Theoretische Physik (Hebecker)

Robin Heinemann

October 23, 2016

Contents

Einleitung:

- Webseite: www.thphys.uni-heidelberg.de/hebecker/TP1/tp1.html
-

1 Kinematik des Massenpunktes

Massenpunkt / Punktmasse - (selbstevidente) Abstraktion Kinematik: Bescheibung der Bewegung (Ursachen der Bewegung $\rightarrow$ Dynamik)

1.1 Kinematik der Massenpunktes in <u>einer</u> Dimension

1.1.1 Graphik

- Ort: x
- zu Zeit $t:$ $x(t)$
- Geschwindigketi: $v(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}(t)$
- Beschleunigung: $a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$
- Beispiel: $x(t) \equiv x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2},\ t^2,\ v(t) = v_0 + a_0 t,\ a(t) = a_0$
- Umgekehrt: Integration, z.B. von Geschwindigkeit zu Trajektorie: Anfangsposition muss gegeben sein, z.B. $x(t_0) \equiv x_0$

  $$x(T) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t$$

  Man prüft leicht $\dot{x}(t) = v(t)$

  - Es gibt keine andere Funktion $\tilde{x}(t)$ mit $\dot{\tilde{x}}(t) = v(t)$ und $\tilde{x}(t_0) = x_0$

  Analog: Von Beschleunigung zur Geschwindigkeit, und dann weiter zur Trajektorie

1.1.2 Üben dieser Logik an unserem Beispiel

Gegeben: $a(t) = a_0,\ t_0 = 0, v_0, x_0$

$$\Rightarrow\ v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 \mathrm{d}t' = v_0 + a_0 t$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t')\mathrm{d}t' = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$$

1.2 Grundbegriffe der Differenzial und Integralrechung

1.2.1 Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

1.2.2 Differentiation oder Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\mathrm{d}f$ bezeichnet den in Δx linearen Anteil des Zuwaches $\Delta f \equiv f(x+\Delta x) - f(x)$.

- Aus $\Delta f = f'(x)\Delta(x) + O(\Delta x^2)$ folgt $\mathrm{d}f = f'(x)\Delta x$
- Anwendung auf die Identitätabbildung: $x \mapsto x \Rightarrow \mathrm{d}x = \Delta x$

  $$\Rightarrow \mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x \text{ oder } \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

  Dies ist eigentlich nur eine Schreibweise für $f'(x)$, aber nützlich, weil bei kleinen Δx $\mathrm{d}f \simeq \Delta f$ (Schreibweise beinhaltet intuitiv die Grenzwertdefinition)
- $f'(x)$ wieder Funktion $\Rightarrow$ analog: $f''(x),\ f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$
- Praxis

  $$(f \cdot g)' = f'g + g'f \text{ (Produkt/Leibnizregel)}$$
  $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{ (Kettenregel)}$$
  $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ (Ableitung der Inversen Funktion)}$$

  - Begründung (nur zum letzen Punkt)

    $$(f^{-1})'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(f(y))} = \frac{\mathrm{d}y}{f'(y)\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

  - Schöne Beispiele

    $$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

    $$\arctan'(x) \equiv (\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\tan^{-1}(y)} \text{ wobei } y = \tan^{-1}(x)$$

    Besser:

    $$\tan^{-1}(y) = (\sin y \frac{1}{\cos y})' = \cos y \frac{1}{\cos y} + \sin y (\frac{1}{\cos y})' = 1 + \sin y (-\frac{1}{\cos^2 y})(-\sin y) = 1 + \tan^2 y$$

- Verknüpfung

  $$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$$

- Inverse

$$f^{-1} : x = f(y) \mapsto y$$

- Grenzwerte:
  - nützliche Regel: l'Hôpital ("$\frac{0}{0}$")
    Falls $\lim_{x\to x_0} f, g = 0$ und $\lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$ existiert, so gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$
  - weitere nützliche Regel

$$\lim \frac{\text{Beschränkt}}{\text{Unbeschränkt und monoton wachsend}} = 0$$

    * Beispiel:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}$$

  - Kürzen unter lim
    * Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

1.2.3 Integrieren

1. Fundamentalsatz der Analysis

$$\int^y f(x)\mathrm{d}x = F(y) \& F'(y) = f(y)$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

   ($\rightarrow$ saubere Definition über Riemansches Integral)

2. Praxis

   (a) Partielle Integration

$$\int^y f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(y)g(y) - \int^y f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

(b) Substitution Unter Annahme einer invertierbaren Funktion $x : y \mapsto x(y)$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = \int f(x(y))x'(y)\mathrm{d}y$$

Andere Formulierung:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y$$

Substitution $y = g(x)$

(c) Klassiker

$$\int \ln x\mathrm{d}x = \int \ln x 1\mathrm{d}x = \ln x x - \int \frac{1}{x} x\mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x e^{x^2}\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\int e^y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

1.3 Kinematik in mehreren Dimensionen

1.3.1 Zweidimensionale Bewegung

Zweidimensional $\rightarrow$ Bewegung in der Ebene. Trajektorie: $x(t), y(t)$

1. Bespiel

$$x(t) = v_0 t \sin \omega t$$

$$y(t) = v_0 t \cos \omega t$$

   (a) **TODO** Skizze der Trajektorie (Bahnkurve)

   (b) Raumkurve Menge aller Punkte ${x,y}, die das Teilchen durchläuft

   (c) **TODO** Skizze Nichtriviale Darstellung <u>nur</u> im Raum (Raumkurve)

1.3.2 Dreidimensionale Bewegung

Die Darstellung der Tranjektorie istr erschwert, denn man bräuchte 4 Dimensionen: 3 für Raum und 1 für Zeit Formal keim Problem: Trajektorie ist

- $$x(t), y(t), z(t)$$
- $$x^1(t), x^2(t), x^3(t)$$
- $$\{x^i(t)\}, i = 1, 2, 3$$

Dementsprechend:

$$v^i(t) = \dot{x}^i(t); a^i(t) = \dot{v}^i(t); i = 1, 2, 3$$

1.4 Vektorräume

Eine Menge V heißt Vektorraum, wenn auf ihr zwei Abbildungen

- die Addition $(+)$
- die Multiplikation mit reellen Zahlen $(*)$

definiert sind.

$$x : V \times V \to V$$
$$\text{Multiplikation} : \mathbb{R} \times V \to V$$

$V \times V$ - Produktmenge $\equiv$ Menge aller Paare so dass gilt:

$$v + (w + u) = (v + w) + u \quad u, v, w \in V \qquad \text{Assoziativität}$$
$$v + w = w + v \qquad \text{Kommutativität}$$
$$\exists 0 \in V : v + 0 = v \,\forall\, v \in V \qquad \text{Null}$$
$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \qquad \text{Distributvität}$$
$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \text{Distributivität}$$
$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \qquad \text{Assoziativität der Multiplikation}$$
$$1v = v \qquad \text{Multiplikation mit Eins}$$

1.4.1 Einfachstes Beispiel

$V \equiv \mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation und mit $0 \in \mathbb{R}$ als Vektorraumnull)

1.4.2 Unser Haupt-Beispiel

Zahlentupel aus n-Zahlen:

$$V \equiv \mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}$$

Notation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^n) \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 & \dots y^n \end{pmatrix}$$

Man definiert:

$$\vec{x} + \vec{y} \equiv (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n)$$

$$\vec{0} \equiv (0, \dots, 0)$$

$$\alpha\vec{x} \equiv (\alpha x^1, \dots, \alpha x^n)$$

1. **TODO** (Maybe) Skizze 3D Vektor → übliche Darstellung durch "Pfeile"

1.5 Kinematik in $d > 1$

Trajektorie ist Abbildung: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \to \vec{x}(t))(x^1(t), x^1(t), x^3(t))$

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t), a\vec{(t)} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Setzt allgemeine Definition der Ableitun voraus:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{y}(x + \Delta x) - \vec{y}(x)}{\Delta x} \Rightarrow \vec{y}'(x) = (y^{1'}(x), \dots, y^{n'}(x))$$

1.5.1 Beispiel für 3-dimensionale Trajketorie

Schraubenbahn:

$$\vec{x}t = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, v_0 t)$$

$$\vec{v} = (-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, v_0)$$

$$\vec{a} = (-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t, 0)$$

1. **TODO** Skizze (Raumkurve) **Kommentar:**
   $\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ leben in verschiedenen Vektorräumen! allein schon wegen $[x] = \mathrm{m}$, $[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$
   Wir können wie in $d = 1$ von $\vec{a}$ zu $\vec{v}$ zu $\vec{x}$ gelangen!

   $$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \vec{a}(t') = (v_0^1 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^1(t'), v_0^2 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^2(t'), v_0^3 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^2(t'))$$

2. Üben: Schraubenbahn; $t_0 = 0$, $\vec{x_0} = (R, 0, 0), v_0 = (0, R\omega, v_0)$ Es folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t))(0, R\omega, v_0) + \int_0^t \mathrm{d}t'(-R\omega^2)(\cos\omega t', \sin\omega t', 0) && (1)\\
=&(0, R\omega, v_0) + (-R\omega^2)(\frac{1}{\omega}\sin\omega t', -\frac{1}{\omega}\cos\omega t', 0)\ |_0^t && (2)\\
=&(0, R\omega, v_0) - R\omega(\sin\omega t, -\cos\omega t, 0) - (0, -1, 0) && (3)\\
=&(-R\omega\sin\omega t, R\omega + R\omega\cos\omega t - R\omega, v_0) && (4)\\
=&(-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, v_0) && (5)
\end{aligned}$$

3. Bemerkung Man kann Integrale über Vektoren auch durch Riemansche Summen definieren:

$$\int_{t_0}^t \vec{v}(t')\mathrm{d}t' = \lim_{n\to\infty}(v(t_0)\Delta t + \vec{v}(t_0 + \Delta t)\Delta t + \ldots + \vec{v}(t - \Delta t)\Delta t)$$

mit $\Delta t = \frac{t-t_0}{N}$

1.6 Skalarprodukt

Führt von Vektoren wieder zu nicht-vektoriellen (Skalaren) Größen.

1.6.1 Symmetrische Bilinearform

Abbildung von $V \times V \to \mathbb{R},\ (v, w) \mapsto v \cdot w$ mit den Eigenschaften

- $v \cdot w = w \cdot v$
- $(\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha u \cdot w + \beta v \cdot w$

Sie heißt positiv-semidefinit, falls $v \cdot v \geq 0$,
Sie heißt positiv-definit, falls $v \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$ Hier : Skalarprodukt $\equiv$ positiv definite symmetrische Bilinearform

1.6.2 Norm (Länge) eines Vektors

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v^2}$$

$\mathbb{R}^n$: Wir definieren

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n \equiv \sum_{i=1}^n x^i y^i \equiv \underbrace{x^i y^i}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$$

Wichtig: oben euklidiesches Skalarprodukt! Anderes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 7x^1y^2 + x^2y^2$ anderes Beispiel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^1y^1 - x^2y^2$$

symmetrische Bilinearform, <u>nicht</u> positiv, semidefinit! Frage:
Beispiel für Bilinearform die positiv-semidefinit ist, aber <u>nicht positiv definit</u>