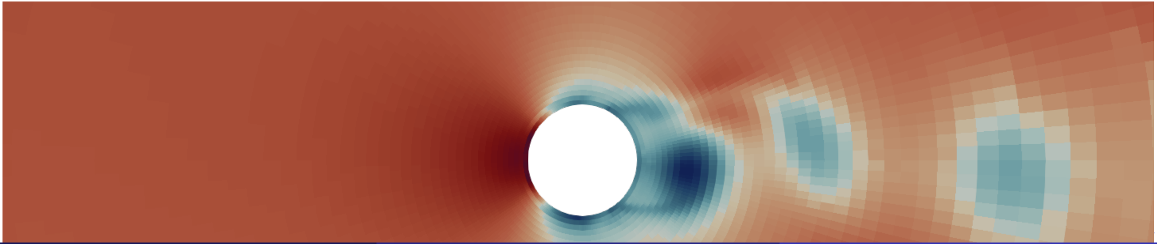
Navier-Stokes Gleichungen

University of Stuttgart IAG

Studentenvortrag
5. Februar, 2023



Überblick

Navier-Stokes Gleichungen

Eulergleichungen sind Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen für $\mathrm{Re} \to \infty$

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho v) &= 0 \\ (\rho v)_t + \nabla \cdot ((\rho v) \circ v) + \nabla p &= \nabla \tau \\ e_t + \nabla \cdot (v(e+p)) &= \nabla \cdot (\tau \cdot v) - \nabla \cdot q \end{aligned} \tag{1}$$

Zusätzliche Terme:
Reibungstensor $\tau = \mu(\nabla v + (\nabla v)^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v)$
Wärmeleitung $q = -\frac{c_p \mu}{Pr} \nabla T$

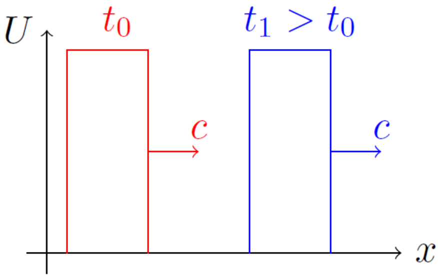
Analog zu den Eulergleichungen können auch die Navier-Stokes-Gleichungen in die Flussformulierung gebracht werden.

$$\mathrm{U}_t + \nabla \cdot \mathbb{F}^C(\mathrm{U}) = \nabla \cdot \mathbb{F}^D(\mathrm{U}, \nabla \mathrm{U}) \tag{2}$$

Navier-Stokes Flüsse

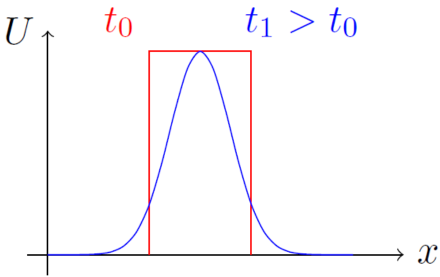
konvektive Flüsse:

- hyperbolisch
- Transport von Information



viskose Flüsse:

- parabolisch
- Dissipation und Wärmeleitung



Viskoste Flüsse

$$\mathbf{F}_x^D = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu\left(\frac{4}{3}(v_1)_x - \frac{2}{3}(v_2)_y\right) \\ \mu\left((v_1)_y + (v_2)_x\right) \\ \mu\left[v_1\left(\frac{4}{3}(v_1)_x - \frac{2}{3}(v_2)_y\right) + v_2\left((v_1)_y + (v_2)_x\right)\right] + \lambda T_x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_y^D = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu\left((v_1)_y + (v_2)_x\right) \\ \mu\left(\frac{4}{3}(v_2)_y - \frac{2}{3}(v_1)_x\right) \\ \mu\left[v_1\left((v_1)_y + (v_2)_x\right) + v_2\left(\frac{4}{3}(v_2)_y - \frac{2}{3}(v_1)_x\right)\right] + \lambda T_y \end{pmatrix}$$

Viskose Zeitschrittbedingung

Parabolischer Charakter der Reibungsterme beeinflussen die Stabilität des numerischen Verfahrens stark $\Rightarrow$ DFL-Bedingung.

DFL-Bedingung:

$$\Delta t \leq \frac{\min(\rho)\Delta x^2}{2\mu} \tag{3}$$

CFL-Bedingung

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max(|v| + c)} \tag{4}$$

viskose Zeitschrittbedingung - projizierte Flächen

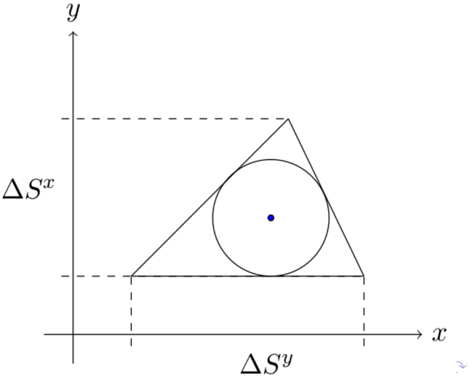
Viskose Zeitschritt wird über die projezierten Längen S_x und S_y der Gitterelemente berechnet.

$$\Delta t_{\text{visc}} = \text{DFL} \frac{S}{4(\Lambda_x + \Lambda_y)} \tag{5}$$

Die viskosen spektralen Radien sind dabei:

$$\Lambda_x = \max\left(\frac{4}{3}, \frac{\gamma}{\text{Pr}}\right) \frac{\mu}{\rho} \frac{S_x^2}{S} \tag{6}$$

$$\Lambda_y = \max\left(\frac{4}{3}, \frac{\gamma}{\text{Pr}}\right) \frac{\mu}{\rho} \frac{S_y^2}{S} \tag{7}$$



Es wird ein sinusförmiger Dichtepuls transporiert.

Raumordnung:	1, 2
μ:	0, 0.01, 0.05, 0.1
Gitterzahl:	100x100, 200x200, 400x400

Die empirische Konvergenzordnung des Verfahrens ergibt sich zu

$$n = \frac{log(\frac{E_1}{E_2})}{log(\frac{h_1}{h_2})}, \tag{8}$$

wobei E die Diskretisierungsfehler und h den gemittelten Gitterabstand darstellen.

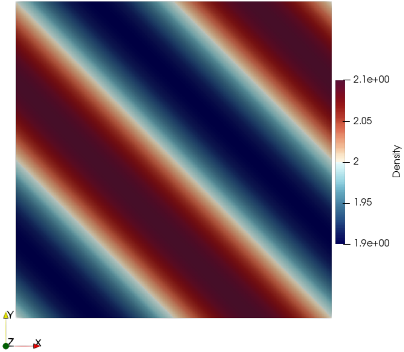


Abbildung: SineWave Testcase Density für $\mu = 0.1$

SineWave Testcase

Konvergenzordnung

Ordnung	μ	n_2-Ordnung	Rechenzeit [s]
1	0	0.980	91.50
1	0.01	0.979	387.41
1	0.05	0.962	1906.77
1	0.1	0.972	3263.09

Tabelle: Rechenzeit und Ordnung bei O1

Ordnung	μ	n_2-Ordnung	Rechenzeit [s]
2	0	1.85	262.63
2	0.01	2.02	1205.84
2	0.05	1.87	6123.78
2	0.1	1.81	11998.56

Tabelle: Rechenzeit und Ordnung bei O1

Blasius Grenzschicht

- Entdimensionalisierung der Größen
- Vergleich der numerischen Ergebnisse mit der analytischen Lösung der Grenzschichtgleichung.
- Implizite Berechnung (DFL-Bedingung)

Grenzschichtgleichung:

$$\delta_{99} = \frac{5 \cdot x}{\sqrt{Re_x}} \tag{9}$$

Abbildung: Axialgeschwindigkeit über einer laminar angeströmten ebenen Platte.

Grenzschichtströmung

Geschwindigkeitsprofil

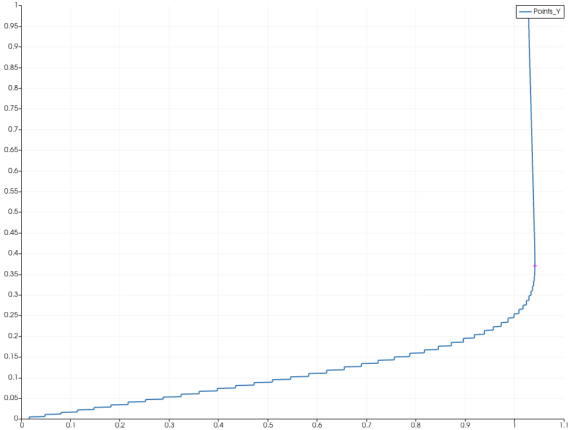


Abbildung: Profil der Axialgeschwindigkeit an der Stelle x=2.

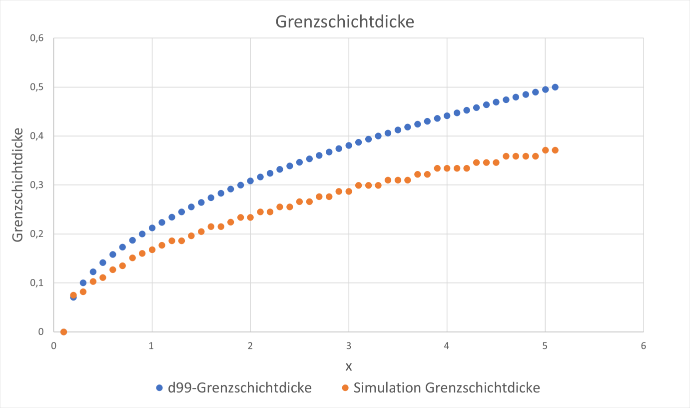
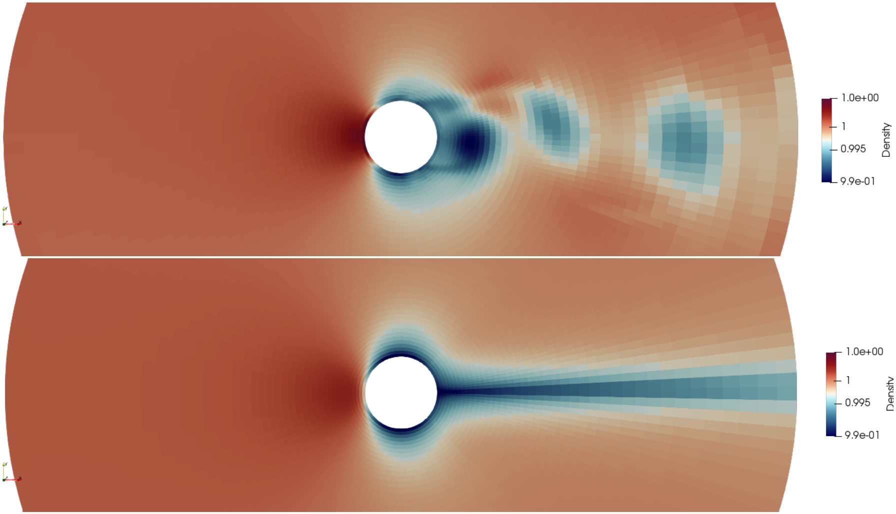


Abbildung: Vergleich der theoretischen Grenzschichtdicke zur Simulation.

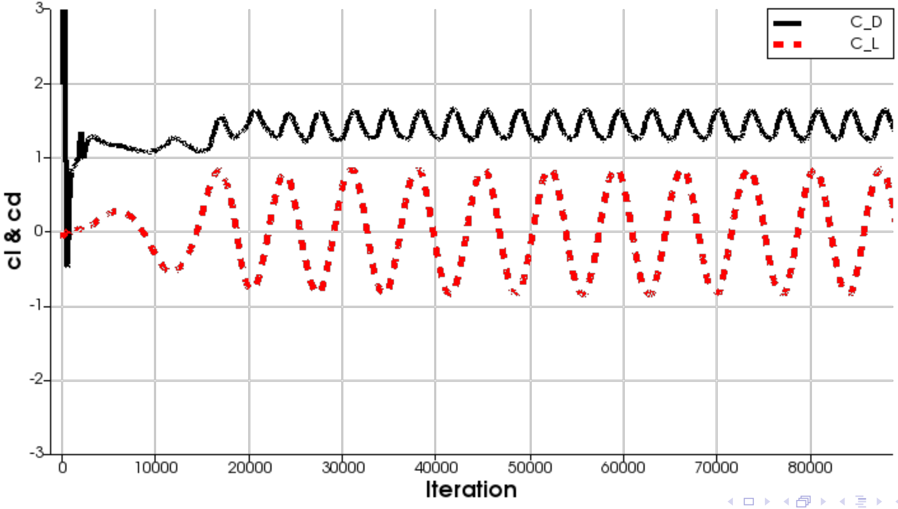
Cylinder Testcase

Viskoser Fall oben - Euler Fall unten



Cylinder Testcase

Vergleich Auftriebs- und Widerstandsbeiwert



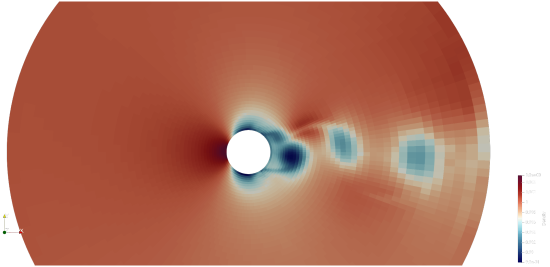
Rechnung	Rechenzeit [s]	$c_l[-]$	$c_d[-]$
$\mu = 0$	150.83	0.001063	0.323603
$\mu = 0.001$	3229.61	[-0.8; 0.8]	[0.8; 1.2]

Tabelle: Rechenzeit und Ordnung bei O1

Lessons learned

- DFL-Bedingung erhöht Rechenzeit unter Umständen spürbar
- Viskosität hat keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten
- Ergebnisse der numerischen Lösung sind Modellabhängig $\Rightarrow$ Vorsicht bei der Konstruktion der Randbedingungen!

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!



Anhang

Ordnung	μ	Gitter	$L_1 - Fehler$	$L_2 - Fehler$	$L_{inf} - Fehler$
1	0	100x100	3.36E-3	4.26E-3	1.11E-2
1	0	200x200	1.71E-3	2.17E-3	5.73E-3
1	0	400x400	8.67E-4	1.10E-3	2.93E-3
2	0	100x100	7.97E-5	1.13E-4	5.16E-4
2	0	200x200	2.04E-5	2.80E-	1.42E-4
2	0	400x400	5.86E-6	7.78E-6	4.05E-5
1	0.01	100x100	3.19E-3	4.06E-3	1.06E-2
1	0.01	200x200	1.59E-3	2.01E-3	6.55E-3
1	0.01	400x400	8.15E-4	1.02E-3	3.89E-3
2	0.01	100x100	5.26E-5	6.79E-5	2.61E-4
2	0.01	200x200	1.25E-5	1.62E-5	7.32E-5
2	0.01	400x400	3.06E-6	4.00E-6	2.23E-5

Flussberechnung auf strukturierten Gittern

1. Satz von Green

$$\int_{v'} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} dx = \oint_{\partial v'} g dx + f dy$$

2. Setze $f = u; g = 0$
3. Integral auflösen

$$V' \frac{\partial u}{\partial x} = \triangle\, y(U_{i,j} + U_{i+1,j})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\triangle\, x}$$

Analog:

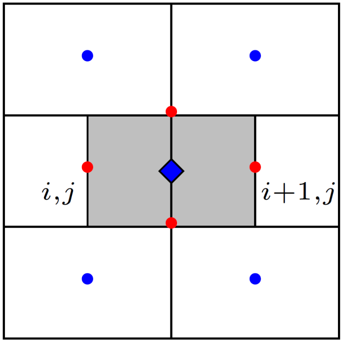
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\triangle\, y}$$

Flussbrechung auf strukturierten Gittern

Bei der Gradientenbestimmung werden Werte an den Seitenmittelpunkten verwendet. Diese werden wie folgt berechnet:

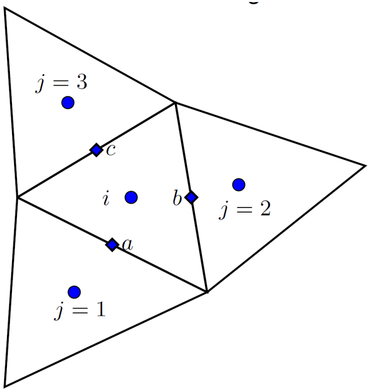
$$U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(U_{i,j}+U_{i,j+1}+U_{i+1,j}+U_{i+1,j+1})$$

$$U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(U_{i,j}+U_{i,j+1}+U_{i+1,j}+U_{i+1,j+1})$$



Flussberechnung auf unstrukturierten Gittern

Im Gegensatz zum strukturierten Gitter müssen auf unstrukturierten Gittern auch die nicht abgeleiteten Größen durch Mittelung der Nachbarzellen bestimmt werden.



$$(v_1)_a = \frac{(v_1)_{i,a} + (v_1)_{j,a}}{2} \tag{10}$$

$$(v_2)_a = \frac{(v_2)_{i,a} + (v_2)_{j,a}}{2} \tag{11}$$

$$(\mu_2)_a = \frac{(\mu)_{i,a} + (\mu)_{j,a}}{2} \tag{12}$$

$$(\lambda)_a = \frac{(\lambda)_{i,a} + (\lambda)_{j,a}}{2} \tag{13}$$

Flussberechnung auf unstrukturierten Gittern

Die Gradienten können auf den Zellseiten nicht effizient mit dem Satz von Green bestimmt werden. Lösung mit dem empirischen Ansatz:

$$\nabla U_a = (\overline{\nabla U})_{i,j} - \left[(\overline{\nabla U})_{i,j} \cdot \vec{t_{i,j}} - \left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{i,j} \right] \vec{t_{i,j}} \tag{14}$$

Dabei ist $\vec{t_{i,j}} = \frac{\vec{r}_{i,j}}{l_{i,j}}$ der Vektor, zu dem der Gradient

$$(\overline{\nabla U})_{i,j} = 0.5(\nabla U_i + \nabla U_j) \tag{15}$$

verwendet wird. Tangential zu $\vec{t_{i,j}}$ wird die Richtungsableitung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{i,j} = \frac{U_j - U_i}{l_{i,j}} \tag{16}$$

verwendet.

Anhang

Ordnung	μ	Gitter	$L_1 - Fehler$	$L_2 - Fehler$	$L_{inf} - Fehler$
1	0.5	100x100	2.98E-3	3.72E-3	1.23E-2
1	0.5	200x200	1.55E-3	1.93E-3	7.00E-3
1	0.05	400x400	7.94E-4	9.91E-4	3.84E-3
2	0.05	100x100	5.08E-5	7.10E-5	3.32E-4
2	0.05	200x200	1.28E-5	1.90E-5	1.16E-4
2	0.05	400x400	3.27E-6	5.20E-6	4.07E-5
1	0.1	100x100	3.22E-3	3.90E-3	1.21E-2
1	0.1	200x200	1.67E-3	2.02E-3	6.73E-3
1	0.1	400x400	8.53E-4	1.03E-3	3.58E-3
2	0.1	100x100	5.58E-5	8.57E-5	4.18E-4
2	0.1	200x200	1.44E-5	2.42E-5	1.52E-4
2	0.1	400x400	3.70E-6	6.88E-6	5.56E-5

Blasius-Gleichung

Die Blasius-Gleichung ist eine Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen und beschreibt die stationäre, inkompressible Strömung auf einer 2D Ebenen Platte auf der sich eine Grenzschicht ausbildet.

$$f''(\theta) + \frac{1}{2} f'(\theta) \cdot \int_0^\theta f(t)\, dt$$