Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

November 4, 2016

Contents

1 Einleitung

Webseite www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php Klausurzulassung: 50% Klausur 18.2.2017 9-12Uhr

2 Mengen und Zahlen

2.1 Logische Regeln und Zeichen

2.1.1 Quantoren

$\forall\, x$	für alle x
$\exists x$	es gibt (mindestens) ein x
$\exists! x$	es gibt genau ein x

2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \Rightarrow B$: wenn A gilt, gilt auch B, A ist **hinreichend** für B, daraus folgt: B ist **notwendig** für A, Ungültigkeit von B impliziert die Ungültigkeit von A ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
- $A \Leftrightarrow B$: A gilt, genau dann, wenn B gilt

2.1.3 Beweistypen

1. Direkter Schluss $A \Rightarrow B$
   (a) Beispiel m gerade Zahl $\Rightarrow m^2$ gerade Zahl
      i. Beweis m gerade $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $m = 2n \Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2k,$ wobei $k = 2n^2 \in \mathbb{N}\square$
2. Beweis der Transponerten (der Kontraposition) Zum Beweis $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$ $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
   (a) Beispiel Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade
      i. Beweis Wir zeigen: m ist ungerade $\Rightarrow m^2$ ungerade

      $$\exists n \in \mathbb{N} : \; m = 2n{+}1 \Rightarrow m^2 = (2n{+}1)^2 = 2k{+}1, k = 2n^2{+}2n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^2 \text{ ungerade}\square$$
3. Indirekter Schluss (Beweis durch Wiederspruch) Man nimmt an, dass $A \Rightarrow B$ nicht gilt, das heißt $A \wedge \neg B$ und zeigt, dass dann für eine Aussage C gelten muss $C \Rightarrow \neg C$, also ein Wiederspruch
   (a) Beispiel $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$
      i. Beweis Wir nehmen an, dass $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ Dann folgt: $\exists b, c \in \mathbb{Z}$ teilfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit $a = \frac{b}{c}$ Falls

      $$a^2 = 2 \Rightarrow (\frac{b}{c})^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2 \text{ gerade } \Rightarrow b \text{ ist gerade (schon gezeight)}$$

$$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{N} \text{ sodass } b = 2d \Rightarrow b^2 = 4d^2$$

Außerdem $b^2 = 2c^2 \Rightarrow 2c^2 = 4d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c$ ist auch gerade. Also müssen b und c beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet $\square$

2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

1. Summenzeichen Wir definieren für $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m + \ldots + a_n$$

falls $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$$

falls $n < m$ (sogennante leere Summe)

2. Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot ... \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

2.2 Mengen

2.2.1 Definition

(Georg cantor 1885) Unger einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (welche die Elemente von M genannt werden), zu einem Ganzen M dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt x feststeht, ab gilt

- $x \in M$ (x Element von M)
- x ¬∈ M (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{ eine Menge } M \text{für die } x \in \ M \Leftrightarrow A(x)$$

2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion $A \subseteq M$ (A ist eine Teilmenge von M)
$$\forall\, x : (x \in A \Rightarrow x \in M)$$
, zum Beispiel $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- $$A = B \Leftrightarrow \forall\, x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

- $$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge) } \Leftrightarrow A \subset M \wedge A \neq M$$

- $$\emptyset : \text{ leere Menge } \quad \nexists x : x \in \emptyset$$
. Wir setzen fest, dass $\emptyset$ eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beipsiel
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

- Durchschnitt
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Vereinigung
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Differenz (auch Komplement von B in A)
$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_a B \text{ (auch } B^c\text{)}$$

2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge A
$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$
Alle Teilmengen von A

1. Beispiel
$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$$

2.2.4 Familien von Mengen

Sei I eine Indexmenge, $I \subseteq \mathbb{N}, (A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen A

1. Durchschnitt von A

$$\cap_{i\in I} = \{x \mid \forall_{i\in I}\, x \in A_i\}$$

2. Vereinigung

$$\cup_{i\in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

2.2.5 Rechenregeln

A, B, C, D seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$ — Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ — Transitivität
- $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$ — Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — Assoziativität
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Eigenschaften der Komplementbildung:
  Seien $A, B \subseteq D(C_D A := D \setminus A)$, dann gilt

$$C_D(C_D A) = A$$

$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B$$

$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B$$

  - Beweis:

$$x \in C_D(A \cap B) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in D \wedge x \notin A) \vee (x \in D \wedge x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in D \setminus A) \vee (x \in D \setminus B) \Leftrightarrow x \in D \setminus (A \cup B) \; \square$$

  - Bemerkung: Komplement kann man auch mit A^c bezeichnen

2.2.6 geordneter Tupel

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n-Tupel

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_i, \ldots, y_n\} \not\Longrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_j \in A_j j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

1. Beispiel
   - $$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
   - R^n n-dimensionaler Raum von reellen Zahlen

2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung: $a \sim b$), sodass

- Für jede zwei $a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b \vee a \not\sim b$
- $a \sim a$ Reflexivität
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ Symmetrie
- $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in sogenannte Äquivalenzklassen einordnen: $[a] : \{b \in A \mid b \sim a\}$

2.3 Relationen und Abbildungen

2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ wobei X, Y Mengen sind. Für $x \in X$ definieren wir, das **Bild** von x unter R

$$R(X) := \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

und *Definitionsbereiche von R (bezüglich X)

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$ heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \to Y \Leftrightarrow D(R) = X, \forall\, x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält $R(x)$ genau ein Element.
X heißt Definitionsbereich von f
Y heißt Werte- oder Bildbereich von f (Bild)
$x \in X$ heißt Argument
$f(x) \in Y$ heißt Wert von f an der Stelle x

1. Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2$ dann ist der Graph von $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

   (a) Bemerkung

   $$M^*(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

   Ist kein Graph einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denn $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$ f heißt

   - surjektiv, wenn gilt $f(X) = Y$
   - injectiv, $\forall\, x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   - bijektiv, wenn f surjektiv und injectiv ist

2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ durch $y \to x \in X$, eindeutig bestimmt durch $y = f(x)$

1. Bemerkung

$$(x, y) \in \text{ Graph } f \Leftrightarrow (y, x) \in \text{ Graph } f^{-1}$$

2.3.4 Komposition

Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Abbildungen. Die Komposition von g und f

$$g \circ f : X \to Z \text{ ist durch } x \to g(f(x)) \text{ definiert}$$

2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge X definieren wir die identische Abbildung

$$I_d(A) = I_A : A \to A, \text{ durch } x \to x$$

1. Beispiel

   - $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$
     $$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$$
     $(n-1)$ dimensionale sphere in $\mathbb{R}^n$
   - Seien X, Y Mengen, $M \subseteq X \times Y, f : M \to X$
     f heißt Projektion, f surjektiv
     $$f(M) = \{x \mid \exists y \in Y : (x, y) \in M\} = X$$

2.3.6 Homomorphe Abbildungen

Existieren auf Mengen X und Y mit gewissen Operationen $\oplus_x$ bzw. $\oplus_y$ (zum Beispiel Addition, Ordungsrelation), ho heißt die Abbildung $f : X \to Y$ homomorph (strukturerhaltend), wenn gilt $\forall\, x_1, x_2 \in X\, f(x_1 \oplus_x x_2) = f(x_1) \oplus_y f(x_2)$ Eine bijektive Homomorphie heißt Isomorphisumus, beziehungsweise $X \approx Y$ (äquivalent, isomorph)

2.4 Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},\ \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

2.4.1 Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$
2. Zu jeder natürlichen Zahl n, gibt es genau einen "Nachfolger" $n'(=: n + 1)$

3. Die Zahl 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl

4. $n' = m' \Rightarrow n = m$

5. Enthält eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 1 und von jedem $n \in m$ auch den Nachfolger n' ist $M = \mathbb{N}$

Bemerkung:
Mit Hilfe der Axiome lassen sich auf $\mathbb{N}$ Addition ($+$), Multiplikation ($\cdot$) und Ordung ($\leq$) einführen. Wir definieren:
$1' = 2, 2' = 3, \ldots\ n + 1 := m'\ n + m' := (n + m)';\ n \cdot m' := nm + n$ Man kann zeigen, dass jede Menge, welche die Peano Axiome erfüllt isomorph bezüglich Multiplikation und Addition zu $\mathbb{N}$ ist Wir definieren $n < m \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x + m = m$

2.4.2 Vollständige Induktion

1. Induktionsprinzip Es seien die folgende Schritte vollzogen:

   (a) Induktionsverankerung (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ gilt

   (b) Induktionsschluss: Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ gültig, so folgt auch die Gültigkeit von $A(n + 1)$

   Dann sind alle Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ gültig.

2. Beweis: Wir definieren die Tailmenge $M \subseteq \mathbb{N}$, $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(N) \text{ ist gültig}\}$ Die Induktionsverankerung besagt, dass $1 \in M$ und die Induktionsannahme $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$. Folglich ist nach dem 5. Axiom von Peano $M = \mathbb{N}$ □

3. Beispiel 1 Zu Beweisen:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   (a) Beweis

      i. Induktionsverankerung: $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$

      ii. Annahme: $A(n)$ gültig für $n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
      Zu zeigen $A(n+1) : 1^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$$1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)(\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n + n + 1)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2)\square$$

4. Beispiel 2 Definition von Potenzen

$$x^0 := 1$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} x^n := x^{n-1}x$$

(iterative (rekursive) Definition)
Auf $\mathbb{N}$ sind diese elementaren Operationene erklärt:

- Addition $a+b$
- Multiplikation $a \cdot b$
- (unter gewissen Vorraussetzungen):
  - Subtraktion $a-b$
  - Division $\frac{a}{b}$

$\mathbb{N}$ ist bezüglich "$-$" oder "/" nicht vollständig, das heißt $n+x=m$ ist nicht lösbar in $\mathbb{N}$ Erweiterungen:

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{0; \pm, n \in \mathbb{N}\}$
  Negative Zahl $(-n)$ ist definiert duch $n+(-n)=0$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ $(bx=y)$

Man sagt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ einen Körper bildet.

2.4.3 Definition Körper

$\mathbb{K}$ sei eine Menge auf der Addition und Multiplikation sei. $\mathbb{K}$ heißt ein Körper, wenn die folgende Axiome erfüllt sind:

- Addition: $(\mathbb{K}, +)$ ist eine kummutative Gruppe, das heißt $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$:
  1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ Assoziativität
  2. $a+b=b+a$ Kommutativität
  3. $\exists! 0 \in \mathbb{K} : a+0=a$ Existenz des Nullelement
  4. $\exists x \in \mathbb{K} : a+x=0$ Existstenz des Nagativen
- Multiplikation: $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppte, das heißt $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$
  1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Assozativität

2. $a \cdot b = b \cdot a$ Kummutativität
3. $\exists! 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = a$ Existenz des Einselement
4. Für $a \neq 0, \exists! y \in \mathbb{K} : a \cdot y = 1$ Inverse

- Verträglichkeit
    1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ Distributivität

1. Satz $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Definieren auf $\mathbb{Q}$ eine Ordnung "$\leq$" duch

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} : y - x = \frac{m}{n}$$

dann ist auch diese Ordnung mit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$ in folgendem Sinne verträglich (Axiom M0):

- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$

2. Bemerkung

$$\{a \in \mathbb{Q} : a = \frac{r}{s}, r \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}\} =: \mathbb{Q}_+ (\mathbb{Q}_{\geq 0})$$

2.5 Abzählbarkeit

2.5.1 Abzählbarkeit von Mengen

Sei A eine Menge

- A heißt endlich mit $|A| = n$ Elementen ist äquivalent zu

$$|A| = \begin{cases} A = \emptyset & (n = 0) \\ \exists f : A \to \{1, \ldots, n\} & f \text{ bijektiv}, n < \infty \end{cases}$$

- A heißt abzählbar undendlich genau dann wenn

$$\exists f : A \to \mathbb{N} \text{ bijektiv}$$

- A heißt überabzählbar genau dann wenn: A ist weder endlich oder abzählbar unendlich

1. Beispiel $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich

(a) Beweis Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & x < 0 \end{cases}$$

- Surjektivität: zu zeigen $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$
  Offenbar $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{N}$. Wir zeigen $\mathbb{N} \subseteq f(\mathbb{Z})$. Sei $n \in \mathbb{N}$, finde $z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = n$. Man unterscheide:
  - n gerade $\to$ Wähle $z = \frac{n}{2}$
  - n ungerade $\to$ $z = -\frac{n+1}{2}$
- Injektivität: Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ und $f(z_1) = f(z_2)$
  ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1 \leq z_2$. Entweder $z_1, z_2 \geq 0$ oder $z_1, z_2 < 0$, denn sonst währe $f(z_1)$ ungerade und $f(z_1)$ gerade **Wiederspruch**. Falls
  - $z_1, z - 2 \geq 0 \Rightarrow 2z_1 = f(z_1) = f(z_2) = 2z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$
  - $z_1, z - 2 < 0 \Rightarrow -2z_1 - 1 = f(z_1) = f(z_2) = -2z_2 - 1 \Rightarrow z_1 = z_2$ $\square$

2. Beispiel

   - $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich
   - $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich
   - $\mathbb{R}$ überabzählbar

3. Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,1) \to (2,2) \to (1,3) \to (2,3) \to (3,2) \to (3,1)$$

4. Korollar 1.30 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ abzählbar $\Rightarrow M_1 \times \ldots \times M_n$ abzählbar.

   (a) Beweis Durch vollständige Induktion $M_1 \times (M_2 \times \ldots \times M_n) \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

5. Satz Die Menge aller Folgen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ ist überabzählbar. (Zum Beispiel: $1, 0, 0, 0, \ldots, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{k-te Stelle}}}{1}, \ldots, 0, \ldots)$

   (a) Beweis M ist unendlich, denn die Folgen $f_k : 0, , \ldots, 0, 1, 0, \ldots$ sind parrweise verschieden. Angenommen M wäre abzählbar.

Sei $f_1, f_2, \dots$ eine Abzählung mit $f_k = (z_{knn\in\mathbb{N}})$.

$$\begin{array}{llll} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \quad \dots \end{array}$$

f : 0010 Man setze $f = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n := \begin{cases} 1 & z_{nn} = 0 \\ 0 & z_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dann $f \in M$, aber $f \neq f_k \,\forall\, k \in \mathbb{N}$. Also ist M nicht abzählbar. ("Cantorsche Diagonalverfahren").

2.6 Ordnung

2.6.1 Definition

Sei A eine Menge. Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Teilordnung (Halbordnung) auf A, wenn $\forall\, y, x, z \in A$ gilt:

1. $x \leq x$ (Reflexivität)
2. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Symmetrie)
3. $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

Wenn außerdem noch $\forall\, x, y \in A$ gilt:

4. $x \leq y \vee y \leq x$ (Vergleichbarkeit je zweier Elemente)

so heißt R (totale) Ordung auf A. \$(A,$\leq$) heißt teilweise beziehungsweise (total) geordnete Menge.

1. Beispiel

   (a) $(\mathbb{Q}, \leq)$ mit der üblichen Ordnung ist eine total geordnete Menge

   (b) Wir definieren auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A eine Teilordnung "$\leq$":

   $$B \leq C \Leftrightarrow B \subseteq C \,\forall\, B, C \in \mathcal{P}(A)$$

   Beweis: 1. - 3. sind trivial, 4. geht nicht (keine Totalordung). Wähle $B, C \in \mathcal{P}(a), B, C \neq \emptyset, B \cap C = \emptyset$. Dann gilt weder $B \subseteq C$ noch $C \subseteq B$ $\square$

(c) Sei $F := \{f \mid f : A \to \mathbb{R}\}$ für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren $f \leq g \Leftrightarrow \forall\, x \in A : f(x) \leq g(x)$
(1.) - (3.) trivial, 4. gilt nicht. Falls A mehr als ein Element hat, gibt es eine Funktion, die nicht miteinander verglichen werden können.

2.7 Maximum und Minimum einer Menge

2.7.1 Definition

Sei $(A, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge, $a \in A$
Maximum:

$$a = \max A \Leftrightarrow \forall\, x \in A : x \leq a$$

Minimum:

$$a = \max A \Leftrightarrow \forall\, x \in A : a \leq x$$

2.7.2 Bemerkung

Durch die Aussagen ist a eindeutig bestimmt, denn seien:

$$a_1, a_2 \in A : \forall\, x \in A \begin{cases} x \leq a_1 \\ x \leq a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 \leq a_1 \\ a_1 \leq a_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{Symmetrie}} a_1 = a_2$$

2.8 Schranken

Sei $(A, \leq)$ eine (total geordnete) Menge, $B \subseteq A$

1. $S \in A$ heißt obere Schranke zu $B \Leftrightarrow \forall\, x \in B : x \leq S$
   $S \in A$ heißt untere Schranke zu $B \Leftrightarrow \forall\, x \in B : S \leq x$
2. $\bar{S}(B) := \{S \in A \mid S$ S ist untere Schranke zu $B\}$
   $\underline{S}(B) := \{S \in A \mid S$ S ist obere Schranke zu $B\}$
3. Existiert $g := \min \underline{S}(B)$ beziehungsweise $g := \max \bar{S}$ so sagen wir:
   $g = \sup B$ (kleinste obere Schranke, <u>supremum</u>, obere "Grenze" von B in A) $g = \inf B$ (größte obere Schranke, <u>infimum</u>, untere "Grenze" von B in A)

2.8.1 Bemerkung

1. Existiert $\max B = \bar{b}$, so folt $\sup B = \bar{b}$, denn $\bar{b} \in \underline{S}(B)$ nah Definition.

   $$s \in \underline{S}(B) \Rightarrow \bar{b} \leq s, \text{ da } \bar{b} \in B$$

   Ebeso gilt: $\exists \min B = \underline{b} \Rightarrow \inf B = \underline{b}$

2.8.2 Beispiel

1. $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, A = \mathbb{R},\ (1, \frac{1}{2}, \dots)$

   - Es gilt $1 \in B, \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} \leq 1$, daher folgt $\max B = \sup B = 1$
   - Sei $s \leq 0$, dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{N} : s \leq \frac{1}{n}$, also $s \in \bar{S}(B)$
     Sei $s > 0 \Rightarrow s > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{s}$, also $s \notin \bar{S}(B)$
     Es folgt $\bar{S}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid s \leq 0\}$ insbesondere $0 \in \bar{S}(B)$
     Ferner gilt $\forall\, s \in \bar{S}(B) : s \leq 0 \Rightarrow \underline{0} = \max \bar{S}(B) = \inf B$

2. $A = \mathbb{Q}, B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \wedge x^2 \leq 2\}$. Es gilt $0 = \min B = \inf B$, aber $\sup B$ existiert nicht in $\mathbb{Q}$

2.9 Reelle Zahlen

$x^2 = 2$ hat keine Lösungen in $\mathbb{Q}$. Allerdings können wir $\sqrt{2}$ "beliebig gut" durch $y \in \mathbb{Q}$ approximieren, das heißt $\forall\, \varepsilon > 0 \exists y \in \mathbb{Q} : 2 - \varepsilon \leq y^2 \leq 2 + \varepsilon$
Das motiviert die folgende Vorstellung:

1. $\mathbb{Q}$ ist "unvollständig"

2. $\mathbb{Q}$ ist "dicht" in $\mathbb{R}$

2.9.1 Vollständigkeitsaxiom (Archimedes)

Jede nach oben (unten) beschränkte Teilmenge hat ein Supremum oder Infimum.

2.9.2 Axiomatischer Standpunkt

Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$ (genannt Menge der reellen Zahlen) mit Addition, Multiplikation, Ordung, die die Definition eines Körper und das Vollständigkeitsaxiom erfüllt und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit "$\leq$" eine Ordung bildet.

2.9.3 Bemerkung

1. Bis auf Isomorphie gibt es höchstens ein solches $\mathbb{R}$, das heißt $\tilde{\mathbb{R}}$ ein weiteres System der reellen Zahlen ist, dann $\exists$ bijektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ die bezüglich Additoin, Multiplikation, Ordung eine Homomorphie ist.

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} :$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$
$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

2. $\mathbb{N}$ (und damit auch $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) lassen sich durch injektive Homomorphismus $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ einbetten

$$g(\tilde{0}_{\in \mathbb{N}}) = 0_{\in \mathbb{R}}$$
$$g(\tilde{n}_{\in \mathbb{N}} + 1) = g(n_{\in \mathbb{R}}) + 1$$
$$g(1_{\in \mathbb{N}}) = 1_{\in \mathbb{R}}$$

2.9.4 Konstruktiver Standpunkt

Wir können $\mathbb{R}$ ausgehend von $\mathbb{Q}$ konstruieren.

1. Methode der Abschnitte Jede reelle Zahl wird charakterisiert durch ein "rechts offenes, unbeschränktes Interval", dessen "rechte Grenze" die Zahl erstellt.

$$\mathbb{R} := \{A \subseteq \mathbb{Q} \begin{cases} A \neq \emptyset \\ x \in A, y \leq x \Rightarrow y \in A \\ \forall\, x \in A \exists y \in A, x < y \end{cases}$$

2. Mehtode der Cauchy-Folgen Jede reelle Zahl wird charaktierisiert als "Grenzwert" eine Klasser äquivalenter "Cauchy Folgen" aus $\mathbb{Q}$ (später)

2.9.5 Definition 1.37

- $$x \in \mathbb{R} \text{ heißt } \begin{cases} \text{positiv} & 0 < x \\ \text{nichtnegativ} & 0 \leq x \\ \text{negativ} & x < 0 \\ \text{nichtpositiv} x \geq 0 \end{cases}$$
- Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird definiert durch $|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
- Die Vorzeichen- oder Signumfunktion

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2.9.6 Satz 1.38

1. $|xy| = |x||y|$
2. $|x+y| \le |x| + |y|$
   Beweis:

$$
\begin{aligned}
|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 && (1)\\
\le |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y^2| && (2)\\
= (|x| + |y|)^2 \Rightarrow |x+y| \le ||x| + |y|| = |x| + |y| && (\square)
\end{aligned}
$$

3. $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \ge 0$

2.9.7 Satz 1.39

1. $||x| - |y|| \le |x - y|$
   Beweis:

$$
\begin{aligned}
|x| = |x - y + y| \le |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \le |x-y| && (3)\\
|y| = |y - x + x| \le |y-x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \le |x-y| && (4)\\
||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \le |x-y| && (\square)
\end{aligned}
$$

2. $$|x-y| \le \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x - \varepsilon \le y \le x + \varepsilon \\ y - \varepsilon \le x \le y + \varepsilon \end{cases}$$

   Beweis:

$$
|x-y| = \max\{x-y, y-x\} \le \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \le \varepsilon \\ y - x \le \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le y + \varepsilon \\ y - x \le \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow y - \varepsilon \le x \le y + \varepsilon \qquad (5)
$$

   Vertausche x und $y \Rightarrow x - \varepsilon \le x + \varepsilon$ $\square$

2.9.8 Definition 1.40

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a \le b$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Intervall

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[$ offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ rechts-halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ links-halboffenes Intervall
- $\varepsilon > 0, I_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon = B_\varepsilon(x)(\text{Kugel})\}$

2.9.9 Lemma 1.41

Es gilt $y \in I_\varepsilon(x) \Rightarrow \exists \delta > 0 : I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$

1. Beweis Sei $y \in I_\varepsilon(x) \Rightarrow |x - y| < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon - |x - y| > 0$ Wähle $0 < \delta < \varepsilon - |x - y|$. Es ist nun zu zeigen $I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$, das heißt $z \in I_\delta(y) \Rightarrow z \in I_\varepsilon(x)$. Es gilt

$$z \in I_\delta(y) \Rightarrow |z - y| < \delta \tag{6}$$
$$\Rightarrow |z - x| = |z - y + y - x| \leq |z - y| + |y - x| \leq \delta + |x - y| < \varepsilon \tag{7}$$
$$\Rightarrow z \in I_\varepsilon(x) \tag{$\square$}$$

2.9.10 Definition 1.42

A, B seien geordnete Mengen, $f : A \to B$ heißt:

- monoton $\begin{cases} \text{wachsed} & x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \\ \text{fallend} & x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \end{cases}$
- streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ \text{fallend} & x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{cases}$

1. Beispiel 1.43 $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}, x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend $\forall\, n \in \mathbb{N}$
   (a) Beweis Induktion + Axiom M0 $\square$

2.9.11 Lemma 1.44

Sei $M, N \subseteq \mathbb{R}, f : M \to N$ streng monoton und bijektiv. Dann ist f^{-1} streng monoton.

1. Beweis Wir betrachten den Fall f streng monoton wachsend. Seien \$y₁,y₂ ∈ N, y₁ < y₂,x₁ = f⁻¹(y₁), x₂ = f⁻¹(y₂).
   Behauptung $x_1 < x_2$ (sonst wäre \$x₁ ≥ x₂).
   Falls $x_1 > x_2 \xRightarrow{\text{streng monoton}} f(x_2) > f(x_2)$ **Widerspruch** zu $y_1 < y_2$
   Falls $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$ **Widerspruch** zur Annahme $y_1 < y_2$ $\square$

2.9.12 Definition 1.45 Produktzeichen

Für $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a^n := \prod_{j=1}^{n} a$ und für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$ $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

2.9.13 Satz 1.46

Es gilt $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R} \setminus \{0\}$),$n, m \in \mathbb{N}_0$ (beziehungsweise $\mathbb{Z}$)

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m =$ an m$
3. $(ab)^m = a^m b^m$

1. Beweis Zunächst f+r $n, m \in \mathbb{N}_0$ durch Indukton nach n, dann für $n, m \in \mathbb{Z}$ (mit Hilfe der Definition von a^{-n})

2.9.14 Definition 1.47

Sei $n, k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}$$

2.9.15 Lemma 1.48

Sei $k, n \in \mathbb{N}_0$

1. $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$
   $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ für $k \leq n$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

2.9.16 Satz 1.49

$\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

1. Beweis Induktion:
   - Induktionsanfang: $n = 0, (x+y)^0 = 1, \binom{0}{j} x^0 y^0 = 1$ nach Definition

- Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \tag{8}$$

$$\xRightarrow{\text{Induktonsvoraussetung}} (x+y)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j \tag{9}$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j+1}y^j + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^{j+1} \tag{10}$$

$$= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^{n+1-j}y^j + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}x^{n-i+1}y^i}_{\text{Substitution } i:=j+1} + \binom{n}{n}y^{n+1} \tag{11}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}\right)}_{\binom{n+1}{j}\text{nach Lemma 1.48}} x^{n+1-j}y^j + y^{n+1} \tag{12}$$

$$= \sum j = 0^{n+1}\binom{n+1}{j}x^{n+1-j}y^j \tag{$\square$}$$

2.9.17 Folgerung 1.50

1. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$

2. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$

1. Beweis: Setze in Binomische Formel $x = 1, y = 1$ beziehungsweise $y = -1$ $\square$