

# Theoretische Physik (Hebecker)

Robin Heinemann

November 8, 2016

## Contents

<b>1</b>	<b>Semesterüberblick</b>	<b>2</b>
1.1	Mathe . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Kinematik des Massenpunktes</b>	<b>3</b>
2.1	Kinematik der Massenpunktes in <u>einer</u> Dimension . . . . .	3
2.1.1	Graphik . . . . .	3
2.1.2	Üben dieser Logik an unserem Beispiel . . . . .	4
2.2	Grundbegriffe der Differenzial und Integralrechnung . . . . .	4
2.2.1	Funktion . . . . .	4
2.2.2	Differentiation oder Ableitung . . . . .	4
2.2.3	Integrieren . . . . .	5
2.3	Kinematik in mehreren Dimensionen . . . . .	6
2.3.1	Zweidimensionale Bewegung . . . . .	6
2.3.2	Dreidimensionale Bewegung . . . . .	7
2.4	Vektorräume . . . . .	7
2.4.1	Einfachstes Beispiel . . . . .	8
2.4.2	Unser Haupt-Beispiel . . . . .	8
2.5	Kinematik in $d > 1$ . . . . .	8
2.5.1	Beispiel für 3-dimensionale Trajektorie . . . . .	9
2.6	Skalarprodukt . . . . .	9
2.6.1	Symmetrische Bilinearform . . . . .	10
2.6.2	Norm (Länge) eines Vektors . . . . .	10
2.7	Abstand zwischen Raumpunkten . . . . .	10
2.7.1	Spezialfall . . . . .	11
2.7.2	Infinisetimaler Abstand . . . . .	11
2.8	Bogenlänge und begleitendes Dreibein . . . . .	11
2.8.1	Beispiel in $d=2$ . . . . .	12

2.9	Vektorprodukt . . . . .	13
2.10	Binormalenvektor . . . . .	13
2.10.1	Zur Information . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Grundbegriffe der Newtonsche Mechanik</b>	<b>14</b>
3.1	Newtonsche Axiome . . . . .	14
3.2	Trajektorie . . . . .	14
3.3	Differentialgleichungen . . . . .	14
3.3.1	1. Ordnung . . . . .	14
3.3.2	Anfangswertproblem . . . . .	15
3.3.3	partielle Ableitung . . . . .	15
3.3.4	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	15
3.3.5	Beispiele . . . . .	16
3.3.6	Separation der Variablen . . . . .	16
3.3.7	System von Dgl . . . . .	17
3.3.8	Systeme von $n$ gewöhnlicher Dgl. $p$ -ter Ordnung . . .	17
3.3.9	Erste physikalische Beispiele . . . . .	18
3.4	Taylorentwicklung . . . . .	20
3.5	Harmonischer Oszillator . . . . .	21
3.5.1	Eindimensionales System . . . . .	21
	Einleitung:	

- Webseite: [www.thphys.uni-heidelberg.de/hebecker/TP1/tp1.html](http://www.thphys.uni-heidelberg.de/hebecker/TP1/tp1.html)
- Bartelman skripte

## 1 Semesterüberblick

1. Newtonsche Mechanik
2. Lagrange / Hamilton Mechanik / Statistik / Kontinua
3. Elektrodynamik / Spezielle Relativitätstheorie
4. Quantenmechanik
5. Thermodynamik / Quantenstatistik
6. Allgemeine Relativitätstheorie / Kosmologie
7. Quatenfeldtheorie I (ggf. 5.)

8. Quatenfeldtheorie II (ggf. 6.  $\Leftarrow$  Stringtheorie / Teilchenphysik / Supersymmetrie)
9. Masterarbeit
10. Masterarbeit

## 1.1 Mathe

wichtig:

- Gruppentheorie
- Differentialgeometrie

## 2 Kinematik des Massenpunktes

Massenpunkt / Punktmasse - (selbstevidente) Abstraktion Kinematik:  
Beschreibung der Bewegung (Ursachen der Bewegung  $\rightarrow$  Dynamik)

### 2.1 Kinematik der Massenpunktes in einer Dimension

#### 2.1.1 Graphik

- Ort:  $x$
- zu Zeit  $t$ :  $x(t)$
- Geschwindigkeit:  $v(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t)$
- Beschleunigung:  $a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$
- Beispiel:  $x(t) \equiv x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$ ,  $v(t) = v_0 + a_0 t$ ,  $a(t) = a_0$
- Umgekehrt: Integration, z.B. von Geschwindigkeit zu Trajektorie: Anfangsposition muss gegeben sein, z.B.  $x(t_0) \equiv x_0$

$$x(T) = x_0 + \int_{t_0}^T v(t) dt$$

Man prüft leicht  $\dot{x}(t) = v(t)$

- Es gibt keine andere Funktion  $\tilde{x}(t)$  mit  $\dot{\tilde{x}}(t) = v(t)$  und  $\tilde{x}(t_0) = x_0$

Analog: Von Beschleunigung zur Geschwindigkeit, und dann weiter zur Trajektorie

### 2.1.2 Üben dieser Logik an unserem Beispiel

Gegeben:  $a(t) = a_0$ ,  $t_0 = 0, v_0, x_0$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 dt' = v_0 + a_0 t$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t') dt' = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$$

## 2.2 Grundbegriffe der Differenzial und Integralrechnung

### 2.2.1 Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

### 2.2.2 Differentiation oder Ableitung

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$df$  bezeichnet den in  $\Delta x$  linearen Anteil des Zuwachses  $\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x)$ .

- Aus  $\Delta f = f'(x)\Delta x + O(\Delta x^2)$  folgt  $df = f'(x)\Delta x$
- Anwendung auf die Identitätsabbildung:  $x \mapsto x \Rightarrow dx = \Delta x$

$$\Rightarrow df = f'(x)dx \text{ oder } \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Dies ist eigentlich nur eine Schreibweise für  $f'(x)$ , aber nützlich, weil bei kleinen  $\Delta x$   $df \simeq \Delta f$  (Schreibweise beinhaltet intuitiv die Grenzwertdefinition)

- $f'(x)$  wieder Funktion  $\Rightarrow$  analog:  $f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$
- Praxis

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f \text{ (Produkt/Leibnizregel)}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{ (Kettenregel)}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ (Ableitung der Inversen Funktion)}$$

– Begründung (nur zum letzten Punkt)

$$(f^{-1})'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(f(y))} = \frac{dy}{f'(y)dy} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

- Schöne Beispiele

$$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

$$\arctan'(x) \equiv (\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{\tan^{-1}(y)} \text{ wobei } y = \tan^{-1}(x)$$

Besser:

$$\tan^{-1}(y) = (\sin y \frac{1}{\cos y})' = \cos y \frac{1}{\cos y} + \sin y (\frac{1}{\cos y})' = 1 + \sin y (-\frac{1}{\cos^2 y})(-\sin y) = 1 + \tan^2 y$$

- Verknüpfung

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$$

- Inverse

$$f^{-1} : x = f(y) \mapsto y$$

- Grenzwerte:

- nützliche Regel: l'Hôpital ("0/0")

Falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} f, g = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'}$  existiert, so gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'}$

- weitere nützliche Regel

$$\lim \frac{\text{Beschränkt}}{\text{Unbeschränkt und monoton wachsend}} = 0$$

\* Beispiel:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}$$

- Kürzen unter lim

\* Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

### 2.2.3 Integrieren

1. Fundamentalsatz der Analysis

$$\int^y f(x) dx = F(y) \text{ \& } F'(y) = f(y)$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

( $\rightarrow$  saubere Definition über Riemansches Integral)

## 2. Praxis

### (a) Partielle Integration

$$\int^y f(x)g'(x)dx = f(y)g(y) - \int^y f'(x)g(x)dx$$

### (b) Substitution Unter Annahme einer invertierbaren Funktion $x : y \mapsto x(y)$

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dy}dy = \int f(x(y))x'(y)dy$$

Andere Formulierung:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Substitution  $y = g(x)$

### (c) Klassiker

$$\int \ln x dx = \int \ln x 1 dx = \ln x x - \int \frac{1}{x} x dx = x(\ln x - 1)$$

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

## 2.3 Kinematik in mehreren Dimensionen

### 2.3.1 Zweidimensionale Bewegung

Zweidimensional  $\rightarrow$  Bewegung in der Ebene. Trajektorie:  $x(t), y(t)$

#### 1. Beispiel

$$x(t) = v_0 t \sin \omega t$$

$$y(t) = v_0 t \cos \omega t$$

- (a) **TODO** Skizze der Trajektorie (Bahnkurve)
- (b) Raumkurve Menge aller Punkte  $\{x,y\}$ , die das Teilchen durchläuft
- (c) **TODO** Skizze Nichttriviale Darstellung nur im Raum (Raumkurve)

### 2.3.2 Dreidimensionale Bewegung

Die Darstellung der Trajektorie ist erschwert, denn man bräuchte 4 Dimensionen: 3 für Raum und 1 für Zeit. Formal kein Problem: Trajektorie ist

•

$$x(t), y(t), z(t)$$

•

$$x^1(t), x^2(t), x^3(t)$$

•

$$\{x^i(t)\}, i = 1, 2, 3$$

Dementsprechend:

$$v^i(t) = \dot{x}^i(t); a^i(t) = \dot{v}^i(t); i = 1, 2, 3$$

### 2.4 Vektorräume

Eine Menge  $V$  heißt Vektorraum, wenn auf ihr zwei Abbildungen

- die Addition (+)
- die Multiplikation mit reellen Zahlen (\*)

definiert sind.

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\text{Multiplikation} : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$V \times V$  - Produktmenge  $\equiv$  Menge aller Paare so dass gilt:

$$v + (w + u) = (v + w) + u \quad u, v, w \in V \quad \text{Assoziativität}$$

$$v + w = w + v \quad \text{Kommutativität}$$

$\exists 0 \in V : v + 0 = v \forall v \in V$	Null
$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$	Distributivität
$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	Distributivität
$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$	Assoziativität der Multiplikation
$1v = v$	Multiplikation mit Eins

### 2.4.1 Einfachstes Beispiel

$V \equiv \mathbb{R}$  (mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation und mit  $0 \in \mathbb{R}$  als Vektorraumnull)

### 2.4.2 Unser Haupt-Beispiel

Zahlentupel aus n-Zahlen:

$$V \equiv \mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}$$

Notation:

$$\vec{x} = (x^1 \quad x^2 \quad \dots \quad x^n), \vec{y} = (y^1 \quad \dots y^n)$$

Man definiert:

$$\vec{x} + \vec{y} \equiv (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n)$$

$$\vec{0} \equiv (0, \dots, 0)$$

$$\alpha \vec{x} \equiv (\alpha x^1, \dots, \alpha x^n)$$

1. **TODO** (Maybe) Skizze 3D Vektor  $\rightarrow$  übliche Darstellung durch "Pfeile"

## 2.5 Kinematik in $d > 1$

Trajektorie ist Abbildung:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow \vec{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t), a = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Setzt allgemeine Definition der Ableitung voraus:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{y}(x + \Delta x) - \vec{y}(x)}{\Delta x} \Rightarrow \vec{y}'(x) = (y^{1'}(x), \dots, y^{n'}(x))$$



### 2.5.1 Beispiel für 3-dimensionale Trajektorie

Schraubenbahn:

$$\vec{x}t = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, v_0 t)$$

$$\vec{v} = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, v_0)$$

$$\vec{a} = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t, 0)$$

1. **TODO** Skizze (Raumkurve) **Kommentar:**

$\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$  leben in verschiedenen Vektorräumen! allein schon wegen  $[x] = \text{m}, [v] = \text{m s}^{-1}$

Wir können wie in  $d = 1$  von  $\vec{a}$  zu  $\vec{v}$  zu  $\vec{x}$  gelangen!

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t') = (v_0^1 + \int_{t_0}^t dt' a^1(t'), v_0^2 + \int_{t_0}^t dt' a^2(t'), v_0^3 + \int_{t_0}^t dt' a^2(t'))$$

2. Üben: Schraubenbahn;  $t_0 = 0, \vec{x}_0 = (R, 0, 0), v_0 = (0, R\omega, v_0)$  Es folgt:

$$\vec{v}(t) = (0, R\omega, v_0) + \int_0^t dt' (-R\omega^2)(\cos \omega t', \sin \omega t', 0) \quad (1)$$

$$= (0, R\omega, v_0) + (-R\omega^2) \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t', -\frac{1}{\omega} \cos \omega t', 0 \right) \Big|_0^t \quad (2)$$

$$= (0, R\omega, v_0) - R\omega(\sin \omega t, -\cos \omega t, 0) - (0, -1, 0) \quad (3)$$

$$= (-R\omega \sin \omega t, R\omega + R\omega \cos \omega t - R\omega, v_0) \quad (4)$$

$$= (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, v_0) \quad (5)$$

3. Bemerkung Man kann Integrale über Vektoren auch durch Riemansche Summen definieren:

$$\int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \lim_{n \rightarrow \infty} (v(t_0)\Delta t + \vec{v}(t_0 + \Delta t)\Delta t + \dots + \vec{v}(t - \Delta t)\Delta t)$$

$$\text{mit } \Delta t = \frac{t-t_0}{N}$$

### 2.6 Skalarprodukt

Führt von Vektoren wieder zu nicht-vektoriellen (Skalaren) Größen.

### 2.6.1 Symmetrische Bilinearform

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$  "linear" Abbildung von  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, w) \mapsto v \cdot w$  mit den Eigenschaften

- $v \cdot w = w \cdot v$
- $(\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha u \cdot w + \beta v \cdot w$

Sie heißt positiv-semidefinit, falls  $v \cdot v \geq 0$ ,

Sie heißt positiv-definit, falls  $v \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$  Hier : Skalarprodukt  $\equiv$  positiv definite symmetrische Bilinearform

### 2.6.2 Norm (Länge) eines Vektors

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v^2}$$

$\mathbb{R}^n$ : Wir definieren

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n \equiv \sum_{i=1}^n x^i y^i \equiv \underbrace{x^i y^i}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$$

Wichtig: oben euklidisches Skalarprodukt! Anderes Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$  :  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 7x^1 y^2 + x^2 y^2$  anderes Beispiel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^1 y^1 - x^2 y^2$$

symmetrische Bilinearform, nicht positiv, semidefinit! Frage:

Beispiel für Bilinearform die positiv-semidefinit ist, aber nicht positiv definit

$$\vec{x} \vec{y} = x^1 y^1$$

## 2.7 Abstand zwischen Raumpunkten

Der anschauliche Abstand zweichen Raumpunkten  $\vec{x}, \vec{y}$ :

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{y}| &= \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})(\vec{x} - \vec{y})} = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i - y^i)^2} = \sqrt{(x^i - y^i)(x^i - y^i)} \\ &= \sqrt{\vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2\vec{x}\vec{y}} = \sqrt{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta} \end{aligned}$$

Haben benutzt:  $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$

### 2.7.1 Spezialfall

$$\vec{x} = (x^1, 0, 0), \vec{y} = (y^1, y^2, 0)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 \cdot y^1; \cos \theta = \frac{y^1}{|\vec{y}|}; |\vec{x}| = x^1$$

1. **TODO** Skizze

$$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta$$

Dass dies für beliebige Vektoren gilt, wird später klar werden.

### 2.7.2 Infinitesimaler Abstand

Speziell wird der infinitesimale Abstand wichtig sein:

$$d\vec{x} = (dx^1, dx^2, dx^3)$$

$$d\vec{x} = \left( \frac{dx^1}{dt} dt, \frac{dx^2}{dt} dt, \frac{dx^3}{dt} dt \right) = (v^1 dt, v^2 dt, v^3 dt) = (v^1, v^2, v^3) dt = \vec{v} dt, \text{ oder: } \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

( $d\vec{x}$  analog zu  $df$  vorher);

$$d\vec{x}^2 = |d\vec{x}|^2 = |\vec{v}|^2 dt^2$$

$$|dx| = |\vec{v}| dt.$$

## 2.8 Bogenlänge und begleitendes Dreiein

$|d\vec{x}|$  entlang  $\vec{x}(t)$  aufaddieren  $\rightarrow$  Bogenlänge.

$$s(t) = \int_{t_0}^t |d\vec{x}| = \int_{t_0}^t dt' \left| \frac{d\vec{x}}{dt'} \right| = \int_{t_0}^t dt' \sqrt{\dot{\vec{x}}(t')^2} = \int_{t_0}^t \sqrt{\vec{v}(t')^2}$$

Infinitesimale Version:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = |\vec{v}|$$

Man kann (im Prinzip)  $s(t) = s$  nach  $t$  auflösen.

$$\Rightarrow t = t(s) \Rightarrow \underbrace{\vec{x}(s)}_{\text{Parametrisierung der Trajektorie durch die Weglänge } s} \equiv \vec{x}(t(s))$$

Nützlich, zum Beispiel für die Definition des Tangentenvektors:

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{x}(s)}{ds}$$

Es gilt

$$\vec{T} \parallel \vec{v}; \left| \vec{T} \right| = \left| \frac{\vec{v} dt}{|\vec{v}| dt} \right| = 1 \Rightarrow \vec{T} \cdot \vec{T} = 1$$

Ableiten nach  $s$ :

$$0 = \frac{d}{ds}(1) = \frac{d\vec{T}}{ds}(\vec{T} \cdot \vec{T}) = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$$

Nutze

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = T^i T^i$$

$\Rightarrow$  Ableitung des Tangentenvektors ist orthogonal zum Tangentenvektor.  
Krümmungsradius der Bahn:

$$\rho \equiv \frac{1}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|}$$

Normalenvektor:

$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|} = \rho \frac{d\vec{T}}{ds}$$

### 2.8.1 Beispiel in d=2

$$\vec{x}(t) = R(\cos \omega t, \sin \omega t)$$

$$\vec{v}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), \cos \omega t)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(R\omega)^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = R\omega$$

$$s(t) = \int_{t_0=0}^t dt' |\vec{v}| = R\omega t; \quad t(x) = \frac{s}{R\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(s) = R(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}), \quad \vec{T} = \frac{d\vec{x}}{ds} = (-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R})$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{1}{R}(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}) \Rightarrow \rho = R; \quad \vec{N} = -(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R})$$

1. **TODO** Skizze

## 2.9 Vektorprodukt

$$V \times V \mapsto V; (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

mit

$$c^i = (\vec{a} \times \vec{b})^i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon^{ijk} a^j b^k = \epsilon^{ijk} a^j b^k$$

dabei:

- $\epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{321} = 1$
- $\epsilon^{213} = \epsilon^{132} = \epsilon^{321} = -1$
- sonst 0 ( $\epsilon^{ijk} = 0$ , falls zwei Indizes gleich)

Alternativ:

•

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \theta|$$

- Richtung von  $\vec{c}$  definiert durch  $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}$
- Vorzeichen von  $\vec{c}$  ist so, dass  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ein "Rechtssystem" bilden

1. **TODO** Skizze

## 2.10 Binormalenvektor

$$= \vec{T} \times \vec{N}$$

$\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  heißen "begleitendes Dreibein" und bilden ein Rechtssystem. alle haben Länge 1  $\vec{T}, \vec{N}$  spannen die "Smiegeebene" auf

### 2.10.1 Zur Information

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{N}; \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -\frac{1}{\sigma} \vec{B}; \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{1}{\sigma} \vec{B} - \frac{1}{\rho} \vec{T}$$

$\sigma$  definiert die Torsion.

### 3 Grundbegriffe der Newtonsche Mechanik

#### 3.1 Newtonsche Axiome

Dynamik: Ursachen der Bewegungsänderung  $\rightarrow$  Kräfte:  $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$

1. Es existierten Inertialsysteme (Koordinatensysteme in denen eine Punktmasse an der keine Kraft wirkt) nicht oder sich geradlinig gleichförmig bewegt:  $\ddot{\vec{x}} = 0$
2. In solchen Systemen gilt:  $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$
3. Für Kräfte zwischen zwei Massenpunkten gilt:

$$\vec{F}_1 2 = -\vec{F}_2 1$$

§2.2 definiert die **träge** Masse Die entscheidende physikalische Aussage von §2.2 ist das Auftreten von  $\ddot{\vec{x}}$  (nicht etwa  $\dot{\vec{x}}$  oder  $\ddot{\vec{x}}$ ) Alternative Diskussionen der obigen Axiomatik:

- zum Beispiel Kapitel 1.2 von Jose/Saletan (mit §2.2 Definition der Kraft)

#### 3.2 Trajektorie

Vorhersagen erfordern:  $\vec{F} \rightarrow$  Trajektorie. Genauer: Sei  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  gegeben. Berechne  $\vec{x}(t)$  !

#### 3.3 Differentialgleichungen

hier nur "gewöhnliche DGL" (nur Ableitungen nach einer Variable) (im Gegensatz zu "partiellen" (Ableitung nach verschiedenen Variablen))

##### 3.3.1 1. Ordnung

Die allgemeine Form einer gewöhnlichen Dgl. 1. Ordnung ( $\Rightarrow$  nur 1. Ableitung):

$$y'(x) = f(x, y)$$

1. Lösung Funktion:  $y : x \mapsto y(x)$  mit  $y'(x) = f(x, y(x))$  (im Allgemeinen wird  $x$  aus einem gewissen Intervall kommen:  $x \in I \equiv (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ )

### 3.3.2 Anfangswertproblem

Gegeben durch:

1. Dgl.:  $y' = f(x, y)$
2. Anfangsbedingung  $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: Funktion  $y(x)$  mit (für  $x \in I, x_0 \in I$ :

1.  $y'(x) = f(x, y(x))$
2.  $y(x_0) = y_0$

### 3.3.3 partielle Ableitung

Wir betrachten ab sofort auch Funktionen mehrerer Variablen:  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$  Partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Rechenregeln: Wie bei normalen Ableitung, nur mit  $x$  fest.

1. Beispiel

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y$$

### 3.3.4 Existenz und Eindeutigkeit

... viele Theoreme über Existenz und Eindeutigkeit (Peano und Picard / Lindelöf) Insbesondere sind Existenz und Eindeutigkeit gesichert falls:

$$f(x, y) \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

stetig sind.

1. "Begründung" Zeichne an jedem Punkt  $(x, y)$  einen Vektor  $(1, f(x, y))$  ein.

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{(x, y(x))}{1}$$

2. Weiteres Argument für die Existenz und Eindeutigkeit TODO(Skizze)  
Steigung der gesuchten Funktion bei  $x_0$  ist bekannt als  $f(x_0, y_0) \Rightarrow$  kann Wert der Funktion bei  $x + \Delta x$  abschätzen:  $y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)$  (für kleine  $\Delta x$ )  
Kenne Steigung bei  $x_0$ :  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)) \Rightarrow$  Schätze Wert der Funktion bei  $x_0 + 2\Delta x$  ab. ( $\Rightarrow$  perfekt für Numerik)

### 3.3.5 Beispiele

- 1.

$$y'(x) = f(x, y), f(x, y) = 3$$

$$y'(x) = 3 \Rightarrow y(x) = \int 3dx = 3x + c$$

Das ist schon die allgemeine Lösung der Dgl. Ein Anfangswertproblem, zum Beispiel mit  $(x_0, y_0) = (-1, 1)$  lässt sich durch Bestimmen der Konstanten lösen:

$$y(x) = 3x + c \Rightarrow 1 = 3(-1) + c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow y(x) = 3x + 4$$

### 3.3.6 Separation der Variablen

Separation der Variablen funktioniert wenn  $f(x, y) = g(x)h(y)$

1. Beispiel

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \Rightarrow y'(x) = \frac{x}{y(x)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \Rightarrow ydy = xdx$$

Variablen sind getrennt, kann einfach integrieren

$$\int ydy = \int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 + 2c}$$

- (a) Lösen allgemeines Anfangswertproblem allgemeines Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung  $(x_0, y_0)$

$$y_0^2 = x_0^2 + 2c \Rightarrow 2c = y_0^2 - x_0^2 \Rightarrow y = \begin{cases} \sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \geq 0 \\ -\sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \leq 0 \end{cases}$$

- i. **TODO** Skizze



### 3.3.7 System von Dgl

(fast) alles oben gesagte funktioniert auch für Systeme gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}\frac{dy^1(x)}{dx} &= f^1(x, y^1, \dots, y^n) \\ \frac{dy^n(x)}{dx} &= f^n(x, y^1, \dots, y^n)\end{aligned}$$

Vektorschreibweise:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

Wir haben hier eine vektorwertige Funktion von  $n + 1$  Variablen benutzt:

$$\vec{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Anfangsbedingungen:  $(x_0, \vec{y}_0) \rightarrow n + 1$  Parameter. Einer davon entspricht der Verschiebung entlang der ein und derselben Lösung  $\Rightarrow$  allgemeine Lösung hat  $(n + 1) - 1 = n$  Parameter oder Integrationskonstanten.

### 3.3.8 Systeme von $n$ gewöhnlicher Dgl. $p$ -ter Ordnung

$$\vec{y}^{(p)}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'', \dots, \vec{y}^{(p-1)})$$

Anfangsbedingungen:  $(x_0, \vec{y}_0, \vec{y}_0', \dots, \vec{y}_0^{(p-1)}), \vec{y}_0 \stackrel{\wedge}{=} \vec{y}(x)$  bei  $x = x_0$

1. Tatsache Systeme von Dgl können auf größere Systeme niedrigerer Ordnung zurückgeführt werden. Wir illustrieren dies am Beispiel mit  $p = 2$
2. Beispiel

$$\vec{y}''(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}')$$

Dies ist äquivalent zu einem System von  $2n$  Dgl 1. Ordnung

$$\begin{cases} \vec{z}'(x) &= \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{z}) \\ \vec{y}'(x) &= \vec{z} \end{cases} \quad (\equiv g(x, \vec{y}, \vec{z}))$$

Ursprüngliche Form folgt durch Einsetzen der 2. Gleichung in die erste. Das verallgemeinert sich sofort auf die Ordnung  $p$ : Man gibt einfach der  $(p - 1)$  niederen Ableitungen neue Namen und betrachtet sie als neue Variablen. Die zusätzlichen Dgl sind schlicht die Aussagen, dass es sich dabei immer noch um die ehemaligen Ableitungen handelt.  $\Rightarrow$  System von  $np$  Dgl 1. Ordnung; allgemeine Lösung hat  $np$  Parameter

### 3.3.9 Erste physikalische Beispiele

1. Punktmasse 3 Dgl 2. Ordnung:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

$\Rightarrow$  6 Dgl 1. Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}} &= \frac{1}{m} \vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v}) \\ \dot{\vec{x}} &= \vec{v} \end{cases} \quad (6)$$

In vielen Fällen: (zeitunabhängiges) Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{x})$  ("Vektorfeld").

- (a) Darstellung in  $d = 2$  (Skizze Vektorfeld). wichtig: doppelte Markierung der Achsen
- (b) Einfachster Fall ( $d = 1$ ) betrachte den Fall, dass  $F$  von  $v$ , aber nicht von  $t$  abhängt:

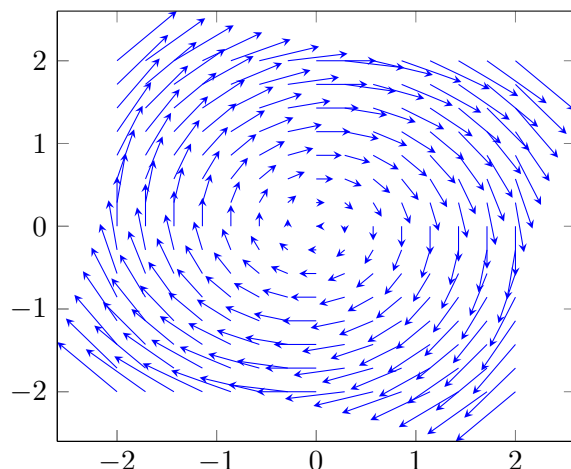
$$\begin{cases} \dot{v} &= \frac{F(x,v)}{m} \\ \dot{x} &= v \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(x,v)}{m} \\ v \end{pmatrix}$$

- i. **TODO** Darstellung im Phasenraum Analyse im Phasenraum passt perfekt zur früheren allgemeinen Analyse von Dgl 1. Ordnung Analog in  $d = 3$ : Vektorfeld:  $(\frac{\vec{F}}{m}, \vec{v})$ , Phasenraum  $(\vec{x}, \vec{v})$  oder  $(\vec{x}, \vec{p})$  ist 6-dimensional
- (c) Harmonischer Oszillator ( $d = 1$ )  $F(x) = -kx$

$$\begin{cases} \dot{v} &= -x \\ \dot{x} &= v \end{cases} \quad (8)$$

### Phasenraum des Harmonischen Oszillators



- (d) Freier Fall mit Luftwiderstand Aufgabe: Bestime zeitliche Entwicklung von  $v$  wenn Körper im Schwerfeld losgelassen wird.

$$F_R = -cv^2$$

Problem 1 – *dim*:  $x$  wachse nach unten, Start bei  $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$

$$F = m\ddot{x} \Rightarrow mg - c\dot{x}^2 = m\ddot{x} \Rightarrow \begin{cases} mg - cv^2 & = m\dot{v} \\ v & = \dot{x} \end{cases}$$

Erste Gleichung enthält kein  $x$  und kann unabhängig gelöst werden:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v^2 \quad (9)$$

$$dt = \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v^2} \quad (10)$$

Konstanten und Dimensionen

$$[g] = \text{m s}^{-2}; \left[\frac{c}{m}\right] = \text{N kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^2$$

Kann leicht Konstanten der Dimension Zeit und Geschwindigkeit bilden:

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}, \hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}$$

Benutze jetzt die dimensionslosen Variablen  $t' = \frac{t}{\hat{t}}, v' = \frac{v}{\hat{v}}$

$$\Rightarrow dt' = \frac{dv'}{1-v'^2} = \frac{dv'}{2} \left( \frac{1}{1+v'} + \frac{1}{1-v'} \right)$$

$$2t' = \ln 1 + v' - \ln 1 - v' + c$$

$v' = 0$  bei  $t' = 0 \Rightarrow c = 0$  Auflösen nach  $v'$ :

$$e^{2t'} = \frac{1+v'}{1-v'} \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow v' = 1 - \frac{2}{e^{2t'} + 1} \Rightarrow v = \hat{v} \left( 1 - \frac{2}{e^{\frac{2t}{\hat{t}}}} + 1 \right)$$

$\Rightarrow \hat{v}$  ist Grenzgeschwindigkeit, wird exponentiell angenommen, wenn  $t \gg \hat{t}$

Zugabe: einfache physikalische Argumente für die Größe von  $c$ :

- i.  $[c] = \text{kg m}^{-1}$ , Input:  $A$  (Querschnitt),  $\rho_L \Rightarrow c \sim \rho_L A$
- ii. Energiebilanz an verdrängter Luft:

$$F_R \cdot l \sim E_{\text{kin, Luft}} \sim \rho_L l A \frac{v^2}{2}$$

### 3.4 Taylorentwicklung

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x_0 = 0$ . Untersuche Verhalten beliebiger glatter Funktionen  $f(x)$  nahe  $x = 0$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x dx' f'(x') \quad (11)$$

$$= f(0) + f'(x')(x-x) \Big|_0^x - \int_0^x dx' f''(x')(x' - x) \quad (12)$$

$$= f(0) + f'(0)x - f''(x') \frac{(x' - x)}{2} \Big|_0^x + \int_0^x dx' f'''(x') \frac{(x' - x)^2}{2} \quad (13)$$

$$= f(0) + f'(x)x + f''(0) \frac{x^2}{2} + \dots \quad (14)$$

Allgemein:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^m f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \overbrace{\int_0^x dx' f^{(m+1)}(x') \frac{(x' - x)^m}{m!}}^{\text{Restglied}}$$

### 3.5 Harmonischer Oszillator

- eines der wichtigsten physikalischen Systeme
- beschreibt viele kompliziertere Systeme angenähert

#### 3.5.1 Eindimensionales System

$$d = 1, F = F(x)$$

$$F(x) = -\frac{d}{dx}v(x) = -v'(x)$$

Damit haben wir das **Potential** ( $\rightarrow$  beschreibt die potentielle Energie des Massenpunktes)  $v$  als Stammfunktion von  $-F$  definiert

- Skizze

Massenpunkt kann nur ruhen, wo  $F = 0$  beziehungsweise  $V' = 0$ . Genauer: Nur Minima (Maxima instabil).

**Ziel:** Untersuchung der Bewegung in der Nähe von Minimal (also bei  $x \approx x_0$  wobei  $v'(x_0) = 0$  gelte)