UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEP. DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
LABORATÓRIO DE SISTEMAS CONTROLE
Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo (http://www.dca.ufrn.br/~meneghet)

ROTEIRO DE LABORATÓRIO

1. *Código da Experiência*: 03A

2. *Título*: Controle no Espaço de Estados: Realimentação de Estados (Seguidor de Referência)

3. *Objetivos*: Esta prática tem como objetivos:

- Aprimoramento dos conceitos envolvidos na teoria de espaço de estados;
- Introdução ao projeto de controladores no espaço de estados;
- Projeto de um seguidor de referência para o acompanhamento de entradas do tipo degrau.

4. *Equipamento Utilizado*: São necessários para realização desta experiência:

- Qualquer microcomputador com qualquer software, ou softwares, capaz de realizar a simulação dinâmica de um sistema de tanques acoplados.

5. *Introdução*:

O controle no Espaço de Estados é aplicável a sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas, que podem ser lineares ou não-lineares, invariantes ou variantes no tempo e com condições iniciais nulas ou não.

Considera-se que o estado de um sistema no instante t_0 é a quantidade de informação em t_0, que, junto com a entrada $u(t)$ em $t \geq t_0$, determina univocamente o comportamento do sistema para todo $t \geq t_0$.

Assim, a representação de um sistema dinâmico no espaço de estados pode ser descrita pelas seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \quad \text{Equação de Estados}$$
$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \quad \text{Equação de Saída}$$

Em que:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(t) \rightarrow$ vetor de estados. $\quad \mathbf{u}(t) \rightarrow$ vetor de entrada. $\quad \mathbf{y}(t) \rightarrow$ vetor de saída.

e $f(\bullet,\bullet,\bullet)$ e $g(\bullet,\bullet,\bullet)$ são funções não lineares.

Porém se o sistema for modelado com sendo linear e invariante no tempo (em inglês: **LTI**), o modelo em espaço de estados pode ser representado simplesmente pelas seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \text{Equação de Estado (dinâmica do sistema)}$$

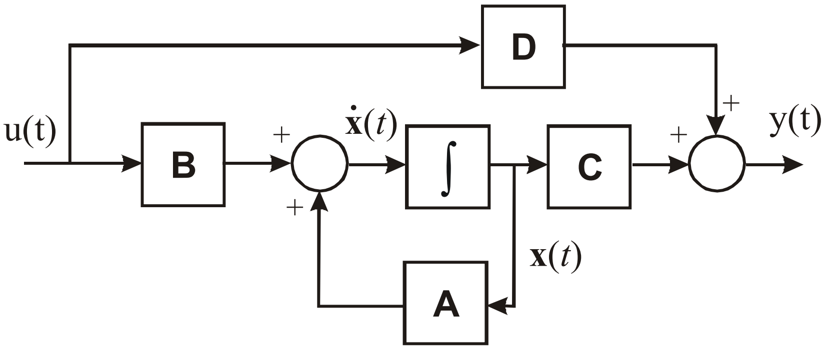
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \qquad \text{Equação de Saída (observação do sistema)}$$

Em que as matrizes; $\mathbf{A}_{nxn}$; $\mathbf{B}_{nxp}$; $\mathbf{C}_{qxn}$ e $\mathbf{D}_{qxp}$ contém os parâmetros que modelam a dinâmica do sistema

5.1. Realimentação de Estado

A ideia básica da realimentação de estados consiste em alocar os polos de malha fechada (autovalores da matriz dinâmica), modificando, assim, a dinâmica do sistema.

Dada uma representação em variáveis de estado de um sistema; $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + du(t) \end{cases}$:



Usando realimentação de estado, cada variável de estado é multiplicada por um ganho e realimentada para o terminal de entrada, ou seja:

$$u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t)$$

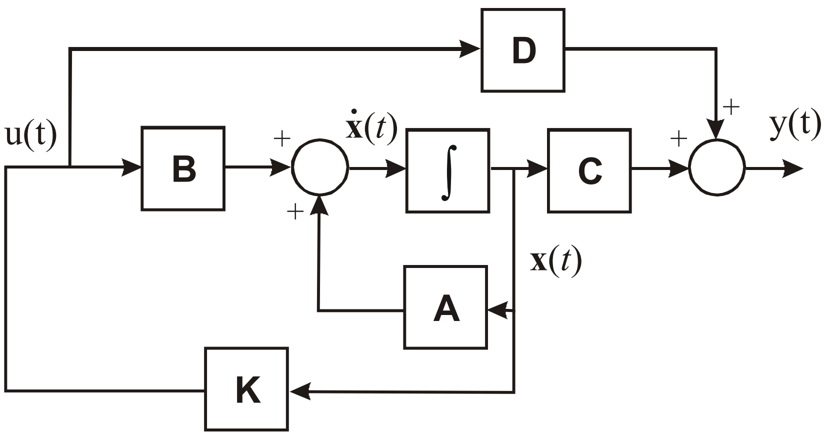
Em que: $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_n]$ é o vetor de ganhos de realimentação.

Assim, temos:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t) \end{cases} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t)$$

OBS: Devemos ter acesso a todos os estados do sistema.



<u>**Teorema:**</u> Se (**A**,**B**,**C**,d) for controlável, usando $u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t)$ podemos escolher arbitrariamente os autovalores de $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})$.

5.2. Seguidores de Referência para Entradas do Tipo Degrau

Considere o modelo em espaço de estados, LTI e causal, para um dado sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Se definirmos o erro de rastreamento como sendo: $e(t) = y(t) - r(t)$, temos que:

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{r}(t) = \dot{y}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)$$

Então, podemos definir novas variáveis: $\begin{cases} \mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}} \\ w = \dot{u} \end{cases}$ e novas equações de estado $\begin{matrix} \dot{e} = \mathbf{C}\mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}w \end{matrix}$.

Daí, Podemos juntar as duas novas equações de estado em uma única:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} w \Leftrightarrow$$

Se o novo sistema ($\mathbf{A_a}$, $\mathbf{B_a}$), comumente chamado de sistema aumentado, for controlável, então, existe uma lei de controle por realimentação de estado, da forma; $w = \mathbf{k}_a\xi \Rightarrow w = k_1 e + \mathbf{k_2 z}$, tal que os polos do sistema aumentado podem ser posicionados arbitrariamente.

Desde que os polos sejam alocados na região de estabilidade, o erro de rastreamento será estável. Assim, o objetivo de rastreamento assintótico, com erro em regime nulo, será alcançado.

O sinal de controle $u(t)$ é obtido da seguinte expressão:

$$u(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau = k_1 \int_0^t e(\tau)d\tau + \mathbf{k_2 x}(t)$$

na qual, os valores dos ganhos k_1 e $\mathbf{k_2}$ podem ser obtidos através da fórmula de Ackermman.

> <u>**Teorema:**</u> Se ($\mathbf{A_a}$, $\mathbf{B_a}$) for controlável, então usando uma lei de controle $w = \mathbf{k}_a\xi \Rightarrow w = k_1 e + \mathbf{k_2 z}$ podemos escolher arbitrariamente os autovalores de $\left(\mathbf{A_a} + \mathbf{B_a K_a}\right)$.

- <u>*Fórmula de Ackermann para Determinação da Matriz de Ganhos da Realimentação do Sistema Aumentado* $\mathbf{K_a}$</u>

1- Formar $\Delta(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$ com os pólos desejados para o seguidor de referências.

2- Calcular $\mathbf{K_a}$ da seguinte forma: $\mathbf{K_a} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U_a^{-1}} q_c(\mathbf{A_a})$

Em que: $\begin{cases} \mathbf{U_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_a} & \mathbf{A_a B_a} & \mathbf{A_a^2 B_a} & \ldots \mathbf{A_a^{n-1} B_a} \end{bmatrix} \\ q_c(\mathbf{A_a}) = \mathbf{A_a^n} + a_1\mathbf{A_a^{n-1}} + \ldots + a_n\mathbf{I} \end{cases}$

5.3. Implementação de Seguidores de Referência para Entradas do Tipo Degrau

Uma vez determinado o ganho do sistema aumentado ($\mathbf{K_a}$), é preciso determinar os ganhos (k_1 e $\mathbf{k_2}$) necessários para o calculo da ação de controle $u(t) = k_1 \int_0^t e(\tau)d\tau + \mathbf{k_2 x}(t)$. Temos simplesmente que:

$$\mathbf{K_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_1} \mid \mathbf{k_2} \end{bmatrix}$$

A implementação do seguidor consiste em obter o sinal de controle $u(t)$ conforme figura a seguir.

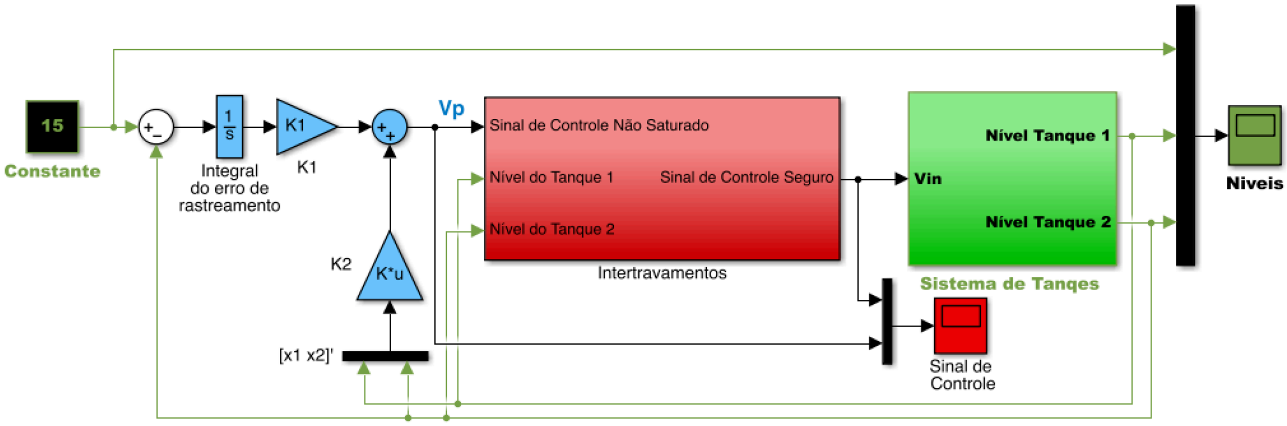


Figura 1. Implementação, em SIMULINK/MATLAB, de um Seguidor de Degraus para o Sistemas de Tanques.

<u>Obs.:</u> *É importante notar que no início dos cálculos deste roteiro, para obtenção dos ganhos, convencionou-se que:* $e(t) = y(t) - r(t)$*. Porém, em um esquema convencional de controle por realimentação, como o da Figura 1, temos:* $e(t) = r(t) - y(t)$*. Por isso, precisamos inverter o sinal de* k_1*. Outra opção é seguir a convenção adotado nos cálculos apresentados na videoaula.*

6. <u>*Desenvolvimento*</u>:

Conhecendo-se as EDOs que descrevem as dinâmicas dos tanques 1 e 2 (configuração #2):

$$\boxed{\dot{L}_1 = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2L_{10}}}L_1 + \frac{K_m}{A_1}V_P} \text{ e } \boxed{\dot{L}_2 = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2L_{20}}}L_2 + \frac{a_1}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2L_{10}}}L_1},$$

Em que:

- $g = 981$;
- $A_1 = A_2 = 15{,}5179$;
- $a_1 = 0{,}17813919765$; $a_2 = a_1$;
- $L_{20} = 15$; $L_{10} = \frac{a_2^2}{a_1^2}L_{20}$;
- $K_m = 3 \times 4{,}5 = 13{,}5$.

Pede-se:

1º. Encontre uma representação em espaço de estados, onde L_1 e L_2 sejam os estados do modelo;

2º. Projete um seguidor de referências, para entradas do tipo degrau, com base no modelo obtido (A escolha dos polos do seguidor faz parte do projeto, e deve ficar clara no relatório).

3º. Examine e descreva em seu relatório o comportamento do sistema para diferentes conjuntos de polos do seguidor: