

# Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

October 26, 2016

## Contents

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Mengen und Zahlen</b>	<b>2</b>
2.1	Logische Regeln und Zeichen . . . . .	2
2.1.1	Quantoren . . . . .	2
2.1.2	Hinreichend und Notwendig . . . . .	2
2.1.3	Beweistypen . . . . .	2
2.1.4	Summenzeichen und Produktzeichen . . . . .	3
2.2	Mengen . . . . .	4
2.2.1	Definition . . . . .	4
2.2.2	Mengenrelationen . . . . .	4
2.2.3	Potenzmenge . . . . .	5
2.2.4	Familien von Mengen . . . . .	5
2.2.5	Rechenregeln . . . . .	5
2.2.6	geordneter Tupel . . . . .	6
2.2.7	Kartesisches Produkt . . . . .	6
2.2.8	Äquivalenzrelation . . . . .	6
2.3	Relationen und Abbildungen . . . . .	7
2.3.1	Relationen . . . . .	7
2.3.2	Graph der Abbildung . . . . .	7
2.3.3	Umkehrabbildung . . . . .	7
2.3.4	Komposition . . . . .	8
2.3.5	Identitäts Abbildung . . . . .	8
2.3.6	Homomorphe Abbildungen . . . . .	8
2.4	Natürliche Zahlen . . . . .	8
2.4.1	Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen . . . . .	8
2.4.2	Vollständige Induktion . . . . .	9

2.4.3	Definition Körper . . . . .	10
2.5	Abzählbarkeit . . . . .	11
2.5.1	Abzählbarkeit von Mengen . . . . .	11
2.5.2	Beispiel . . . . .	12
2.5.3	Beispiel . . . . .	12

# 1 Einleitung

Webseite [www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php](http://www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php) Klausurzulassung:  
50% Klausur 18.2.2017 9-12Uhr

# 2 Mengen und Zahlen

## 2.1 Logische Regeln und Zeichen

### 2.1.1 Quantoren

$\forall x$  für alle  $x$   
 $\exists x$  es gibt (mindestens) ein  $x$   
 $\exists!x$  es gibt genau ein  $x$

### 2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \Rightarrow B$ : wenn  $A$  gilt, gilt auch  $B$ ,  $A$  ist **hinreichend** für  $B$ , daraus folgt:  $B$  ist **notwendig** für  $A$ , Ungültigkeit von  $B$  impliziert die Ungültigkeit von  $A$  ( $\neg B \Rightarrow \neg A$ )
- $A \Leftrightarrow B$ :  $A$  gilt, genau dann, wenn  $B$  gilt

### 2.1.3 Beweistypen

1. Direkter Schluss  $A \Rightarrow B$

(a) Beispiel  $m$  gerade Zahl  $\Rightarrow m^2$  gerade Zahl

i. Beweis  $m$  gerade  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$  sodass  $m = 2n \Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2k$ , wobei  $k = 2n^2 \in \mathbb{N} \square$

2. Beweis der Transponerten (der Kontraposition) Zum Beweis  $A \Rightarrow B$  zeigt man  $\neg B \Rightarrow \neg A$  ( $A \Rightarrow B$ )  $\Leftrightarrow$  ( $\neg B$ )  $\Rightarrow$  ( $\neg A$ )

(a) Beispiel Sei  $m \in \mathbb{N}$ , dann gilt  $m^2$  gerade  $\Rightarrow m$  gerade

i. Beweis Wir zeigen:  $m$  ist ungerade  $\Rightarrow m^2$  ungerade

$$\exists n \in \mathbb{N} : m = 2n+1 \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 2k+1, k = 2n^2+2n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^2 \text{ ungerade} \square$$

3. Indirekter Schluss ( Beweis durch Widerspruch) Man nimmt an, dass  $A \Rightarrow B$  nicht gilt, das heißt  $A \wedge \neg B$  und zeigt, dass dann für eine Aussage  $C$  gelten muss  $C \Rightarrow \neg C$ , also ein Widerspruch

(a) Beispiel  $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$

i. Beweis Wir nehmen an, dass  $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$  Dann folgt:  
 $\exists b, c \in \mathbb{Z}$  teilerfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit  $a = \frac{b}{c}$  Falls

$$a^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2 \text{ gerade} \Rightarrow b \text{ ist gerade (schon gezeigt)}$$

$$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{N} \text{ sodass } b = 2d \Rightarrow b^2 = 4d^2$$

Außerdem  $b^2 = 2c^2 \Rightarrow 2c^2 = 4d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c$  ist auch gerade. Also müssen  $b$  und  $c$  beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet  
 $\square$

#### 2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

1. Summenzeichen Wir definieren für  $m > 0$

$$\sum_{k=m}^m a_k := a_m + \dots + a_n$$

falls  $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^n a_k := 0$$

falls  $n < m$  (sogenannte leere Summe)

2. Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^n a_k := \begin{cases} a_m \cdot \dots \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

## 2.2 Mengen

### 2.2.1 Definition

(Georg cantor 1885) Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (welche die Elemente von  $M$  genannt werden), zu einem Ganzen  $M$  dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt  $x$  feststeht, ob gilt

- $x \in M$  ( $x$  Element von  $M$ )
- $x \notin M$  ( $x$  kein Element von  $M$ )

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{eine Menge } M \text{ für die } x \in M \Leftrightarrow A(x)$$

### 2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion  $A \subseteq M$  ( $A$  ist eine Teilmenge von  $M$ )

$$\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in M)$$

, zum Beispiel  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

•

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

•

$$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge)} \Leftrightarrow A \subseteq M \wedge A \neq M$$

•

$$\emptyset : \text{leere Menge} \quad \nexists x : x \in \emptyset$$

. Wir setzen fest, dass  $\emptyset$  eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beispiel

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

- Durchschnitt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Vereinigung

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Differenz (auch Komplement von  $B$  in  $A$ )

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_A B \text{ (auch } B^c)$$

### 2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge  $A$

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Alle Teilmengen von  $A$

1. Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset$$

### 2.2.4 Familien von Mengen

Sei  $I$  eine Indexmenge,  $I \subseteq \mathbb{N}$ ,  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen  $A$

1. Durchschnitt von  $A$

$$\cap_{i \in I} = \{x \mid \forall i \in I \ x \in A_i\}$$

2. Vereinigung

$$\cup_{i \in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

### 2.2.5 Rechenregeln

$A, B, C, D$  seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$  Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$  Transitivität
- $A \cap B = B \cap A$   
 $A \cup B = B \cup A$  Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$   
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  Assoziativität
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Eigenschaften der Komplementbildung:  
Seien  $A, B \subseteq D (C_D A := D \setminus A)$ , dann gilt

$$C_D(C_D A) = A$$

$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B$$

$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B$$

– Beweis:

$$\begin{aligned} x \in C_D(A \cap B) &\Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in D \wedge x \notin A) \cup x \in D \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in D \setminus A \cup x \in D \setminus B \Leftrightarrow x \in D \setminus (A \cap B) \quad \square \end{aligned}$$

– Bemerkung: Komplement kann man auch mit  $A^c$  bezeichnen

### 2.2.6 geordneter Tupel

Sei  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n-Tupel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{y_1, \dots, y_n\} \not\Rightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

### 2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in A_j, j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

1. Beispiel

•

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

•  $R^n$  m-dimensionaler Raum von reellen Zahlen

### 2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge  $A$  ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung:  $a \sim b$ ), sodass

- Für jede zwei  $a, b \in A$  gilt entweder  $a \sim b$  oder  $a \not\sim b$
- $a \sim a$  Reflexivität
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$  Symmetrie
- $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$  Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in sogenannte Äquivalenzklassen einordnen:  $[a] : \{b \in A \mid b \sim a\}$

## 2.3 Relationen und Abbildungen

### 2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge  $R \subseteq X \times Y$  wobei  $X, Y$  Mengen sind. Für  $x \in X$  definieren wir, das **Bild** von  $x$  unter  $R$

$$R(x) := \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

und \*Definitionsbereiche von  $R$  (bezüglich  $X$ )

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

### 2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$  heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \rightarrow Y \Leftrightarrow D(R) = X, \forall x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält  $R(x)$  genau ein Element.

$X$  heißt Definitionsbereich von  $f$

$Y$  heißt Werte- oder Bildbereich von  $f$  (Bild)

$x \in X$  heißt Argument

$f(x) \in Y$  heißt Wert von  $f$  an der Stelle  $x$

1. Beispiel  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  dann ist der Graph von  $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

(a) Bemerkung

$$M^*(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

Ist kein Graph einer Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , denn  $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$   $f$  heißt

- surjektiv, wenn gilt  $f(X) = Y$
- injektiv,  $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- bijektiv, wenn  $f$  surjektiv und injektiv ist

### 2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  durch  $y \mapsto x \in X$ , eindeutig bestimmt durch  $y = f(x)$

1. Bemerkung

$$(x, y) \in \text{Graph } f \Leftrightarrow (y, x) \in \text{Graph } f^{-1}$$

### 2.3.4 Komposition

Seien  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen. Die Komposition von  $g$  und  $f$

$g \circ f : X \rightarrow Z$  ist durch  $x \rightarrow g(f(x))$  definiert

### 2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge  $X$  definieren wir die identische Abbildung

$$I_d(A) = I_A : A \rightarrow A, \text{ durch } x \rightarrow x$$

1. Beispiel

•

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$

$$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

$(n - 1)$  dimensionale sphere in  $\mathbb{R}^n$

- Seien  $X, Y$  Mengen,  $M \subseteq X \times Y, f : M \rightarrow X$   
 $f$  heißt Projektion,  $f$  surjektiv

$$f(M) = \{x \mid \exists y \in Y : (x, y) \in M\} = X$$

### 2.3.6 Homomorphe Abbildungen

Existieren auf Mengen  $X$  und  $Y$  mit gewissen Operationen  $\oplus_x$  bzw.  $\oplus_y$  (zum Beispiel Addition, Ordnungsrelation), so heißt die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  homomorph (strukturhaltend), wenn gilt  $\forall x_1, x_2 \in X f(x_1 \oplus_x x_2) = f(x_1) \oplus_y f(x_2)$ . Eine bijektive Homomorphie heißt Isomorphismus, beziehungsweise  $X \approx Y$  (äquivalent, isomorph)

## 2.4 Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

### 2.4.1 Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl  $1 \in \mathbb{N}$
2. Zu jeder natürlichen Zahl  $n$ , gibt es genau einen "Nachfolger"  $n'$  ( $=: n + 1$ )



3. Die Zahl 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl
4.  $n' = m' \Rightarrow n = m$
5. Enthält eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{N}$  die Zahl 1 und von jedem  $n \in m$  auch den Nachfolger  $n'$  ist  $M = \mathbb{N}$

Bemerkung:

Mit Hilfe der Axiome lassen sich auf  $\mathbb{N}$  Addition (+), Multiplikation ( $\cdot$ ) und Ordnung ( $\leq$ ) einführen. Wir definieren:

$1' = 2, 2' = 3, \dots, n + 1 := m'$   $n + m' := (n + m)'$ ;  $n \cdot m' := nm + n$  Man kann zeigen, dass jede Menge, welche die Peano Axiome erfüllt isomorph bezüglich Multiplikation und Addition zu  $\mathbb{N}$  ist Wir definieren  $n < m \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x + m = m$

### 2.4.2 Vollständige Induktion

1. Induktionsprinzip Es seien die folgende Schritte vollzogen:
  - (a) Induktionsverankerung (Induktionsanfang): Die Aussage  $A(1)$  gilt
  - (b) Induktionsschluss: Ist für ein  $n \in \mathbb{N}$   $A(n)$  gültig, so folgt auch die Gültigkeit von  $A(n + 1)$

Dann sind alle Aussagen  $A(n), n \in \mathbb{N}$  gültig.

2. Beweis: Wir definieren die Tailmenge  $M \subseteq \mathbb{N}$ ,  $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(N) \text{ ist gültig}\}$  Die Induktionsverankerung besagt, dass  $1 \in M$  und die Induktionsannahme  $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$ . Folglich ist nach dem 5. Axiom von Peano  $M = \mathbb{N}$  □
3. Beispiel 1 Zu Beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(a) Beweis

- i. Induktionsverankerung:  $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$
- ii. Annahme:  $A(n)$  gültig für  $n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$   
 Zu zeigen  $A(n+1) : 1^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$$1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n + n + 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2) \square$$

#### 4. Beispiel 2 Definition von Potenzen

$$x^0 := 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} x^n := x^{n-1}x$$

(iterative (rekursive) Definition)

Auf  $\mathbb{N}$  sind diese elementaren Operationene erklärt:

- Addition  $a + b$
- Multiplikation  $a \cdot b$
- (unter gewissen Vorraussetzungen):
  - Subtraktion  $a - b$
  - Division  $\frac{a}{b}$

$\mathbb{N}$  ist bezüglich ”–” oder ”/” nicht vollständig, das heißt  $n + x = m$  ist nicht lösbar in  $\mathbb{N}$  Erweiterungen:

- Ganze Zahlen  $\mathbb{Z} := \{0; \pm, n \in \mathbb{N}\}$   
Negative Zahl  $(-n)$  ist definiert duch  $n + (-n) = 0$
- Rationale Zahlen  $\mathbb{Q}$  ( $bx = y$ )

Man sagt, dass  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  einen Körper bildet.

#### 2.4.3 Definition Körper

$\mathbb{K}$  sei eine Menge auf der Addition und Multiplikation sei.  $\mathbb{K}$  heißt ein Körper, wenn die folgende Axiome erfüllt sind:

- Addition:  $(\mathbb{K}, +)$  ist eine kummutative Gruppe, das heißt  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ :
  1.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  Assoziativität
  2.  $a + b = b + a$  Kommutativität
  3.  $\exists ! 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = a$  Existenz des Nullelement
  4.  $\exists x \in \mathbb{K} : a + x = 0$  Existstenz des Negativen
- Multiplikation:  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative Gruppte, das heißt  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ 
  1.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  Assoziativität

2.  $a \cdot b = b \cdot a$  Kommutativität

3.  $\exists! 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = a$  Existenz des Einselement

4. Für  $a \neq 0, \exists! y \in \mathbb{K} : a \cdot y = 1$  Inverse

- Verträglichkeit

1.  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  Distributivität

1. Satz  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ist ein Körper. Definieren auf  $\mathbb{Q}$  eine Ordnung " $\leq$ " durch

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} : y - x = \frac{m}{n}$$

dann ist auch diese Ordnung mit der Addition und Multiplikation in  $\mathbb{Q}$  in folgendem Sinne verträglich:

- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$

2. Bemerkung

$$\{a \in \mathbb{Q} : a = \frac{r}{s}, r \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}\} =: \mathbb{Q}_+(\mathbb{Q}_{\geq 0})$$

## 2.5 Abzählbarkeit

### 2.5.1 Abzählbarkeit von Mengen

Sei  $A$  eine Menge

- $A$  heißt endlich mit  $|A| = n$  Elementen ist äquivalent zu

$$|A| = \begin{cases} A = \emptyset & (n = 0) \\ \exists f : A \rightarrow \{1, \dots, n\} & f \text{ bijektiv}, n < \infty \end{cases}$$

- $A$  heißt abzählbar unendlich genau dann wenn

$$\exists f : A \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijektiv}$$

- $A$  heißt überabzählbar genau dann wenn:  $A$  ist weder endlich oder abzählbar unendlich

### 2.5.2 Beispiel

$\mathbb{Z}$  ist abzählbar unendlich

1. Beweis Die Abbildung  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases}$$

- Surjektivität: zu zeigen  $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$   
Offenbar  $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{N}$ . Wir zeigen  $\mathbb{N} \subseteq f(\mathbb{Z})$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$ , finde  $z \in \mathbb{Z}$  mit  $f(z) = n$ . Man unterscheide:
  - n gerade  $\rightarrow$  Wähle  $z = \frac{n}{2}$
  - n ungerade  $\rightarrow z = -\frac{n+1}{2}$
- Injektivität: Sei  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$  und  $f(z_1) = f(z_2)$   
ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $z_1 \leq z_2$ . Entweder  $z_1, z_2 \geq 0$  oder  $z_1, z_2 < 0$ , denn sonst wäre  $f(z_1)$  ungerade und  $f(z_2)$  gerade **Widerspruch**. Falls
  - $z_1, z_2 \geq 0 \Rightarrow 2z_1 = f(z_1) = f(z_2) = 2z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$
  - $z_1, z_2 < 0 \Rightarrow -2z_1 - 1 = f(z_1) = f(z_2) = -2z_2 - 1 \Rightarrow z_1 = z_2$ $\square$

### 2.5.3 Beispiel

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar unendlich
- $\mathbb{Q}$  abzählbar unendlich
- $\mathbb{R}$  überabzählbar