Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 3
Abgabetermin: Donnerstag, 10.11.2016, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Mengen und Abbildungen)*
Gegeben sei eine Abbildung $f : M \to N$ von Mengen M und N. Zeigen Sie:

(a) Sind N_1, N_2 zwei Teilmengen von N, so gilt

$$f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2) \text{ und } f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2).$$

(b) Sind M_1, M_2 zwei Teilmengen von M, so gilt

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2) \text{ und } f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2).$$

Finden Sie ein Beispiel, in dem $f(M_1 \cap M_2) \neq f(M_1) \cap f(M_2)$ gilt!

Aufgabe 2. *(Injektivität und Surjektivität von Abbildungen)*
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^3,$

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \qquad (m, n) \mapsto \frac{m}{n},$

(c) $f_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad (x, y) \mapsto (x + 1)^y.$

Aufgabe 3. *(Abbildungen und Kardinalität)* Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen. Zeigen Sie:

(a) Ist f injektiv, so gilt $|M| \leq |N|$,

(b) ist f surjektiv, so gilt $|M| \geq |N|$,

(c) ist f bijektiv, so gilt $|M| = |N|$.

Aufgabe 4. *(Abbildungen und Äquivalenzrelationen)* Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\phi \colon M \to M/\!\sim$, $m \mapsto \bar{m}$, die jedem Element $m \in M$ seine Äquivalenzklasse $\bar{m} \in M/\!\sim$ zuordnet, ist surjektiv.

(b) Sei $f \colon M \to N$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 \sim m_2$ gilt: $f(m_1) = f(m_2)$. Dann gibt es genau eine Abbildung $\bar{f} \colon M/\!\sim \to N$, so dass $f = \bar{f} \circ \phi$.

Zusatzaufgabe 5. *(Eine Menge und ihre Potenzmenge sind nie gleichmächtig)* Zeigen Sie: Für keine Menge X gibt es eine bijektive Abbildung $X \to \mathcal{P}(X)$.