

Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

October 26, 2016

Contents

1	Einleitung	2
2	Mengen und Zahlen	2
2.1	Logische Regeln und Zeichen	2
2.1.1	Quantoren	2
2.1.2	Hinreichend und Notwendig	2
2.1.3	Beweistypen	2
2.1.4	Summenzeichen und Produktzeichen	3
2.2	Mengen	3
2.2.1	Definition	3
2.2.2	Mengenrelationen	4
2.2.3	Potenzmenge	4
2.2.4	Familien von Mengen	5
2.2.5	Rechenregeln	5
2.2.6	geordneter Tupel	6
2.2.7	Kartesisches Produkt	6
2.2.8	Äquivalenzrelation	6
2.3	Relationen und Abbildungen	7
2.3.1	Relationen	7
2.3.2	Graph der Abbildung	7
2.3.3	Umkehrabbildung	7
2.3.4	Komposition	8
2.3.5	Identitäts Abbildung	8
2.3.6	Homomorphe Abbildungen	8
2.4	Natürliche Zahlen	8
2.4.1	Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen	8
2.4.2	Vollständige Induktion	9

1 Einleitung

Webseite www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php Klausurzulassung:
50% Klausur 18.2.2017 9-12Uhr

2 Mengen und Zahlen

2.1 Logische Regeln und Zeichen

2.1.1 Quantoren

$\forall x$ für alle x
 $\exists x$ es gibt (mindestens) ein x
 $\exists! x$ es gibt genau ein x

2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \Rightarrow B$: wenn A gilt, gilt auch B , A ist **hinreichend** für B , daraus folgt: B ist **notwendig** für A , Ungültigkeit von B impliziert die Ungültigkeit von A ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
- $A \Leftrightarrow B$: A gilt, genau dann, wenn B gilt

2.1.3 Beweistypen

1. Direkter Schluss $A \Rightarrow B$

(a) Beispiel m gerade Zahl $\Rightarrow m^2$ gerade Zahl

- i. Beweis m gerade $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $m = 2n \Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2k$, wobei $k = 2n^2 \in \mathbb{N}$ \square

2. Beweis der Transponierten (der Kontraposition) Zum Beweis $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$ ($A \Rightarrow B$) \Leftrightarrow ($\neg B$) \Rightarrow ($\neg A$)

(a) Beispiel Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade

- i. Beweis Wir zeigen: m ist ungerade $\Rightarrow m^2$ ungerade

$$\exists n \in \mathbb{N} : m = 2n+1 \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 2k+1, k = 2n^2+2n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^2 \text{ ungerade} \square$$

3. Indirekter Schluss (Beweis durch Widerspruch) Man nimmt an, dass $A \Rightarrow B$ nicht gilt, das heißt $A \wedge \neg B$ und zeigt, dass dann für eine Aussage C gelten muss $C \Rightarrow \neg C$, also ein Widerspruch

(a) Beispiel $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$

- i. Beweis Wir nehmen an, dass $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ Dann folgt:
 $\exists b, c \in \mathbb{Z}$ teilerfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen
soweit wie möglich) mit $a = \frac{b}{c}$ Falls

$$a^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2 \text{ gerade} \Rightarrow b \text{ ist gerade (schon gezeigt) =}$$

Außerdem $b^2 = 2c^2 \Rightarrow 2c^2 = 4d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c$ ist auch
gerade. Also müssen b und c beide gerade sein, also nicht
teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet
 \square

2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

1. Summenzeichen Wir definieren für $m > 0$

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + \dots + a_n$$

falls $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^n a_k := 0$$

falls $n < m$ (sogenannte leere Summe)

2. Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^n a_k := \begin{cases} a_m \cdot \dots \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

2.2 Mengen

2.2.1 Definition

(Georg cantor 1885) Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (welche die Elemente von M genannt werden), zu einem Ganzen M dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt x feststeht, ob gilt

- $x \in M$ (x Element von M)
- $x \notin M$ (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{eine Menge } M \text{ für die } x \in M \Leftrightarrow A(x)$$

2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion $A \subseteq M$ (A ist eine Teilmenge von M)

$$\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in M)$$

, zum Beispiel $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

-

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

-

$$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge)} \Leftrightarrow A \subset M \wedge A \neq M$$

-

$$\emptyset : \text{leere Menge} \quad \nexists x : x \in \emptyset$$

. Wir setzen fest, dass \emptyset eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beispiel

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

- Durchschnitt

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Vereinigung

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Differenz (auch Komplement von B in A)

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_a B \text{ (auch } B^c)$$

2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge A

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Alle Teilmengen von A

1. Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset$$

2.2.4 Familien von Mengen

Sei I eine Indexmenge, $I \subseteq \mathbb{N}$, $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen A

1. Durchschnitt von A

$$\cap_{i \in I} = \{x \mid \forall_{i \in I} x \in A_i\}$$

2. Vereinigung

$$\cup_{i \in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

2.2.5 Rechenregeln

A, B, C, D seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$ Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ Transitivität
- $A \cap B = B \cap A$
 $A \cup B = B \cup A$ Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Assoziativität
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Eigenschaften der Komplementbildung:
Seien $A, B \subseteq D$ ($C_D A := D \setminus A$), dann gilt

$$C_D(C_D A) = A$$

$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B$$

$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B$$

– Beweis:

$$\begin{aligned} x \in C_D(A \cap B) &\Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow (x \in D \wedge x \notin A) \vee (x \in D \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in D \setminus A \vee x \in D \setminus B \Leftrightarrow x \in D \setminus (A \cap B) \quad \square \end{aligned}$$

– Bemerkung: Komplement kann man auch mit A^c bezeichnen

2.2.6 geordneter Tupel

Sei x_1, x_2, \dots, x_n (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n -Tupel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{y_1, \dots, y_n\} \not\Rightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in A_j, j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

1. Beispiel

•

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

- R^n n -dimensionaler Raum von reellen Zahlen

2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung: $a \sim b$), sodass

- Für jede zwei $a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b \vee a \not\sim b$
- $a \sim a$ Reflexivität
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ Symmetrie
- $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in sogenannte Äquivalenzklassen einordnen: $[a] : \{b \in A \mid b \sim a\}$

2.3 Relationen und Abbildungen

2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ wobei X, Y Mengen sind. Für $x \in X$ definieren wir, das **Bild** von x unter R

$$R(x) := \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

und *Definitionsbereiche von R (bezüglich X)

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$ heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \rightarrow Y \Leftrightarrow D(R) = X, \forall x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält $R(x)$ genau ein Element.

X heißt Definitionsbereich von f

Y heißt Werte- oder Bildbereich von f (Bild)

$x \in X$ heißt Argument

$f(x) \in Y$ heißt Wert von f an der Stelle x

1. Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ dann ist der Graph von $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

(a) Bemerkung

$$M^*(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

Ist kein Graph einer Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denn $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$ f heißt

- surjektiv, wenn gilt $f(X) = Y$
- injektiv, $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist

2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ durch $y \mapsto x \in X$, eindeutig bestimmt durch $y = f(x)$

1. Bemerkung

$$(x, y) \in \text{Graph } f \Leftrightarrow (y, x) \in \text{Graph } f^{-1}$$

2.3.4 Komposition

Seien $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Die Komposition von g und f

$g \circ f : X \rightarrow Z$ ist durch $x \rightarrow g(f(x))$ definiert

2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge X definieren wir die identische Abbildung

$$I_d(A) = I_A : A \rightarrow A, \text{ durch } x \rightarrow x$$

1. Beispiel

•

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$

$$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

$(n - 1)$ dimensionale sphere in \mathbb{R}^n

- Seien X, Y Mengen, $M \subseteq X \times Y, f : M \rightarrow X$
 f heißt Projektion, f surjektiv

$$f(M) = \{x \mid \exists y \in Y : (x, y) \in M\} = X$$

2.3.6 Homomorphe Abbildungen

Existieren auf Mengen X und Y mit gewissen Operationen \oplus_x bzw. \oplus_y (zum Beispiel Addition, Ordnungsrelation), so heißt die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ homomorph (strukturhaltend), wenn gilt $\forall x_1, x_2 \in X f(x_1 \oplus_x x_2) = f(x_1) \oplus_y f(x_2)$. Eine bijektive Homomorphie heißt Isomorphismus, beziehungsweise $X \approx Y$ (äquivalent, isomorph)

2.4 Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

2.4.1 Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$
2. Zu jeder natürlichen Zahl n , gibt es genau einen "Nachfolger" n' ($=: n + 1$)

3. Die Zahl 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl
4. $n' = m' \Rightarrow n = m$
5. Enthält eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 1 und von jedem $n \in m$ auch den Nachfolger n' ist $M = \mathbb{N}$

Bemerkung:

Mit Hilfe der Axiome lassen sich auf \mathbb{N} Addition (+), Multiplikation (\cdot) und Ordnung (\leq) einführen. Wir definieren:

$1' = 2, 2' = 3, \dots, n + 1 := m'$ $n + m' := (n + m)'$; $n \cdot m' := nm + n$ Man kann zeigen, dass jede Menge, welche die Peano Axiome erfüllt isomorph bezüglich Multiplikation und Addition zu \mathbb{N} ist Wir definieren $n < m \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x + m = m$

2.4.2 Vollständige Induktion

1. Induktionsprinzip Es seien die folgende Schritte vollzogen:
 - (a) Induktionsverankerung (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ gilt
 - (b) Induktionsschluss: Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ gültig, so folgt auch die Gültigkeit von $A(n + 1)$

Dann sind alle Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ gültig.

2. Beweis: Wir definieren die Tailmenge $M \subseteq \mathbb{N}$, $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(N) \text{ ist gültig}\}$ Die Induktionsverankerung besagt, dass $1 \in M$ und die Induktionsannahme $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$. Folglich ist nach dem 5. Axiom von Peano $M = \mathbb{N}$ □
3. Beispiel 1 Zu Beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(a) Beweis

- i. Induktionsverankerung: $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$
- ii. Annahme: $A(n)$ gültig für $n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 Zu zeigen $A(n+1) : 1^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$$1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n + n + 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2) \square$$

4. Beispiel 2 Definition von Potenzen

$$x^0 := 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} x^n := x^{n-1}x$$

(iterative (rekursive) Definition)

Auf \mathbb{N} sind diese elementaren Operationene erklärt:

- Addition $a + b$
- Multiplikation $a \cdot b$
- (unter gewissen Vorraussetzungen):
 - Subtraktion $a - b$
 - Division $\frac{a}{b}$

Nistbezglich”-“\$” oder ”/” nicht vollständig, das heißt $n + x = m$ ist nicht lösbar in \mathbb{N} Erweiterungen:

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{0; \pm, n \in \mathbb{N}\}$
Negative Zahl $(-n)$ ist definiert duch $n + (-n) = 0$
- Rationale Zahlen