Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

October 28, 2016

Contents

1 Einleitung

Webseite www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php Klausurzulassung: 50% Klausur 18.2.2017 9-12Uhr

2 Mengen und Zahlen

2.1 Logische Regeln und Zeichen

2.1.1 Quantoren

$\forall x$	für alle x
$\exists x$	es gibt (mindestens) ein x
$\exists! x$	es gibt genau ein x

2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \Rightarrow B$: wenn A gilt, gilt auch B, A ist **hinreichend** für B, daraus folgt: B ist **notwendig** für A, Ungültigkeit von B impliziert die Ungültigkeit von A ($\neg B \Rightarrow \neg A$)

- $A \Leftrightarrow B$: A gilt, genau dann, wenn B gilt

2.1.3 Beweistypen

1. Direkter Schluss $A \Rightarrow B$

   (a) Beispiel m gerade Zahl $\Rightarrow m^2$ gerade Zahl

      i. Beweis m gerade $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $m = 2n \Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2k,$ wobei $k = 2n^2 \in \mathbb{N}\square$

2. Beweis der Transponerten (der Kontraposition) Zum Beweis $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$ $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

   (a) Beispiel Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade

i. Beweis Wir zeigen: m ist ungerade $\Rightarrow m^2$ ungerade

$\exists n \in \mathbb{N}: \ m = 2n+1 \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 2k+1, k = 2n^2+2n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^2$ ungerade$\square$

3. Indirekter Schluss (Beweis durch Wiederspruch) Man nimmt an, dass $A \Rightarrow B$ nicht gilt, das heißt $A \wedge \neg B$ und zeigt, dass dann für eine Aussage C gelten muss $C \Rightarrow \neg C$, also ein Wiederspruch

   (a) Beispiel $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$

      i. Beweis Wir nehmen an, dass $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ Dann folgt: $\exists b, c \in \mathbb{Z}$ teilfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit $a = \frac{b}{c}$ Falls

$$a^2 = 2 \Rightarrow (\frac{b}{c})^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2 \text{ gerade } \Rightarrow b \text{ ist gerade (schon gezeight)}$$

$$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{N} \text{ sodass } b = 2d \Rightarrow b^2 = 4d^2$$

Außerdem $b^2 = 2c^2 \Rightarrow 2c^2 = 4d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c$ ist auch gerade. Also müssen b und c beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet $\square$

2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

1. Summenzeichen Wir definieren für $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m + \ldots + a_n$$

falls $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$$

falls $n < m$ (sogennante leere Summe)

2. Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot \ldots \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

2.2 Mengen

2.2.1 Definition

(Georg cantor 1885) Unger einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (welche die Elemente von M genannt werden), zu einem Ganzen M dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt x feststeht, ab gilt

- $x \in M$ (x Element von M)
- x $\neg\in$ M (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{ eine Menge } M \text{für die } x \in \ M \Leftrightarrow A(x)$$

2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion $A \subseteq M$ (A ist eine Teilmenge von M)
$$\forall\, x : (x \in A \Rightarrow x \in M)$$
, zum Beispiel $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $$A = B \Leftrightarrow \forall\, x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$
- $$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge) } \Leftrightarrow A \subset M \wedge A \neq M$$
- $$\emptyset : \text{ leere Menge } \ \nexists x : x \in \emptyset$$
. Wir setzen fest, dass $\emptyset$ eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beipsiel
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$
- Durchschnitt
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
- Vereinigung
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
- Differenz (auch Komplement von B in A)
$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_a B \text{ (auch } B^c)$$

2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge A

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Alle Teilmengen von A

1. Beispiel
$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset$$

2.2.4 Familien von Mengen

Sei I eine Indexmenge, $I \subseteq \mathbb{N}, (A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen A

1. Durchschnitt von A
$$\cap_{i \in I} = \{x \mid \forall_{i \in I}\, x \in A_i\}$$
2. Vereinigung
$$\cup_{i \in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

2.2.5 Rechenregeln

A, B, C, D seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$ — Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ — Transitivität
- $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$ — Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — Assoziativität
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Eigenschaften der Komplementbildung:
  Seien $A, B \subseteq D (C_D A := D \setminus A)$, dann gilt
$$C_D(C_D A) = A$$
$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B$$
$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B$$

– Beweis:

$$x \in C_D(A \cap B) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow (c \in D \wedge x \notin A) \cup x \in D \wedge x \notin B$$
$$\Leftrightarrow x \in D \setminus A \cup x \in D \setminus B \Leftrightarrow x \in D \setminus (A \cup B) \ \square$$

– Bemerkung: Komplement kann man auch mit A^c bezeichnen

2.2.6 geordneter Tupel

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n-Tupel

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_i, \ldots, y_n\} \not\Longrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_j \in A_j j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

1. Beispiel

   - $$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
   - R^n m-dimensionaler Raum von reellen Zahlen

2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung: $a \sim b$), sodass

- Für jede zwei $a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b \vee a \not\sim b$
- $a \sim a$ Reflexivität
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ Symmetrie
- $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in sogenannte Äquivalenzklassen einordnen: $[a] : \{b \in A \mid b \sim a\}$

2.3 Relationen und Abbildungen

2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ wobei X, Y Mengen sind. Für $x \in X$ definieren wir, das **Bild** von x unter R

$$R(X) := \{y \in Y | mid(x,y) \in R\}$$

und *Definitionsbereiche von R (bezüglich X)

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$ heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \to Y \Leftrightarrow D(R) = X, \forall\, x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält $R(X)$ genau ein Element.
X heißt Definitionsbereich von f
Y heißt Werte- oder Bildbereich von f (Bild)
$x \in X$ heißt Argument
$f(x) \in Y$ heißt Wert von f an der Stelle x

1. Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2$ dann ist der Graph von $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{\nvDash}, y = x^2\}$

   (a) Bemerkung

   $$M^*(x) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

   Ist kein Graph einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denn $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$ f heißt

   - surjektiv, wenn gilt $f(X) = Y$
   - injectiv, $\forall\, x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   - bijektiv, wenn f surjektiv und injectiv ist

2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ durch $y \to x \in X$, eindeutig bestimmt durch $y = f(x)$

1. Bemerkung

$$(x,y) \in \text{ Graph } f \Leftrightarrow (y,x) \in \text{ Graph } f^{-1}$$

2.3.4 Komposition

Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Abbildungen. Die Komposition von g und f

$$g \circ f : X \to Z \text{ ist durch } x \to g(f(x)) \text{ definiert}$$

2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge X definieren wir dei identische Abbildung

$$I_d(A) = I_A : A \to A, \text{ durch } x \to x$$

1. Beispiel

   - $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$
     $$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$$
     $(n-1)$ dimensionale sphere in $\mathbb{R}^n$
   - Seien X, Y Mengen, $M \subseteq X \times Y, f : M \to X$
     f heißt Projektion, f surjektiv
     $$f(M) = \{x \mid \exists y \in Y : (x, y) \in M\} = X$$

2.3.6 Homomorphe Abbildungen

Existieren auf Mengen X und Y mit gewissen Operationen $\oplus_x$ bzw. $\oplus_y$ (zum Beispiel AAddition, Ordungsrelation), ho heißt die Abbildung $f : X \to Y$ homomorph (strukturerhaltend), wenn gilt $\forall x_1, x_2 \in X f(x_1 \oplus_x x_2) = f(x_1) \oplus_y f(x_2)$ Eine bijektive Homomorphie heißt Isomorphisumus, beziehungsweise $X \approx Y$ (äquivalent, isomorph)

2.4 Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \ \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

2.4.1 Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$
2. Zu jeder natürlichen Zahl n, gibt es genau einen "Nachfolger" $n'(=: n + 1)$

3. Die Zahl 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl

4. $n' = m' \Rightarrow n = m$

5. Enthält eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 1 und von jedem $n \in m$ auch den Nachfolger n' ist $M = \mathbb{N}$

Bemerkung:
Mit Hilfe der Axiome lassen sich auf $\mathbb{N}$ Addition $(+)$, Multiplikation $(\cdot)$ und Ordung $(\leq)$ einführen. Wir definieren:
$1' = 2, 2' = 3, \ldots\ n + 1 := m'\ n + m' := (n + m)';\ n \cdot m' := nm + n$ Man kann zeigen, dass jede Menge, welche die Peano Axiome erfüllt isomorph bezüglich Multiplikation und Addition zu $\mathbb{N}$ ist Wir definieren $n < m \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x + m = m$

2.4.2 Vollständige Induktion

1. Induktionsprinzip Es seien die folgende Schritte vollzogen:

   (a) Induktionsverankerung (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ gilt

   (b) Induktionsschluss: Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ gültig, so folgt auch die Gültigkeit von $A(n + 1)$

   Dann sind alle Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ gültig.

2. Beweis: Wir definieren die Tailmenge $M \subseteq \mathbb{N}$, $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(N) \text{ ist gültig}\}$ Die Induktionsverankerung besagt, dass $1 \in M$ und die Induktionsannahme $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$. Folglich ist nach dem 5. Axiom von Peano $M = \mathbb{N}$ □

3. Beispiel 1 Zu Beweisen:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   (a) Beweis

      i. Induktionsverankerung: $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$

      ii. Annahme: $A(n)$ gültig für $n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
      Zu zeigen $A(n+1) : 1^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$$1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)(\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n + n + 1)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2)\Box$$

4. Beispiel 2 Definition von Potenzen

$$x^0 := 1$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} x^n := x^{n-1}x$$

(iterative (rekursive) Definition)
Auf $\mathbb{N}$ sind diese elementaren Operationene erklärt:

- Addition $a+b$
- Multiplikation $a \cdot b$
- (unter gewissen Vorraussetzungen):
  - Subtraktion $a-b$
  - Division $\frac{a}{b}$

$\mathbb{N}$ ist bezüglich "$-$" oder "/" nicht vollständig, das heißt $n+x=m$ ist nicht lösbar in $\mathbb{N}$ Erweiterungen:

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{0; \pm, n \in \mathbb{N}\}$
  Negative Zahl $(-n)$ ist definiert duch $n+(-n)=0$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ $(bx = y)$

Man sagt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ einen Körper bildet.

2.4.3 Definition Körper

$\mathbb{K}$ sei eine Menge auf der Addition und Multiplikation sei. $\mathbb{K}$ heißt ein Körper, wenn die folgende Axiome erfüllt sind:

- Addition: $(\mathbb{K}, +)$ ist eine kummutative Gruppe, das heißt $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$:
  1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ Assoziativität
  2. $a+b = b+a$ Kommutativität
  3. $\exists! 0 \in \mathbb{K} : a+0 = a$ Existenz des Nullelement
  4. $\exists x \in \mathbb{K} : a+x = 0$ Existstenz des Nagativen
- Multiplikation: $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppte, das heißt $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$
  1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Assozativität

2. $a \cdot b = b \cdot a$ Kummutativität
3. $\exists! 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = a$ Existenz des Einselement
4. Für $a \neq 0, \exists! y \in \mathbb{K} : a \cdot y = 1$ Inverse

- Verträglichkeit

  1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ Distributivität

1. Satz $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Definieren auf $\mathbb{Q}$ eine Ordnung "$\leq$" duch

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} : y - x = \frac{m}{n}$$

dann ist auch diese Ordnung mit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$ in folgendem Sinne verträglich:

   - $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
   - $0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$

2. Bemerkung

$$\{a \in \mathbb{Q} : a = \frac{r}{s}, r \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}\} =: \mathbb{Q}_+ (\mathbb{Q}_{\geq 0})$$

2.5 Abzählbarkeit

2.5.1 Abzählbarkeit von Mengen

Sei A eine Menge

- A heißt endlich mit $|A| = n$ Elementen ist äquivalent zu

$$|A| = \begin{cases} A = \emptyset & (n = 0) \\ \exists f : A \to \{1, \ldots, n\} & f \text{ bijektiv}, n < \infty \end{cases}$$

- A heißt abzählbar undendlich genau dann wenn

$$\exists f : A \to \mathbb{N} \text{ bijektiv}$$

- A heißt überabzählbar genau dann wenn: A ist weder endlich oder abzählbar unendlich

2.5.2 Beispiel

$\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich

1. Beweis Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & 2 < 0 \end{cases}$$

   - Surjektivität: zu zeigen $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$
     Offenbar $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{N}$. Wir zeigen $\mathbb{N} \subseteq f(\mathbb{Z})$. Sei $n \in \mathbb{N}$, finde $z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = n$. Man unterscheide:
     - n gerade $\to$ Wähle $z = \frac{n}{2}$
     - n ungerade $\to$ $z = -\frac{n+1}{2}$
   - Injektivität: Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ und $f(z_1) = f(z_2)$
     ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1 \leq z_2$. Entweder $z_1, z_2 \geq 0$ oder $z_1, z_2 < 0$, denn sonst währe $f(z_1)$ ungerade und $f(z_1)$ gerade **Wiederspruch**. Falls
     - $z_1, z - 2 \geq 0 \Rightarrow 2z_1 = f(z_1) = f(z_2) = 2z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$
     - $z_1, z - 2 < 0 \Rightarrow -2z_1 - 1 = f(z_1) = f(z_2) = -2z_2 - 1 \Rightarrow z_1 = z_2$ □

2.5.3 Beispiel

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich
- $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich
- $\mathbb{R}$ überabzählbar