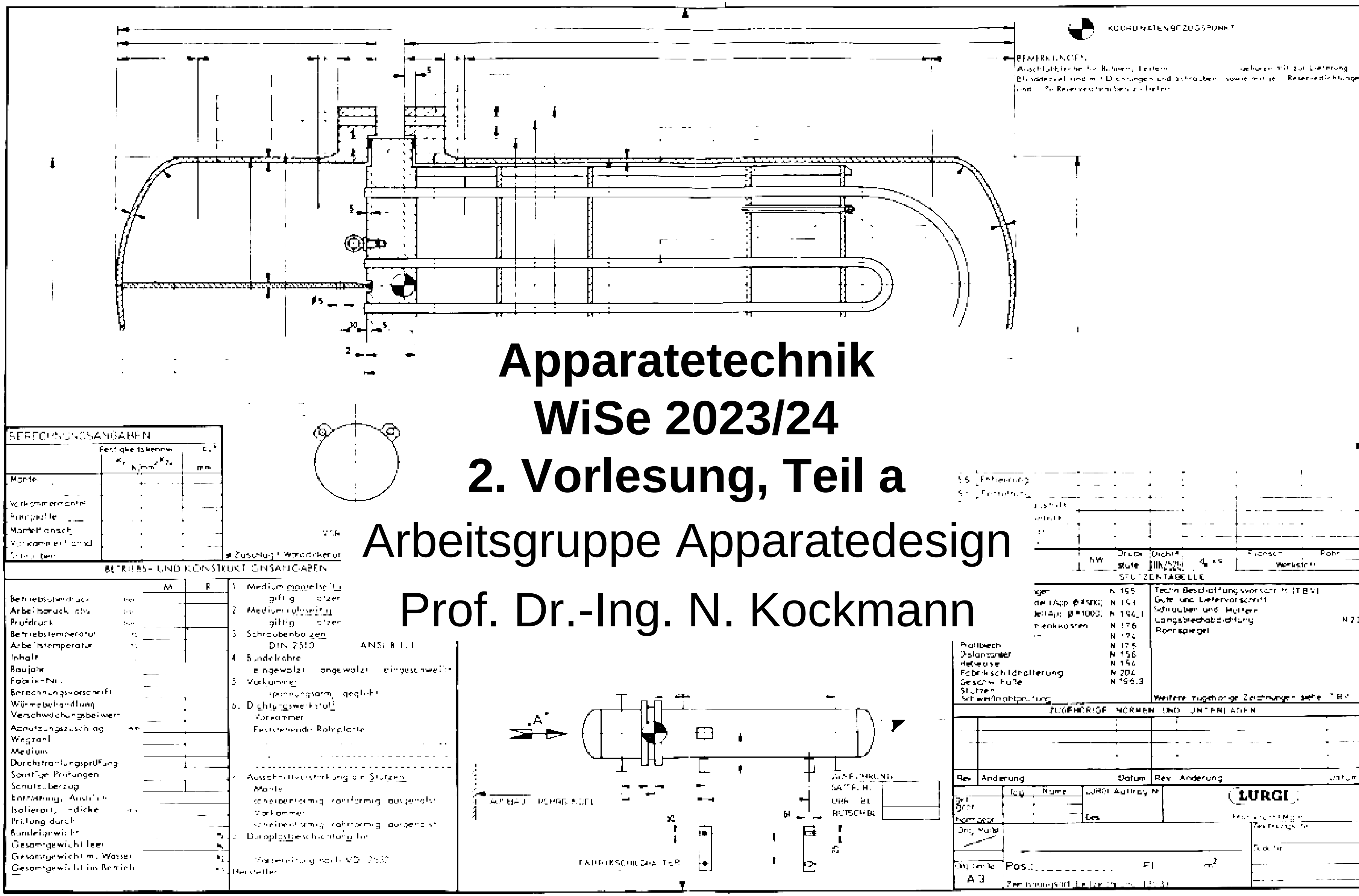


Apparatetechnik
WiSe 2023/24
2. Vorlesung, Teil a

Arbeitsgruppe Apparatedesign

Prof. Dr.-Ing. N. Kockmann

technische universität
dortmund

Bio- und Chemieingenieurwesen
Arbeitsgruppe Apparatedesign
Prof. Dr.-Ing. N. Kockmann

Inhalt

Teil a

Teil b

Apparatebodenbau

Fertigung von Flachböden und Klöpperböden durch Kaltumformen

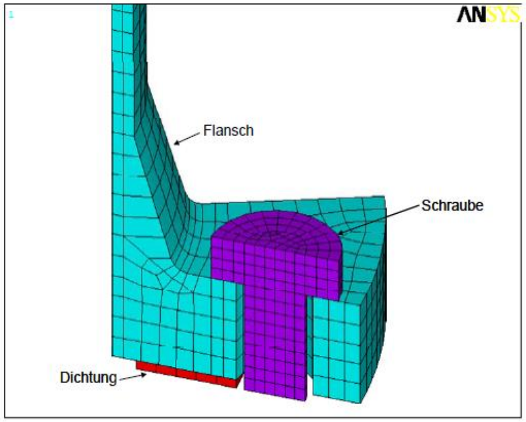
Gesenkformen eines Halbkugelbodens 125 mm,
youtube.com/watch?v=DfWft1hyr2E

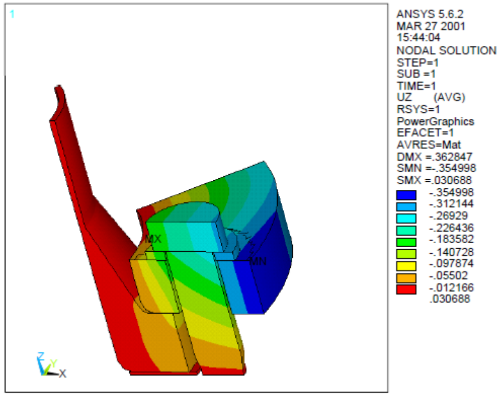
2.1 - Modellbildung und Festigkeitsnachweis

Allgemeine Anforderungen:

- Überschlägige Berechnung des mechanischen Verhaltens
- So einfach wie möglich und so komplex wie nötig

→ Aussagen mit hinreichender Genauigkeit





Belastungen für Modellbildung:

- Einzelkräfte F [N], Linienlast q [N/mm]
- Einzelmomente [N mm], Längenbezogene Momente
- Druck- und Temperaturänderungen

Erfassung der Lastgrößen

Zeitlicher Verlauf der Einwirkung

Feststellung der Häufigkeit

Tragfähigkeitsnachweis im:

Betriebszustand

Montagezustand

Prüfzustand

Sonderlastfall

→ Festigkeitsnachweis

Festigkeitsnachweis - Spannungskriterien und Bewertung

Elastizitätstheorie / Membrantheorie / Traglasttheorie	Bewertung nach Spannungskategorien	Ersatzlösung
in Kapitel 2		Lösung des Berechnungsmodells

Kriterium:

Vorhandene Belastung ≤ zulässige Belastung = $\frac{G_{pl}}{S}$

$$\frac{G_{pl}}{S_G} = F_{GEO} \cdot \frac{K}{S} = F_{GEO} \cdot f$$

G_{pl} - Plastische Grenzlast

S_G - Sicherheit gegen Erreichen der Grenzlast

F_{GEO} - Geometriefaktor

K - Festigkeitskennwert, allgemein

S - Sicherheitsfaktor

f - Auslegungsnennspannung

Auswertung des Festigkeitskriterium

1. Spannungsnachweis

$$\sigma_V \leq f = \frac{K}{S}$$

f	-	Nach DIN EN 13445, s. Kap. 2.1
K/S	-	Nach AD 2000 B0, S6
K	-	Maßgebender Werkstoffkennwert
S	-	Sicherheit

2. Ermittlung Geometrische Größen (s_{erf}, A_{erf}, W_{erf}) nach AD-M

$s_{erf} = s_0$	-	Festigkeitsmäßig erforderliche minimale Wanddicke

$$s = s_0 + c_1 + c_2$$

$s \rightarrow s_e$	-	Realisierte Wanddicke
c_1	-	Zuschlag für Minustoleranz s. Kap. 2.1
c_2	-	Korrosionszuschlag, Abnutzungszuschlag

Vorgehensweise in DIN EN 13445

→Maßgebend für den Nachweis (DbR) ist die festigkeitsmäßig erforderliche Wanddicke *e*

→ Für eine Nachberechnung bzw. DbA wird e_a zugrunde gelegt

Auswertung des Festigkeitskriterium

3. Ermittlung zulässiger Lasten

s - gewählt

K/S - Bekannt bzw. DIN EN e_a und f

$\rightarrow$ p_{zul}, F_{zul} und M_{zul}

z.B. Zylinderschale unter Innendruck AD2000 B1 ➡ $$p_{zul} = \frac{(s_e - c_1 - c_2) \cdot 20\, K/S \cdot v}{D_a - (s_e - c_1 - c_2)}$$ [bar ü]

DIN EN 13445 ➡ $$p_{zul} = \frac{2f \cdot z \cdot e_a}{D_a - e_a}$$ [MPa]

4. Berechnung von Sicherheiten und Auslastungsgraden

$$A_g = \frac{B_{vorh}}{B_{zul}}$$ - B = Belastungsgröße (p, F, M)

$$S = \frac{K}{\sigma_v}$$ ≥ 1 → Absolute Sicherheit

$$S^* = \frac{K/S}{\sigma_v}$$ ≥ 1 → Relative Sicherheit

Nachweisarten

Ermüdungsfestigkeits-nachweis	→ Nachweis gegen eine kritische Spannungsbreite bzw. kritische Lastwechselzahl
Nachweis gegen fortschreitende plastische Verformung	→ FPD = Ratcheting → Bei wiederholter Belastung aufgrund spez. Materialeigenschaften sich einstellendes Deformationsverhalten
Stabilitätsnachweis	→ Nachweis gegen Knicken und Beulen infolge kritischer Druckspannungen → Unsicherheiten durch Imperfektionen
Nachweis gegen langzeitige Belastungen	→ Phänomen der polymeren Werkstoffe und Metallen bei hohen Temperaturen → Zeitstandfestigkeitsnachweis
Verformungsnachweis	→ Verformung beeinflussen Gebrauchsfähigkeit von Bauelementen → Gegenmaßnahmen gegen Verformung: Versteifungen
Standsicherheit	→ Grenzzustand gegen Verschieben und Umstürzen von Konstruktionen → Gleichgewicht, destabilisierender und stabilisierender Einwirkungen unter Einwirkung von Havarie-Situationen

Druck als Lastgröße

- Flächenlast: Kraft / Fläche : $\frac{N}{mm^2}$, MPa oder bar

Physikalisch: absolut

Technisch: Über- oder Unterdruck

→ Zulässiger Druck | Auslegungs-Druck | Berechnungs-Druck

typische Flächenlasten:

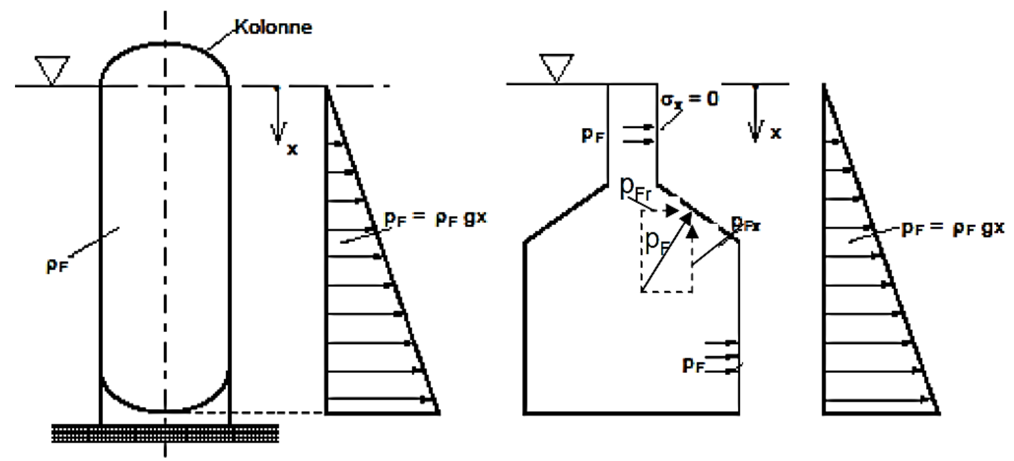
→ Gasdruck

→ Hydrostatischer Druck

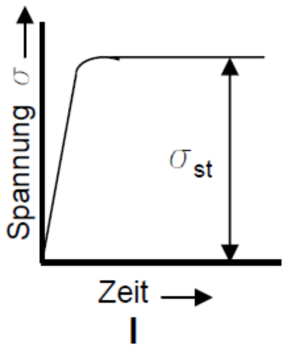
spezielle Flächenlasten:

→ Eigenmasse, Schneelast

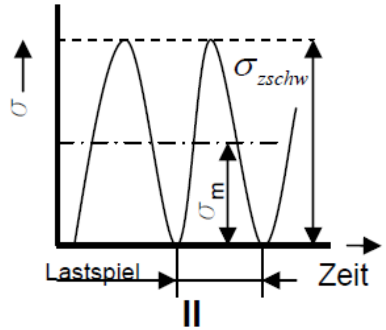
→ Windlast, Zentrifugallast



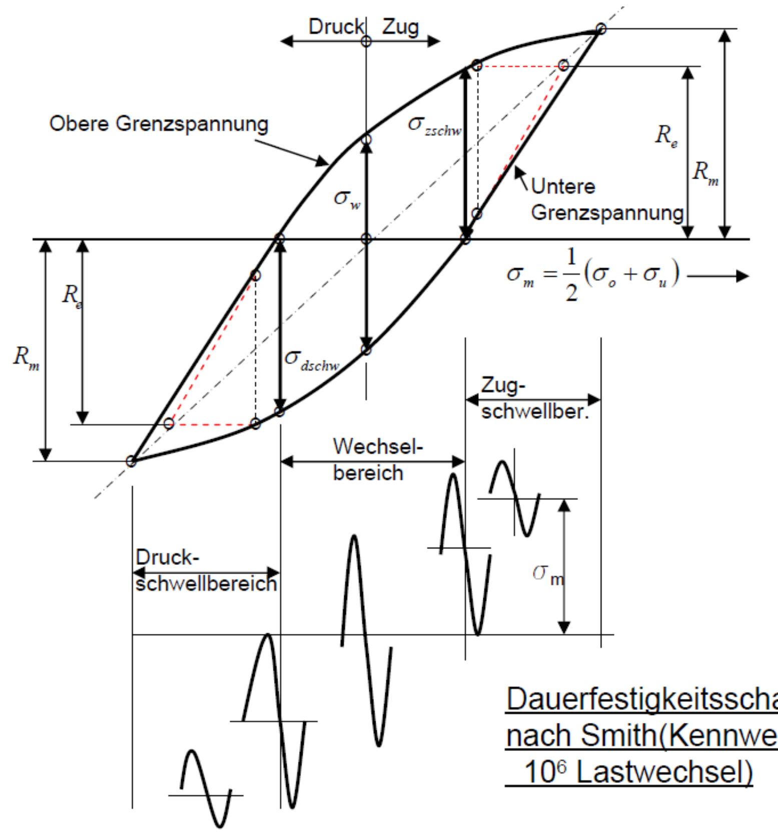
Stabilitätszustand - Belastungsänderungen



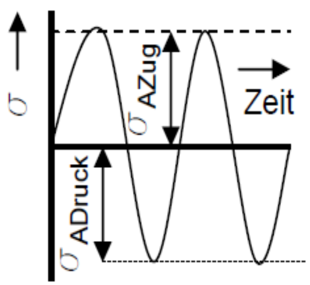
ruhende Beanspruchung



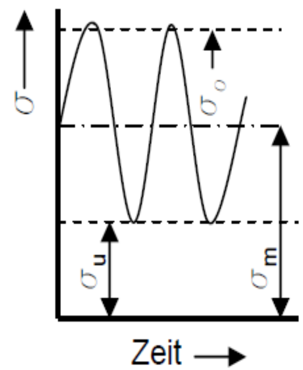
schwellende Beanspruchung („+“Zug; „-“Druck)



Dauerfestigkeitsschaubild nach Smith(Kennwerte für ca. 10^6 Lastwechsel)



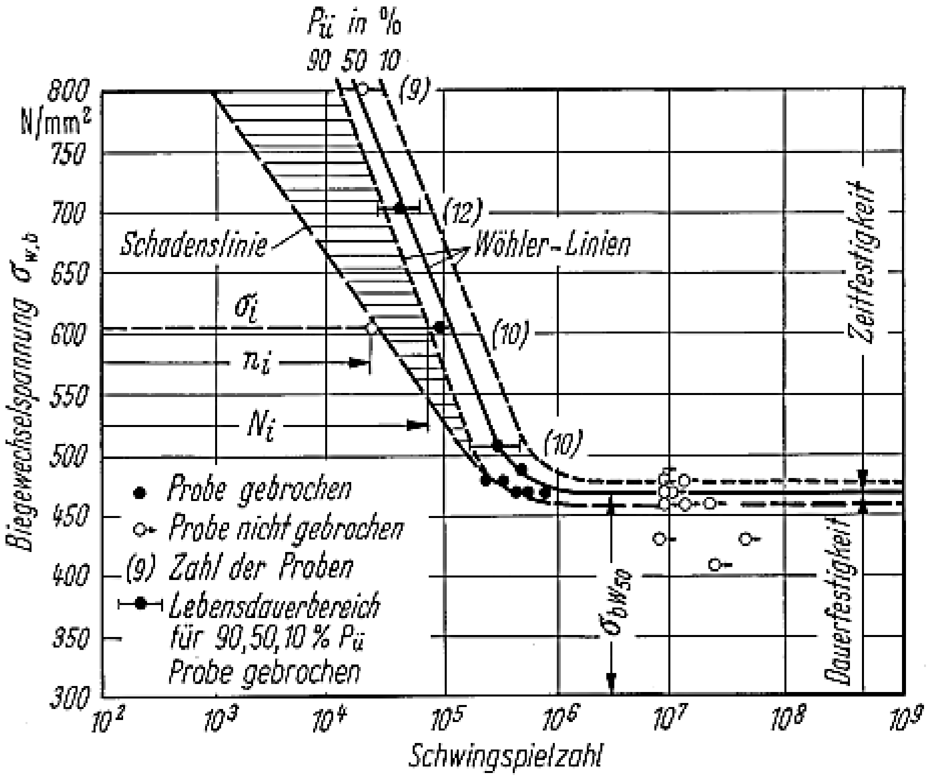
wechselnde Beanspruchung (+/-)

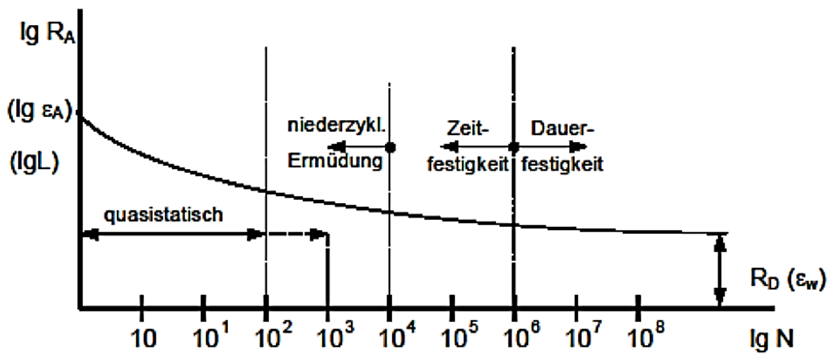


schwingende Beanspruchung um $\sigma_m = \frac{(\sigma_O - \sigma_u)}{2}$

Stabilitätszustand - Belastungsänderungen

- Zyklische Beanspruchung → Ermüdungsfestigkeitsnachweis
- Bewertungsgrundlage, ob ein Nachweis erforderlich ist: Wöhlerdiagramm





- Überlebenswahrscheinlichkeit P_u in %
- 9 – 12 Proben
- Belastung mit Biegewechselspannung
- Schraffierter Bereich: Schädigung, aber kein Bruch zu erwarten

Temperatur als Lastgröße

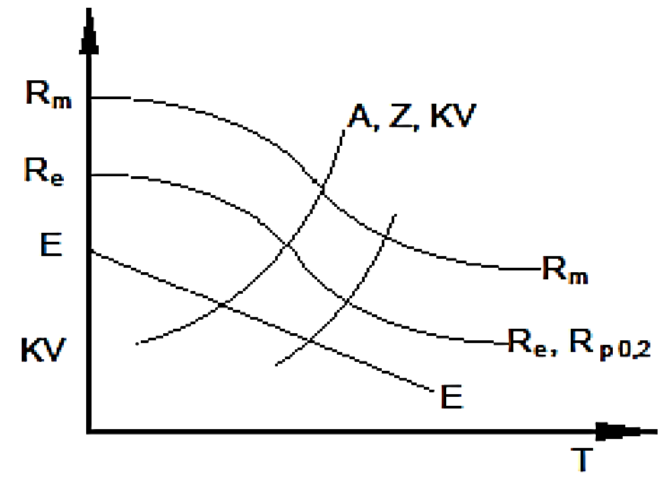
- Materialkennwerte (s. Vl.1) sind Temperaturabhängig
- Dauereinfluss kann zu Kriechen führen

  Grenztemperaturen für Werkstoffgruppen:

  → Unlegierte Stähle >380 °C

  → Niedriglegierte Stähle >440 °C

  → Hochlegierte Stähle >525 °C



- Temperaturänderung → Volumenänderung

  Behinderung der freien Ausdehnung führt zu thermischen Spannungen im Material

$$\Delta V \sim \alpha \, (T - T_u) \quad (1)$$

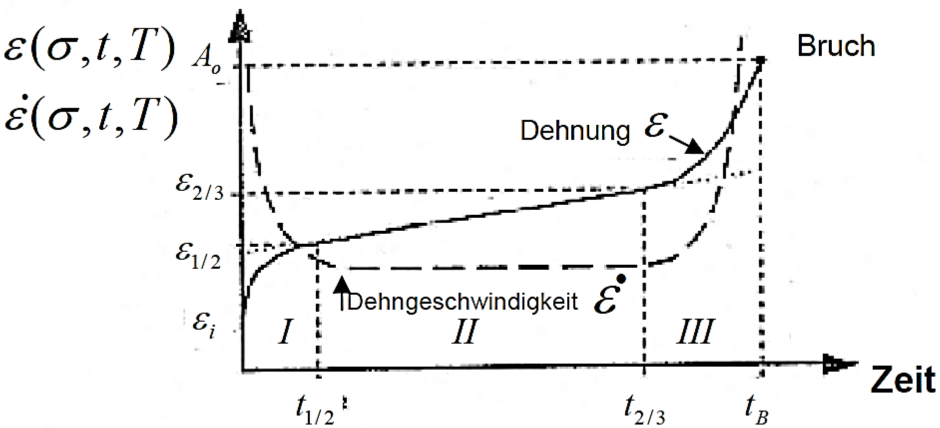
Druck Temperatur-Zuordnung

- Umrechnung von Zustand 1 in Zustand 2 möglich

$$\frac{p_1}{\frac{K_1(T_1)}{S}} = \frac{p_2}{\frac{K_2(T_2)}{S}} = konst.$$

$K_{1,2}$ = Festigkeitskennwerte

Stabilitätszustand – Temperaturbedingtes Kriechen



$$\varepsilon(\sigma,t,T) = f_1(\sigma) \cdot f_2(\sigma) \cdot f_3(\sigma)$$

f_1, f_2, f_3 - Empirische Ansätze

Praktisch verfügbare Ansätze:

Norton, Andrade, Bailey, u.a.

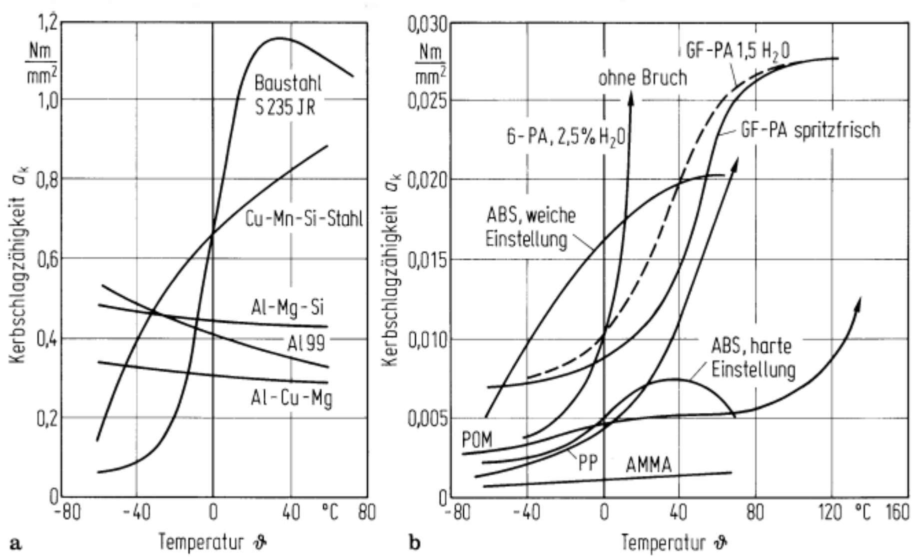
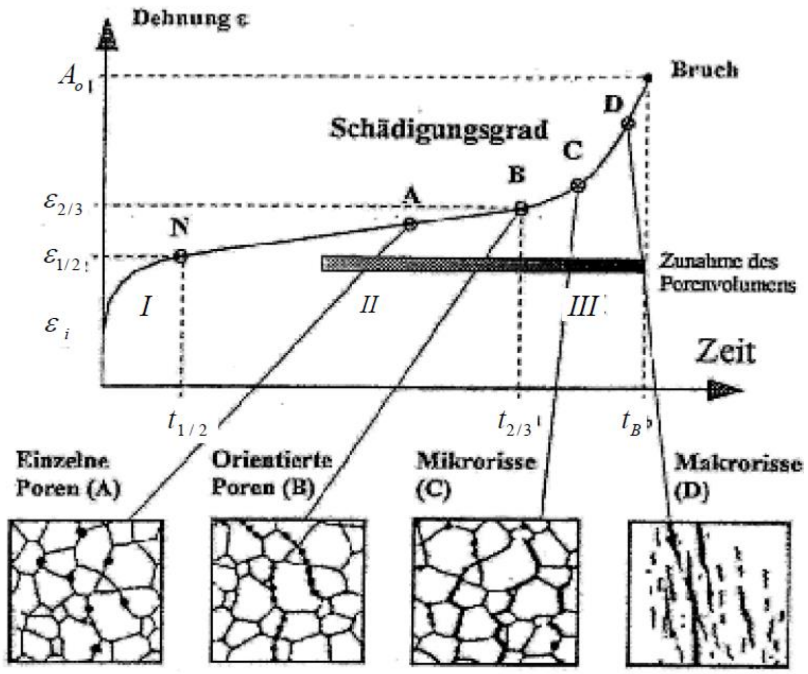
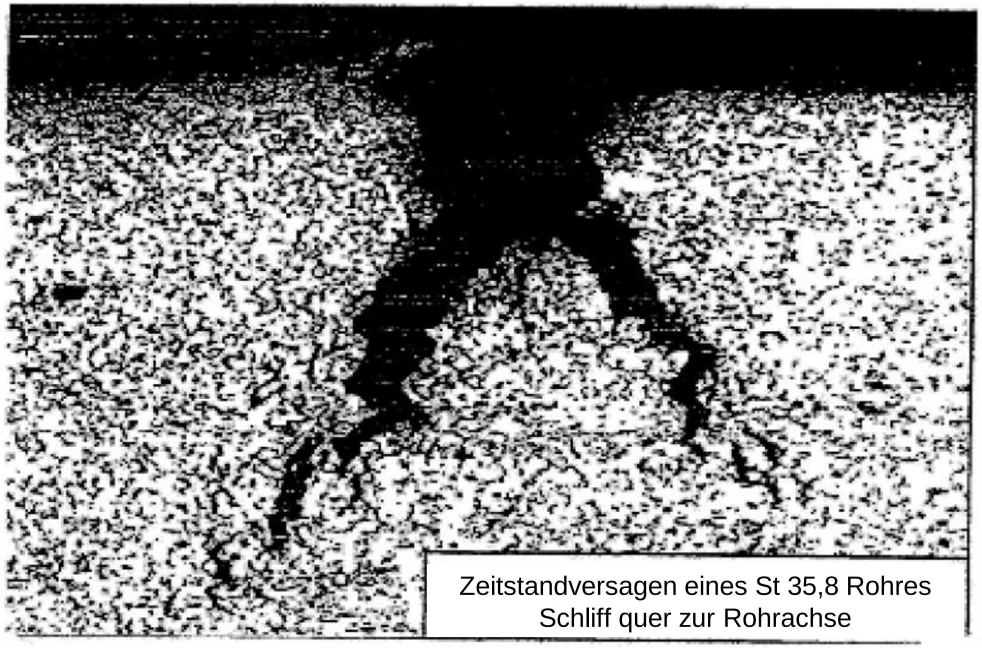


Abb. 3.30 a, b. Einfluß der Temperatur auf die Kerbschlagzähigkeit a_k von, **a** Metallen, **b** Kunststoffen (BASF-Werkstoffblatt 4003.1.12, 1965)

Einfluss von niedrigen Temperaturen auf das Werkstoffverhalten

Stabilitätszustand – Temperaturbedingtes Kriechen




Zeitstandversagen eines St 35,8 Rohres
Schliff quer zur Rohrachse

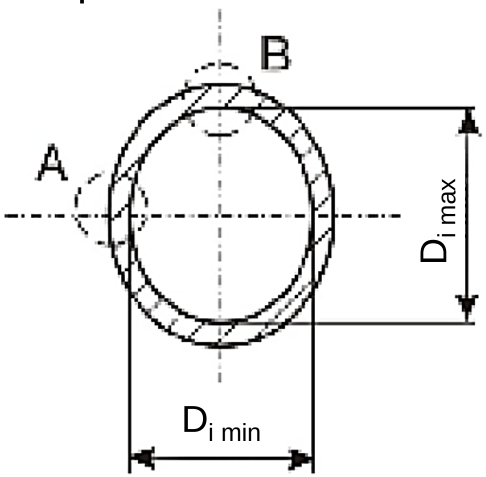
Auslegung und Sicherheiten

S = Sicherheitsbeiwert, charakterisiert die Unsicherheiten in der Festigkeitsanalyse

Kennwerte, Modellgenauigkeiten, Lastannahmen, …

Bsp: Unrundheit *u*

$$u = 2\,\frac{D_{\mathrm{i\,max}} - D_{\mathrm{i\,min}}}{D_{\mathrm{i\,max}} + D_{\mathrm{i\,min}}}\;100\%$$



A, B – Bereiche max. Beanspruchung

$u \leq 1{,}5$ % durch allgemeinen Sicherheitsfaktor berücksichtigt

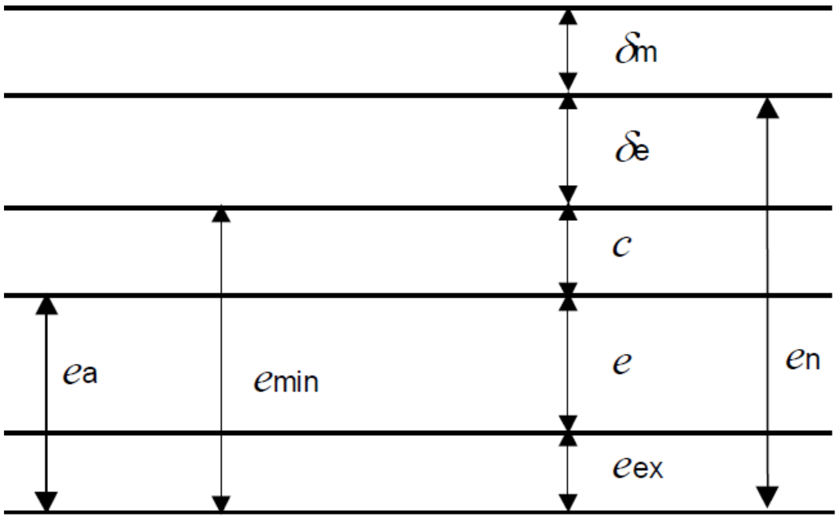
→ Bei Nichteinhaltung: spezieller Nachweis

$$S_k = 2{,}25 + 0{,}5\,u$$

Computergestützte numerische Methoden

- FEM Berechnungen → präzise Nachbildung der Geometrie
- Optimierung der Geometrie am Computer möglich

Auslegung und Sicherheiten – Toleranzen und Zuschläge



δ_m – Zuschlag für Wanddickenverlust während der Verarbeitung

δ_e – Zuschlag für Minustoleranz

c – Korrosionszuschlag
- < 1 mm in Sonderfällen
- 1 mm im Allgemeinen
- > 1 mm, wenn Verlust kalkulierbar

e_n – Nennwanddicke

e_{ex} – Dickenzuschlag bis Nennwanddicke

e_a – Berechnungswanddicke

e_{min} – Mindestfertigungsdicke

Toleranzen EN 10029
Tolérances (DIN 1543)

Dicke ***Epaisseur***	Dicke *Epaisseur* *mm*	Abweichung *Déviation* *Klasse A* mm	Unterschied grösste/kleinste Dicke derselben Platte *Différence D'épaisseur max./min. de la même tôle* *Breite / largeur* < 2000	≥ 2000 < 2500	≥ 2500 < 3000	3000
	3 - 4,9	+ 0,8 / - 0,4	0,8	0,9	0,9	-
	5 - 7,9	+ 1,1 / - 0,4	0,9	0,9	1,0	1,0
	8 - 14,9	+ 1,2 / - 0,5	0,9	1,0	1,0	1,1
	15 - 25	+ 1,3 / - 0,6	1,0	1,1	1,2	1,2
	25 - 39	+ 1,4 / - 0,8	1,1	1,2	1,2	1,3

2.1 - Modellbildung und Festigkeitsnachweis

Vorgehen bei der Modellbildung

Design by Rule (DbR)

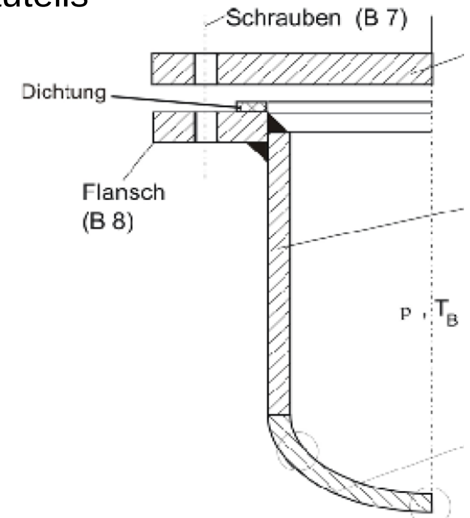
→ Zerlegen in Apparateelemente

→ Hauptlastgröße: p (quasistatisch)

→ Lokale Spannungsspitzen bleiben unberücksichtigt

→ Maßgeblich für zulässigen Betriebsdruck:

- Geringster Berechnungsdruck eines Bauteils



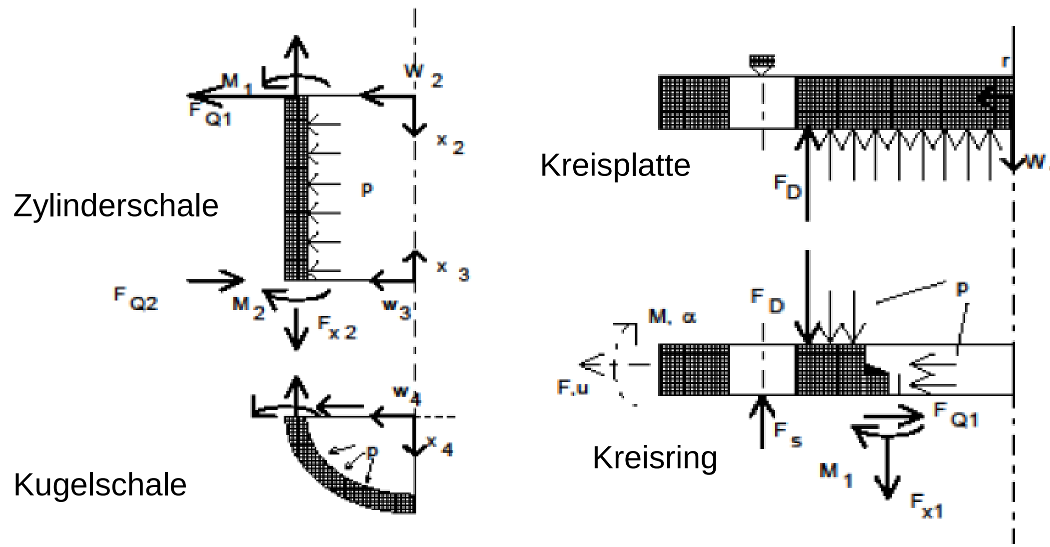
Design by Analysis (DbA)

→ Zerlegen in mechanische Strukturen (Ring, Schale, Scheibe,…)

→ Freischneiden der Strukturen

→ Kompatibilität der Strukturen durch Übergangsbedingungen

→ Alle Lasten können berücksichtigt werden



Vorgehen bei der Modellbildung

Design by Analysis (DbA)

Analytische Methoden

Modell → Berechnungsansatz → Lösung → Bewertung

Skizze

Vereinfachungen und Betrachtung differentielles Element

Spannungen und Schnittgrößen einzeichnen

Gleichgewicht GGW von Kräften und Momenten

Verformungsbetrachtungen

Materialgesetz (Hooke) anwenden

Aufstellen und Lösen der Differentialgleichung DGL

Einsetzen der Randbedingungen

Stark belastete Bereiche berechnen

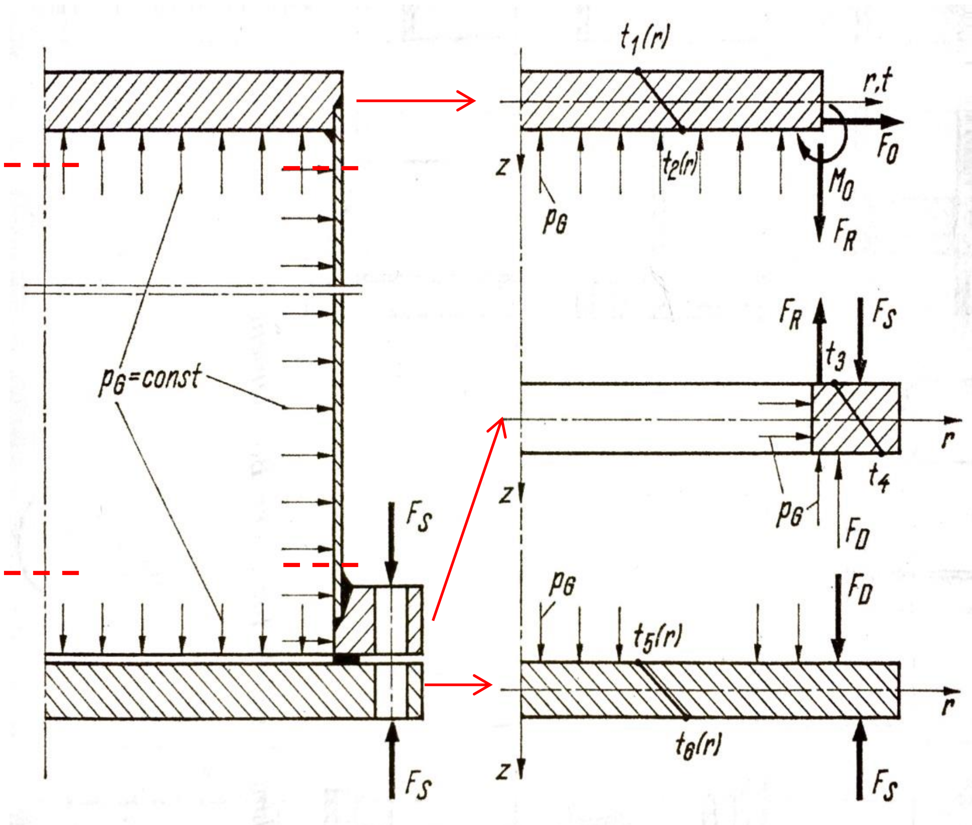
Numerische Methoden (FEM, BEM)

Modell
↓
Zerlegung in diskrete Elemente
↓
Lösung
↓
Bewertung

Experimentelle Methoden

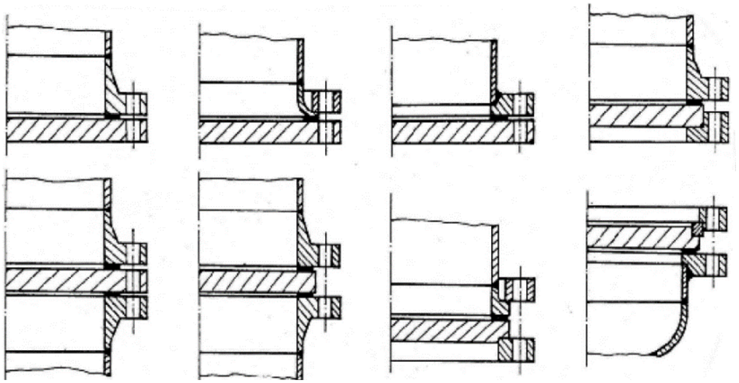
Bauelement
↓
Messung von Verformungen
↓
Bewertung

Einfache Belastungsfälle ebener Apparateelemente



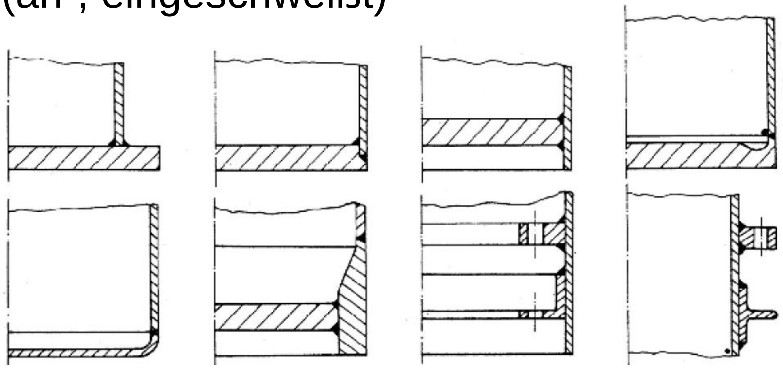
Lösbare Konstruktionen

(an-, aufgeschraubt, eingeklemmt)



Feste Konstruktionen

(an-, eingeschweißt)



Kreisscheibe:

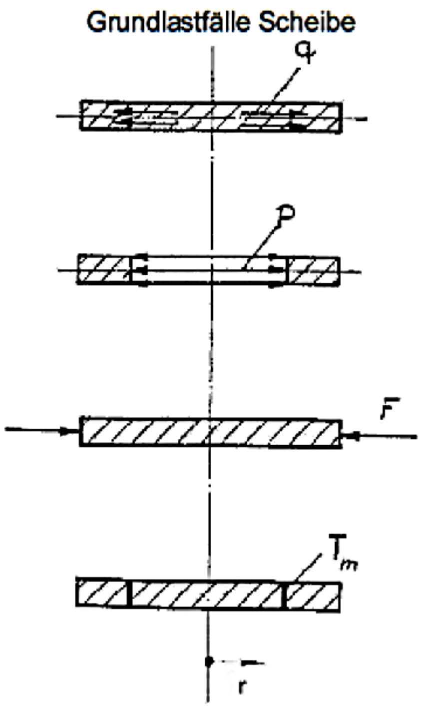
Flächentragwerk, dessen Mittelfläche nur gedehnt bzw. gestaucht wird

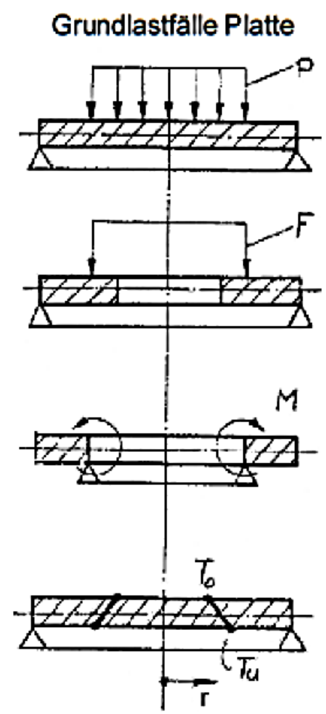
Kreisplatte:

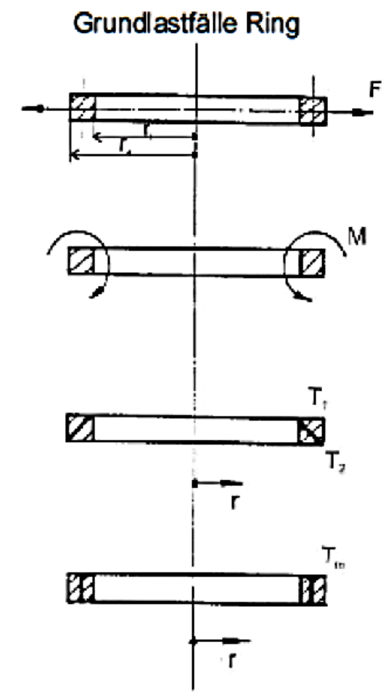
Flächentragwerk, dessen Mittelfläche gekrümmt/ gebogen, aber nicht gedehnt (gestaucht) wird

Kreisring:

aufgrund von $\frac{r_a}{r_i} \leq 1{,}25$ stellt sie eine vereinfachte Form der Kreisringplatte dar







Die Kreisscheibe

Modell | Berechnung | Lösung

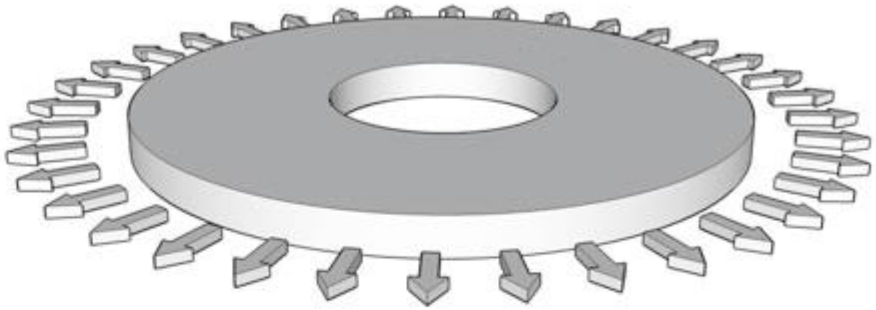
Annahmen und Skizze

Annahmen:

1. Radiale Verschiebung $u(r)$ beliebiger Querschnittspunkte ist klein im Vergleich zur Scheibendicke $\boldsymbol{e}$

2. e = konst. über den Radius r

3. Ebener Spannungszustand wird angenommen

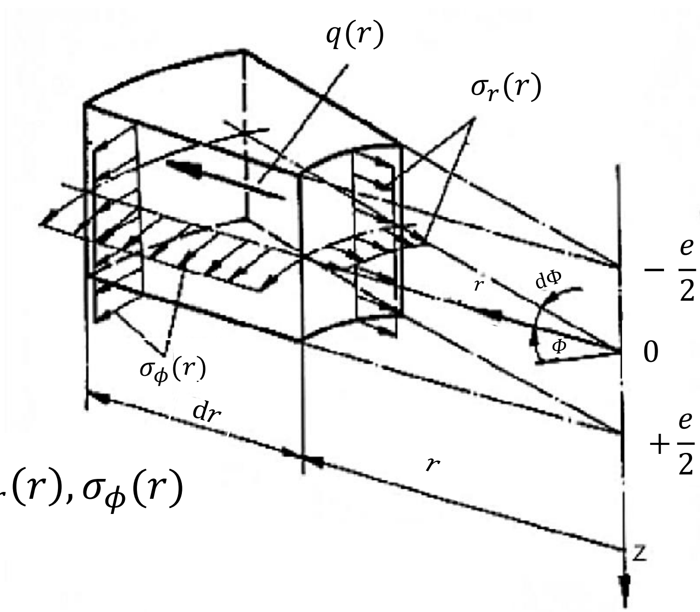


Modell | Berechnung | Lösung

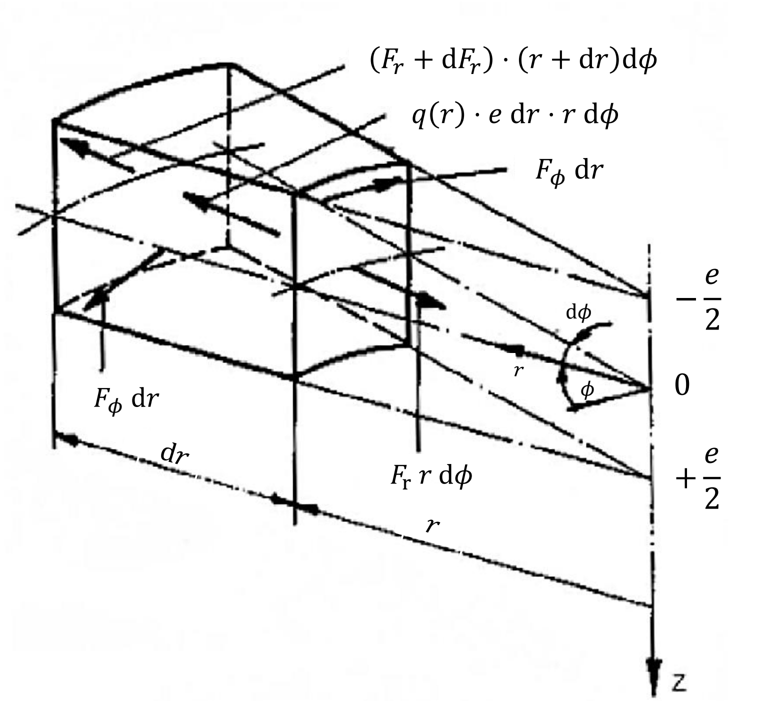
Spannungen und Schnittgrößen

Die Kreisscheibe

Spannungen und Schnittgrößen



$\sigma_r(r), \sigma_\phi(r)$



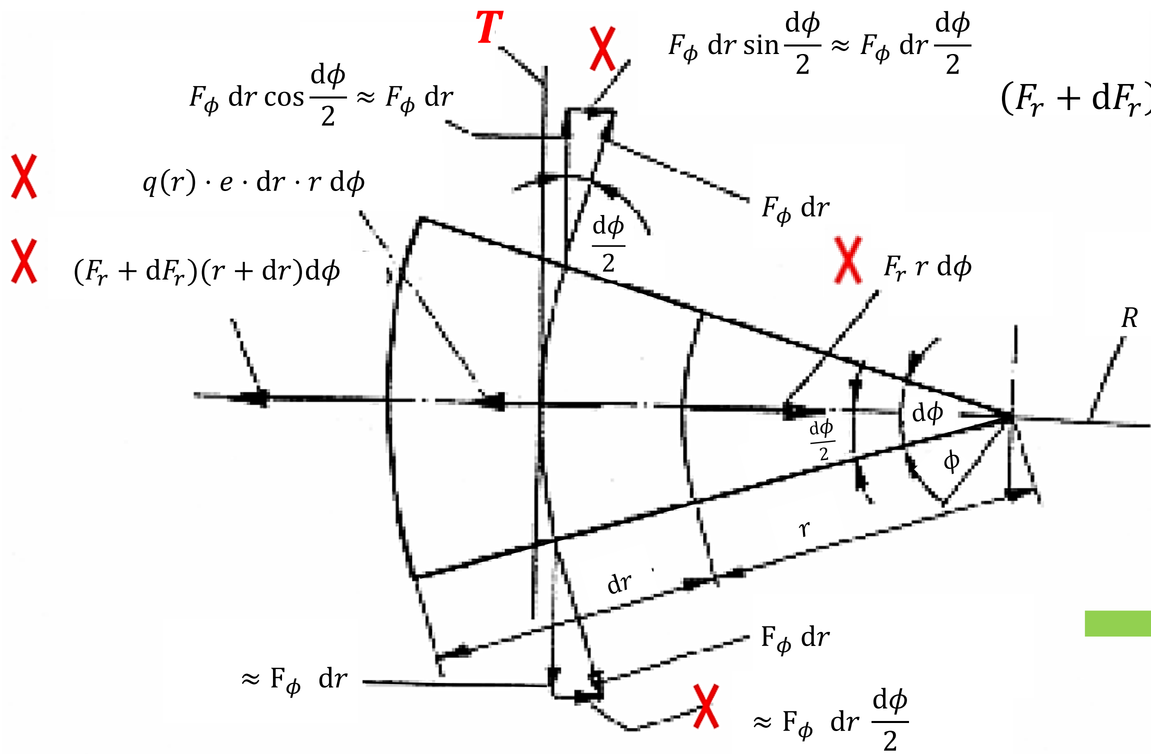
$$F_r = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_r \, \mathrm{d}z = \sigma_r \cdot e \qquad F_\phi = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_\phi \, \mathrm{d}z = \sigma_\phi \cdot e \qquad \text{(S1)}$$

für differentielle Elemente:
https://www.youtube.com/watch?v=7VMsSM5mAX0

Die Kreisscheibe

Modell | Berechnung | Lösung

GGW Betrachtungen



$$(F_r + \mathrm{d}F_r)(r + \mathrm{d}r) = F_r r \cdot r + r \cdot \mathrm{d}F_r r + F_r r \, \mathrm{d}r + \underbrace{\mathrm{d}F_r r \cdot \mathrm{d}r}_{\approx 0}$$

Produktregel

$$(F_r + \mathrm{d}F_r)(r + \mathrm{d}r) = r \, F_r + \frac{\mathrm{d}(F_r \cdot r)}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r$$

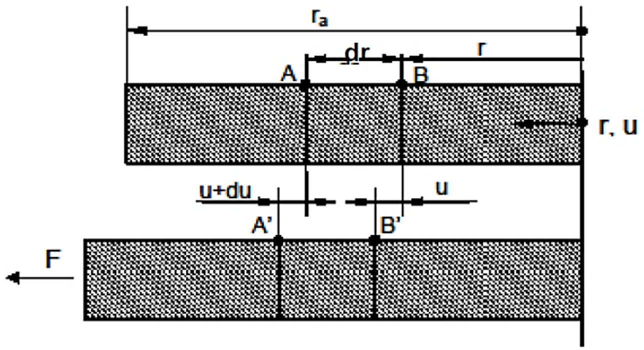
$$\Sigma F_r = 0$$

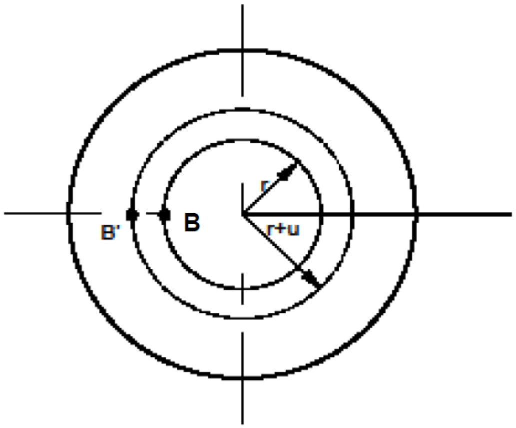
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(F_r \cdot r) - F_\phi + \mathrm{q(r)} \, \mathrm{e} \cdot r = 0 \quad \boxed{\text{(S2)}}$$

Die Kreisscheibe

Modell | Berechnung | Lösung

Verformung + Hooke





$$\varepsilon_r = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{(u + \mathrm{d}u) + \mathrm{d}r - u - \mathrm{d}r}{\mathrm{d}r} = \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}}$$ (S3)

$$\varepsilon_\phi = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \boxed{\frac{u}{r}}$$ (S4)

Hooke'sches Gesetz

$$\sigma_r = \frac{F_r}{e} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\varepsilon_r + \nu\, \varepsilon_\phi\right) = \frac{\mathrm{E}}{1-\nu^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \nu \frac{u}{r}\right)$$

$$\sigma_\phi = \frac{F_\phi}{e} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\varepsilon_\phi + \nu\, \varepsilon_\mathrm{r}\right) = \frac{\mathrm{E}}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)$$

(S2) + (S4)

DGL: $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - \frac{u}{r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u \cdot r)\right] = -q(r)\frac{1-\nu^2}{E}}$$ (S5)

Die Kreisscheibe

Modell | Berechnung | **Lösung**

Lösung der DGL

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u\cdot r)\right] = -q(r)\frac{1-\nu^2}{E}}$$

$\Rightarrow$ linear, 2. Ordnung, inhomogen

- Allgemeiner Lösungsansatz

$$u = u_h + u_p$$

- Homogene Lösung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u_h\cdot r)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad u_h = C_1 r + \frac{1}{r}C_2$$

- Partikuläre Lösung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u_p\cdot r)\right] = -q(r)\frac{1-\nu^2}{E}$$

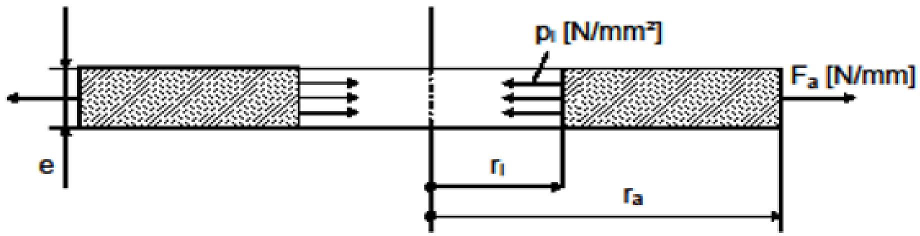
$\Rightarrow$ Randbedingungen

mit $q(r)$ = Volumenkraft (z.B. Gewichts- oder Zentrifugalkraft)

Die Kreisscheibe

Randbedingungen

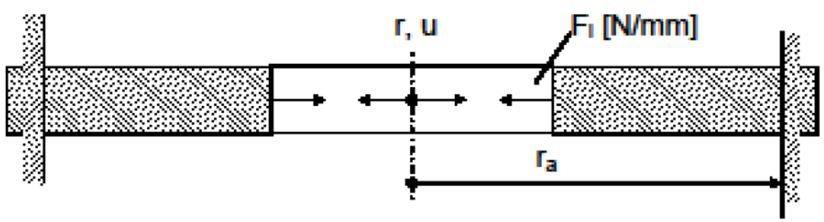
Scheibe mit Randkräften:



$$r = r_i \rightarrow \sigma_r = p_i$$

$$r = r_a \rightarrow \sigma_r = \frac{F_a}{e}$$

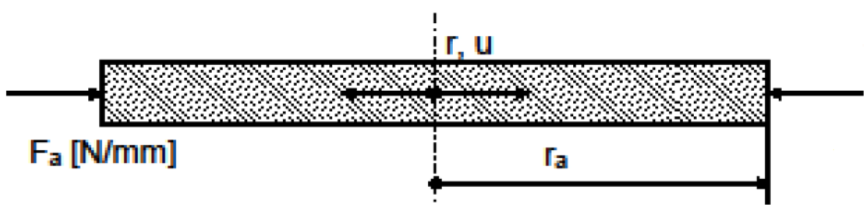
Außen starrer Rand und Kraft innen:



$$r = r_a \rightarrow u = 0$$

$$r = r_i \rightarrow \sigma_r = \frac{F_i}{e}$$

Volle Scheibe mit Randkraft



$$r = r_a \rightarrow \sigma_r = -\frac{F_a}{e}$$

$$r = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Die Kreisscheibe

Zusammenfassung

- Keine Spannungen senkrecht zur Scheibenmittelfläche
- Lineare Theorie (kleine Verformungen):
  Platte und Scheibe können getrennt betrachtet werden
  Große Verformungen: Verknüpfung der DGLn

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u\cdot r)\right] = -q(r)\frac{1-\nu^2}{E}}$$

$$\Rightarrow \quad u = u_p + C_1\cdot r + \frac{1}{r}C_2$$

Spannungen:

$$\sigma_r = \frac{F_r}{e} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{u}{r}\right)$$

$$\sigma_\phi = \frac{F_\phi}{e} = \frac{\mathrm{E}}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)$$

Quiz

- Annahmen zur Modellierung einer Scheibe

- Toleranzen eines technischen Bauteils

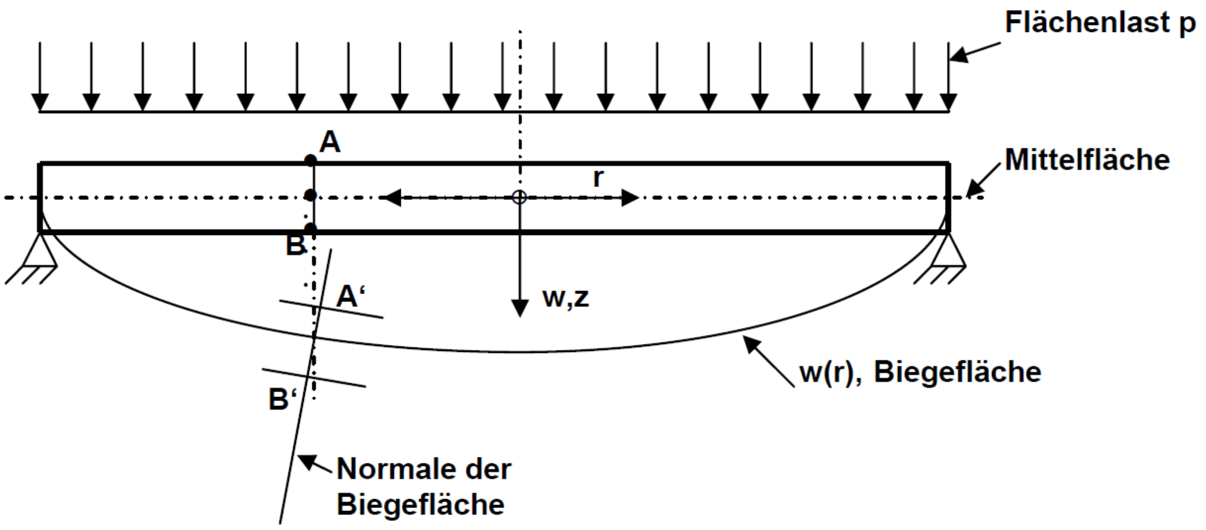
in Moodle

Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff‘sche Platte)

Modell | Berechnung | Lösung

Annahmen:

1. Plattendicke $\boldsymbol{e} \ll \boldsymbol{r}_a$ Außenradius
2. e = konst. über den Radius
3. Normalspannung σ_z, senkrecht zur Plattenoberfläche ist vernachlässigbar
4. Durchbiegung w ist klein im Vergleich zu e
5. Elastische Verformung



Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff‘sche Platte)

Modell | Berechnung | Lösung

Spannungszustand und Schnittgrößen

Annahmen:

p = p(r) → rotationssymmetrische Belastung

→ rotationssymmetrischer Spannungszustand

$\sigma_r = \sigma_r\ (r,z)$
$\sigma_\phi = \sigma_\phi\ (r,z)$
$\tau_{rz} = \tau_{rz}\ (r,z)$

resultierende → Schnittgrößen

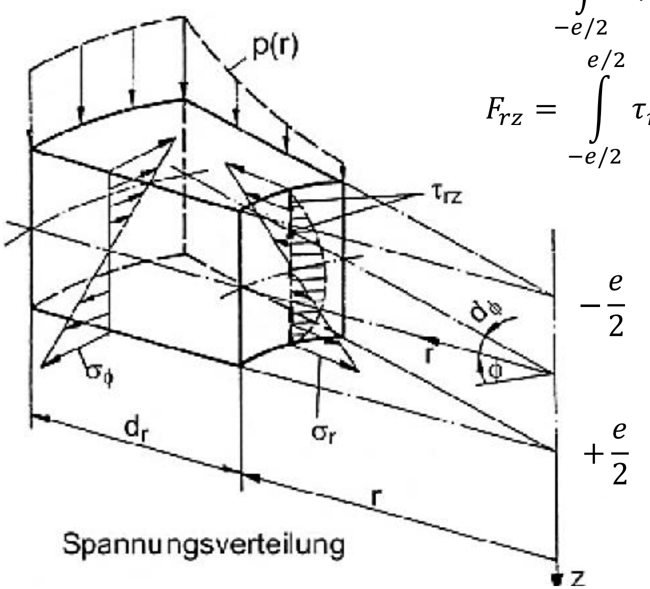
$$M_r = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_r \cdot z\,\mathrm{dz}$$

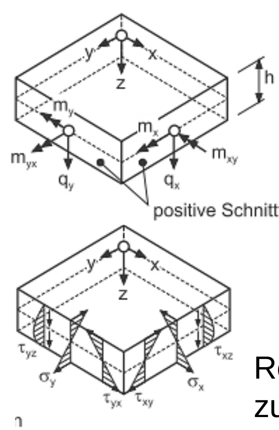
$$M_\Phi = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_\phi \cdot z\,\mathrm{dz} \qquad \text{(P1)}$$

$$F_{rz} = \int_{-e/2}^{e/2} \tau_{rz}\,\mathrm{dz}$$

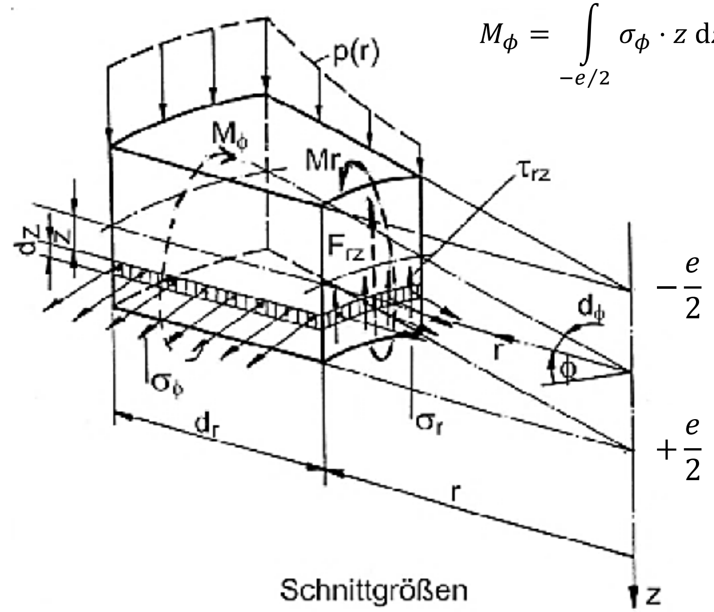
z.B. $\mathrm{d}M_\phi \mathrm{d}r = \sigma_\phi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z \cdot z$

$$M_\phi = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_\phi \cdot z\,\mathrm{dz}$$





Rechteckige Elemente zum Vergleich

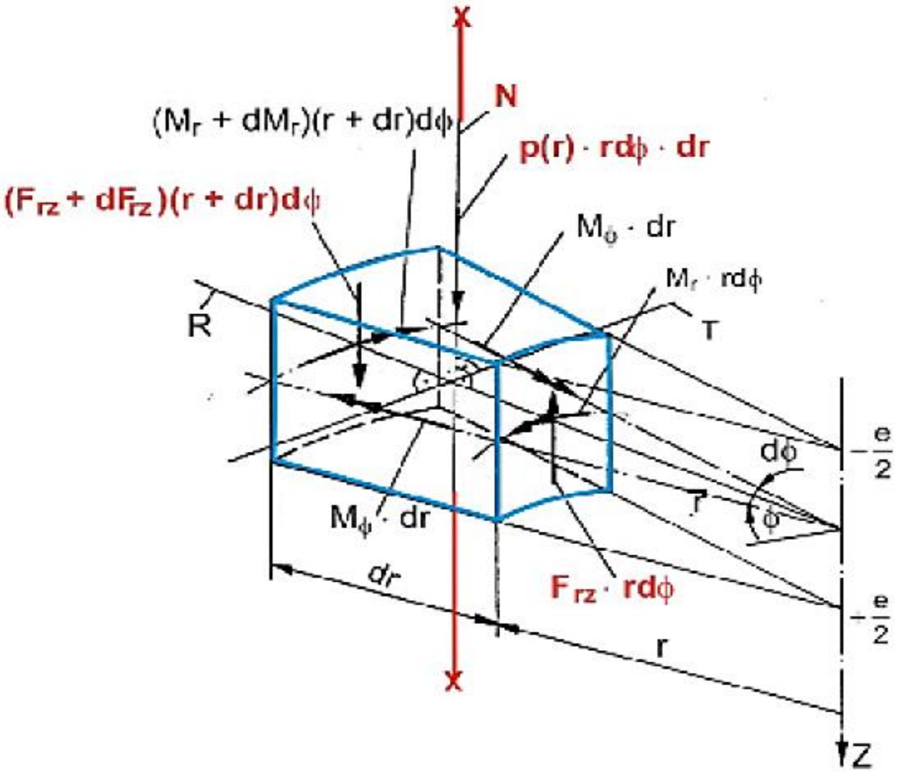


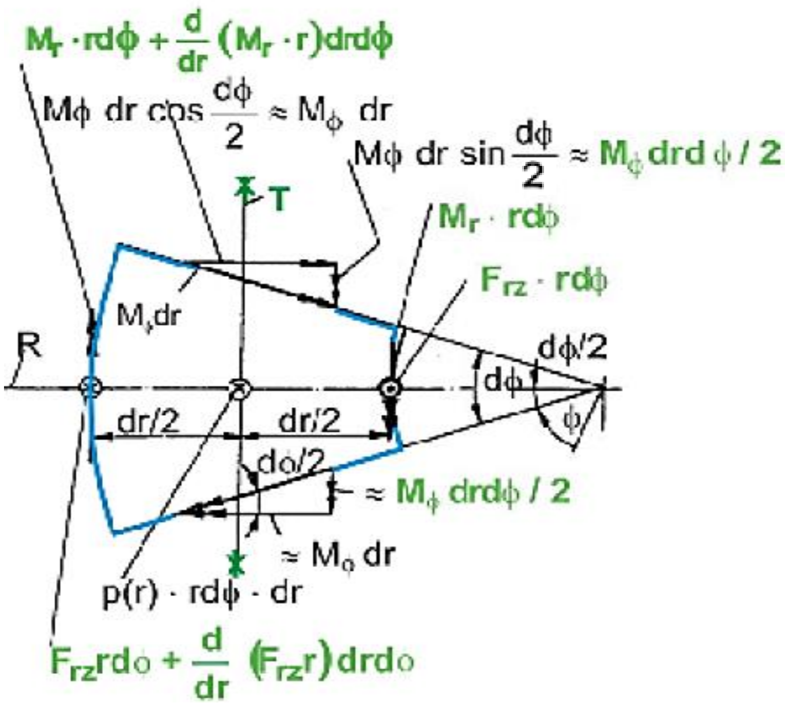
Modell | Berechnung | Lösung

Spannungszustand und Schnittgrößen

Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff'sche Platte)

Gleichgewichtsbetrachtung





Kräfte: $\sum F_N = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(F_{rz} \cdot r) + r \cdot p(r) = 0$ (P2)

Momente: $\sum M_T = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(M_r \cdot r) - M_\phi - F_{rz} r = 0$ (P3)

für P(2) und P(3): $F_{rz} = -\frac{1}{r}\int_0^r p(r) r \, \mathrm{d}r + C$

Modell | Berechnung | Lösung

Spannungszustand und Schnittgrößen

Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff'sche Platte)

Gleichgewichtsbetrachtung

1. Differentieller Zuwachs in Radiusrichtung

$$(M_r + \mathrm{d}M_r)\,(r + \mathrm{d}r) = M_r \cdot r + r \cdot \mathrm{d}M_r + M_r \,\mathrm{d}r + \cancelto{\approx 0}{\mathrm{d}M_r \cdot \mathrm{d}r}$$

$$\rightarrow (M_r + \mathrm{d}M_r)(r + \mathrm{d}r) = M_r \cdot r + \frac{\mathrm{d}(M_r \cdot r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r$$

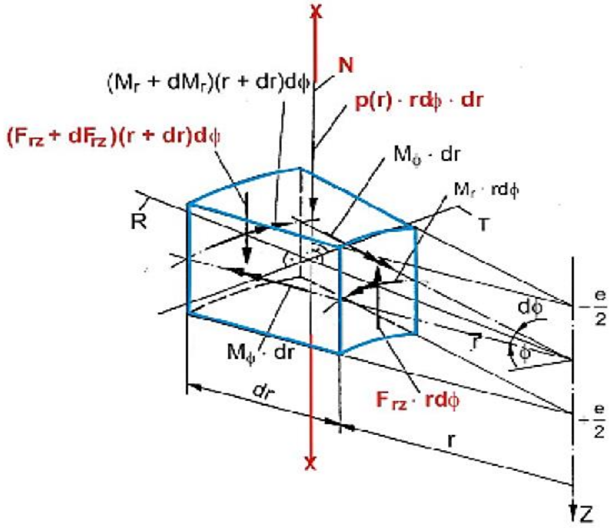
$$(F_{rz} + \mathrm{d}F_{rz})(r + \mathrm{d}r) = F_{rz} \cdot r + \frac{\mathrm{d}(F_{rz} \cdot r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r$$

2. GGW gegen Verschieben (X)

- GGW-Beziehungen mit bezugsfesten Größen

$$-F_{rz} \cdot r\,\mathrm{d}\phi + F_{rz} \cdot r\,\mathrm{d}\phi + \frac{\mathrm{d}(F_{rz} \cdot r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi + p(r) r\,\mathrm{d}\phi \cdot \mathrm{d}r = 0$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(F_{rz} \cdot r) + p(r) \cdot r = 0 \qquad \boxed{\text{(P2)}}$$



Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff‘sche Platte)

Modell | Berechnung | Lösung

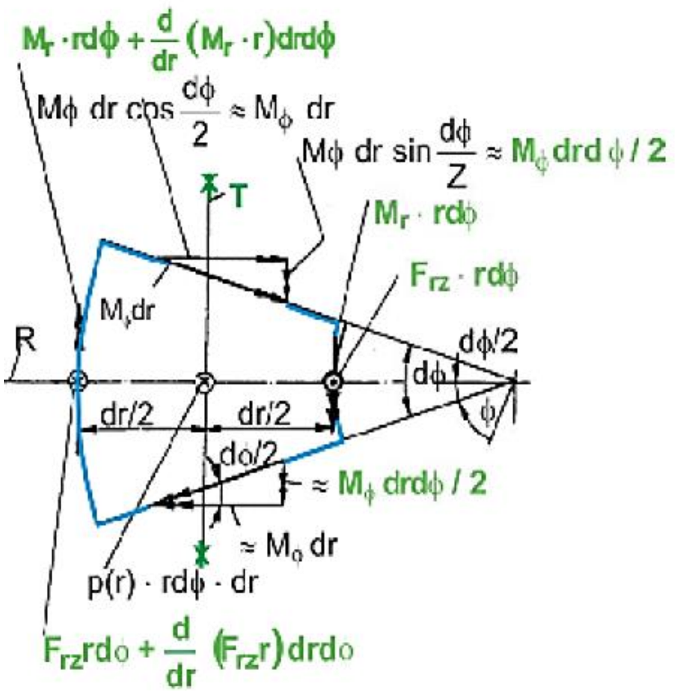
Spannungszustand und Schnittgrößen

3. GGW gegen Verdrehen um Tangente T ($\sum M_{it} = 0$)(X)

$$-M_r r\mathrm{d}\phi + M_r r\mathrm{d}\phi + \frac{\mathrm{d}(M_r \cdot r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\phi - 2M_\phi \cdot \mathrm{d}r \cdot \frac{\mathrm{d}\phi}{2} - F_{rz} \cdot r\mathrm{d}\phi \cdot \frac{\mathrm{d}r}{2} - F_{rz} r\mathrm{d}\phi \frac{\mathrm{d}r}{2} - \cancel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(F_{rz} \cdot r)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \cdot \frac{\mathrm{d}r}{2}} = 0$$

≈ 0

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(M_r \cdot r) - M_\phi - F_{rz} r = 0 \quad \boxed{\text{(P3)}}$$



2 Gleichungen: P2 und P3

3 Unbekannte: F_{rz}, M_r, M_ϕ

Ansatz: Verformungsbetrachtung inkl. Hooke‘sches Gesetz

Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff'sche Platte)

Modell | Berechnung | Lösung

→ Rotationssymmetrische Belastung führt zur rotationssymmetrischen Verschiebung von Punkten der Plattenmittelfläche in z-Richtung (Durchbiegung ***w***(***r***)) **A, D**

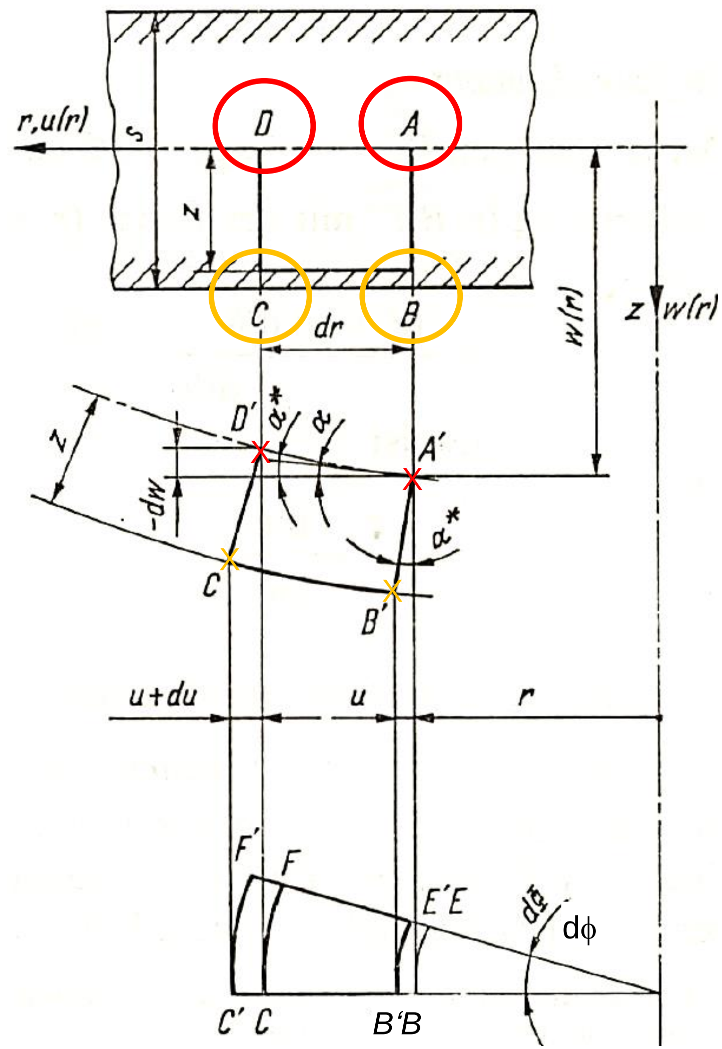
→ Verschiebung ***u***(***r***) der Punkte außerhalb der Plattenmittelfläche in Radiusrichtung **B, C**

Mit Hilfe der Verformungsbetrachtung werden definiert:

→ Radiale Dehnung ε_r

→ Umfangsdehnung ε_ϕ

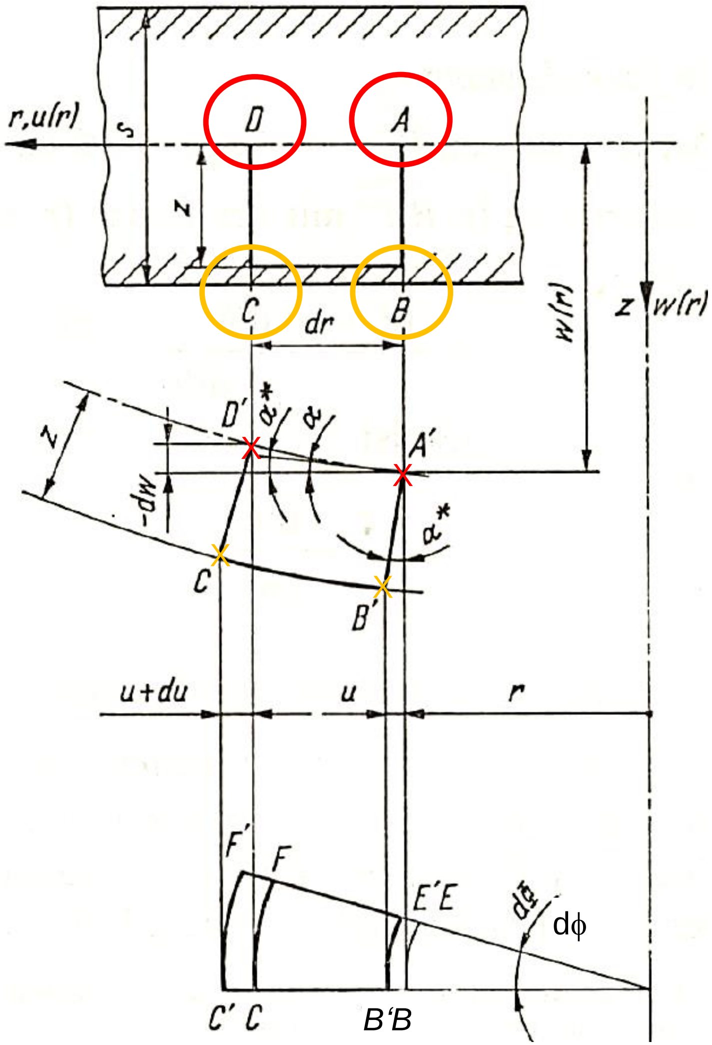
Verformungsbetrachtungen



Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff'sche Platte)

Modell | **Berechnung** | Lösung

Verformungsbetrachtungen



Für kleines $w(r)$ und $\mathrm{d}r$ gilt:

$$\tan\alpha = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} \approx \alpha \qquad \sin\alpha = \frac{u}{z} \approx \alpha$$

$$\boxed{\rightarrow \alpha = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}} \quad \text{(P4)} \qquad \boxed{\rightarrow u = -z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}} \quad \text{(P5)}$$

Radiale Dehnung ε_r

$$\varepsilon_r = \frac{\overline{C'B'} - \overline{CB}}{\overline{CB}} = \frac{\mathrm{d}r + (u + \mathrm{d}u) - u - \mathrm{d}r}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

$$\boxed{\varepsilon_r = -z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}} \quad \text{(P6)}$$

Umfangsdehnung ε_ϕ

$$\varepsilon_\phi = \frac{\widehat{B'E'} - \widehat{BE}}{\widehat{BE}} = \frac{(r+u)\mathrm{d}\phi - r\mathrm{d}\phi}{r\mathrm{d}\phi} = \frac{u}{r}$$

$$\boxed{\varepsilon_\phi = -\frac{z}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}} \quad \text{(P7)}$$

Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff‘sche Platte)

Modell | **Berechnung** | Lösung

Hooke‘sches Gesetz

Hooke‘sches Gesetz für den ebenen Spannungszustand (2-achsig) in radial und Umfangsrichtung

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu \cdot \varepsilon_\phi) \qquad \sigma_\phi = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\phi + \nu \cdot \varepsilon_\mathrm{r})$$

+ (P6) (P7)

$$\sigma_r = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) \qquad \sigma_\phi = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right)$$

(P8)

(P8) einsetzen in (P1)

$$M_r = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_r \cdot z\,\mathrm{d}z = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\int_{-e/2}^{e/2} z^2\mathrm{d}z = -\left(\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} = \cdots\left[\frac{e^3}{12}\right]$$

Mit: $\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{Ee^3}}{\boldsymbol{12(1-\nu^2)}}$ Biegesteifigkeit der Platte:

$$M_r = -B\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)$$

(P9)

Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff'sche Platte)

Modell | **Berechnung** | Lösung

Hooke'sches Gesetz

$$M_\phi = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_\phi \cdot z \, \mathrm{d}z = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right)\int_{-e/2}^{e/2} z^2 \mathrm{d}z$$

$$M_\phi = -B\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right)$$ (P10)

(P9) (P10) in GGW Beziehung (P3)

$$-B\left[\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3} \cdot r + \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \nu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} - \nu \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right] - F_{rz} \cdot r = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = -\frac{F_{rz}}{B}$$

Kreisplatten DGL

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\right] = -\frac{F_{rz}}{B}}$$

Vergleich von P8, P9 und P10 liefert für $z = \pm\frac{e}{2}$

$$\boxed{\sigma_r = \pm\frac{6M_r}{e^2}} \quad \boxed{\sigma_\Phi = \pm\frac{6M_\phi}{e^2}} \quad \boxed{\tau_{rz} = \frac{3F_{rz}}{2e}\left(1-\frac{4z^2}{e^2}\right) = 0} \quad \boxed{\tau_{rzm} = \frac{F_{rz}}{e}}$$

Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff‘sche Platte)

Modell | Berechnung | **Lösung**

Partikuläre und homogene Lsg.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\right] = -\frac{F_{rz}}{B}}$$

DGL für Kreisplatte: linear, 3. Ordnung, inhomogen
w_h und w_p getrennt ermitteln w_p aus Querkraftverlauf ableiten

$w = w_h + w_p$

Homogene Lösung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w_h}{\mathrm{d}r}\right)\right] = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\,) = a_1^* \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\,) = a_1^* r$$

$$r\frac{\mathrm{d}w_h}{\mathrm{d}r} = a_1^* \cdot \frac{r^2}{2} + a_2 \rightarrow \frac{\mathrm{d}w_h}{\mathrm{d}r} = a_1^* \cdot \frac{r}{2} + a_2\frac{1}{r}$$

$$w_h = a_1^* \cdot \frac{r^2}{4} + a_2 \ln(r) + a_3$$

$$\boxed{w_h = a_1 r^2 + a_2 \ln(r) + a_3} \quad mit\ \frac{a_1^*}{4} = a_1$$

Partikuläre Lösung

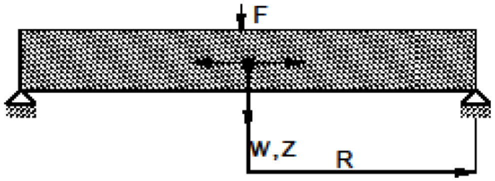
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w_p}{\mathrm{d}r}\right)\right] = -\frac{F_{rz}}{B}}$$

$F_{r,z}(r)$ = Querkraftverlauf, muss für konkreten Lastfall ermittelt werden

Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff‘sche Platte)

Rand- + Übergangsbedingungen

Drehbarer Plattenrand:



$r = R \rightarrow w = 0$

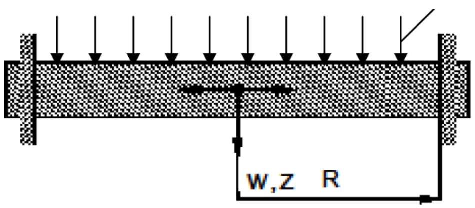
$M_r = 0$

$r = 0 \rightarrow w \rightarrow$ endlich

bzw.

$\frac{dw}{dr} = 0 \quad a_2 = 0$

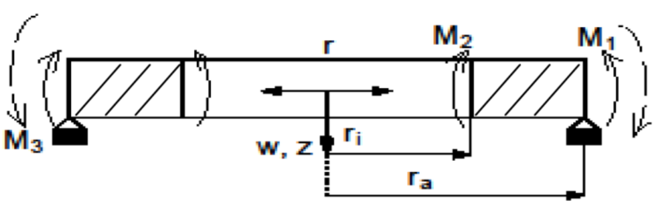
Starre Einspannung:



$r = R \rightarrow w = 0$

$\frac{dw}{dr} = 0$

$a_2 = 0$ (s.o.)

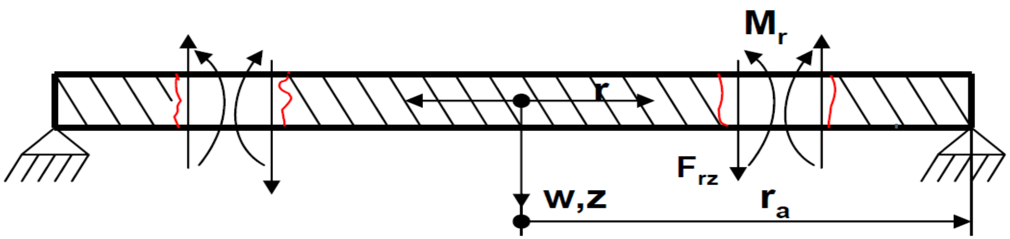


	Fall 1 (M_1, M_2)	**Fall 2 (M_2, M_3)**
$r = r_i \rightarrow$	$M_r = M_2$	$M_r = M_2$
$r = r_a \rightarrow$	$M_r = M_1$ $w = 0$	$(M_r = -M_3)$ $w = 0$

Die dünne Kreisplatte (Kirchhoff‘sche Platte)

Zusammenfassung

- Zuordnung Koordinatensystem / Schnittgrößen



- Aufstellen der DGL

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\right] = -\frac{F_{rz}}{B}} \quad \boxed{B = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}}$$

$$w = w_p + a_1 r^2 + a_2 \ln r + a_3$$

- Momente $\rightarrow$ $M_\phi = -B\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}\right)$ $\quad M_r = -B\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)$

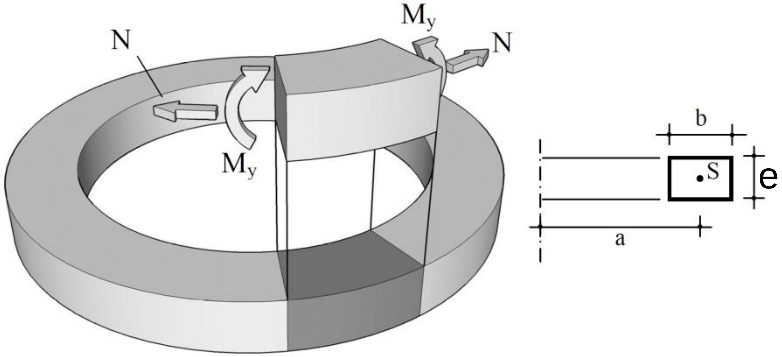
- Spannungen $\rightarrow$ $\boxed{\sigma_r = \pm\frac{6M_r}{e^2}}$ $\boxed{\sigma_\phi = \pm\frac{6M_\phi}{e^2}}$ $\boxed{\tau_{rz} = \frac{3F_{rz}}{2e}\left(1-\frac{4z^2}{e^2}\right) = 0}$ $\boxed{\tau_{rzm} = \frac{F_{rz}}{e}}$

Der Kreisring

Modell | Berechnung | Lösung

Annahmen und Skizze

1. Radienverhältnis $1 < \frac{r_a}{r_i} \leq 1{,}25$ und annähernd quadratischer Querschnitt
2. Alle übrigen Spannungen gegenüber σ_Φ vernachlässigbar
3. Verformungen sind die radiale Verschiebung „u" und „d" sowie Verdrehwinkel α
4. Allen Punkten des Querschnitts werden gleiche Verformungen und Spannungen zugeordnet, wobei die Größen auf den Kreis durch den Flächenschwerpunkt bezogen werden.



Rotationssymmetrische Belastung kann auf zwei Belastungsfälle zurückgeführt werden:

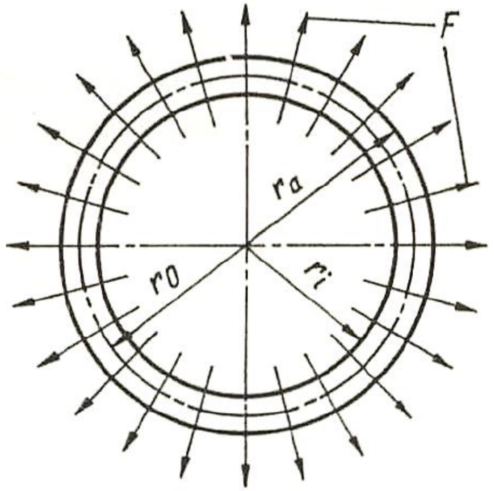
- Radiale Linienkraft F
- Radiales Biegemoment M

Der Kreisring

Modell | Berechnung | Lösung

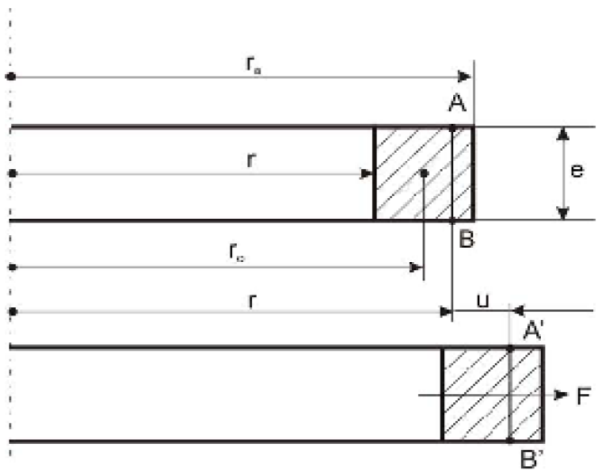
Radialkraft und Umfangsdehnung

- F = längenbezogene Ringkraft, bezogen auf r_0
- F verursacht näherungsweise gleiche radiale Verschiebung in allen Querschnittspunkten



$$r_0 = \frac{(r_i + r_a)}{2}$$

Umfangsdehnung



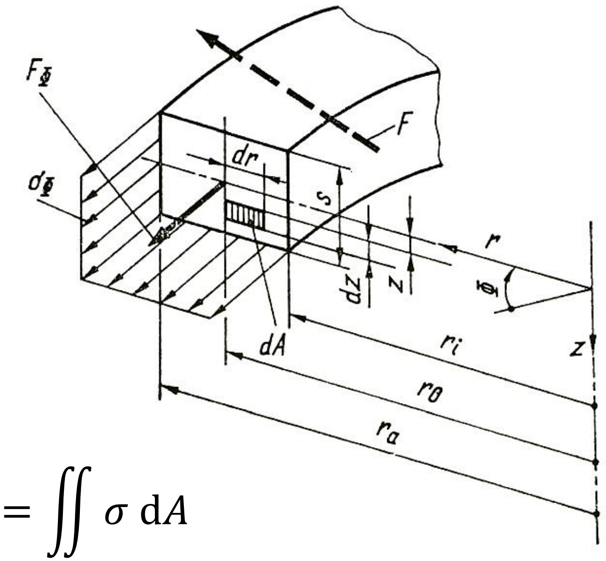
$$\varepsilon_\Phi = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \approx \boxed{\frac{u}{r_0}}$$

(R_1)

Der Kreisring

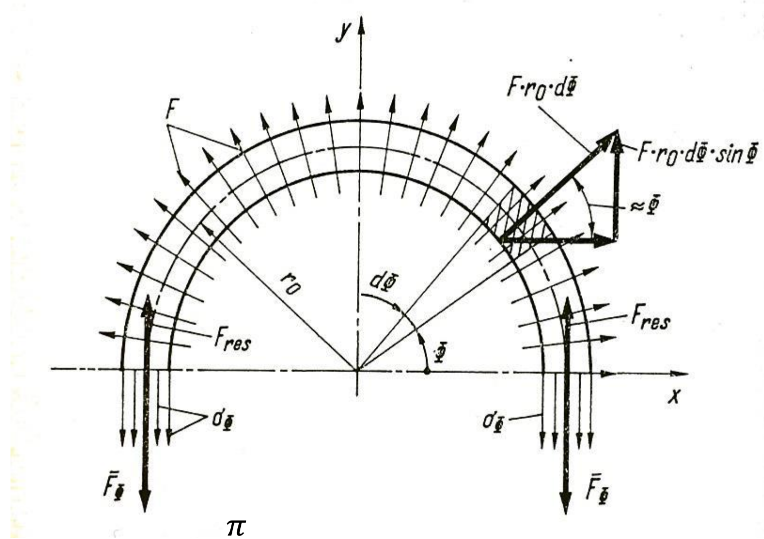
Modell | **Berechnung** | Lösung

Radialkraft und Umfangsdehnung



$$\bar{F}_\phi = \iint\limits_{(A)} \sigma \, \mathrm{d}A$$

$$\bar{F}_\phi = \sigma \cdot A \quad \text{(R2)}$$



$$\overline{2F_\phi} = \int_0^\pi F\, r_0 \sin\phi \;\, \mathrm{d}\phi = F \cdot r_0 [-\cos\phi]_0^\pi$$

$$\bar{F}_\phi = F \cdot r_0 \quad \text{(R3)}$$

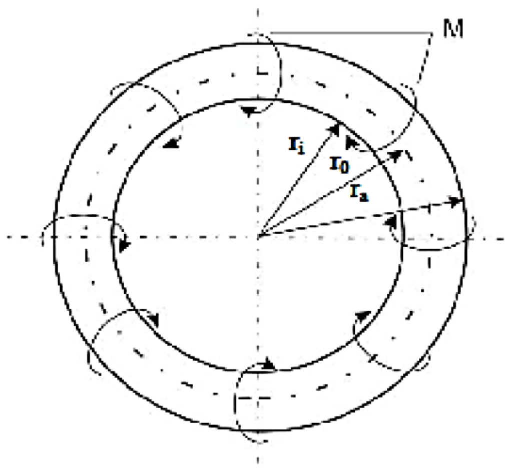
(R2) = (R3) $\quad \sigma_\phi = \dfrac{F \cdot r_0}{A}$ (R4)

(R1) + Hooke → $\quad u = \dfrac{F \cdot r_0^2}{EA}$ (R5)

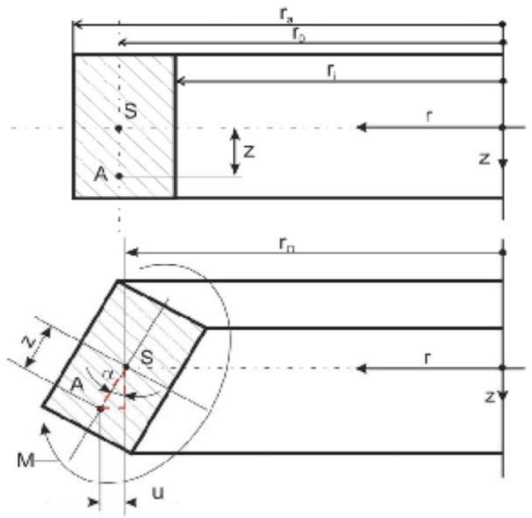
Der Kreisring

Modell | Berechnung | Lösung

Radialmoment und Umfangsdehnung



- M = längenbezogenes Ringmoment, bezogen auf den Kreis mit dem Radius r_0
- M verdreht den Ringquerschnitt um den Flächenschwerpunkt S um den Betrag des Winkels α



$$\varepsilon_\phi = \frac{u}{r_0}$$

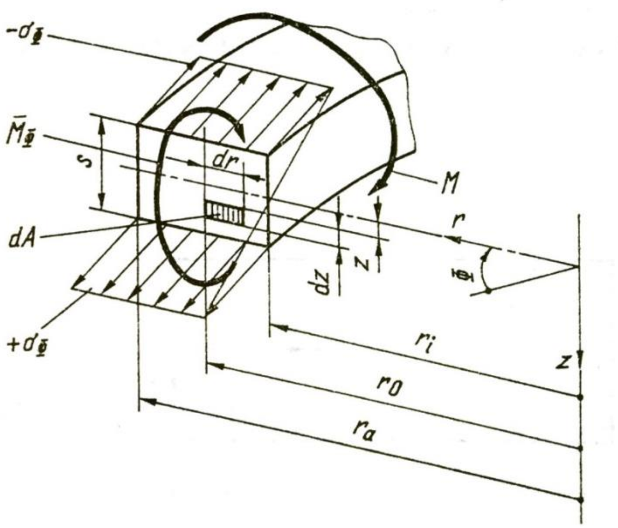
$$u = z \cdot \alpha$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{z \cdot \alpha}{r_0}$$ (R6)

Der Kreisring

Modell | **Berechnung** | Lösung

Umfangsmoment



$$\bar{M}_\phi = \iint\limits_{(A)} \sigma_\phi(z) \cdot z \,\mathrm{dzdr} = (r_a - r_i) \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_\phi(z) \cdot z \,\mathrm{dz}$$

$$\sigma_\phi(z) = \sigma_\phi \frac{z}{e/2} \qquad \bar{M}_\phi = (r_a - r_i) \frac{\sigma_\phi}{e/2} \int_{-e/2}^{e/2} z^2 \mathrm{dz}$$

$$\bar{M}_\phi = (r_a - r_i) \frac{e^3}{12} \frac{\sigma_\phi}{e/2}$$

$$\boxed{\bar{M}_\phi = I \frac{\sigma_\phi}{e/2}}$$ (R7)

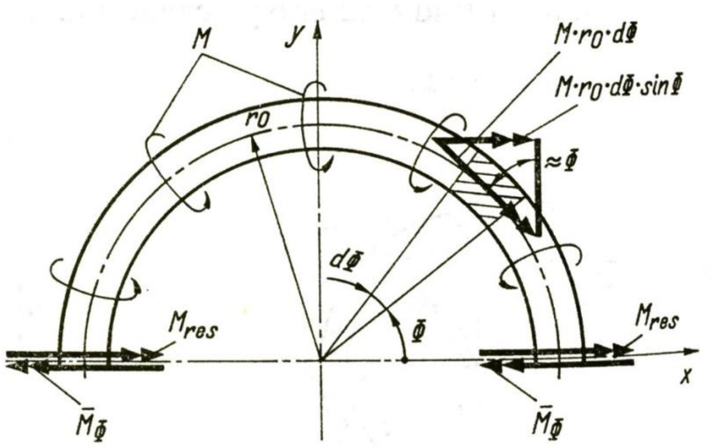
I = Flächenträgheitsmoment des Ringquerschnittes

$$I = \frac{(r_a - r_i)e^3}{12}; \quad W = \frac{(r_a - r_i)e^2}{6}$$

Der Kreisring

Modell | **Berechnung** | Lösung

GGW gegen Verdrehen



$$2\bar{M}_\phi = \int_0^\pi M\, r_0 \sin\phi \;\mathrm{d}\phi$$

$$\bar{M}_\phi = M \cdot r_0$$ (R8)

(R7) = (R8) → $$\sigma_\phi = \frac{M \cdot r_0}{I} \cdot \frac{e}{2}$$ (R9)

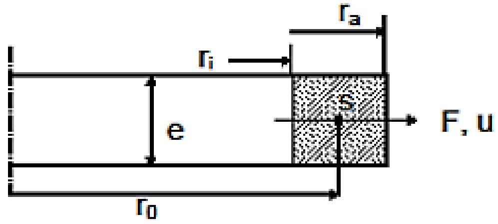
Hooke‘sches Gesetz + (R9) & (R6) $$\alpha = \frac{M\, r_0^2}{E \cdot I}$$ (R10)

$$\sigma_\phi = \pm \frac{M\, r_0}{W}$$

$$W = \frac{I}{e/2} = \frac{(r_a - r_i)e^2}{6}$$ (R11) → Widerstandsmoment des Ringquerschnittes

Der Kreisring

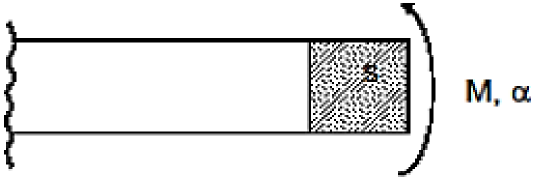
Zusammenfassung



$$\frac{r_a}{r_i} \leq 1{,}25$$

$$\sigma_\phi = \frac{F \cdot r_0}{A}$$

$$u = \frac{F \cdot r_0^2}{E\ A}$$



$$\sigma_\phi = \pm \frac{M \cdot r_0}{W} \qquad \alpha = \frac{M r_0^2}{E \cdot I}$$

Geometrische Größen für den Rechteckquerschnitt:

$$A = (r_a - r_i) \cdot e$$ - Ringquerschnitt

$$I = \frac{(r_a - r_i) e^3}{12}$$ - Flächenträgheitsmoment

$$W = \frac{(r_a - r_i) e^2}{6}$$ - Widerstandsmoment

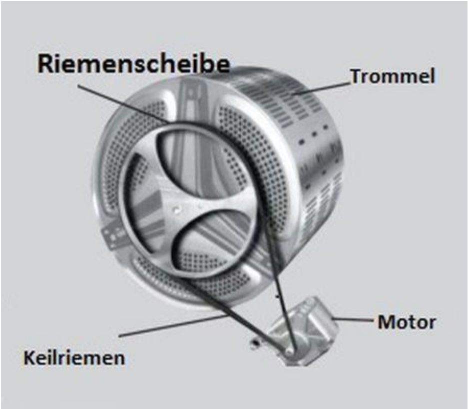
Zum Abschluss

- **Berechnungsbeispiele**

Scheibe: Skript S. 2.37 und 2.38

Platte: Skript S. 2.27 bis 2.30

Ring: S. 2.45



Trommel-Scheibe, themetempest.com

Mannloch-Abdeckung, stb-umwelttechnik.de

Ring vom Autoklav, wikipedia