Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 2
Abgabetermin: Donnerstag, 03.11.2016, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Potenzmenge)*
Zeigen Sie: Ist M eine endliche Menge mit n Elementen, so ist $\mathcal{P}(M)$ eine endliche Menge mit 2^n Elementen. *Tipp:* Benutzen Sie vollständige Induktion.

Aufgabe 2. *(Relationen)*
Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob die Relation R auf der Menge M reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, eine Halbordnung, eine Totalordnung oder eine Äquivalenzrelation ist.

(a) $M = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

(b) $M = \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 = y^2\}$.

(c) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R = \{(X, Y) \in M \times M \mid \forall x \in X \exists y \in Y : x \leq y\}$.

(d) $M = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| < \infty\}$, $R = \{(X, Y) \in M \times M \mid |X| = |Y|\}$.

Aufgabe 3. *(Maximale Elemente)* Die Elemente der folgenden Teilmengen M von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ seien mittels der Mengeninklusion $\subseteq$ geordnet. Bestimmen Sie jeweils die maximalen, minimalen, kleinsten und größten Elemente, falls diese existieren.

(a) $M = \{\{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 6, 7\}\}$,

(b) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

(c) $M = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid (|X| = \infty) \wedge (X \neq \mathbb{N})\}$.

Aufgabe 4. *(Äquivalenzrelationen und Partitionen)*

(a) Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $P = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}\}$. Bestimmen Sie eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M, so dass P gerade die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ ist.

(b) Beweisen Sie: Sei M eine Menge und $P \subseteq \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ eine Partition von M, d. h. jedes Element von M liegt in genau einem Element von P. Dann gibt es genau eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M, so dass P gerade die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ ist.

Zusatzaufgabe 5. *(Anzahl von Teilmengen und Binomialkoeffizienten)* Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ rekursiv durch

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$
$$\binom{0}{k} = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } k \in \mathbb{N}$$

definiert. Die Fakultät $n!$ ist definiert durch $0! = 1$ und $n! = (n-1)!n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a)
$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n. \end{cases}$$

(b) Sei M eine endliche Menge der Kardinalität n. Dann besitzt M genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen der Kardinalität k.