

Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

November 11, 2016

Contents

1	Einleitung	3
2	Mengen und Zahlen	3
2.1	Logische Regeln und Zeichen	3
2.1.1	Quantoren	3
2.1.2	Hinreichend und Notwendig	3
2.1.3	Beweistypen	3
2.1.4	Summenzeichen und Produktzeichen	4
2.2	Mengen	4
2.2.1	Definition	4
2.2.2	Mengenrelationen	5
2.2.3	Potenzmenge	5
2.2.4	Familien von Mengen	5
2.2.5	Rechenregeln	6
2.2.6	geordneter Tupel	6
2.2.7	Kartesisches Produkt	7
2.2.8	Äquivalenzrelation	7
2.3	Relationen und Abbildungen	7
2.3.1	Relationen	7
2.3.2	Graph der Abbildung	7
2.3.3	Umkehrabbildung	8
2.3.4	Komposition	8
2.3.5	Identitäts Abbildung	8
2.3.6	Homomorphe Abbildungen	9
2.4	Natürliche Zahlen	9
2.4.1	Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen	9
2.4.2	Vollständige Induktion	9
2.4.3	Definition Körper	11
2.5	Abzählbarkeit	11
2.5.1	Abzählbarkeit von Mengen	11

2.6	Ordnung	13
2.6.1	Definition	13
2.7	Maximum und Minimum einer Menge	14
2.7.1	Definition	14
2.7.2	Bemerkung	14
2.8	Schranken	14
2.8.1	Bemerkung	14
2.8.2	Beispiel	15
2.9	Reelle Zahlen	15
2.9.1	Vollständigkeitsaxiom (Archimedes)	15
2.9.2	Axiomatischer Standpunkt	15
2.9.3	Bemerkung	15
2.9.4	Konstruktiver Standpunkt	16
2.9.5	Definition 1.37	16
2.9.6	Satz 1.38	17
2.9.7	Satz 1.39	17
2.9.8	Definition 1.40	17
2.9.9	Lemma 1.41	18
2.9.10	Definition 1.42	18
2.9.11	Lemma 1.44	18
2.9.12	Definition 1.45 Produktzeichen	18
2.9.13	Satz 1.46	18
2.9.14	Definition 1.47	19
2.9.15	Lemma 1.48	19
2.9.16	Satz 1.49	19
2.9.17	Folgerung 1.50	20
2.9.18	Lemma 1.51	20
2.9.19	Lemma 1.52	20
2.9.20	Lemma 1.53 (Bernoullische Ungleichung)	21
2.9.21	Folgerung 1.54	21
2.9.22	Satz 1.55 (Existenz der m-ten Wurzel)	22
2.9.23	Lemma 1.56	23
3	Komplexe Zahlen	24
3.1	Komplexer Zahlkörper	24
3.1.1	Beweis	24
3.2	Notation	25
3.3	TODO Graphische Darstellung	25
3.4	Bemerkung	25
3.5	Korollar 1.59	25
3.6	Fundamentalsatz der Algebra	25
3.7	Betrag	25
3.8	Konjugation	26

4 Folgen	26
4.1 Definition 2.1 Konvergenz	26
4.2 Folgerung 2.2	27
4.3 Definition 2.3 Cauchy Folgen	27
4.4 Definition 2.4 Teilfolge	27

1 Einleitung

Webseite www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php Klausurzulassung: 50% Klausur
18.2.2017 9-12Uhr

2 Mengen und Zahlen

2.1 Logische Regeln und Zeichen

2.1.1 Quantoren

$\forall x$ für alle x
 $\exists x$ es gibt (mindestens) ein x
 $\exists! x$ es gibt genau ein x

2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \Rightarrow B$: wenn A gilt, gilt auch B , A ist **hinreichend** für B , daraus folgt: B ist **notwendig** für A , Ungültigkeit von B impliziert die Ungültigkeit von A ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
- $A \Leftrightarrow B$: A gilt, genau dann, wenn B gilt

2.1.3 Beweistypen

Direkter Schluss $A \Rightarrow B$

Beispiel m gerade Zahl $\Rightarrow m^2$ gerade Zahl

1. Beweis m gerade $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $m = 2n \Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2k$, wobei $k = 2n^2 \in \mathbb{N}$ \square

Beweis der Transponerten (der Kontraposition) Zum Beweis $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$ ($A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$)

Beispiel Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade

1. Beweis Wir zeigen: m ist ungerade $\Rightarrow m^2$ ungerade

$$\exists n \in \mathbb{N} : m = 2n+1 \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 2k+1, k = 2n^2+2n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^2 \text{ ungerade} \square$$

Indirekter Schluss (Beweis durch Widerspruch) Man nimmt an, dass $A \Rightarrow B$ nicht gilt, das heißt $A \wedge \neg B$ und zeigt, dass dann für eine Aussage C gelten muss $C \Rightarrow \neg C$, also ein Widerspruch

Beispiel $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$

1. Beweis Wir nehmen an, dass $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ Dann folgt: $\exists b, c \in \mathbb{Z}$ teilerfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit $a = \frac{b}{c}$ Falls

$$a^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2 \text{ gerade} \Rightarrow b \text{ ist gerade (schon gezeigt)}$$

$$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{N} \text{ sodass } b = 2d \Rightarrow b^2 = 4d^2$$

Außerdem $b^2 = 2c^2 \Rightarrow 2c^2 = 4d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c$ ist auch gerade. Also müssen b und c beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet \square

2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

Summenzeichen Wir definieren für $m > 0$

$$\sum_{k=m}^m a_k := a_m + \dots + a_n$$

falls $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^n a_k := 0$$

falls $n < m$ (sogenannte leere Summe)

Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^n a_k := \begin{cases} a_m \cdot \dots \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

2.2 Mengen

2.2.1 Definition

(Georg cantor 1885) Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (welche die Elemente von M genannt werden), zu einem Ganzen M dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt x feststeht, ob gilt

- $x \in M$ (x Element von M)
- $x \notin M$ (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{eine Menge } M \text{ für die } x \in M \Leftrightarrow A(x)$$

2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion $A \subseteq M$ (A ist eine Teilmenge von M)

$$\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in M)$$

,zum Beispiel $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

-

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

-

$$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge)} \Leftrightarrow A \subset M \wedge A \neq M$$

-

$$\emptyset : \text{leere Menge} \quad \nexists x : x \in \emptyset$$

. Wir setzen fest, dass \emptyset eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beispiel

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

- Durchschnitt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Vereinigung

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Differenz (auch Komplement von B in A)

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_a B \text{ (auch } B^c)$$

2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge A

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Alle Teilmengen von A

Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$$

2.2.4 Familien von Mengen

Sei I eine Indexmenge, $I \subseteq \mathbb{N}$, $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen A

Durchschnitt von A

$$\cap_{i \in I} = \{x \mid \forall i \in I \ x \in A_i\}$$

Vereinigung

$$\cup_{i \in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

2.2.5 Rechenregeln

A, B, C, D seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$ Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ Transitivität
- $A \cap B = B \cap A$
 $A \cup B = B \cup A$ Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Assoziativität
- Eigenschaften der Komplementbildung:
Seien $A, B \subseteq D (C_D A := D \setminus A)$, dann gilt

$$C_D(C_D A) = A$$

$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B$$

$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B$$

– Beweis:

$$x \in C_D(A \cap B) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in D \wedge x \notin A) \vee (x \in D \wedge x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in D \setminus A) \vee (x \in D \setminus B) \Leftrightarrow x \in D \setminus (A \cap B) \quad \square$$

– Bemerkung: Komplement kann man auch mit A^c bezeichnen

2.2.6 geordneter Tupel

Sei x_1, x_2, \dots, x_n (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n-Tupel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{y_1, \dots, y_n\} \not\Rightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in A_j, j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

Beispiel

-

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

- R^n n-dimensionaler Raum von reellen Zahlen

2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung: $a \sim b$), sodass

- Für jede zwei $a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b \vee a \not\sim b$
- $a \sim a$ Reflexivität
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ Symmetrie
- $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in sogenannte Äquivalenzklassen einordnen: $[a] : \{b \in A \mid b \sim a\}$

2.3 Relationen und Abbildungen

2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ wobei X, Y Mengen sind. Für $x \in X$ definieren wir, das **Bild** von x unter R

$$R(x) := \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

und *Definitionsbereiche von R (bezüglich X)

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$ heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \rightarrow Y \Leftrightarrow D(R) = X, \forall x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält $R(x)$ genau ein Element.

X heißt Definitionsbereich von f

Y heißt Werte- oder Bildbereich von f (Bild)

$x \in X$ heißt Argument

$f(x) \in Y$ heißt Wert von f an der Stelle x

Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$ dann ist der Graph von $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

Bemerkung

$$M^*(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

Ist kein Graph einer Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denn $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$ f heißt

- surjektiv, wenn gilt $f(X) = Y$
- injektiv, $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist

2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ durch $y \rightarrow x \in X$, eindeutig bestimmt durch $y = f(x)$

Bemerkung

$$(x, y) \in \text{Graph } f \Leftrightarrow (y, x) \in \text{Graph } f^{-1}$$

2.3.4 Komposition

Seien $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Die Komposition von g und f

$$g \circ f : X \rightarrow Z \text{ ist durch } x \rightarrow g(f(x)) \text{ definiert}$$

2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge X definieren wir die identische Abbildung

$$I_d(A) = I_A : A \rightarrow A, \text{ durch } x \rightarrow x$$

Beispiel

•

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$

$$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

$(n - 1)$ dimensionale sphere in \mathbb{R}^n

- Seien X, Y Mengen, $M \subseteq X \times Y, f : M \rightarrow X$
 f heißt Projektion, f surjektiv

$$f(M) = \{x \mid \exists y \in Y : (x, y) \in M\} = X$$

2.3.6 Homomorphe Abbildungen

Existieren auf Mengen X und Y mit gewissen Operationen \oplus_x bzw. \oplus_y (zum Beispiel Addition, Ordnungsrelation), so heißt die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ homomorph (struktur-erhaltend), wenn gilt $\forall x_1, x_2 \in X f(x_1 \oplus_x x_2) = f(x_1) \oplus_y f(x_2)$. Eine bijektive Homomorphie heißt Isomorphismus, beziehungsweise $X \approx Y$ (äquivalent, isomorph).

2.4 Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

2.4.1 Peanosches Axiomensystem der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$
2. Zu jeder natürlichen Zahl n , gibt es genau einen "Nachfolger" $n' (= n + 1)$
3. Die Zahl 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl
4. $n' = m' \Rightarrow n = m$
5. Enthält eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 1 und von jedem $n \in M$ auch den Nachfolger n' ist $M = \mathbb{N}$

Bemerkung:

Mit Hilfe der Axiome lassen sich auf \mathbb{N} Addition (+), Multiplikation (\cdot) und Ordnung (\leq) einführen. Wir definieren:

$1' = 2, 2' = 3, \dots n + 1 := n'$; $n + m' := (n + m)'$; $n \cdot m' := nm + n$. Man kann zeigen, dass jede Menge, welche die Peano Axiome erfüllt isomorph bezüglich Multiplikation und Addition zu \mathbb{N} ist. Wir definieren $n < m \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x + m = n$.

2.4.2 Vollständige Induktion

Induktionsprinzip Es seien die folgende Schritte vollzogen:

1. Induktionsverankerung (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ gilt
2. Induktionsschluss: Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ gültig, so folgt auch die Gültigkeit von $A(n + 1)$

Dann sind alle Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ gültig.

Beweis: Wir definieren die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$, $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist gültig}\}$. Die Induktionsverankerung besagt, dass $1 \in M$ und die Induktionsannahme $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$. Folglich ist nach dem 5. Axiom von Peano $M = \mathbb{N}$. \square

Beispiel 1 Zu Beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis

1. Induktionsverankerung: $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$
2. Annahme: $A(n)$ gültig für $n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Zu zeigen $A(n+1) : 1^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$$\begin{aligned} 1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n + n + 1\right) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2) \square \end{aligned}$$

Beispiel 2 Definition von Potenzen

$$x^0 := 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} x^n := x^{n-1}x$$

(iterative (rekursive) Definition)

Auf \mathbb{N} sind diese elementaren Operationen erklärt:

- Addition $a + b$
- Multiplikation $a \cdot b$
- (unter gewissen Voraussetzungen):
 - Subtraktion $a - b$
 - Division $\frac{a}{b}$

\mathbb{N} ist bezüglich "–" oder "/" nicht vollständig, das heißt $n + x = m$ ist nicht lösbar in \mathbb{N} Erweiterungen:

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{0; \pm, n \in \mathbb{N}\}$
Negative Zahl $(-n)$ ist definiert durch $n + (-n) = 0$
- Rationale Zahlen \mathbb{Q} ($bx = y$)

Man sagt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ einen Körper bildet.

2.4.3 Definition Körper

\mathbb{K} sei eine Menge auf der Addition und Multiplikation sei. \mathbb{K} heißt ein Körper, wenn die folgende Axiome erfüllt sind:

- Addition: $(\mathbb{K}, +)$ ist eine kommutative Gruppe, das heißt $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$:
 1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ Assoziativität
 2. $a + b = b + a$ Kommutativität
 3. $\exists! 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = a$ Existenz des Nullelement
 4. $\exists x \in \mathbb{K} : a + x = 0$ Existenz des Negativen
- Multiplikation: $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe, das heißt $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$
 1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Assoziativität
 2. $a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativität
 3. $\exists! 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = a$ Existenz des Einselement
 4. Für $a \neq 0, \exists! y \in \mathbb{K} : a \cdot y = 1$ Inverse
- Verträglichkeit
 1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ Distributivität

Satz $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Definieren auf \mathbb{Q} eine Ordnung " \leq " durch

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} : y - x = \frac{m}{n}$$

dann ist auch diese Ordnung mit der Addition und Multiplikation in \mathbb{Q} in folgendem Sinne verträglich (Axiom M0):

- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$

Bemerkung

$$\{a \in \mathbb{Q} : a = \frac{r}{s}, r \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}\} =: \mathbb{Q}_+(\mathbb{Q}_{\geq 0})$$

2.5 Abzählbarkeit

2.5.1 Abzählbarkeit von Mengen

Sei A eine Menge

- A heißt endlich mit $|A| = n$ Elementen ist äquivalent zu

$$|A| = \begin{cases} A = \emptyset & (n = 0) \\ \exists f : A \rightarrow \{1, \dots, n\} & f \text{ bijektiv, } n < \infty \end{cases}$$

- A heißt abzählbar unendlich genau dann wenn

$$\exists f : A \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijektiv}$$

- A heißt überabzählbar genau dann wenn: A ist weder endlich oder abzählbar unendlich

Beispiel \mathbb{Z} ist abzählbar unendlich

Beweis Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & x < 0 \end{cases}$$

- Surjektivität: zu zeigen $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$
Offenbar $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{N}$. Wir zeigen $\mathbb{N} \subseteq f(\mathbb{Z})$. Sei $n \in \mathbb{N}$, finde $z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = n$.
Man unterscheide:
 - n gerade \rightarrow Wähle $z = \frac{n}{2}$
 - n ungerade $\rightarrow z = -\frac{n+1}{2}$
- Injektivität: Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ und $f(z_1) = f(z_2)$
ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1 \leq z_2$. Entweder $z_1, z_2 \geq 0$ oder $z_1, z_2 < 0$,
denn sonst wäre $f(z_1)$ ungerade und $f(z_1)$ gerade **Widerspruch**. Falls
 - $z_1, z_2 \geq 0 \Rightarrow 2z_1 = f(z_1) = f(z_2) = 2z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$
 - $z_1, z_2 < 0 \Rightarrow -2z_1 - 1 = f(z_1) = f(z_2) = -2z_2 - 1 \Rightarrow z_1 = z_2$ □

Beispiel

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich
- \mathbb{Q} abzählbar unendlich
- \mathbb{R} überabzählbar

Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 1)$$

Korollar 1.30 M_1, M_2, \dots, M_n abzählbar $\Rightarrow M_1 \times \dots \times M_n$ abzählbar.

Beweis Durch vollständige Induktion $M_1 \times (M_2 \times \dots \times M_n) \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

Satz Die Menge aller Folgen $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ ist überabzählbar. (Zum Beispiel: $1, 0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots$)

↓
k-te Stelle

Beweis M ist unendlich, denn die Folgen $f_k : 0, \dots, 0, 1, 0, \dots$ sind paarweise verschieden. Angenommen M wäre abzählbar. Sei f_1, f_2, \dots eine Abzählung mit $f_k = (z_{knn} \in \mathbb{N})$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \dots \end{array}$$

$f : 0010$ Man setze $f = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$z_n := \begin{cases} 1 & z_{nn} = 0 \\ 0 & z_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dann $f \in M$, aber $f \neq f_k \forall k \in \mathbb{N}$. Also ist M nicht abzählbar. ("Cantorsche Diagonalverfahren").

2.6 Ordnung

2.6.1 Definition

Sei A eine Menge. Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Teilordnung (Halbordnung) auf A , wenn $\forall y, x, z \in A$ gilt:

1. $x \leq x$ (Reflexivität)
2. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Symmetrie)
3. $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

Wenn außerdem noch $\forall x, y \in A$ gilt:

4. $x \leq y \vee y \leq x$ (Vergleichbarkeit je zweier Elemente)

so heißt R (totale) Ordnung auf A . (A, \leq) heißt teilweise beziehungsweise (total) geordnete Menge.

Beispiel

1. (\mathbb{Q}, \leq) mit der üblichen Ordnung ist eine total geordnete Menge
2. Wir definieren auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A eine Teilordnung " \leq ":

$$B \leq C \Leftrightarrow B \subseteq C \forall B, C \in \mathcal{P}(A)$$

Beweis: 1. - 3. sind trivial, 4. geht nicht (keine Totalordnung). Wähle $B, C \in \mathcal{P}(A)$, $B, C \neq \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$. Dann gilt weder $B \subseteq C$ noch $C \subseteq B$ \square

3. Sei $F := \{f \mid f : A \rightarrow \mathbb{R}\}$ für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in A : f(x) \leq g(x)$

(1.) - (3.) trivial, 4. gilt nicht. Falls A mehr als ein Element hat, gibt es eine Funktion, die nicht miteinander verglichen werden können.

2.7 Maximum und Minimum einer Menge

2.7.1 Definition

Sei (A, \leq) eine teilweise geordnete Menge, $a \in A$

Maximum:

$$a = \max A \Leftrightarrow \forall x \in A : x \leq a$$

Minimum:

$$a = \min A \Leftrightarrow \forall x \in A : a \leq x$$

2.7.2 Bemerkung

Durch die Aussagen ist a eindeutig bestimmt, denn seien:

$$a_1, a_2 \in A : \forall x \in A \begin{cases} x \leq a_1 \\ x \leq a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 \leq a_1 \\ a_1 \leq a_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Symmetrie}} a_1 = a_2$$

2.8 Schranken

Sei (A, \leq) eine (total geordnete) Menge, $B \subseteq A$

1. $S \in A$ heißt obere Schranke zu $B \Leftrightarrow \forall x \in B : x \leq S$
 $s \in A$ heißt untere Schranke zu $B \Leftrightarrow \forall x \in B : s \leq x$
2. $\bar{S}(B) := \{S \in A \mid S \text{ ist obere Schranke zu } B\}$
 $\underline{S}(B) := \{s \in A \mid s \text{ ist untere Schranke zu } B\}$
3. Existiert $g := \min \underline{S}(B)$ beziehungsweise $g := \max \bar{S}$ so sagen wir:
 $g = \sup B$ (kleinste obere Schranke, supremum, obere "Grenze" von B in A)
 $g = \inf B$ (größte untere Schranke, infimum, untere "Grenze" von B in A)

2.8.1 Bemerkung

1. Existiert $\max B = \bar{b}$, so folgt $\sup B = \bar{b}$, denn $\bar{b} \in \bar{S}(B)$ nach Definition.

$$s \in \underline{S}(B) \Rightarrow \bar{b} \leq s, \text{ da } \bar{b} \in B$$

Ebenso gilt: $\exists \min B = \underline{b} \Rightarrow \inf B = \underline{b}$

2.8.2 Beispiel

1. $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, A = \mathbb{R}, (1, \frac{1}{2}, \dots)$
 - Es gilt $1 \in B, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} \leq 1$, daher folgt $\max B = \sup B = 1$
 - Sei $s \leq 0$, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : s \leq \frac{1}{n}$, also $s \in \bar{S}(B)$
Sei $s > 0 \Rightarrow s > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{s}$, also $s \notin \bar{S}(B)$
Es folgt $\bar{S}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ insbesondere $0 \in \bar{S}(B)$
Ferner gilt $\forall s \in \bar{S}(B) : s \leq 0 \Rightarrow 0 = \max \bar{S}(B) = \inf B$
2. $A = \mathbb{Q}, B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \wedge x^2 \leq 2\}$. Es gilt $0 = \min B = \inf B$, aber $\sup B$ existiert nicht in \mathbb{Q}

2.9 Reelle Zahlen

$x^2 = 2$ hat keine Lösungen in \mathbb{Q} . Allerdings können wir $\sqrt{2}$ "beliebig gut" durch $y \in \mathbb{Q}$ approximieren, das heißt $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in \mathbb{Q} : 2 - \varepsilon \leq y^2 \leq 2 + \varepsilon$. Das motiviert die folgende Vorstellung:

1. \mathbb{Q} ist "unvollständig"
2. \mathbb{Q} ist "dicht" in \mathbb{R}

2.9.1 Vollständigkeitsaxiom (Archimedes)

Jede nach oben (unten) beschränkte Teilmenge hat ein Supremum oder Infimum.

2.9.2 Axiomatischer Standpunkt

Es gibt eine Menge \mathbb{R} (genannt Menge der reellen Zahlen) mit Addition, Multiplikation, Ordnung, die die Definition eines Körper und das Vollständigkeitsaxiom erfüllt und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit " \leq " eine Ordnung bildet.

2.9.3 Bemerkung

1. Bis auf Isomorphie gibt es höchstens ein solches \mathbb{R} , das heißt $\tilde{\mathbb{R}}$ ein weiteres System der reellen Zahlen ist, dann \exists bijektive Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ die bezüglich Addition, Multiplikation, Ordnung eine Homomorphie ist.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} :$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

2. \mathbb{N} (und damit auch \mathbb{Z}, \mathbb{Q}) lassen sich durch injektive Homomorphismus $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ in \mathbb{R} einbetten

$$\begin{aligned} g(\tilde{0}_{\in \mathbb{N}}) &= 0_{\in \mathbb{R}} \\ g(\tilde{n}_{\in \mathbb{N}} + 1) &= g(n_{\in \mathbb{R}}) + 1 \\ g(1_{\in \mathbb{N}}) &= 1_{\in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

2.9.4 Konstruktiver Standpunkt

Wir können \mathbb{R} ausgehend von \mathbb{Q} konstruieren.

Methode der Abschnitte Jede reelle Zahl wird charakterisiert durch ein "rechts offenes, unbeschränktes Intervall", dessen "rechte Grenze" die Zahl erstellt.

$$\mathbb{R} := \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid \begin{cases} A \neq \emptyset \\ x \in A, y \leq x \Rightarrow y \in A \\ \forall x \in A \exists y \in A, x < y \end{cases}\}$$

Methode der Cauchy-Folgen Jede reelle Zahl wird charakterisiert als "Grenzwert" eine Klasse äquivalenter "Cauchy Folgen" aus \mathbb{Q} (später)

2.9.5 Definition 1.37

•

$$x \in \mathbb{R} \text{ heißt } \begin{cases} \text{positiv} & 0 < x \\ \text{nichtnegativ} & 0 \leq x \\ \text{negativ} & x < 0 \\ \text{nichtpositiv} & x \geq 0 \end{cases}$$

- Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch $|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
- Die Vorzeichen- oder Signumfunktion

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{sgn } x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2.9.6 Satz 1.38

1. $|xy| = |x||y|$
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis:

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \quad (1)$$

$$\leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \quad (2)$$

$$= (|x| + |y|)^2 \Rightarrow |x + y| \leq ||x| + |y|| = |x| + |y| \quad \square$$

3. $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

2.9.7 Satz 1.39

1. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Beweis:

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \quad (3)$$

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x - y| \quad (4)$$

$$||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x - y| \quad \square$$

- 2.

$$|x - y| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon \\ y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \end{cases}$$

Beweis:

$$|x - y| = \max\{x - y, y - x\} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq \varepsilon \\ y - x \leq \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y + \varepsilon \\ y - x \leq \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \quad (5)$$

$$\text{Vertausche } x \text{ und } y \Rightarrow x - \varepsilon \leq x + \varepsilon \quad \square$$

2.9.8 Definition 1.40

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[$ offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ rechts-halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ links-halboffenes Intervall
- $\varepsilon > 0, I_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon = B_\varepsilon(x)(\text{Kugel})\}$

2.9.9 Lemma 1.41

Es gilt $y \in I_\varepsilon(x) \Rightarrow \exists \delta > 0 : I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$

Beweis Sei $y \in I_\varepsilon(x) \Rightarrow |x - y| < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon - |x - y| > 0$ Wähle $0 < \delta < \varepsilon - |x - y|$. Es ist nun zu zeigen $I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$, das heißt $z \in I_\delta(y) \Rightarrow z \in I_\varepsilon(x)$. Es gilt

$$z \in I_\delta(y) \Rightarrow |z - y| < \delta \quad (6)$$

$$\Rightarrow |z - x| = |z - y + y - x| \leq |z - y| + |y - x| \leq \delta + |x - y| < \varepsilon \quad (7)$$

$$\Rightarrow z \in I_\varepsilon(x) \quad \square$$

2.9.10 Definition 1.42

A, B seien geordnete Mengen, $f : A \rightarrow B$ heißt:

- monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \\ \text{fallend} & x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \end{cases}$
- streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ \text{fallend} & x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{cases}$

Beispiel 1.43 $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend $\forall n \in \mathbb{N}$

Beweis Induktion + Axiom M0 \square

2.9.11 Lemma 1.44

Sei $M, N \subseteq \mathbb{R}, f : M \rightarrow N$ streng monoton und bijektiv. Dann ist f^{-1} streng monoton.

Beweis Wir betrachten den Fall f streng monoton wachsend. Seien $y_1, y_2 \in N, y_1 < y_2, x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Behauptung $x_1 < x_2$ (sonst wäre $x_1 \geq x_2$).

Falls $x_1 > x_2 \xrightarrow{\text{streng monoton}} f(x_1) > f(x_2) \text{ Widerspruch zu } y_1 < y_2$

Falls $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2 \text{ Widerspruch zur Annahme } y_1 < y_2 \quad \square$

2.9.12 Definition 1.45 Produktzeichen

Für $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a^n := \prod_{j=1}^n a$ und für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \ a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

2.9.13 Satz 1.46

Es gilt $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), $n, m \in \mathbb{N}_0$ (beziehungsweise \mathbb{Z})

1. $a^n a^m = a^{n+m}$

$$2. (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$3. (ab)^m = a^m b^m$$

Beweis Zunächst für $n, m \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion nach n , dann für $n, m \in \mathbb{Z}$ (mit Hilfe der Definition von a^{-n})

2.9.14 Definition 1.47

Sei $n, k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j}$$

2.9.15 Lemma 1.48

Sei $k, n \in \mathbb{N}_0$

1. $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$
 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ für $k \leq n$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

2.9.16 Satz 1.49

$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Beweis Induktion:

- Induktionsanfang: $n = 0, (x+y)^0 = 1, \binom{0}{j} x^0 y^0 = 1$ nach Definition

- Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)(x + y)^n \quad (8)$$

$$\xrightarrow{\text{Induktionsvoraussetzung}} (x + y) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \quad (9)$$

$$= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j+1} y^j + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^{j+1} \quad (10)$$

$$= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} x^{n+1-j} y^j + \underbrace{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} x^{n-i+1} y^i}_{\text{Substitution } i := j+1} + \binom{n}{n} y^{n+1} \quad (11)$$

$$= x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right)}_{\binom{n+1}{j} \text{ nach Lemma 1.48}} x^{n+1-j} y^j + y^{n+1} \quad (12)$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^{n+1-j} y^j \quad \square$$

2.9.17 Folgerung 1.50

1. $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$
2. $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$

Beweis: Setze in Binomische Formel $x = 1, y = 1$ beziehungsweise $y = -1$ \square

2.9.18 Lemma 1.51

Sei $m \in \mathbb{R}$ nach oben (beziehungsweise nach unten) beschränkt
Dann gilt

1. $s = \sup M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : s - \varepsilon < x (\leq s)$
2. $l = \inf M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : (l \leq) x < l + \varepsilon$

Beweis Wir beweisen 1.

$s \neq \sup M \Leftrightarrow s$ ist nicht die kleinste obere Schranke von $M \Leftrightarrow$ es gibt eine kleinere obere Schranke $s' = s - \varepsilon$ von $M \Leftrightarrow$ nicht $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > s - \varepsilon$ \square

2.9.19 Lemma 1.52

\mathbb{N} ist unbeschränkt in \mathbb{R}

Beweis sonst $\exists x = \sup \mathbb{N}$ (nach Vollständigkeits Axiom), x kleinste obere Schranke
 $\xrightarrow{[[\text{Lemma 1.51}]]} \varepsilon = \frac{1}{2} \exists m_0 \in \mathbb{N} : x - \frac{1}{2} < m_0 \Rightarrow m_0 + 1 \in \mathbb{N}, m_0 + 1 > x + \frac{1}{2} > x \Rightarrow x$ inst
nicht die obere Schranke von \mathbb{N} \square

2.9.20 Lemma 1.53 (Bernoullische Ungleichung)

$$\forall x \in [-1, \infty), n \in \mathbb{N}_0 : (1+x)^n \geq 1+nx$$

Beweis Beweis durch Induktion:

• **IA:** $n = 0$ klar

• **IS:**

$$n \rightarrow n+1 : (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \quad (13)$$

$$\geq (1+nx)(1+x) = 1+nx^2 + (n+1)x \quad (14)$$

$$\geq 1+(n+1)x \text{ da } x^2 \geq 0 \quad \square$$

2.9.21 Folgerung 1.54

1. Sei $y \in (1, \infty)$. Dann gilt $\forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 y^n \in (c, \infty)$ ("Konvergenz" von y^n gegen ∞)
2. Sei $y \in (-1, 1)$. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : y^n \in I_\varepsilon(0)$ ("Konvergenz" y^n gegen 0)

Beweis

1. Für $x = y - 1 > 0$ gilt dann nach 2.9.20

$$\underbrace{(1+x)^n}_y \geq 1+nx \Rightarrow y^n > nx$$

Nach 2.9.19 existiert für $c > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{c}{x} \Rightarrow$

$$\forall n \geq n_0 : y^n > nx \geq n_0 x \geq \frac{c}{x} x = c \Rightarrow \forall n \geq n_0 : y^n \in (c, \infty)$$

2. Für $x = \frac{1}{|y|} > 1 \xrightarrow{\text{nach [[1541]] mit } c=\frac{1}{\varepsilon}}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|y^n|} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |y^n| < \varepsilon \square$$

2.9.22 Satz 1.55 (Existenz der m-ten Wurzel)

$$\forall m \in \mathbb{N}, a \in [a, \infty) \text{ gilt } \exists! x \in [0, \infty) : x^m = a$$

Beweis (Skizze 1, 2) Wir geben ein Iterationsverfahren

$$p_3(x) = m$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, a_3 > 0$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a > 0, m \geq 2$, x muss die Gleichung $x^m - a = 0$ lösen, das heißt Nullstelle der Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^m - a$ suchen. Diese approximieren wir nach dem **Newton Verfahren**

x_0 sodass $x_0^m - a \geq 0$

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftarrow \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n) \\ x_{n+1} &:= x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{F(x_n)} = x_n - \frac{x_n^m - a}{mx_n^{m-1}} \\ &= x_n \left(1 - \frac{1}{m} \left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) \end{aligned}$$

Hoffnung: $x_n \rightarrow x^*$

Skizze 3

Sei $x_0^m > a$. Wir zeigen

1. $x_n > 0$
2. $x_n^m \geq a$
3. $x_{n+1} \leq x_n$

Beweis:

1. Induktion
2. Induktion

- $n = 0, x_0^m \geq a \Rightarrow x_0 > 0$, da $a > 0, x_0 \geq 0$
- $n \rightarrow n + 1$

$$x_n > 0, x_n^m \geq a \Rightarrow x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{1}{m} \left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) \geq 0$$

weil

$$x_{n+1}^m = \underbrace{x_n^m}_{\geq 0} \left(1 - \frac{1}{m} \left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right)^m \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} x_n^m \left(1 - \frac{1}{m} \left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) = a$$

$$\Rightarrow x_{n+1} > 0, \text{ da } a > 0$$

3. Nach 2:

$$x_n^m \geq a \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{m} \left(1 - \frac{1}{x_n^m}\right) \leq 1$$

Nach 1:

$$x_m > 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{1}{m} \left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) < x_n$$

Wegen 1 ist $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nach unten beschränkt \Rightarrow

$$x := \inf M \text{ existiert}$$

Wir wollen zeigen, dass $x^m = a$. Es gilt

$$\begin{aligned} x &\leq x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_n + \frac{1}{m} \frac{a}{x_n^{m-1}} \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_n + \frac{a}{m} \sup\left\{\frac{1}{x_n^{m-1}} \mid x \in \mathbb{N}_0\right\} \end{aligned}$$

4. Es gilt nach 2

$$a \leq \inf\{x_n^m \mid n \in \mathbb{N}_0\} = (\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\})^m = x^m$$

und damit $x > 0$

Ferner gilt

$$y = \sup\left\{\frac{1}{x_n^{m-1}} \mid n \in \mathbb{N}_0\right\} = \inf\{x_n^{m-1} \mid x \in \mathbb{N}_0\}^{-1}$$

mit 2.9.23

$$= \left(\frac{1}{\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}\right)^{m-1} = \frac{1}{x^{m-1}} \Rightarrow ay \leq \frac{a}{x^{m-1}}$$

5. Von oben wissen wir, dass $x \leq ay$

$$\Rightarrow x \leq ay \leq \frac{a}{x^{m-1}} \Rightarrow x^m \leq a$$

Aus 4 und 5 folgt $x^m = a$

□

2.9.23 Lemma 1.56

1. Seien für $n \in \mathbb{N}_0$: $y_n > 0$ und $\inf\{x_n \mid x \in \mathbb{N}_0\} > 0$

Dann gilt

$$\sup\left\{\frac{1}{y_n} \mid n \in \mathbb{N}_0\right\} = \frac{1}{\inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}$$

2. Seien für $n \in \mathbb{N}_0, y_n > 0, k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\inf\{y_n^k \mid n \in \mathbb{N}_0\} = (\inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}_0\})^k$$

(ohne Beweis)

3 Komplexe Zahlen

Motivation: $x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar in \mathbb{R}

Wir betrachten die Menge der Paare $\{x, y\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf denen die Addition und Multiplikation wie folgt definiert ist:

- (KA) $\{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$
- (KM) $\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} = \{x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1\}$

3.1 Komplexer Zahlkörper

1. Die Menge der Paare $z = \{x, y\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition 3 und Multiplikation 3 bildet den Körper \mathbb{C} der **komplexen Zahlen** mit den neutralen Elementen $\{0, 0\}$ und $\{1, 0\}$
2. Die Gleichung $z^2 + \{1, 0\} = \{0, 0\}$ hat in \mathbb{C} zwei Lösungen, welche mit $i := \{0, \pm 1\}$ bezeichnet werden
3. Der Körper \mathbb{R} ist mit der Abbildung $x \in \mathbb{R} : x \mapsto \{x, 0\} \in \mathbb{C}$ isomorph zu einem Unterkörper von \mathbb{C}

3.1.1 Beweis

1. Die Gültigkeit des Kommutativitäts-, Assoziativs-, und Distributivitätsgesetzes verifiziert man durch Nachrechnen.

Neutrale Elemente: Wir lösen die Gleichung $a + z = \{0, 0\}$ für beliebige gegebene $a \in \mathbb{C}, a = \{a_1, a_2\}$

$$\Rightarrow z = \{-a_1, -a_2\}$$

$$a \cdot z = \{1, 0\}$$

$$z = \frac{1}{a} := \left\{ \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, -\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right\}, \text{ weil } a \cdot \frac{1}{a}$$

$$\text{weil } a \frac{1}{a} = \left\{ a_1 \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{a_2 a_1}{a_1^2 + a_2^2} \right\}$$

2. $i := \{0, 1\}$ hat die Eigenschaft

$$1 + i^2 = \{1, 0\} + \{0^2 - 1^2, 0\} = \{0, 0\} \Rightarrow 1 + i^2 = 0$$

$$\text{Ähnlich } 1 + (-i)^2 = 0$$

3. Die Zuordnung $x \in \mathbb{R} : x \mapsto \{x, 0\} \in \mathbb{C}$ bildet \mathbb{R} bijektiv auf eine Untermenge von \mathbb{C} ab, welche bezüglich der komplexen Addition und Multiplikation wieder ein Körper ist \square

3.2 Notation

$z = \{x, y\} =: x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$

- x ist Realteil $x = \Re z$
- y ist Imaginärteil $x = \Im z$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = \underbrace{x_1 + x_2}_{\Re(z_1 + z_2)} + i \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\Im(z_1 + z_2)}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + iy_2 x_1 + (iy_1)(iy_2) = \underbrace{x_1 x_2 - y_1 y_2}_{\Re(z_1 z_2)} + i \underbrace{(x_1 y_2 + y_1 x_2)}_{\Im(z_1, z_2)}$$

3.3 TODO Graphische Darstellung

3.4 Bemerkung

Die reellen Zahlen sind durch $\Im z = 0$ charakterisiert.

$$z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

3.5 Korollar 1.59

Jede quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

besitzt in \mathbb{C} genau zwei Lösungen

$$z_{1,2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} & p^2 \geq 4q \\ -\frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{|p^2 - 4q|} & p^2 - 4q < 0 \end{cases}$$

3.6 Fundamentalsatz der Algebra

Jede algebraische Gleichung der Form

$$z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = 0$$

hat in \mathbb{C} mindestens eine Lösung. Beweis \rightarrow Funktionstheorie

3.7 Betrag

Für komplexe Zahlen lässt sich ein Absolutbetrag definieren

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Damit:

$$x = r \cos \alpha y = r \sin \alpha z = x + iy = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (15)$$

3.8 Konjugation

Zu einem $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir eine konjugierte komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$$

Dann gilt

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

Aus der Definition:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 * z_2} = \bar{z}_1 * \bar{z}_2$
- $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

4 Folgen

Eine Folge von reellen Zahlen wird gegeben durch eine Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto x_n$$

Wir bezeichnen die Folge auch mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

Topologische Struktur auf Mengen.

- Abstände in \mathbb{R}^1 Betrag $|x - y| \xrightarrow{\text{Verallgemeinerung}} \text{Norm / Metrik}$
- Umgebung in \mathbb{R}^1 ε -Intervall $\xrightarrow{\text{Verallgemeinerung}} \text{Kugel Umgebung}$

Wir betrachten Folgen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ (oder \mathbb{C})

4.1 Definition 2.1 Konvergenz

Wir sagen, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} (\mathbb{R} oder \mathbb{C}) gegen den Grenzwert (oder Limes) $a \in \mathbb{K}$ konvergiert

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad (a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$$

wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ von einem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon, n \geq n_\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon a_n \in I_\varepsilon(a)$$

4.2 Folgerung 2.2

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beziehungsweise fallende Folge reeller Zahlen $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und sei nach oben beziehungsweise unten beschränkt. Dann gilt

$$a_n \rightarrow \sup M, a_n \rightarrow \inf M$$

Beweis \rightarrow Übungen

4.3 Definition 2.3 Cauchy Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(Cauchy Kriterium)

4.4 Definition 2.4 Teilfolge

Eine Teilfolge einer gegebenen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Auswahl $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, wobei a_{n_k} auch die Glieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind

Beispiel 1 Beispiel 2.5.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

ist eine Cauchy-Folge. Für ein $\varepsilon > 0$ wählen wir n_ε so dass $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Für beliebiges $n \geq m > N$

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \frac{n - m}{mn} \leq \frac{n}{mn} = \frac{1}{m} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon \square$$

Satz 1 Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Angenommen, die Folge ist nicht beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$|a_{n_k}| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$$

Aus dieser Teilfolge kann man eine weitere Teilfolge

$$(a_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$$

extrahieren

$$|a_{n_{k_{i+1}}}| > 2|a_{n_{k_l}}| \quad l \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$|a_{n_{k_{i+1}}} - a_{n_{k_l}}| \geq |a_{n_{k_{i+1}}}| - |a_{n_{k_l}}| > |a_{n_{k_l}}| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$$

im Widerspruch zur Cauchy-Folgen Eigenschaft. \square

Satz 2 Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.

Beweis.

$$\begin{aligned} a_n \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \forall n, m \in n_\varepsilon : |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} (\mathbb{R} oder \mathbb{C}) welche gegen $a \in \mathbb{K}$ und $\tilde{a} \in \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist $a = \tilde{a}$.

Beweis. Beweis durch Widerspruch.

Falls $|a - \tilde{a}| > 0$, dann

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon : |a - \tilde{a}|, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und ein m_ε , sodass

$$|a_n - \tilde{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq m_\varepsilon$$

Dann für $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$:

$$|a - \tilde{a}| \leq |a - a_n| + |a_n - \tilde{a}| < \varepsilon$$

Widerspruch $\Rightarrow a = \tilde{a}$ \square

Bemerkung 1. Die Mengen Abständen heißen *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert

Definition 1 Häufungswert, Häufungspunkt. Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} , wenn es zu beliebigen $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgeelemente a_n gibt mit $|a - a_n| < \varepsilon$

Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungspunkt einer Teilmenge M von \mathbb{K} , wenn $\forall \varepsilon > 0$ existieren unendlich viele $x \in M$, sodass $|a - x| < \varepsilon$

Beispiel 2.

1. $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

- divergente Folge
- besitzt 2 Häufungswerte $a^{(1)} = 1, a^{(2)} = -1$

2. Wir nehmen $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a, b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$ und definieren eine neue Folge c_n sodass

$$\begin{aligned} c_{2n} &:= b_n, n \in \mathbb{N} \\ c_{2n+1} &:= a_n, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat 2 Häufungswerte a und b

Bemerkung 2. Nach 1 hat die konvergente Folge 1 Häufungswert

Lemma 2. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} und a ein Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann konvergiert $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m > n_\varepsilon \text{ (aus Cauchy-Folge)}$$

und $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ mit

$$|a - a_{m_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (Häufungswert)}$$

Dann folgt

$$\forall n > m_\varepsilon : |a - a_n| \leq |a - a_{m_\varepsilon}| + |a_{m_\varepsilon} - a_n| < \varepsilon \Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad \square$$

Satz 3. A abgeschlossen $\Leftrightarrow (a \text{ Häufungspunkt von } A \Rightarrow a \in A)$ A abgeschlossen in $M \Leftrightarrow M \setminus A =: CA$ offen

Beweis. (\Leftarrow):

Sei jeder Häufungspunkt von A in A $x \in CA (= \mathbb{R} \setminus A) \Rightarrow x$ kein Häufungspunkt von $A, x \notin A$

$$\Rightarrow \varepsilon : I_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon \subseteq CA$$

$\Rightarrow CA$ offen $\Rightarrow A$ abgeschlossen

(\Rightarrow):

Sei A abgeschlossen, also CA offen, ist Häufungspunkt $x \notin A$ das heißt $x \in CA$, so gilt

$$\exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon \subseteq CA \Rightarrow I_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \text{ lightning}$$

Widerspruch zur Definition von Häufungspunkt \Rightarrow jeder Häufungspunkt von A ist in A \square

Satz 4 Satz von Bolzano Weierstrass. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ (gilt in \mathbb{R}^n !) Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. A ist beschränkt abgeschlossen
2. Jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus A hat einen Häufungswert in A
3. Jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus A besitzt eine in A konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

Beweis. Wir zeigen $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3$

$3 \Rightarrow 2$:

Sei $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ a ist auch der Häufungswert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$2 \Rightarrow 1$:

1. Beschränktheit: Angenommen dies ist falsch. Dann

$$\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A : |a_n - a| \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (a \in A)$$

Nach Voraussetzungen hat jede diese Folge einen Häufungspunkt $x \in A$ und es gilt

$$|x - a| \geq |a_n - a| - |a_n - x| \geq n - |x - a_n|$$

Dabei gilt $|x - a_n| < 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ (aus Häufungswert)

$$\Rightarrow |x - a| \geq n - 1$$

Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ↯

2. Abgeschlossenheit: Wir nutzen Satz 3 Zu zeigen: wenn a Häufungspunkt von $A \Rightarrow a \in A$ Für

$$I_{\frac{1}{n}}(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \frac{1}{n}\}$$

gilt

$$I_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_n \in A : |a_n - a| < \frac{1}{n}$$

Die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow a$, da $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ Nach Voraussetzung hat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungswert $\tilde{a} \in A$. Wir zeigen $a = \tilde{a}$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad (\text{Aus } a_n \rightarrow a)$$

$$\exists m_\varepsilon \geq n_\varepsilon : |\tilde{a} - a_{m_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{Aus Häufungswert})$$

$$\Rightarrow |a - \tilde{a}| \leq |a - a_{m_\varepsilon}| + |a_{m_\varepsilon} - \tilde{a}| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a - \tilde{a}| = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{a} = a \in A$$

□