

Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

October 28, 2016

Contents

1	Einleitung	2
2	Mengen und Zahlen	2
2.1	Logische Regeln und Zeichen	2
2.1.1	Quantoren	2
2.1.2	Hinreichend und Notwendig	2
2.1.3	Beweistypen	2
2.1.4	Summenzeichen und Produktzeichen	3
2.2	Mengen	4
2.2.1	Definition	4
2.2.2	Mengenrelationen	4
2.2.3	Potenzmenge	5
2.2.4	Familien von Mengen	5
2.2.5	Rechenregeln	5
2.2.6	geordneter Tupel	6
2.2.7	Kartesisches Produkt	6
2.2.8	Äquivalenzrelation	6
2.3	Relationen und Abbildungen	7
2.3.1	Relationen	7
2.3.2	Graph der Abbildung	7
2.3.3	Umkehrabbildung	7
2.3.4	Komposition	8
2.3.5	Identitäts Abbildung	8
2.3.6	Homomorphe Abbildungen	8
2.4	Natürliche Zahlen	8
2.4.1	Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen	8
2.4.2	Vollständige Induktion	9

2.4.3	Definition Körper	10
2.5	Abzählbarkeit	11
2.5.1	Abzählbarkeit von Mengen	11
2.6	Ordnung	13
2.6.1	Definition	13
2.7	Maximum und Minimum einer Menge	14
2.7.1	Definition	14
2.7.2	Bemerkung	14
2.8	Schranken	14

1 Einleitung

Webseite www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php Klausurzulassung:
50% Klausur 18.2.2017 9-12Uhr

2 Mengen und Zahlen

2.1 Logische Regeln und Zeichen

2.1.1 Quantoren

$\forall x$	für alle x
$\exists x$	es gibt (mindestens) ein x
$\exists! x$	es gibt genau ein x

2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \Rightarrow B$: wenn A gilt, gilt auch B , A ist **hinreichend** für B , daraus folgt: B ist **notwendig** für A , Ungültigkeit von B impliziert die Ungültigkeit von A ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
- $A \Leftrightarrow B$: A gilt, genau dann, wenn B gilt

2.1.3 Beweistypen

1. Direkter Schluss $A \Rightarrow B$

(a) Beispiel m gerade Zahl $\Rightarrow m^2$ gerade Zahl

- i. Beweis m gerade $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $m = 2n \Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2k$, wobei $k = 2n^2 \in \mathbb{N}$ \square

2. Beweis der Transponierten (der Kontraposition) Zum Beweis $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$ ($A \Rightarrow B$) \Leftrightarrow ($\neg B$) \Rightarrow ($\neg A$)

(a) Beispiel Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade

i. Beweis Wir zeigen: m ist ungerade $\Rightarrow m^2$ ungerade

$$\exists n \in \mathbb{N} : m = 2n+1 \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 2k+1, k = 2n^2+2n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^2 \text{ ungerade} \square$$

3. Indirekter Schluss (Beweis durch Widerspruch) Man nimmt an, dass $A \Rightarrow B$ nicht gilt, das heißt $A \wedge \neg B$ und zeigt, dass dann für eine Aussage C gelten muss $C \Rightarrow \neg C$, also ein Widerspruch

(a) Beispiel $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$

i. Beweis Wir nehmen an, dass $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ Dann folgt:
 $\exists b, c \in \mathbb{Z}$ teilerfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit $a = \frac{b}{c}$ Falls

$$a^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2 \text{ gerade} \Rightarrow b \text{ ist gerade (schon gezeigt)}$$

$$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{N} \text{ sodass } b = 2d \Rightarrow b^2 = 4d^2$$

Außerdem $b^2 = 2c^2 \Rightarrow 2c^2 = 4d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c$ ist auch gerade. Also müssen b und c beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet

\square

2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

1. Summenzeichen Wir definieren für $m > 0$

$$\sum_{k=m}^m a_k := a_m + \dots + a_n$$

falls $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^n a_k := 0$$

falls $n < m$ (sogenannte leere Summe)

2. Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^n a_k := \begin{cases} a_m \cdot \dots \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

2.2 Mengen

2.2.1 Definition

(Georg cantor 1885) Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (welche die Elemente von M genannt werden), zu einem Ganzen M dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt x feststeht, ob gilt

- $x \in M$ (x Element von M)
- $x \notin M$ (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{eine Menge } M \text{ f\"ur die } x \in M \Leftrightarrow A(x)$$

2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion $A \subseteq M$ (A ist eine Teilmenge von M)

$$\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in M)$$

, zum Beispiel $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

•

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

•

$$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge)} \Leftrightarrow A \subseteq M \wedge A \neq M$$

•

$$\emptyset : \text{leere Menge} \quad \nexists x : x \in \emptyset$$

. Wir setzen fest, dass \emptyset eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beispiel

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

- Durchschnitt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Vereinigung

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Differenz (auch Komplement von B in A)

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_A B \text{ (auch } B^c)$$

2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge A

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Alle Teilmengen von A

1. Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$$

2.2.4 Familien von Mengen

Sei I eine Indexmenge, $I \subseteq \mathbb{N}$, $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen A

1. Durchschnitt von A

$$\cap_{i \in I} = \{x \mid \forall i \in I \ x \in A_i\}$$

2. Vereinigung

$$\cup_{i \in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

2.2.5 Rechenregeln

A, B, C, D seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$ Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ Transitivität
- $A \cap B = B \cap A$
 $A \cup B = B \cup A$ Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Assoziativität
- Eigenschaften der Komplementbildung:
 Seien $A, B \subseteq D (C_D A := D \setminus A)$, dann gilt

$$C_D(C_D A) = A$$

$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B$$

$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B$$

– Beweis:

$$\begin{aligned}x \in C_D(A \cap B) &\Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\&\Leftrightarrow (x \in D \wedge x \notin A) \vee (x \in D \wedge x \notin B) \\&\Leftrightarrow (x \in D \setminus A) \vee (x \in D \setminus B) \Leftrightarrow x \in D \setminus (A \cup B) \quad \square\end{aligned}$$

– Bemerkung: Komplement kann man auch mit A^c bezeichnen

2.2.6 geordneter Tupel

Sei x_1, x_2, \dots, x_n (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n -Tupel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{y_1, \dots, y_n\} \not\Rightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in A_j, j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

1. Beispiel

•

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

• R^n n -dimensionaler Raum von reellen Zahlen

2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung: $a \sim b$), sodass

• Für jede zwei $a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b \vee a \not\sim b$

• $a \sim a$ Reflexivität

• $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ Symmetrie

• $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in sogenannte Äquivalenzklassen einordnen: $[a] : \{b \in A \mid b \sim a\}$

2.3 Relationen und Abbildungen

2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ wobei X, Y Mengen sind. Für $x \in X$ definieren wir, das **Bild** von x unter R

$$R(x) := \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

und *Definitionsbereiche von R (bezüglich X)

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$ heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \rightarrow Y \Leftrightarrow D(R) = X, \forall x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält $R(x)$ genau ein Element.

X heißt Definitionsbereich von f

Y heißt Werte- oder Bildbereich von f (Bild)

$x \in X$ heißt Argument

$f(x) \in Y$ heißt Wert von f an der Stelle x

1. Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$ dann ist der Graph von $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

(a) Bemerkung

$$M^*(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

Ist kein Graph einer Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denn $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$ f heißt

- surjektiv, wenn gilt $f(X) = Y$
- injectiv, $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- bijektiv, wenn f surjektiv und injectiv ist

2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ durch $y \rightarrow x \in X$, eindeutig bestimmt durch $y = f(x)$

1. Bemerkung

$$(x, y) \in \text{Graph } f \Leftrightarrow (y, x) \in \text{Graph } f^{-1}$$

2.3.4 Komposition

Seien $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Die Komposition von g und f

$g \circ f : X \rightarrow Z$ ist durch $x \rightarrow g(f(x))$ definiert

2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge X definieren wir die identische Abbildung

$$I_d(A) = I_A : A \rightarrow A, \text{ durch } x \rightarrow x$$

1. Beispiel

•

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$

$$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

$(n - 1)$ dimensionale sphere in \mathbb{R}^n

- Seien X, Y Mengen, $M \subseteq X \times Y, f : M \rightarrow X$
 f heißt Projektion, f surjektiv

$$f(M) = \{x \mid \exists y \in Y : (x, y) \in M\} = X$$

2.3.6 Homomorphe Abbildungen

Existieren auf Mengen X und Y mit gewissen Operationen \oplus_x bzw. \oplus_y (zum Beispiel Addition, Ordnungsrelation), so heißt die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ homomorph (strukturhaltend), wenn gilt $\forall x_1, x_2 \in X f(x_1 \oplus_x x_2) = f(x_1) \oplus_y f(x_2)$. Eine bijektive Homomorphie heißt Isomorphismus, beziehungsweise $X \approx Y$ (äquivalent, isomorph)

2.4 Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

2.4.1 Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$
2. Zu jeder natürlichen Zahl n , gibt es genau einen "Nachfolger" n' ($=: n + 1$)

3. Die Zahl 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl
4. $n' = m' \Rightarrow n = m$
5. Enthält eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 1 und von jedem $n \in m$ auch den Nachfolger n' ist $M = \mathbb{N}$

Bemerkung:

Mit Hilfe der Axiome lassen sich auf \mathbb{N} Addition (+), Multiplikation (\cdot) und Ordnung (\leq) einführen. Wir definieren:

$1' = 2, 2' = 3, \dots, n + 1 := m'$ $n + m' := (n + m)'$; $n \cdot m' := nm + n$ Man kann zeigen, dass jede Menge, welche die Peano Axiome erfüllt isomorph bezüglich Multiplikation und Addition zu \mathbb{N} ist Wir definieren $n < m \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x + m = m$

2.4.2 Vollständige Induktion

1. Induktionsprinzip Es seien die folgende Schritte vollzogen:
 - (a) Induktionsverankerung (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ gilt
 - (b) Induktionsschluss: Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ gültig, so folgt auch die Gültigkeit von $A(n + 1)$

Dann sind alle Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ gültig.

2. Beweis: Wir definieren die Tailmenge $M \subseteq \mathbb{N}$, $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(N) \text{ ist gültig}\}$ Die Induktionsverankerung besagt, dass $1 \in M$ und die Induktionsannahme $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$. Folglich ist nach dem 5. Axiom von Peano $M = \mathbb{N}$ □
3. Beispiel 1 Zu Beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(a) Beweis

i. Induktionsverankerung: $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$

ii. Annahme: $A(n)$ gültig für $n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 Zu zeigen $A(n+1) : 1^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$$1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n + n + 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2) \square$$

4. Beispiel 2 Definition von Potenzen

$$x^0 := 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} x^n := x^{n-1}x$$

(iterative (rekursive) Definition)

Auf \mathbb{N} sind diese elementaren Operationene erklärt:

- Addition $a + b$
- Multiplikation $a \cdot b$
- (unter gewissen Vorraussetzungen):
 - Subtraktion $a - b$
 - Division $\frac{a}{b}$

\mathbb{N} ist bezüglich ”–” oder ”/” nicht vollständig, das heißt $n + x = m$ ist nicht lösbar in \mathbb{N} Erweiterungen:

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{0; \pm, n \in \mathbb{N}\}$
Negative Zahl $(-n)$ ist definiert duch $n + (-n) = 0$
- Rationale Zahlen \mathbb{Q} ($bx = y$)

Man sagt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ einen Körper bildet.

2.4.3 Definition Körper

\mathbb{K} sei eine Menge auf der Addition und Multiplikation sei. \mathbb{K} heißt ein Körper, wenn die folgende Axiome erfüllt sind:

- Addition: $(\mathbb{K}, +)$ ist eine kummutative Gruppe, das heißt $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$:
 1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ Assoziativität
 2. $a + b = b + a$ Kommutativität
 3. $\exists ! 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = a$ Existenz des Nullelement
 4. $\exists x \in \mathbb{K} : a + x = 0$ Existstenz des Negativen
- Multiplikation: $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppte, das heißt $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$
 1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Assoziativität

2. $a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativität

3. $\exists! 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = a$ Existenz des Einselement

4. Für $a \neq 0, \exists! y \in \mathbb{K} : a \cdot y = 1$ Inverse

- Verträglichkeit

1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ Distributivität

1. Satz $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Definieren auf \mathbb{Q} eine Ordnung " \leq " durch

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} : y - x = \frac{m}{n}$$

dann ist auch diese Ordnung mit der Addition und Multiplikation in \mathbb{Q} in folgendem Sinne verträglich:

- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$

2. Bemerkung

$$\{a \in \mathbb{Q} : a = \frac{r}{s}, r \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}\} =: \mathbb{Q}_+(\mathbb{Q}_{\geq 0})$$

2.5 Abzählbarkeit

2.5.1 Abzählbarkeit von Mengen

Sei A eine Menge

- A heißt endlich mit $|A| = n$ Elementen ist äquivalent zu

$$|A| = \begin{cases} A = \emptyset & (n = 0) \\ \exists f : A \rightarrow \{1, \dots, n\} & f \text{ bijektiv}, n < \infty \end{cases}$$

- A heißt abzählbar unendlich genau dann wenn

$$\exists f : A \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijektiv}$$

- A heißt überabzählbar genau dann wenn: A ist weder endlich oder abzählbar unendlich

1. Beispiel \mathbb{Z} ist abzählbar unendlich

(a) Beweis Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases}$$

- Surjektivität: zu zeigen $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$
 Offenbar $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{N}$. Wir zeigen $\mathbb{N} \subseteq f(\mathbb{Z})$. Sei $n \in \mathbb{N}$, finde $z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = n$. Man unterscheide:
 - n gerade \rightarrow Wähle $z = \frac{n}{2}$
 - n ungerade $\rightarrow z = -\frac{n+1}{2}$
- Injektivität: Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ und $f(z_1) = f(z_2)$
 ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1 \leq z_2$. Entweder $z_1, z_2 \geq 0$ oder $z_1, z_2 < 0$, denn sonst wäre $f(z_1)$ ungerade und $f(z_2)$ gerade **Widerspruch**. Falls
 - $z_1, z_2 \geq 0 \Rightarrow 2z_1 = f(z_1) = f(z_2) = 2z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$
 - $z_1, z_2 < 0 \Rightarrow -2z_1 - 1 = f(z_1) = f(z_2) = -2z_2 - 1 \Rightarrow z_1 = z_2$ □

2. Beispiel

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich
- \mathbb{Q} abzählbar unendlich
- \mathbb{R} überabzählbar

3. Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 1)$$

4. Korollar 1.30 M_1, M_2, \dots, M_n abzählbar $\Rightarrow M_1 \times \dots \times M_n$ abzählbar.

(a) Beweis Durch vollständige Induktion $M_1 \times (M_2 \times \dots \times M_n) \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

5. Satz Die Menge aller Folgen $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ ist überabzählbar. (Zum Beispiel: $1, 0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots$)

↓
k-te Stelle

(a) Beweis M ist unendlich, denn die Folgen $f_k : 0, \dots, 0, 1, 0, \dots$ sind paarweise verschieden. Angenommen M wäre abzählbar.

Sei f_1, f_2, \dots eine Abzählung mit $f_k = (z_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \dots \end{array}$$

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Man setze $f = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$z_n := \begin{cases} 1 & z_{nn} = 0 \\ 0 & z_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dann $f \in M$, aber $f \neq f_k \forall k \in \mathbb{N}$. Also ist M nicht abzählbar.
("Cantorsche Diagonalverfahren").

2.6 Ordnung

2.6.1 Definition

Sei A eine Menge. Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Teilordnung (Halbordnung) auf A , wenn $\forall y, x, z \in A$ gilt:

1. $x \leq x$ (Reflexivität)
2. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Symmetrie)
3. $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

Wenn außerdem noch $\forall x, y \in A$ gilt:

4. $x \leq y \vee y \leq x$ (Vergleichbarkeit je zweier Elemente)

so heißt R (totale) Ordnung auf A . (A, \leq) heißt teilweise beziehungsweise (total) geordnete Menge.

1. Beispiel

- (a) (\mathbb{Q}, \leq) mit der üblichen Ordnung ist eine total geordnete Menge
- (b) Wir definieren auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A eine Teilordnung " \leq ":

$$B \leq C \Leftrightarrow B \subseteq C \forall B, C \in \mathcal{P}(A)$$

Beweis: 1. - 3. sind trivial, 4. geht nicht (keine Totalordnung).
Wähle $B, C \in \mathcal{P}(A)$, $B, C \neq \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$. Dann gilt weder $B \subseteq C$ noch $C \subseteq B$ \square

- (c) Sei $F := \{f \mid f : A \rightarrow \mathbb{R}\}$ für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in A : f(x) \leq g(x)$
 (1.) - (3.) trivial, 4. gilt nicht. Falls A mehr als ein Element hat, gibt es eine Funktion, die nicht miteinander verglichen werden können.

2.7 Maximum und Minimum einer Menge

2.7.1 Definition

Sei (A, \leq) eine teilweise geordnete Menge, $a \in A$

Maximum:

$$a = \max A \Leftrightarrow \forall x \in A : x \leq a$$

Minimum:

$$a = \min A \Leftrightarrow \forall x \in A : a \leq x$$

2.7.2 Bemerkung

Durch die Aussagen ist a eindeutig bestimmt, denn seien:

$$a_1, a_2 \in A : \forall x \in A \begin{cases} x \leq a_1 \\ x \leq a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 \leq a_1 \\ a_1 \leq a_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Symmetrie}} a_1 = a_2$$

2.8 Schranken

Sei (A, \leq) eine (total geordnete) Menge, $B \subseteq A$

1. $S \in A$ heißt obere Schranke zu $B \Leftrightarrow \forall x \in B : x \leq S$
2. $S \in A$ heißt untere Schranke zu $B \Leftrightarrow \forall x \in B : S \leq x$