Theoretische Physik (Hebecker)

Robin Heinemann

November 10, 2016

Contents

Einleitung:

- Webseite: www.thphys.uni-heidelberg.de/hebecker/TP1/tp1.html
- Bartelman skripte

1 Semesterüberblick

1. Newtonsche Mechanik
2. Lagrange / Hamilton Mechanik / Statistik / Kontinua
3. Elektrodynamik / Spezielle Relativitättheorie
4. Quatenmechanik
5. Thermodynamik / Quantenstatistik
6. Allgemeine Relativitättheorie / Kosmologie
7. Quatenfeldtheorie I (ggf. 5.)
8. Quatenfeldtheorie II (ggf. 6. $\Leftarrow$ Stringtheorie / Teilchenphysik / Supersymmetrie)
9. Masterarbeit
10. Masterarbeit

1.1 Mathe

wichtig:

- Gruppentheorie
- Differientialgeometrie

2 Kinematik des Massenpunktes

Massenpunkt / Punktmasse - (selbstevidente) Abstraktion Kinematik: Bescheibung der Bewegung (Ursachen der Bewegung $\rightarrow$ Dynamik)

2.1 Kinematik der Massenpunktes in <u>einer</u> Dimension

2.1.1 Graphik

- Ort: x
- zu Zeit $t:\ x(t)$
- Geschwindigketi: $v(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}(t)$
- Beschleunigung: $a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$
- Beispiel: $x(t) \equiv x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2},\ t^2,\ v(t) = v_0 + a_0 t,\ a(t) = a_0$
- Umgekehrt: Integration, z.B. von Geschwindigkeit zu Trajektorie: Anfangsposition muss gegeben sein, z.B. $x(t_0) \equiv x_0$

  $$x(T) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t$$

  Man prüft leicht $\dot{x}(t) = v(t)$

  - Es gibt keine andere Funktion $\tilde{x}(t)$ mit $\dot{\tilde{x}}(t) = v(t)$ und $\tilde{x}(t_0) = x_0$

  Analog: Von Beschleunigung zur Geschwindigkeit, und dann weiter zur Trajektorie

2.1.2 Üben dieser Logik an unserem Beispiel

Gegeben: $a(t) = a_0,\ t_0 = 0, v_0, x_0$

$$\Rightarrow\ v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 \mathrm{d}t' = v_0 + a_0 t$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t')\mathrm{d}t' = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$$

2.2 Grundbegriffe der Differenzial und Integralrechung

2.2.1 Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x)$$

2.2.2 Differentiation oder Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\mathrm{d}f$ bezeichnet den in Δx linearen Anteil des Zuwaches $\Delta f \equiv f(x+\Delta x) - f(x)$.

- Aus $\Delta f = f'(x)\Delta(x) + O(\Delta x^2)$ folgt $\mathrm{d}f = f'(x)\Delta x$
- Anwendung auf die Identitätabbildung: $x \mapsto x \Rightarrow \mathrm{d}x = \Delta x$

  $$\Rightarrow \mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x \text{ oder } \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

  Dies ist eigentlich nur eine Schreibweise für $f'(x)$, aber nützlich, weil bei kleinen Δx $\mathrm{d}f \simeq \Delta f$ (Schreibweise beinhaltet intuitiv die Grenzwertdefinition)
- $f'(x)$ wieder Funktion $\Rightarrow$ analog: $f''(x),\ f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$
- Praxis

  $$(f \cdot g)' = f'g + g'f \text{ (Produkt/Leibnizregel)}$$
  $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{ (Kettenregel)}$$
  $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ (Ableitung der Inversen Funktion)}$$

  - Begründung (nur zum letzen Punkt)

    $$(f^{-1})'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(f(y))} = \frac{\mathrm{d}y}{f'(y)\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

  - Schöne Beispiele

    $$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$
    $$\arctan'(x) \equiv (\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\tan^{-1}(y)} \text{ wobei } y = \tan^{-1}(x)$$

    Besser:

    $$\tan^{-1}(y) = (\sin y \frac{1}{\cos y})' = \cos y \frac{1}{\cos y} + \sin y (\frac{1}{\cos y})' = 1 + \sin y (-\frac{1}{\cos^2 y})(-\sin y) = 1 + \tan^2 y = 1-$$

- Verknüpfung

  $$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$$

- Inverse

$$f^{-1}: x = f(y) \mapsto y$$

- Grenzwerte:
  - nützliche Regel: l'Hôpital ("$\frac{0}{0}$")
    Falls $\lim_{x\to x_0} f, g = 0$ und $\lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$ existiert, so gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$
  - weitere nützliche Regel

$$\lim \frac{\text{Beschränkt}}{\text{Unbeschränkt und monoton wachsend}} = 0$$

    * Beispiel:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}$$

  - Kürzen unter lim
    * Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

2.2.3 Integrieren

Fundamentalsatz der Analysis

$$\int^{y} f(x)\mathrm{d}x = F(y)\&F'(y) = f(y)$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

($\rightarrow$ saubere Definition über Riemansches Integral)

Praxis

Partielle Integration

$$\int^{y} f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(y)g(y) - \int^{y} f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Substitution Unter Annahme einer invertierbaren Funktion $x : y \mapsto x(y)$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = \int f(x(y))x'(y)\mathrm{d}y$$

Andere Formulierung:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y$$

Substitution $y = g(x)$

Klassiker

$$\int \ln x\mathrm{d}x = \int \ln x1\mathrm{d}x = \ln xx - \int \frac{1}{x}x\mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\int e^y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

2.3 Kinematik in mehreren Dimensionen

2.3.1 Zweidimensionale Bewegung

Zweidimensional $\rightarrow$ Bewegung in der Ebene. Trajektorie: $x(t), y(t)$

Bespiel

$$x(t) = v_0 t \sin \omega t$$
$$y(t) = v_0 t \cos \omega t$$

TODO Skizze der Trajektorie (Bahnkurve)

Raumkurve Menge aller Punkte ${x,y}, die das Teilchen durchläuft

TODO Skizze Nichtriviale Darstellung nur im Raum (Raumkurve)

2.3.2 Dreidimensionale Bewegung

Die Darstellung der Tranjektorie istr erschwert, denn man bräuchte 4 Dimensionen: 3 für Raum und 1 für Zeit Formal keim Problem: Trajektorie ist

- $$x(t), y(t), z(t)$$
- $$x^1(t), x^2(t), x^3(t)$$
- $$\{x^i(t)\}, i = 1, 2, 3$$

Dementsprechend:

$$v^i(t) = \dot{x}^i(t); a^i(t) = \dot{v}^i(t); i = 1, 2, 3$$

2.4 Vektorräume

Eine Menge V heißt Vektorraum, wenn auf ihr zwei Abbildungen

- die Addition $(+)$
- die Multiplikation mit reellen Zahlen $(*)$

definiert sind.

$$x : V \times V \to V$$
$$\text{Multiplikation} : \mathbb{R} \times V \to V$$

$V \times V$ - Produktmenge $\equiv$ Menge aller Paare so dass gilt:

$$v + (w + u) = (v + w) + u \quad u, v, w \in V \qquad \text{Assoziativität}$$
$$v + w = w + v \qquad \text{Kommutativität}$$
$$\exists 0 \in V : v + 0 = v \, \forall \, v \in V \qquad \text{Null}$$
$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \qquad \text{Distributvität}$$
$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \text{Distributivität}$$
$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \qquad \text{Assoziativität der Multiplikation}$$
$$1v = v \qquad \text{Multiplikation mit Eins}$$

2.4.1 Einfachstes Beispiel

$V \equiv \mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation und mit $0 \in \mathbb{R}$ als Vektorraumnull)

2.4.2 Unser Haupt-Beispiel

Zahlentupel aus n-Zahlen:

$$V \equiv \mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}$$

Notation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \ldots & x^n \end{pmatrix}), \vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 & \ldots y^n \end{pmatrix}$$

Man definiert:

$$\vec{x} + \vec{y} \equiv (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n)$$
$$\vec{0} \equiv (0, \ldots, 0)$$
$$\alpha\vec{x} \equiv (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n)$$

TODO (Maybe) Skizze 3D Vektor $\to$ übliche Darstellung durch ”Pfeile”

2.5 Kinematik in $d > 1$

Trajektorie ist Abbildung: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \to \vec{x}(t))(x^1(t), x^1(t), x^3(t))$

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t), a\vec{(t)} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Setzt allgemeine Definition der Ableitun voraus:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{y}(x + \Delta x) - \vec{y}(x)}{\Delta x} \Rightarrow \vec{y}'(x) = (y^{1'}(x), \ldots, y^{n'}(x))$$

2.5.1 Beispiel für 3-dimensionale Trajketorie

Schraubenbahn:

$$\vec{x}t = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, v_0 t)$$
$$\vec{v} = (-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, v_0)$$
$$\vec{a} = (-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t, 0)$$

TODO Skizze (Raumkurve) **Kommentar:**
$\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ leben in verschiedenen Vektorräumen! allein schon wegen $[x] = \mathrm{m}$, $[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$
Wir können wie in $d = 1$ von $\vec{a}$ zu $\vec{v}$ zu $\vec{x}$ gelangen!

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\vec{a}(t') = (v_0^1 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^1(t'), v_0^2 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^2(t'), v_0^3 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^2(t'))$$

Üben: Schraubenbahn; $t_0 = 0$, $\vec{x_0} = (R, 0, 0), v_0 = (0, R\omega, v_0)$ Es folgt:

$$\vec{v}(t))(0, R\omega, v_0) + \int_0^t \mathrm{d}t'(-R\omega^2)(\cos\omega t', \sin\omega t', 0) \tag{1}$$
$$=(0, R\omega, v_0) + (-R\omega^2)(\frac{1}{\omega}\sin\omega t', -\frac{1}{\omega}\cos\omega t', 0) \mid_0^t \tag{2}$$
$$=(0, R\omega, v_0) - R\omega(\sin\omega t, -\cos\omega t, 0) - (0, -1, 0) \tag{3}$$
$$=(-R\omega\sin\omega t, R\omega + R\omega\cos\omega t - R\omega, v_0) \tag{4}$$
$$=(-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, v_0) \tag{5}$$

Bemerkung Man kann Integrale über Vektoren auch durch Riemansche Summen definieren:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\mathrm{d}t' = \lim_{n \to \infty} (v(t_0)\Delta t + \vec{v}(t_0 + \Delta t)\Delta t + \ldots + \vec{v}(t - \Delta t)\Delta t)$$

mit $\Delta t = \frac{t - t_0}{N}$

2.6 Skalarprodukt

Führt von Vektoren wieder zu nicht-vektoriellen (Skalaren) Größen.

2.6.1 Symmetrische Bilinearform

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ "linear" Abbildung von $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto v \cdot w$ mit den Eigenschaften

- $v \cdot w = w \cdot v$
- $(\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha u \cdot w + \beta v \cdot w$

Sie heißt positiv-semidefinit, falls $v \cdot v \geq 0$,
Sie heißt positiv-definit, falls $v \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$ Hier : Skalarprodukt $\equiv$ positiv definite symmetrische Bilinearform

2.6.2 Norm (Länge) eines Vektors

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v^2}$$

$\mathbb{R}^n$: Wir definieren

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n \equiv \sum_{i=1}^{n} x^i y^i \equiv \underbrace{x^i y^i}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$$

Wichtig: oben euklidiesches Skalarprodukt! Anderes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 7x^1 y^2 + x^2 y^2$ anderes Beispiel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^1 y^1 - x^2 y^2$$

symmetrische Bilinearform, <u>nicht</u> positiv, semidefinit! Frage:
Beispiel für Bilinearform die positiv-semidefinit ist, aber <u>nicht positiv definit</u>

$$\vec{x}\vec{y} = x^1 y^1$$

2.7 Abstand zwischen Raumpunkten

Der anschauliche Abstand zweichen Raumpunkten $\vec{x}, \vec{y}$:

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})(\vec{x} - \vec{y})} = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x^i - y^i)^2} = \sqrt{(x^i - y^i)(x^i - y^i)}$$

$$= \sqrt{\vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2\vec{x}\vec{y}} = \sqrt{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta}$$

Haben benutzt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta$

2.7.1 Spezialfall

$$\vec{x} = (x^1, 0, 0), \vec{y} = (y^1, y^2, 0)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 \cdot y^1; \cos\theta = \frac{y^1}{|\vec{y}|}; |\vec{x}| = x^1$$

TODO Skizze

$$\Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$$

Dass dies für beliebige Vektoren gilt, wird später klar werden.

2.7.2 Infinisetimaler Abstand

Speziell wird der infinitesimale Abstand wichtig sein:

$$\mathrm{d}\vec{x} = (\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3)$$

$$\mathrm{d}\vec{x} = (\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t) = (v^1\mathrm{d}t, v^2\mathrm{d}t, v^3\mathrm{d}t) = (v^1, v^2, v^3)\mathrm{d}t = \vec{v}\mathrm{d}t, \text{ oder: } \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

($\mathrm{d}\vec{x}$ analog zu $\mathrm{d}f$ vorher);
$\mathrm{d}\vec{x}^2 = |\mathrm{d}\vec{x}|^2 = |\vec{v}|^2\mathrm{d}t^2$
$|\mathrm{d}x| = |\vec{v}|\mathrm{d}t$.

2.8 Bogenlänge und begleitendes Dreibein

$|d\vec{x}|$ entlang $\vec{x}(t)$ aufaddieren $\to$ Bogenlänge.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathrm{d}\vec{x}| = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t'}\right| = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \sqrt{\dot{\vec{x}}(t')^2} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\vec{v}(t')^2}$$

Infinitesimale Version:

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right| = |\vec{v}|$$

Man kann (im Prinzip) $s(t) = s$ nach t auflösen.

$$\Rightarrow t = t(s) \Rightarrow \underbrace{\vec{x}(s)}_{\text{Parametrisierung der Trajektorie durch die Weglänge } s} \equiv \vec{x}(t(s))$$

Nützlich, zum Beispiel für die Definition des Tangentenvektors:

$$\vec{T}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s}$$

Es gilt

$$\vec{T} \parallel \vec{v}; \left|\vec{T}\right| = \left|\frac{\vec{v}\mathrm{d}t}{|\vec{v}|\mathrm{d}t}\right| = 1 \Rightarrow \vec{T}\cdot\vec{T} = 1$$

Ableiten nach s:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(1) = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}(\vec{T}\cdot\vec{T}) = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{T} + \vec{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = 2\vec{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}$$

Nutze

$$\vec{T}\cdot\vec{T} = T^iT^i$$

⇒ Ableitung des Tangentenvektors ist ortogonal zum Tangentenvektor. Krümmungsradius der Bahn:

$$\rho \equiv \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right|}$$

Normalenvektor:

$$\vec{N} = \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}}{\left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right|} = \rho\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}$$

2.8.1 Beispiel in d=2

$$\vec{x}(t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t)$$
$$\vec{v}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), \cos\omega t)$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(R\omega)^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = R\omega$$
$$s(t) = \int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'|\vec{v}| = R\omega t;\ t(x) == \frac{s}{R\omega}$$
$$\Rightarrow \vec{x}(s) = R(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}), \vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s} = (-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R})$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{R}(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}) \Rightarrow \rho = R;\ \vec{N} = -(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R})$$

TODO Skizze

2.9 Vektorprodukt

$$V \times V \mapsto V;\ (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

mit

$$c^i = (\vec{a} \times \vec{b})^i \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \epsilon^{ijk} a^j b^k = \epsilon^{ijk} a^j b^k$$

dabei:

- $\epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{321} = 1$
- $\epsilon^{213} = \epsilon^{132} = \epsilon^{321} = -1$
- sonst 0 ($\$\epsilon^{\mathrm{ijk}} = 0$, falls zwei Indizes gleich)

Alternativ:

- $$|\vec{c}| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right||\sin\theta|$$
- Richtung von $\vec{c}$ definiert durch $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{c}$
- Vorzeichen von $\vec{c}$ ist so, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein "Rechtssystem" bilden

TODO Skizze

2.10 Binormalenvektor

$$= \vec{T} \times \vec{N}$$

$\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ heißen "begleitendes Dreibein" und bilden ein Rechtssystem. alle haben Länge 1 $\vec{T}, \vec{N}$ spannen die "Smiegeebene" auf

2.10.1 Zur Information

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\vec{N}; \ \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\sigma}\vec{B}; \ \frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sigma}\vec{B} - \frac{1}{\rho}\vec{T}$$

σ definiert die Torsion.

3 Grundbegriffe der Newtonsche Mechanik

3.1 Newtonsche Axiome

Dynamik: Ursachen der Bewegungsänderung $\rightarrow$ Kräfte: $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$

1. Es existierten Inertialsysteme (Koordinatensysteme in denen eine Punktmasse an der keine Kraft wirkt) nicht oder sich geradlinig gleichförmig bewegt: $\ddot{\vec{x}} = 0$
2. In solchen Systemen gilt: $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$
3. Für Kräfte zwischen zwei Massenpunkten gilt:

$$\vec{F_1}2 = -\vec{F_2}1$$

$2.$ definiert die **träge** Masse Die entscheidene physikalische Aussage von $2.$ ist das Auftreten von $\ddot{\vec{x}}$ (nicht etwa $\dot{\vec{x}}$ oder $\dddot{\vec{x}}$) Alternative Diskussionen der obigen Axiomatik:

- zum Beispiel Kapitel 1.2 von Jose/Saletan (mit $2.$ Definition der Kraft)

3.2 Trajektorie

Vorhersagen erfordern: $\vec{F} \rightarrow$ Trajektorie. Genauer: Sei $\vec{F}(\vec{x}, t)$ gegeben. Berechne $\vec{x}(t)$!

3.3 Differentialgleichungen

hier nur "gewöhnliche DGL" (nur Ableitungen nach einer Variable) (im Gegensatz zu "partiellen" (Ableitung nach verschiedenen Variabeln))

3.3.1 1. Ordung

Die allgemeine Form einer gewöhlichen Dgl. 1. Ordnung ($\Rightarrow$ nur 1. Ableitung):

$$y'(x) = f(x, y)$$

Lösung Funktionn: $y : x \mapsto y(x)$ mit $y'(x) = f(x, y(x))$ (im Allgemeinen wird x aus einem gewissen Intervall kommen: $x \in I \equiv (a, b) \subseteq \mathbb{R}$)

3.3.2 Anfangswertproblem

Gegeben durch:

1. Dgl.: $y' = f(x, y)$
2. Anfangsbedingung $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: Funktion $y(x)$ mit (für $x \in I, x_0 \in I$:

1. $y'(x) = f(x, y(x))$
2. $y(x_0) = y_0$

3.3.3 partielle Ableitung

Wir betrachten ab sofort auch Funktionen mehrerer Variablen: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ Partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Rechenregeln: Wie bei normalen Ableitung, nur mit x fest.

Beispiel

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + yz$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = y$$

3.3.4 Existenz und Eindeutigkeit

... viele Theoreme über Existenz und Eindeutigkeit (Peano und Picand / Lindelöf) Insbesondere sind Existenz und Eindeutigkeit gesichert falls:

$$f(x, y) \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

stetig sind.

"Begründung" Zeichne an jedem Punkt (x, y) einen Vektor $(1, f(x, y))$ ein.

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{(x, y(x))}{1}$$

Weiteres Argument für die Existenz und Eindeutigkeit TODO(Skizze) Steigung der gesuchten Funktion bei x_0 ist bekannt als $f(x_0, y_0) \Rightarrow$ kann Wert der Funktion bei $x+\Delta x$ abschätzen: $y_0+\Delta x f(x_0, y_0)$ (für kleine Δx) Kenne Steigung bei $x_0\Delta x : f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta x f(x_0, y_0)) \Rightarrow$ Schätze Wert der Funktion bei $x_0 + 2\Delta x$ ab. ($\Rightarrow$ perfekt für Numerik)

3.3.5 Beispiele

1.
$$y'(x) = f(x, y), f(x, y) = 3$$
$$y'(x) = 3 \Rightarrow y(x) = \int 3\mathrm{d}x = 3x + c$$

   Das ist schon die allgemeine Lösung der Dgl. Ein Anfangswertproblem, zum Beispiel mit $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ lässt sich duch Bestimmen der Konstanten lösen:

$$y(x) = 3x + c \Rightarrow 1 = 3(-1) + c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow y(x) = 3x + 4$$

3.3.6 Seperation der Variablen

Seperation der Variablen funktioniert wenn $f(x, y) = g(x)h(y)$

Beispiel

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \Rightarrow y'(x) = \frac{x}{y(x)}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$

Variablen sind getrennt, kann einfach Integrieren

$$\int y\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 2c}$$

Lösen allgemeines Anfangswertproblem allgemeines Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung (x_0, y_0)

$$y_0^2 = x_0^2 + 2c \Rightarrow 2c = y_0^2 - x_0^2 \Rightarrow y = \begin{cases} \sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \geq 0 \\ -\sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \leq 0 \end{cases}$$

1. **TODO** Skizze

3.3.7 System von Dgl

(fast) alles oben gesagte funktioniert auch für Systeme gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}y^1(x)}{\mathrm{d}x} = f^1(x, y^1, \dots, y^n)$$

$$\frac{\mathrm{d}y^n(x)}{\mathrm{d}x} = f^n(x, y^n, \dots, y^n)$$

Vektorschreibweise:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

Wir haben hier eine vektorwertige Funktion von $n+1$ Variablen benutzt:

$$\vec{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Anfangsbedingungen: $(x_0, \vec{y}_0) \to n+1$ Parameter. Einer davon entspricht der verschiebung entlang der ein under derselben Lösung $\Rightarrow$ allgemeine Lösung hat $(n+1)-1 = n$ Parameter oder Integrationskonstanten.

3.3.8 Systeme von n gewöhnlicher Dgl. p-ter Ordnung

$$\vec{y}^{(p)}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'', \dots, \vec{y}^{(p-1)})$$

Anfangsbedingungen: $(x_0, \vec{y}_0, \vec{y}_0', \dots, \vec{y}_0^{(p-1)}), \vec{y}_0' \mathrel{\hat{=}} \vec{y}'(x)$ bei $x = x_0$

Tatsache Systeme von Dgl können auf größere Systeme niedrigerer Ordnung zurückgeführt werden. Wir illustieren dies am Beispiel mit $p = 2$

Beispiel

$$\vec{y}''(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}')$$

Dies ist äquivalent zu einem System von $2n$ Dgl 1. Ordnung

$$\begin{cases} \vec{z}'(x) & = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{z}) \\ \vec{y}'(x) & = \vec{z} \end{cases} \qquad (\equiv g(x, \vec{y}, \vec{z}))$$

Ursprüngliche Form folgt duch Eisezten der 2. Gleichung in die erste. Das verallgemeinert sich sofort auf die Ordnung p: Man gibt einfach der $(p-1)$ niederen Ableitungen neue Namen und betrachtet sie als neue Variablen. Die zusätzlichen Dgl sind schlicht die Aussagen, dass es sich dabei immer noch um die ehemaligen Ableitungen handelt.
$\Rightarrow$ System von np Dgl 1. Ordung; allgemeine Lösung hat np Parameter

3.3.9 Erste physikalische Beipiele

Punktmasse 3 Dgl 2. Ordung:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

$\Rightarrow$ 6 Dgl 1. Ordung:

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}} & = \frac{1}{m}\vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v}) \\ \dot{\vec{x}} & = \vec{v} \end{cases} \tag{6}$$

In vielen Fällen: (zeitunabhängiges) Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ ("Vektorfeld").

Darstellung in $d = 2$ (Skizze Vektorfeld). wichtig: doppelte Makierung der Achsen

Einfachster Fall ($d = 1$) betrachte den Fall, dass F von v, aber nicht von t abhängt:

$$\begin{cases} \dot{v} & = \frac{F(x,v)}{m} \\ \dot{x} = v \end{cases} \tag{7}$$

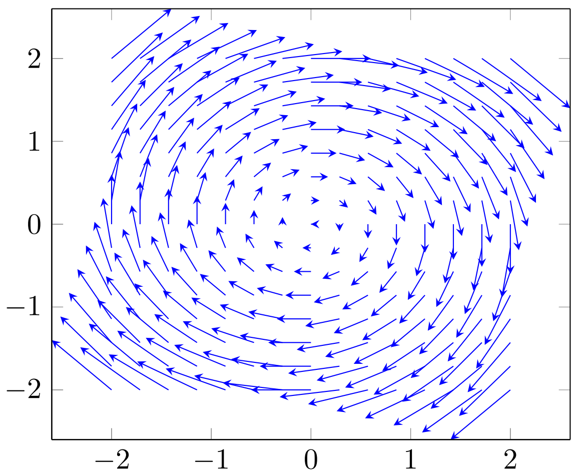
$$\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(x,v)}{m} \\ v \end{pmatrix}$$

1. **TODO** Darstellung im Phasenraum Analyse im Phasenraum passt perfekt zur früheren allgemeinen Analyse von Dgl 1. Ordnung Analog in $d = 3$: Vektorfeld: $(\frac{\vec{F}}{m}, \vec{v})$, Phasenraum $(\vec{x}, \vec{v})$ oder $(\vec{x}, \vec{p})$ ist 6-dimensional

Harmonischer Oszilator ($d = 1$) $F(x) = -kx$

$$\begin{cases} \dot{v} & = -x \\ \dot{x} & = v \end{cases} \tag{8}$$

Phasenraum des Harmonischen Oszilators



Freier Fall mit Luftwiederstand Aufgabe: Bestime zeitliche Entwicklung von v wenn Körper im Schwerefeld losgelassen wird. $F_R = -cv^2$
Problem $1 - dim$: x wachse nach unten, Start bei $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$

$$F = m\ddot{x} \Rightarrow mg - c\dot{x}^2 = m\ddot{x} \Rightarrow \begin{cases} mg - cv^2 & = m\dot{v} \\ v & = \dot{x} \end{cases}$$

Erste Gleichung enthält kein x und kann unabhängig gelöst werden:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{c}{m}v^2 \tag{9}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{c}{m}v^2} \tag{10}$$

Konstanten und Dimensionen

$$[g] = \mathrm{m\,s^{-2}}; [\frac{c}{m}] = \mathrm{N\,kg^{-1}\,m^{-2}\,s^2}$$

Kann leicht Konstanten der Dimension Zeit und Geschwindigkeit bilden:

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}, \hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}$$

Benutze jetzt die dimensionslosen Variablen $t' = \frac{t}{\hat{t}}, v' = \frac{v}{\hat{v}}$

$$\Rightarrow \mathrm{d}t' = \frac{dv'}{1 - v^{2\prime}} = \frac{\mathrm{d}v'}{2}(\frac{1}{1 + v'} + \frac{1}{1 - v'})$$

$$2t' = \ln 1 + v' - \ln 1 - v' + c$$

$v' = 0$ bei $t' = 0 \Rightarrow c = 0$ Auflösen nach v':

$$e^{2t'} = \frac{1 + v'}{1 - v'} \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow v' = 1 - \frac{2}{e^{2t'} + 1} \Rightarrow v = \hat{v}(1 - \frac{2}{e^{\frac{2t}{\hat{t}}}} + 1)$$

$\Rightarrow \hat{v}$ ist Grenzgeschwindigkeit, wird exponentiell angenommen, wenn $t \gg \hat{t}$

Zugabe: einfache physikalische Argumente für die Größe von c:

1. $[c] = \mathrm{kg\,m^{-1}}$, Input: A (Querschnitt), $\rho_L \Rightarrow c \sim \rho_L A$
2. Energiebilanz an verdrängter Luft:

$$F_R \cdot l \sim E_{\text{kin,Luft}} \sim \rho_L l A \frac{v^2}{2}$$

3.4 Taylorentwickung

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$. Untersuche Verhalten beliebiger glatter Funktionen $f(x)$ nahe $x = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x \mathrm{d}x' f'(x') && (11) \\ &= f(0) + f'(x')(x_-x)\Big|_0^x - \int_0^x \mathrm{d}x' f''(x')(x'-x) && (12) \\ &= f(0) + f'(0)x - f''(x')\frac{(x'-x)}{2}\Big|_0^x + \int_0^x \mathrm{d}x' f'''(x')\frac{(x'-x)^2}{2} && (13) \\ &= f(0) + f'(x)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \dots && (14) \end{aligned}$$

Allgemein:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{m} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \overbrace{\int_0^x \mathrm{d}x' f^{(m+1)}(x')\frac{(x'-x)^m}{m!}}^{\text{Restglied}}$$

Falls das Restgliend für $n \to \infty$ verschwindet:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

Analog: Taylor-Reihe:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

1. Oft erste Terme = gute Näherung

2. Verallgemeinerung auf viele Variablen

3.4.1 Interessantes "Gegenbeispiel"

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Überzeugen sie sich, dass alle Ableitungen existieren, auch bei Null!
Sie Brauchen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Die Ableitungen verschwinden sogar bei Null $\Rightarrow$ Taylor-Reihe ist Null, keine gute Näherung

3.5 Harmonicher Oszillator

- eines der wichtigesten physikalischen Systeme
- beschreibt viele kompilziertere Systeme angenähert

3.5.1 Eindimensionales System

$d = 1, F = F(x)$

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}}{dx}v(x) = -v'(x)$$

Damit haben wir das **Potetial** ($\rightarrow$ beschreibt die potentielle Energie des Massenpunktes) v als Stammfunktion von $-F$ definiert

- Skizze

Massenpunkt kann nur ruhen, wo $F = 0$ beziehungsweise $V' = 0$. Genauer: Nur Minima (Maxima instabil).

Ziel Untersuchung der Bewegung in der Nähe von Minimal (also bei $x \approx x_0$ wobei $v'(x_0) = 0$ gelte)
$V(x)$ bei x_0, $V'(x_0) = 0, |x - x_0|$ klein

$$\Rightarrow V(x) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2}v''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$\Rightarrow F(x) \simeq -V''(x_0)(x - x_0)$$

$$x - x_0 \equiv y \Rightarrow \quad \underbrace{F(y) = -ky}_{\text{harmonischer Oszillator}} \quad , k \equiv v''(0)$$

Wir sehen: Harmonischer Oszillator ist eine Idealisierung von potentiell sehr großem Nutzen (viele Systeme)

Lösung Newton $\Rightarrow m\ddot{y} = -ky$ beziehungsweise $\ddot{y} = -\omega^2 y, \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$
$\Rightarrow \sin \omega t$ und $\cos \omega t$ sind Lösungen
$\Rightarrow y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ iist auch Lösung (wegen Linearität)
(wegen der beiden frei wählbaren Konstanten ist dies schon die allgemeine Lösung)

Verallgemeinerungen

- Reibungterm $\sim \dot{y}$
- treibende Kraft $\sim f(t)$

3.6 Lineare Differentialgleichungen

allgemeine Form einer linearen Dgl. n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_0(x)y(x) = f(x)$$

Das Wort linear bezieht sich nur auf y, nicht x
Die Dgl. heißt homogen falls $f(x) \equiv 0$ Homogen von Grad p: Ersetzung $y \to \alpha y$ führt zu Vorfaktor αp, hier $p = 1$

- wir hatten oben dem Fall $n = 2$ "mit konstanten Koeffizienten"
- noch einfacheres Beispiel: $n = 1, f \equiv 0$ (aber beliebige Koeffizienten)

$$y' + a(x)y = 0$$

Das ist seperabel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{dx} + a(x)y = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{dx} = -a(x)y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{x} = -a(x)\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int a(x)\mathrm{d}x$$
$$\ln y - A(x) + c_1$$
$$y = ce^{-A(x)}$$

$A(x)$ sei eine beliebege aber fest gewählte Stammfunktion von a Wir können den inhomogenen Fall lösen, durch "Variation der Konstanten"

- Ansatz: $y = C(x)e^{-A(x)}$, Dgl. $y' + ay = f$

$$(ce^{-A})' + aCe^{-A} = f$$
$$c'e^{-A} - CA'e^{-A} + Cae^{-A} = f$$

Beachte $A' = a$

$$\Rightarrow c'e^{-A} = fe^{A}, c(x) = \int \mathrm{d}x f(x)e^{A(x)}$$

$$y(x) = \left[\int^x \mathrm{d}x' f(x')e^{A(x')}\right] e^{-A(x)}$$