2024 秋《机器学习概论》作业 1 解答

舒英特

2024 年 10 月 16 日

满分 100 分，每道题 25 分（尝试解答给 1 分，答案正确每小题给 8 分），中文或英文作答均可。手写答案建议下次用电子版，看不清的按错误处理。

第 1 题

(a)

$\eta = \log \lambda$
$T(y) = y$
$a(\eta) = \lambda = e^{\eta}$
$b(y) = \frac{1}{y!}$

(b)

由于 $E[T(y);\eta] = \lambda = e^{\eta}$，所以规范响应函数是 e^{η}。

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log p(y^{(i)}|x^{(i)};\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log\left(\frac{1}{y!}\exp(\eta y - e^{\eta})\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log\left(\frac{1}{y!}\exp(y\theta^T x^{(i)} - e^{\theta^T x^{(i)}})\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\log\frac{1}{y!} + y\theta^T x^{(i)} - e^{\theta^T x^{(i)}}\right) \\
&= (y - e^{\theta^T x^{(i)}}) x_j
\end{aligned}$$

因此梯度上升规则是：$\theta_j = \theta_j + \alpha(y - e^{\theta^T x^{(i)}}) x_j$ 对于所有 j。

第 2 题

(a)

引理：假如随机变量 $Y \sim p(y;\eta)$ 且 $l(\eta) = \log p(y;\eta)$，有 $E[l'(\eta)] = 0$。

证明：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\ell'(\eta)] &= \int_{\mathcal{D}} \frac{p'(y;\eta)}{p(y;\eta)} p(y;\eta) dy \\
&= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial\eta} p(y;\eta) dy \\
&= \frac{\partial}{\partial\eta} \int_{\mathcal{D}} p(y;\eta) dy \\
&= \frac{\partial}{\partial\eta}(1) = 0
\end{aligned}$$

可以看出对于以上情况，$l'(\eta) = Y - a(\eta)$，因此 $E[Y - a(\eta)] = 0$，即可证原题。

(b)

引理：$\mathbb{E}[(\ell'(\eta))^2] = -\mathbb{E}[\ell''(\eta)]$

证明：

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \mathbb{E}[(\ell'(\eta))^2] \\
&= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{p'(y;\eta)}{p(y;\eta)}\right)^2 p(y;\eta) dy \\
&= \int_{\mathcal{D}} \frac{(p'(y;\eta))^2}{p(y;\eta)} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= -\mathbb{E}[\ell''(\eta)] \\
&= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{p''(y;\eta)}{p(y;\eta)} - \frac{(p'(y;\eta))^2}{(p(y;\eta))^2}\right) p(y;\eta) dy \\
&= -\int_{\mathcal{D}} p''(y;\eta) dy + \int_{\mathcal{D}} \frac{(p'(y;\eta))^2}{p(y;\eta)} dy \\
&= 0 + \int_{\mathcal{D}} \frac{(p'(y;\eta))^2}{p(y;\eta)} dy
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\ell'(\eta))^2] &= -\mathbb{E}[\ell''(\eta)] \\
\mathbb{E}[(Y - a'(\eta))^2] &= -\mathbb{E}[-a''(\eta)] \\
\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] &= a''(\eta) \\
\text{Var}(Y) &= a''(\eta)
\end{aligned}$$

(c)

负对数似然是：

$$\begin{aligned}
J(\theta) &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log p(y^{(i)};\eta) \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\log b(y^{(i)}) + y^{(i)}\theta^T x^{(i)} - a(\theta^T x^{(i)})\right)
\end{aligned}$$

因此梯度是：

$$\nabla_\theta J(\theta) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(y^{(i)} x^{(i)} - a'(\eta) x^{(i)}\right)$$

Hessian 矩阵是：

$$
\begin{aligned}
H(J)(\theta) &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -a''(\eta) x^{(i)} x^{(i)T} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(y^{(i)}|x^{(i)}) x^{(i)} x^{(i)T}
\end{aligned} \tag{1}
$$

因此

$$u^T H(J)(\theta) u = 1/n \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(y^{(i)}|x^{(i)})(u^T x^{(i)})^2 \geq 0$$

所以是半正定的。

第 3 题

(a)

答案是：

$$J(\Theta) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left((X\Theta - Y)^T (X\Theta - Y)\right)$$

验证略。

(b)

可以验证：

$$\nabla J(\Theta) = X^T X \Theta - X^T Y$$

梯度为 0，求得：

$$\Theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

与一般的最小二乘法的闭式解相同。

(c)

相同：

解释 1：单变量的最小二乘法的闭式解为：

$$\theta_j = (X^T X)^{-1} X^T y_j$$

由于 $Y = [y_1, \cdots, y_p]$, 则多变量的闭式解为

$$\Theta = (X^T X)^{-1} X^T [y_1, \cdots, y_p] = [\theta_1, \cdots, \theta_p]$$

因此二者相同。

解释 2：由于多变量的最小二乘法可以将 Θ 拆成多个行：

$$J(\Theta) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=1}^{m}(\theta_j x^{(i)} - y_j^{(i)})^2)$$

每一个 j 可以看作是一个独立的单变量最小二乘法，彼此之间没有联系，可以分开优化到最小值，则多变量的最小二乘法也会优化到最小值，二者的取值是相同的。

第 4 题

(a)

（必须用 Bayes 定理）原式

$$= \frac{p(t^{(i)}=1|x^{(i)})p(y^{(i)}|t^{(i)}=1,x^{(i)})}{p(t^{(i)}=1|x^{(i)})p(y^{(i)}=1|t^{(i)}=1,x^{(i)})+p(t^{(i)}=0|x^{(i)})p(y^{(i)}=1|t^{(i)}=0,x^{(i)})} = 1$$

(b)

由于

$$\begin{aligned} p(y^{(i)}=1|x^{(i)}) &= p(t^{(i)}=1|x^{(i)})p(y^{(i)}=1|t^{(i)}=1,x^{(i)}) \\ &\quad + p(t^{(i)}=0|x^{(i)})p(y^{(i)}=1|t^{(i)}=0,x^{(i)}) \\ &= \alpha \cdot p(t^{(i)}=1|x^{(i)}) \end{aligned}$$

可证。

(c)

由于：

$$\begin{aligned} h(x^{(i)}) &= p(t^{(i)}=1|x^{(i)})p(y^{(i)}=1|t^{(i)}=1,x^{(i)}) \\ &\quad + p(t^{(i)}=0|x^{(i)})p(y^{(i)}=1|t^{(i)}=0,x^{(i)}) \\ &= p(t^{(i)}=1|x^{(i)}) \cdot \alpha + p(t^{(i)}=0|x^{(i)}) \cdot 0 \end{aligned}$$

而：$y^{(i)}=1 \Rightarrow t^{(i)}=1$，因此原式子 $=\alpha$。