'$ a = a' ∧ b = b'$

1. Beispiel

   - $$\{1, 2\} \times \{1, 3, 4\} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$$
   - $$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | midx, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

2.4.12 Potenzmenge

A sei eine Menge

$$\mathcal{P}(A) := \{M \mid M \subseteq A\}$$

heißt die Potenzmenge von A

1. Beispiel

   $$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\{1, 2, 3, 4\}\}$$

2.4.13 Kardinalität

M sei eine Menge. Wir setzen

$$|M| := \begin{cases} n & \text{falls } M \text{ eine endliche Menge ist und } n \text{ Elemente enthält} \\ \infty & \text{falls } M \text{ nicht endlich ist} \end{cases}$$

$|M|$ heißt Kardinalität von A

1. Beispiel

   - $|\{7, 11, 16\}| = 3$
   - $|\mathbb{N}| = \infty$

2.4.14 Bemerkung zu natürlichen Zahlen

Für die natürlichen Zahlen gilt das Induktionsaxiom Ist $M \subseteq N$ eine Teilmenge, für die gilt:

$$1 \in M \land \forall n \in M : n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$$

dann ist $M = \mathbb{N}$

2.4.15 Prinzip der vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Die Aussagen $A(N)$ gelten für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn man folgendes zeigen kann:

- (IA) $A(1)$ ist wahr
- (IS) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$

Der Schritt (IA) heißt Induktionsanfang, die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ heißt Induktionsschritt

1. Beweis Setze $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}$ Wegen (IA) ist $1 \in M$, wegen (IS) gilt: $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$
   Nach Induktionsaxiom folgt $M = \mathbb{N}$, das heißt $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

2. Beispiel Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage: $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Wir zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, und zwar durch vollständige Induktion

- (IA) $A(1)$ ist wahr, denn $1 = \frac{1(1+1)}{2}$
- (IS) zu zeigen: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$
  Es gelte $A(n)$, das heißt $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ist wahr

  $$\Rightarrow 1+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\square$$