Eine Einführung in die Differentialrechnung

Studienarbeit

Name des Studiengangs:
Life Science Engineering
Fachbereich 2

vorgelegt von:
Hendrik Schroeder
s0564364@htw-berlin.de

Wissenschaftliches Arbeiten mit LaTeX
Hochschule für Technik und Wirtschaft

Berlin

Moin

Gutachter: Marcel

Datum:
08. Februar, 2020

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Kapitel 1

Ableitungsbegriff

Die Differentialrechnung ist ein Gebiet der Mathematik, welches zusammen mit der Integralrechnung dem Begriff der Infinitesimalrechnung untergeordnet wird und somit zur Analysis gehört. Die Differentialrechnung ist im Wesentlichen auf die beiden Mathematiker Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz zurückzuführen [WS05, Seite 188]. Die durch Newton und Leibniz definierte lokale Änderungsrate, auch Ableitung oder momentane Änderungsrate genannt steht dabei im Mittelpunkt der Differentialrechnung.

1.1 Differenzenquotient

Der Begriff der Ableitung basiert auf dem Anstieg der Tangente an einem Punkt $P(x_0, f(x_0))$ [Ste15, Seite 141].

Bei einer beliebigen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit der Gleichung $y = f(x)$ und $x \in D \setminus \{x_0\}$ lässt sich die mittlere Änderungsrate, also der Anstieg in einem Intervall $I = [x_0, x_0 + \Delta x]$ über den Quotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} \quad (1.1)$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.2)$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.3)$$

berechnen.

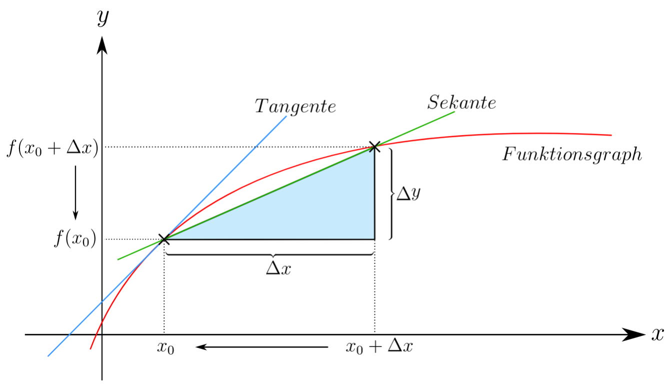

Abbildung 1.1: Approximation der Tangente durch Verringerung von Δx [Joh15]

Um nun den Anstieg der Tangente am Punkt $P(x_0, f(x_0))$ ermitteln zu können und nicht den Anstieg einer Sekante durch die Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ der Funktion muss Δx oder gegen Null gehen oder anders gesagt x gegen x_0 gehen (siehe Abb. 1.1).

1.2 Grenzwerte und Differentialquotient

Das Annähern einer Funktion an einen bestimmten Wert in der Umgebung der Stelle wird als Grenzwert bezeichnet. Wenn c eine Konstante ist und die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existieren, gelten folgende Grenzwertsätze [Ste15, Seite 141 ff.]:

Tabelle 1.1: Auflistung wichtiger Grenzwertsätze

Name	Grenzwertsatz
Summenregel	$\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
Differenzenregel	$\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
Konstantenregel	$\lim\limits_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$
Produktregel	$\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
Quotientenregel	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ für $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
Schachtelungssatz	wenn $\lvert f(x) \rvert \leq \lvert g(x) \rvert$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, dann ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$
Kettenregel	wenn $g(b)$ stetig ist, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ und $\lim\limits_{z \to b} f(z) = c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$, dann gilt $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$

Die in Tabelle 1.1 aufgelisteten Grenzwertsätze sind lediglich die Wichtigen. Aus diesen folgen weitere Regeln. So ergibt sich beispielsweise aus der Produktregel und der Annahme $f(x) = g(x)$ für $n \in \mathbb{N}^+$

$$\lim_{x \to a} [(x)]^n = [\lim_{x \to a} (x)]^n \tag{1.4}$$

die Potenzregel.
Der Begriff des Grenzwerts lässt sich nun auf den Differenzenquotient

$$f'(x) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := \frac{df}{dx} \tag{1.5}$$

übertragen. Da die Differenzen nun infinitesimal kleine Größen annehmen, die sogenannten Differentiale, wird der Ausdruck Differentialquotient $\frac{df}{dx}$ eingeführt. Dieser beschreibt die momentane Änderungsrate im Punkt $P(x_0, f(x_0))$.

Geometrisch gesehen beschreibt dies gerade den Anstieg der Tangente in dem Punkt $P(x_0, f(x_0))$ [FRI20, Seite 183]. Falls dieser Differentialquotient existiert wird eine Funktion differenzierbar in x_0 genannt [WS05, Seite 189]. Oft wird die Differenzierbarkeit einer Funktion an einer bestimmten Stelle auch über die Existenz eines Anstiegs einer Sekante

$$m_S = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1.6}$$

durch die beiden Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_0+h, f(x_0+h))$ definiert, wobei $h \in \mathbb{R}$ ist und x_0+h im Intervall $I = [x_0, x]$ liegt. Die daraus resultierende Sekantengleichung [Dei17, Seite 99 f.]

$$S_h(x) = f(x_0) + m_S \cdot (x - x_0) \tag{1.7}$$

approximiert die Tangente [WS05, Seite 192]

$$T(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) \tag{1.8}$$

am Punkt $P(x_0, f(x_0))$, wenn der Anstieg bei h gegen Null konvergiert [FRI20, Seite 184].

Kapitel 2

Berechnungen

2.1 Ableitungsfunktion über Differenzenquotient

Die obige Definition einer Ableitung ist abhängig von einem bestimmten Punkt, in dem Fall $P(x_0, f(x_0))$. Der Begriff der Ableitungsfunktion $f'(x)$ erweitert dies und beschreibt die Funktion, welche sich aus der Gesamtheit der Ableitungen des Definitionsbereichs D von f ergibt [Bor94, Seite 19].

$$f' : x \to f'(x), x \in D \tag{2.1}$$

Der Definitionsbereich Ω von $f'(x)$ ist daher gleichbedeutend mit den Stellen, an denen die Funktion differenzierbar ist. Die Ableitungsfunktion ist geometrisch betrachtet die Funktion, welche allen differenzierbaren Stellen aus dem Definitionsbereich der Funktion die Anstiege dieser zuordnet. Die ursprüngliche Berechnung der Ableitungsfunktion folgt also über die Definition des Differenzenquotienten (siehe Formel 1.2), wobei sich Δx dem Wert Null annähert.

Beispiele

1. Ableitung von $f(x) = x$:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta x}{\Delta y} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{(x_0 + \Delta x) - (x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{x_0 - x_0 + \Delta x}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1
\end{aligned}$$

2. Ableitung von $f(x) = x^2 + 5x - 9$:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta x}{\Delta y} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 + 5 \cdot (x_0 + \Delta x) - 9) - (x_0^2 + 5 \cdot x_0 - 9)}{\Delta x} \\
&= \frac{x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 + 5 \cdot x_0 + 5 \cdot \Delta x - 9 - x_0^2 - 5 \cdot x_0 + 9}{\Delta x} \\
&= \frac{2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 + 5 \cdot \Delta x}{\Delta x} \\
&= 2 \cdot x_0 + \Delta x + 5
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende Ableitungsfunktion:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cdot x_0 + \Delta x + 5 = 2 \cdot x_0 + 5 \tag{2.2}$$

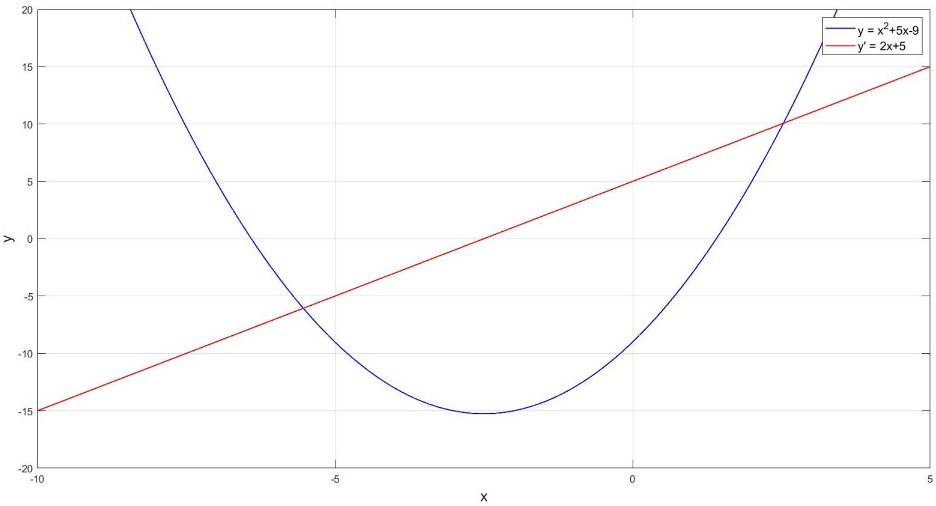

Abbildung 2.1: Funktion $f(x) = x^2 + 5x - 9$ und ihre Ableitungsfunktion $f'(x) = 2 \cdot x + 5$

3. Ableitung von $f(x) = \ln x$ unter der Nutzung der Substitution $n = \frac{\Delta x}{x_0}$, woraus $\Delta x = n \cdot x_0$ und $\frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_0}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta x}{\Delta y} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)$$

$$= \ln\left((1 + \frac{\Delta x}{x_0})^{\frac{1}{\Delta x}}\right)$$

$$= \ln\left((1 + n)^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_0}}\right)$$

$$= \ln\left(((1 + n)^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{x_0}}\right)$$

$$= \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left((1 + n)^{\frac{1}{n}}\right)$$

Somit ergibt sich folgende Ableitungsfunktion:

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left(\lim_{\Delta x \to 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{x_0} \cdot \ln(e) = \frac{1}{x_0}$$

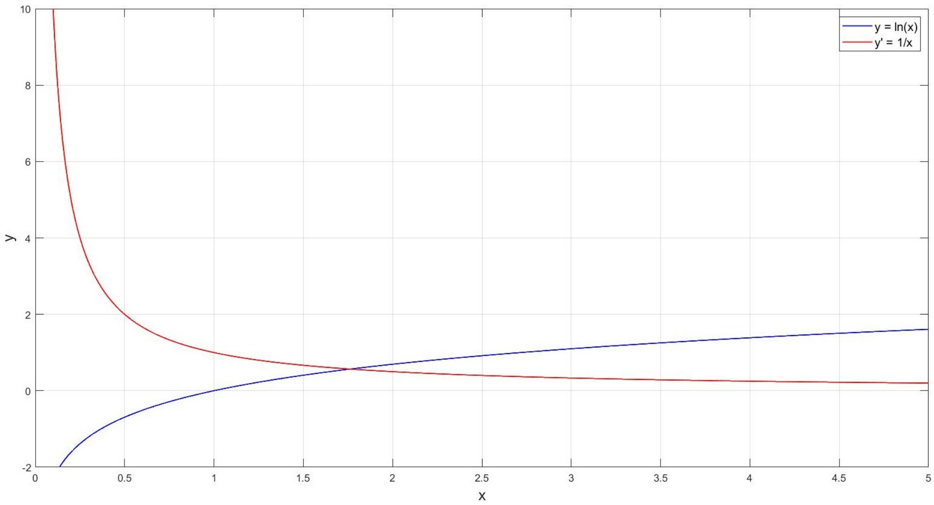

Abbildung 2.2: Funktion $f(x) = \ln(x)$ und ihre Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{1}{x}$

2.2 Ableitungsregeln

Aus der ursprünglichen Methode der Berechnung von Ableitungsfunktionen und den Grenzwertsätzen ergeben sich für die differenzierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ folgende Ableitungsregeln [WS05, Seite 192]

Tabelle 2.1: Auflistung wichtiger Ableitungsregeln

Name	Ableitungsregel
Konstante Funktion	$[a]' = 0$ für $\alpha \in \mathbb{R}$
Faktorregel	$[\alpha \cdot f(x)]' = \alpha \cdot f'(x)$
Linearität	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g^2(x)} \cdot g'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Kettenregel	$[f \circ g]'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Weitere Regeln, wie beispielsweise die Reziprokenregel

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{f(x) \cdot 0 - f'(x) \cdot 1}{f^2(x)} = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

ergeben sich direkt aus den in Tabelle 2.1 aufgelisteten Ableitungsregeln.

Beispiele

1. Konstante Funktion:

$$[5]' = 0$$

2. Faktorregel

   (a) Erste Ableitung:

$$\begin{aligned} \left[8 \cdot x^2\right]' &= 8 \cdot \left[x^2\right]' \\ &= 8 \cdot 2 \cdot x \\ &= 16 \cdot x \end{aligned}$$

   (b) Zweite Ableitung:
   Auch die Ableitungsfunktion kann, sofern sie differenzierbar ist,

abgeleitet werden. Höhere Ableitungen werden mit ihrer Ordnung assoziiert. Es haben sich für die Ordnung 2 die Bezeichnungen

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} := f'[f'(x)] \tag{2.3}$$

eingebürgert.

$$\begin{aligned} \left[8 \cdot x^2\right]'' &= [16 \cdot x]' \\ &= 16 \cdot [x]' \\ &= 16 \cdot 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

3. Summenregel:

   (a) Erste Ableitung:

$$\begin{aligned} \left[x^5 + 2 \cdot x\right]' &= \left[x^5\right]' + [2 \cdot x]' \\ &= \left[x^5\right]' + 2 \cdot [x]' \\ &= 5 \cdot x^4 + 2 \end{aligned}$$

   (b) Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} \left[x^5 + 2 \cdot x\right]'' &= \left[5 \cdot x^4 + 2\right]' \\ &= \left[5 \cdot x^4\right]' + [2]' \\ &= 5 \cdot \left[x^4\right]' + [2]' \\ &= 5 \cdot 4 \cdot x^3 + 0 \\ &= 20 \cdot x^3 \end{aligned}$$

4. Produktregel:

   (a) Erste Ableitung:

$$\begin{aligned} &\left[x^2 \cdot \sin(x)\right]' \\ &\qquad = \left[x^2\right]' \cdot \sin(x) + x^2 \cdot [\sin(x)]' \\ &\qquad = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

   (b) Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} \left[x^2 \cdot \sin(x)\right]'' &= \left[2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)\right]' \\ &= 2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) + 2x \cdot \cos(x) + x^2 \cdot - \sin(x) \\ &= 2 \cdot \sin(x) + 4x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

5. Quotientenregel:

   (a) Erste Ableitung:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1+x}{4x}\right]' &= \frac{4x\cdot 1-((1+x)\cdot 4)}{16x^2}\\ &= \frac{4x-4-4x}{16x^2}\\ &= \frac{-4}{16x^2}\\ &= \frac{-1}{4x^2}\end{aligned}$$

   (b) Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1+x}{4x}\right]'' &= \left[\frac{-1}{4x^2}\right]'\\ &= \frac{4x\cdot 0-(-1\cdot 2\cdot 4x)}{16x^4}\\ &= \frac{8x}{16x^4}\\ &= \frac{1}{2x^3}\end{aligned}$$

6. Kettenregel:

   (a) Erste Ableitung:

$$\begin{aligned}\left[(x^5+6)^4\right]' &= 4\cdot(x^5+6)^3\cdot(5x^4+0)\\ &= 20x^4\cdot(x^5+6)^3\end{aligned}$$

   (b) Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}\left[(x^5+6)^4\right]'' &= \left[20x^4\cdot(x^5+6)^3\right]'\\ &= 80x^3\cdot(6+x^5)^3+20x^4\cdot 3\cdot(6+x^5)^2\cdot 5x^4\\ &= 80x^3\cdot(6+x^5)^3+300x^8\cdot(6+x^5)^2\end{aligned}$$

Kapitel 3

Hauptsätze und weitere Themen der Differentialrechnung

Fundamentalsatz der Analysis

Der Fundamentalsatz der Analysis besteht aus zwei Teilen, welche die Antiableitung, auch Stammfunktion genannt, beschreiben.

1. Erster Teil [Ste15, Seite 392] Wenn eine Funktion $f(x)$ im Intervall $P \subset \mathbb{R}$ stetig ist, so ist die Funktion

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{3.1}$$

   unter der Voraussetzung, dass $a \in P$ ist, stetig differenzierbar und die sogenannte Stammfunktion von $f(x)$. Dies bedeutet, dass unabhängig von a die Ableitung $G'(x) = f(x)$ ist. Der Vorgang der Stammfunktionsbestimmung wird unter dem Begriff Integration aufgefasst.

2. Zweiter Teil [Ste15, Seite 396] Wenn eine Funktion f(x) stetig im Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \tag{3.2}$$

   für die Stammfunktion G(x).

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, dass eine im Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ und $a, b \in \mathbb{R}$ stetige und differenzierbare Funktion $f(x)$ mindestens für einen Wert Λ definiert ist, welche folgende Eigenschaft aufweist

[Dei17, Seite 106]

$$f'(\Lambda) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3.3}$$

Einfach gesagt gibt es also immer mindestens einen Punkt in dem Intervall $[a, b]$, welcher die gleiche Steigung, wie eine Sekante durch die Punkte $P(a, f(a))$ und $Q(b, f(b))$ aufweist.

Weiterführende Themen der Differentialrechnung

Da eine Einführung nur einen marginalen Anteil an Grundlagen der Differentialrechnung abdecken kann, werden als Ausblick ein paar weiterführende Themen und Bereiche, welche Ableitungen nutzen, benannt.

- Taylorreihen
- gewöhnliche Differentialgleichungen
- Differentialrechnung von komplexen Funktionen
- Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlichen
- partielle Differentialgleichungen
- Differentialgeometrie

Ableitungen werden nahezu universell in der Mathematik und der Physik verwendet. Auch in Bereichen der Mathematik, in welchen die Nutzung von Ableitungen auf den ersten Blick für nicht relevant erscheint, wie beispielsweise die Maßtheorie, basieren bedeutende Theoreme und Definitionen auf dem Prinzip der Ableitung.

Literatur

Bücher

[Bor94] Heidemarie Borgwadt. *Differentialrechnung.* Gabler-Studientexte. Wiesbaden und s.l.: Gabler Verlag, 1994. ISBN: 9783409921985. DOI: 10.1007/978-3-663-13499-2 (siehe Seite 7).

[Dei17] Deitmar. *Analysis.* Springer Berlin Heidelberg, 2017. ISBN: 978-3-662-53351-2 (siehe Seiten 6, 14).

[FRI20] KLAUS FRITZSCHE. *GRUNDKURS ANALYSIS: Differentiation und Integration in einer Veränderlichen.* [S.l.]: SPRINGER, 2020. ISBN: 978-3-662-60812-8 (siehe Seite 6).

[Ste15] James Stewart. *Calculus, Early Transcendentals, International Metric Edition.* 8th edition. Pacific Grove: Brooks/Cole, 2015. ISBN: 9781305272378 (siehe Seiten 4, 5, 13).

[WS05] Wolfgang L. Wendland und Olaf Steinbach. *Analysis: Integral- und Differentialrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen, komplexe Funktionentheorie.* 1. Auflage. Wiesbaden: Teubner, 2005. ISBN: 9783519005179. DOI: 10.1007/978-3-322-82962-7 (siehe Seiten 4, 6, 10).

Internetquellen

[Joh15] Johannes Schneider. *Differentialrechnung.* Herausgegeben von Wikipedia. 2015. URL: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=38051736 (siehe Seite 4).