Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

October 23, 2016

Contents

1 Einleitung

Webseite www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php Klausurzulassung: 50% Klausur 18.2.2017 9-12Uhr

2 Mengen und Zahlen

2.1 Logische Regeln und Zeichen

2.1.1 Quantoren

$\forall x$	für alle x
$\exists x$	es gibt (mindestens) ein x
$\exists! x$	es gibt genau ein x

2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \Rightarrow B$: wenn A gilt, gilt auch B, A ist **hinreichend** für B, daraus folgt: B ist **notwendig** für A, Ungültigkeit von B impliziert die Ungültigkeit von A ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
- $A \Leftrightarrow B$: A gilt, genau dann, wenn B gilt

2.1.3 Beweistypen

1. Direkter Schluss $A \Rightarrow B$
   (a) Beispiel m gerade Zahl $\Rightarrow m^2$ gerade Zahl
      i. Beweis m gerade $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $m = 2n \Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2k,$ wobei $k = 2n^2 \in \mathbb{N}\square$
2. Beweis der Transponerten (der Kontraposition) Zum Beweis $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$ $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
   (a) Beispiel Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade
      i. Beweis Wir zeigen: m ist ungerade $\Rightarrow m^2$ ungerade

$$\exists n \in \mathbb{N} : \ m = 2n{+}1 \Rightarrow m^2 = (2n{+}1)^2 = 2k{+}1, k = 2n^2{+}2n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^2 \text{ ungerade}\square$$

3. Indirekter Schluss (Beweis durch Wiederspruch) Man nimmt an, dass $A \Rightarrow B$ nicht gilt, das heißt $A \wedge \neg B$ und zeigt, dass dann für eine Aussage C gelten muss $C \Rightarrow \neg C$, also ein Wiederspruch

(a) Beispiel $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$

i. Beweis Wir nehmen an, dass $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ Dann folgt: $\exists b, c \in \mathbb{Z}$ teilfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit $a = \frac{b}{c}$ Falls

$$a^2 = 2 \Rightarrow (\frac{b}{c})^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2 \text{ gerade } \Rightarrow b \text{ ist gerade (schon gezeigt) } =$$

Außerdem $b^2 = 2c^2 \Rightarrow 2c^2 = 4d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c$ ist auch gerade. Also müssen b und c beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet $\square$

2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

1. Summenzeichen Wir definieren für $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m + \ldots + a_n$$

falls $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$$

falls $n < m$ (sogennante leere Summe)

2. Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot ... \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

2.2 Mengen

2.2.1 Definition

(Georg cantor 1885) Unger einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (welche die Elemente von M genannt werden), zu einem Ganzen M dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt x feststeht, ab gilt

- $x \in M$ (x Element von M)
- x $\neg\in$ M (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{ eine Menge } M \text{für die } x \in \ M \Leftrightarrow A(x)$$

2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion $A \subseteq M$ (A ist eine Teilmenge von M)
$$\forall\, x : (x \in A \Rightarrow x \in M)$$
, zum Beispiel $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- $$A = B \Leftrightarrow \forall\, x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

- $$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge) } \Leftrightarrow A \subset M \wedge A \neq M$$

- $$\emptyset : \text{ leere Menge } \quad \nexists x : x \in \emptyset$$
. Wir setzen fest, dass $\emptyset$ eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beipsiel
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

- Durchschnitt
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Vereinigung
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Differenz (auch Komplement von B in A)
$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_a B \text{ (auch } B^c\text{)}$$

2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge A
$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$
Alle Teilmengen von A

1. Beispiel
$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset$$

2.2.4 Familien von Mengen

Sei I eine Indexmenge, $I \subseteq \mathbb{N}, (A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen A

1. Durchschnitt von A
$$\cap_{i \in I} = \{x \mid \forall_{i \in I}\, x \in A_i\}$$
2. Vereinigung
$$\cup_{i \in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

2.2.5 Rechenregeln

A, B, C, D seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$ Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ Transitivität
- $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$ Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Assoziativität
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Eigenschaften der Komplementbildung:
  Seien $A, B \subseteq D(C_D A := D \setminus A)$, dann gilt
$$C_D(C_D A) = A$$
$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B$$
$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B$$
  - Beweis:
$$x \in C_D(A \cap B) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow (c \in D \wedge x \notin A) \cup x \in D \wedge$$
$$\Leftrightarrow x \in D \setminus A \cup x \in D \setminus B \Leftrightarrow x \in D \setminus (A \cup B) \ \square$$
  - Bemerkung: Komplement kann man auch mit A^c bezeichnen

2.2.6 geordneter Tupel

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n-Tupel

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_i, \ldots, y_n\} \not\Longrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_j \in A_j j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

1. Beispiel
   - $$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
   - R^n m-dimensionaler Raum von reellen Zahlen

2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung: $a\tilde{b}$), sodass

- Für jede zwei $a, b \in A$ gilt entweder $a\tilde{b} \vee a \ \tilde{\not b}$
- $a\tilde{a}$ Reflexivität
- $a\tilde{b} \Rightarrow b\tilde{a}$ Symmetrie
- \$a~ b, b~ c ⇒ a~ c\$ Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in sogenannte Äquivalenzklassen einordnen: $[a] : \{b \in A \mid b\tilde{a}\}$

2.3 Relationen und Abbildungen

2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ wobei X, Y Mengen sind. Für $x \in X$ definieren wir, das **Bild** von x unter R

$$R(X) := \{y \in Y | mid(x, y) \in R\}$$

und *Definitionsbereiche von R (bezüglich X)

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$ heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \to Y \Leftrightarrow D(R) = X, \forall\, x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält $R(X)$ genau ein Element.
X heißt Definitionsbereich von f
Y heißt Werte- oder Bildbereich von f (Bild)
$x \in X$ heißt Argument
$f(x) \in Y$ heißt Wert von f an der Stelle x

1. Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2$ dann ist der Graph von $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\nvDash}, y = x^2\}$

   (a) Bemerkung

   $$M^*(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

   Ist kein Graph einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denn $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$ f heißt

   - surjektiv, wenn gilt $f(X) = Y$
   - injectiv, $\forall\, x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   - bijektiv, wenn f surjektiv und injectiv ist

2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ durch $y \to x \in X$, eindeutig bestimmt durch $y = f(x)$

1. Bemerkung

$$(x, y) \in \text{ Graph } f \Leftrightarrow (y, x) \in \text{ Graph } f^{-1}$$

2.3.4 Komposition

Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Abbildungen. Die Komposition von g und f

$$g \circ f : X \to Z \text{ ist durch } x \to g(f(x)) \text{ definiert}$$

2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge X definieren wir dei identische Abbildung

$$I_d(A) = I_A : A \to A, \text{ durch } x \to x$$

1. Beispiel

   - $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$

     $$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$$

     $(n-1)$ dimensionale sphere in $\mathbb{R}^n$

   - Seien X, Y Mengen, $M \subseteq X \times Y, f : M \to X$
     f heißt Projektion, f surjektiv

     $$f(M) = \{x \mid \exists y \in Y : (x, y) \in M\} = X$$