Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 4
Abgabetermin: Donnerstag, 17.11.2016, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Permutationen)*

(a) Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

in der symmetrischen Gruppe S_4. Bestimmen Sie $\tau \circ \sigma$, σ^{-1} und $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$.

(b) Bestimmen Sie alle $\sigma \in S_3$ mit $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Aufgabe 2. *(Restklassen)*

(a) Berechnen Sie im Ring $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $\qquad \bar{3} \cdot (\bar{4} + \bar{2}^{-1}), \qquad \bar{3}^{12354546767456}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^3 = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. *(Gruppenhomomorphismen)* Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen f Gruppenhomomorphismen sind:

(a) für jede Gruppe $(G, *)$ und jedes Element $g \in G$ die Abbildung $f\colon G \to G$, $h \mapsto g * h * g'$;

(b) für jede Teilmenge $N \subseteq M$ einer Menge M die Abbildung $f\colon S(N) \to S(M)$, $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ wobei $\tilde{\sigma}\colon M \to M$ durch $\tilde{\sigma}(m) = \sigma(m)$ falls $m \in N$ und $\tilde{\sigma}(m) = m$ falls $m \in M \setminus N$ gegeben ist;

(c) $f\colon \mathbb{Z} \mapsto S(\mathbb{Z})$, $x \mapsto m_x$, wobei $m_x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \mapsto a + x$ die Verschiebung um x bezeichnet.

Aufgabe 4. *(Untergruppen)* Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $*\colon G \times G \to G$ schränkt sich zu einer Verknüpfung

$$*_H\colon H \times H \to H, \qquad (a, b) \mapsto a * b$$

ein und $(H, *_H)$ ist eine Gruppe.

(b) Die Menge H ist nicht leer und für alle $a, b \in H$ gilt $a * b' \in H$.

(Sind diese äquivalenten Bedingungen an H erfüllt, so nennt man H eine *Untergruppe* von G).

Zusatzaufgabe 5. *(Endliche Gruppen als Untergruppen der symmetrischen Gruppen)* Sei $n \in \mathbb{N}$ und G eine Gruppe mit n Elementen. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe der S_n ist.