

# Finite Volumen Verfahren erster Ordnung

University of Stuttgart

Studentenvortrag  
December 3, 2022

# Presentation Overview

## ① Grundlagen

- Schwache Form
- Flussberechnung
- Blocks
- Columns

## ② Ergebnisse

- Table
- Figure

## ③ Mathematics

## ④ Referencing

Die hyperbolische Differenzialgleichung

$$U_t + \nabla \cdot \mathbb{F}^C(U) = 0 \quad (1)$$

stellt eine Anforderung an die Differenzierbarkeit.

- Es treten Unstetigkeiten im Strömungsfeld auf  
⇒ Schwache Form

$$\int_V U_t \phi \, dx + \int_V \nabla \cdot \mathbb{F}^C(U) \phi \, dx = 0, \quad \mathbf{x} = [x, y]^T \quad (2)$$

Anwendung des Satzes von Gauß ergibt

$$V_i U_{i,t} + \oint_{\partial V_i} \mathbb{F}^C(U_{RP}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (3)$$

# Schwache Form - Lösung des Oberflächenintegrals

- Numerische Lösung des Oberflächenintegrals  $\Rightarrow$  Rand eines Kontrollvolumens besteht aus stückweise glatten Elementen.

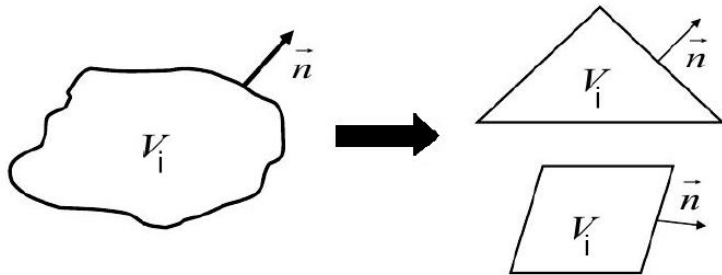


Figure: KV mit stückweise glatten Kanten

## Vorgehen

- 1 Diskretisierung des Rechengebiets
- 2 Transformation der Zustände in ein lokales Koordinatensystem
- 3 Berechnung des numerischen Flusses (1D Riemann Problem)
- 4 Rücktransformation in globales Koordinatensystem

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbb{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & -n_2 & 0 \\ 0 & n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Die Transformation ist nur zulässig, wenn das Problem Rotationsinvariant ist.

# Vergleich verschiedener Riemann Löser

## TORO3 Testcase

Riemann Löser	Rechenzeit [s]	$L_1[-]$	$L_2[-]$	$L_{inf}[-]$
Godunov	0,0052	2,13E-1	6,34E-1	3,32
Roe 3	0,0027	2,16E-1	6,35E-1	3,33
HLL	0,0026	2,15E-1	6,32E-1	3,38
HLLE	0,0036	2,15E-1	6,32E-1	3,38
HLLC	0,0029	2,13E-1	6,34E-1	3,32
Lax-Friedrichs	0,0023	2,60E-1	6,99E-1	3,45
Steger-Warming	0,0029	2,19E-1	6,41E-1	3,42
AUSMD	0,0026	2,12E-1	6,31E-1	3,31

**Table:** Rechenzeit und Diskretisierungsfehler verschiedener Riemann Löser

# Konvergenzordnung mit AUSMD Riemann Löser

## 2D SineWave01 Testcase

Die empirische Konvergenzordnung des Verfahrens ergibt sich zu

$$n = \frac{\log(\frac{E_1}{E_2})}{\log(\frac{h_1}{h_2})},$$

wobei E die Diskretisierungsfehler und h den gemittelten Gitterabstand darstellen.

Gitter	Rechenzeit [s]	$L_1[-]$	$L_2[-]$	$L_{inf}[-]$	$n_{L1}[-]$	$n_{L2}[-]$	$n_{Linf}[-]$
100x100	1,02	3,37E-3	4,28E-3	1,11E-2	0,970	0,973	0,954
200x200	8,20	1,72E-3	2,18E-3	5,73E-3	0,987	0,987	0,968
400x400	61,79	1,72E-3	2,18E-3	5,73E-3	0,990	0,992	0,976
800x800	488,60	4,37E-4	5,53E-4	1,49E-3	0,997	0,992	0,977
1600x1600	3985,18	2,19E-4	2,78E-4	7,57E-4			

**Table:** Rechenzeit, Diskretisierungsfehler und empirische Konvergenzordnung

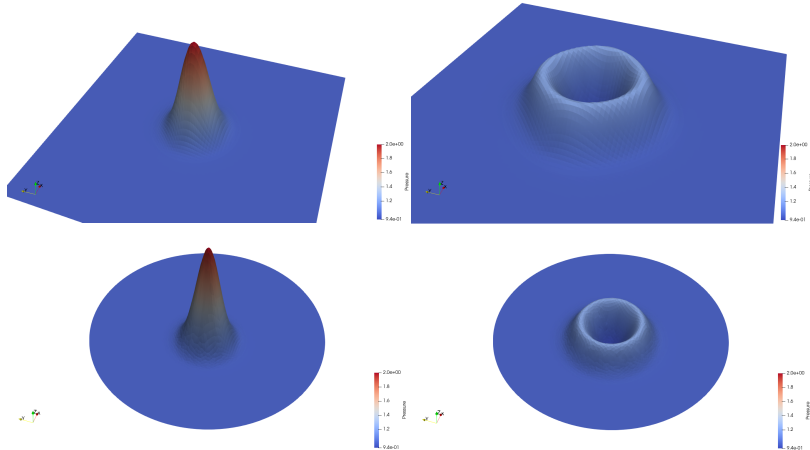
# Druckfeld des SineWaveO1 Testcase



Figure: SineWave mit AUSDM auf einem kartesischen 1600x1600 Netz



# Druckfeld des Gausspuls



**Figure:** Gausspuls auf kartesischem Gitter (oben) und unstrukturiertem kreisförmigem Gitter (unten)

# Blocks of Highlighted Text

## Block Title

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue.

## Example Block Title

Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan.

## Alert Block Title

Pellentesque sed tellus purus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos.

Suspendisse tincidunt sagittis gravida. Curabitur condimentum, enim sed venenatis rutrum, ipsum neque consectetur orci.

## Heading

- 1 Statement
- 2 Explanation
- 3 Example

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table: Table caption

The logo for Creodocs, featuring the word "creodocs" in a bold, lowercase, sans-serif font. The letters are dark gray or black, and the overall style is clean and modern.

Figure: Creodocs logo.

## Definition

A **prime number** is a number that has exactly two divisors.

## Example

- 2 is prime (two divisors: 1 and 2).
- 3 is prime (two divisors: 1 and 3).
- 4 is not prime (**three** divisors: 1, 2, and 4).

You can also use the `theorem`, `lemma`, `proof` and `corollary` environments.

# Theorem, Corollary & Proof

Theorem (Mass–energy equivalence)

$$E = mc^2$$

Corollary

$$x + y = y + x$$

Proof.

$$\omega + \phi = \epsilon$$



$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos \theta + \frac{3}{4} \cos 3\theta \quad (6)$$



## Example (Theorem Slide Code)

```
\begin{frame}  
\frametitle{Theorem}  
\begin{theorem}[Mass--energy equivalence]  
$E = mc^2$  
\end{theorem}  
\end{frame}
```

Slide without title.

An example of the `\cite` command to cite within the presentation:

This statement requires citation [Smith, 2022, Kennedy, 2023].

# References



John Smith (2022)

Publication title

*Journal Name* 12(3), 45 – 678.



Annabelle Kennedy (2023)

Publication title

*Journal Name* 12(3), 45 – 678.

## Smith Lab

- Alice Smith
- Devon Brown

## Cook Lab

- Margaret
- Jennifer
- Yuan

## Funding

- British Royal Navy
- Norwegian Government

# The End

Questions? Comments?