UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEP. DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
LABORATÓRIO DE SISTEMAS CONTROLE
Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo (http://www.dca.ufrn.br/~meneghet)

ROTEIRO DE LABORATÓRIO

1. *Código da Experiência*: 03B

2. *Título*: Controle no Espaço de Estados: Observadores de Estado

3. *Objetivos*: Esta prática tem como objetivos:

- Introdução do conceito de espaço de estados;
- Conceituação de observadores de estado;
- Projeto e implementação de observadores de estados.

4. *Equipamento Utilizado*: São necessários para realização desta experiência:

- Qualquer microcomputador com qualquer software, ou softwares, capaz de realizar a simulação dinâmica de um sistema de tanques acoplados.

5. *Introdução*

Sabendo-se que o controle no espaço de estados é aplicável a sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas, que podem ser lineares ou não-lineares, invariantes ou variantes no tempo e com condições iniciais não-nulas, se um dado sistema for **controlável**, podemos realizar controle no espaço de estados através de uma lei de controle, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{Kx}(t)$, na qual o sinal de controle, $\mathbf{u}(t)$, é calculado como sendo uma combinação linear dos valores dos estados do sistema, $\mathbf{x}(t)$.

Esta estratégia de controle é chamada de realimentação de estados, sendo a combinação linear dos estados calculada em função da matriz de ganhos da realimentação de estados $\mathbf{K}$. Que deve ser determinada de forma que o sistema em malha fechada seja **estável**. Porém, para calcular o sinal de controle também será necessário realizar a leitura de cada variável de estado do sistema.

No entanto, por diversos motivos, nem sempre é possível medir todos os estados de um sistema. Como não é possível realizar a realimentação de estados sem as medidas dos estados, quando não for possível medi-los, será preciso estimá-los. Se um dado sistema for **observável**, podemos usar um observador de estados para, com base em valores das entradas, $\mathbf{u}(t)$, e das saídas, $\mathbf{y}(t)$, determinar estimativas, $\hat{\mathbf{x}}(t)$, dos estados, $\mathbf{x}(t)$, deste sistema.

5.1. *Algumas Propriedades Importantes*

Três propriedades muito importantes para o estudo de sistemas de controle no espaço de estados são: Estabilidade, Controlabilidade e Observabilidade.

5.1.1. Estabilidade

- **Teorema**: Um sistema é estável se quando $u(t) = 0$, para todo $x(0)$, temos que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \mathbf{0}$
- **Corolário:** Um sistema é estável se todos os autovalores da matriz **A** apresentam parte real negativa.

5.1.2. Controlabilidade

- **Definição:** O sistema (**A**,**B**,**C**,**D**) é controlável se, quaisquer que sejam $x(0)$ e $x(T)$, existe $u(t)$ $0 \le t \le T$ que transfere o estado $x(0)$ para o estado $x(T)$ em um tempo finito.
- **Teorema:** O sistema (**A**,**B**,**C**,**D**) é controlável se, e somente se, o posto da matriz de controlabilidade $\mathbf{U} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ é igual a ordem do sistema ($\rho(\mathbf{U}) = n$).

5.1.3. Observabilidade

- **Definição:** O sistema (**A**,**B**,**C**,**D**) é observável se para todo $x(0)$, o conhecimento da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ em um tempo finito é suficiente para determinar $x(t)$.
- **Teorema:** O sistema (**A**,**B**,**C**,**D**) é observável se e somente se o posto da matriz de observabilidade $\mathbf{V} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \ldots \quad \mathbf{CA}^{n-1}]^T$ é igual a ordem do sistema ($\rho(\mathbf{V}) = n$).

5.2. Observadores de Estado

O observador de estados consiste em um mecanismo (normalmente um algoritmo) para estimação dos estados do sistema. É uma solução útil quando os estados reais da planta não estão accessíveis, situação muito comum na prática.

Seja: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$, conhecendo-se **A, B** e **C**, e a medição de $y(t)$ e $u(t)$, constrói-se o estimador:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\big(y(t) - \hat{y}(t)\big) + \mathbf{B}u(t) \\ \hat{y}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}; \quad (\textit{Estimador Assintótico})$$

em que: $\mathbf{L} = [l_1 \quad l_2 \quad \ldots \quad l_n]^T$ é a matriz de ganhos do observador de estados.

- *Erro de Estimação*

O erro entre o valor real, $\mathbf{x}(t)$, e estimado, $\hat{\mathbf{x}}(t)$, dos estados do sistema é conhecido como erro de estimação (ou erro de observação), $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, sendo dado por; $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$. Derivando-se, temos:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)] - [\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\big(y(t) - \hat{y}(t)\big) + \mathbf{B}u(t)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\big(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\big) - \mathbf{LC}\big(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\big)$$

ou, simplesmente: $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\tilde{\mathbf{x}}(t)$

Para que $\lim_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ é necessário que os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ sejam estáveis, ou seja, tenham parte real negativa.

Teorema: Se (**A**,**B**,**C**,**D**) for observável, então um estimador de estado assintótico pode ser construído.

- *Fórmula de Ackermann para Determinação da Matriz de Ganhos do Observador* **L**

1- Formar $\Delta(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$ com os pólos desejados para o observador.

2- Calcular **L** da seguinte forma: $\mathbf{L} = \mathrm{q}_\mathrm{L}(\mathbf{A})\mathbf{V}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}^\mathrm{T}$

onde: $\begin{cases} \mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{CA} & \mathbf{CA}^2 & \ldots & \mathbf{CA}^{n-1}\end{bmatrix}^\mathrm{T} \\ q_L(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_n\mathbf{I} \end{cases}$

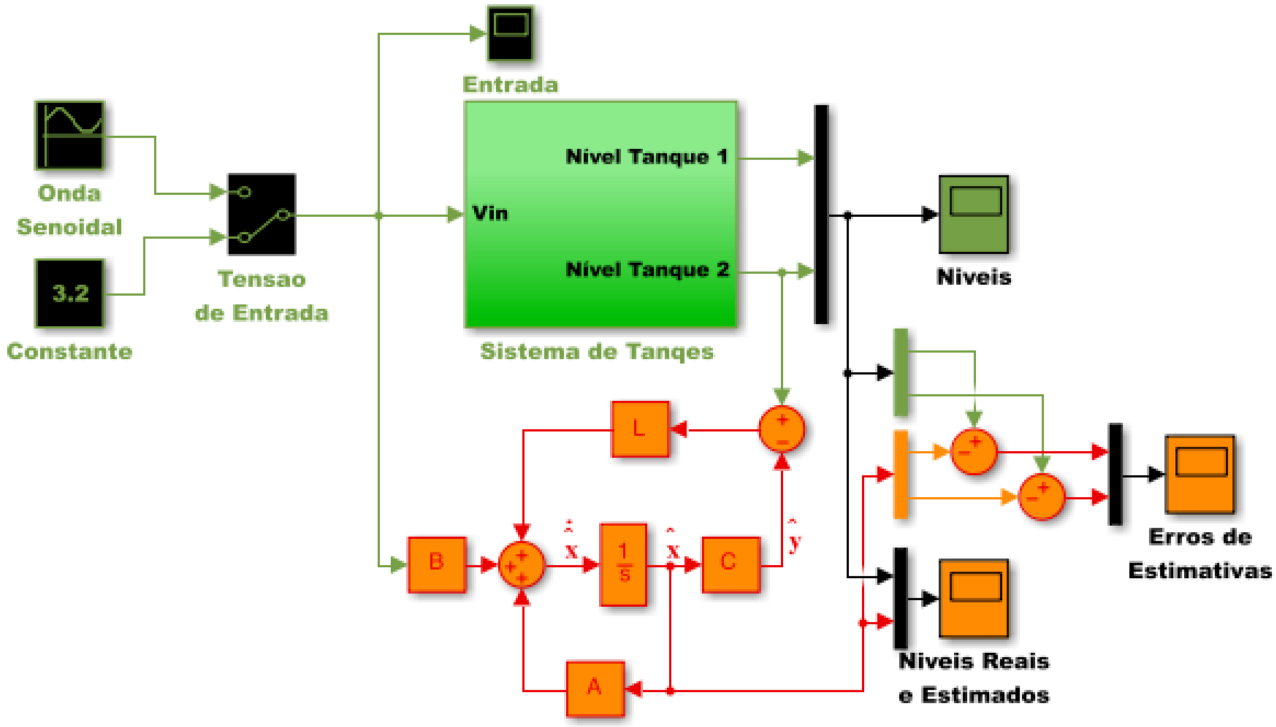

Figura 1. Observador de Estados para o Sistemas de Tanques Implementado em SIMULINK/MATLAB.

6. *Desenvolvimento*:

1º. Utilizando-se a representação em espaço de estados, na qual L_1 e L_2 sejam os estados do modelo, implemente um observador de estados para o sistema em malha aberta;

2º. Projete observadores de estados com base no modelo obtido (A escolha dos polos do observador faz parte do projeto, e deve ficar clara no relatório).

3º. Examine e descreva em seu relatório o comportamento dos observadores de estado para diferentes conjuntos de polos: