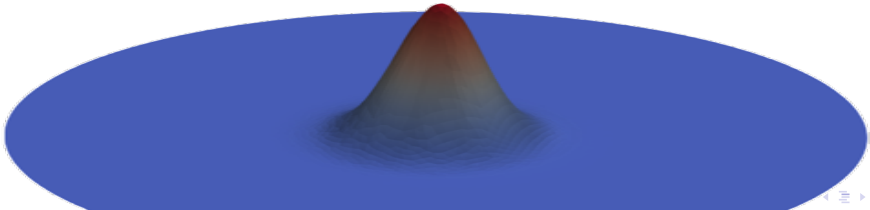


Finite Volumen Verfahren erster Ordnung

University of Stuttgart

Studentenvortrag
December 4, 2022



① Grundlagen

- Diskretisierungsverfahren
- Schwache Form
- Flussberechnung
- Raumoperator und Zeitintegration

② Ergebnisse

- Vergleich verschiedener Riemannlöser
- Konvergenzordnung des SD SineWave01 Testcase
- Validierung mit Gausspuls

③ Lessons learned

Finite Differenzen Verfahren

- punktweise Approximation (Punkte im Raum)

Finite Elemente Verfahren

- polynomiale Approximation
- Für unstetige Lösungen nicht geeignet (Verdichtungsstöße und Kontaktunstetigkeiten)

Finite Volumen Verfahren

- Lösung in Gitterzellen
- Integrale Erhaltung direkt mit dem Verfahren verknüpft

Die hyperbolische Differenzialgleichung

$$U_t + \nabla \cdot \mathbb{F}^C(U) = 0 \quad (1)$$

stellt eine Anforderung an die Differenzierbarkeit.

- Es treten Unstetigkeiten im Strömungsfeld auf
⇒ Schwache Form

$$\int_V U_t \phi \, d\mathbf{x} + \int_V \nabla \cdot \mathbb{F}^C(U) \phi \, d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} = [x, y]^T \quad (2)$$

Anwendung des Satzes von Gauß ergibt

$$V_i U_{i,t} + \oint_{\partial V_i} \mathbb{F}^C(U_{RP}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (3)$$

Schwache Form - Lösung des Oberflächenintegrals

- Numerische Lösung des Oberflächenintegrals \Rightarrow Rand eines Kontrollvolumens (KV) besteht aus stückweise glatten Elementen.

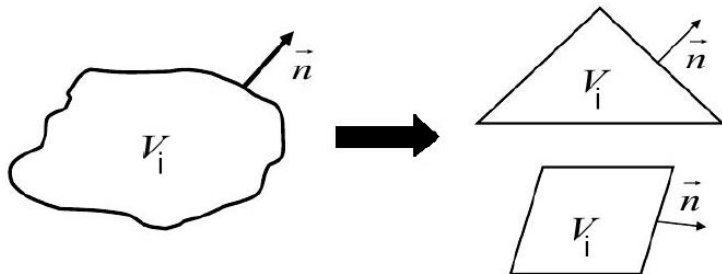


Figure: KV mit stückweise glatten Kanten

Vorgehen

- 1 Diskretisierung des Rechengebiets
- 2 Transformation der Zustände in ein lokales Koordinatensystem
- 3 Berechnung des numerischen Flusses (1D Riemann Problem)
- 4 Rücktransformation in globales Koordinatensystem

Die Transformation ist nur zulässig, wenn das Problem rotationsinvariant ist.

$$\Rightarrow f(\alpha \underline{u}) = \alpha f(\underline{u})$$

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbb{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & -n_2 & 0 \\ 0 & n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Raumoperator und Zeitintegration

Der Raumoperator ergibt sich zu

$$U_{i,t} = R_i \approx -\frac{1}{V_i} \sum_{e_{ij}} |e_{ij}| \mathbb{T}^{-1} g(\mathbb{T} U_i, \mathbb{T}(U)_j; [1, 0]^T) \quad (6)$$

mit dem approximierten numerischen Fluss g .
Dieser wird im lokalen Koordinatensystem ermittelt.

Das FV - Verfahren

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i}{\Delta t} = R_i \quad (7)$$

wird durch die Zeitintegration mit der Rechteckregel vollständig.

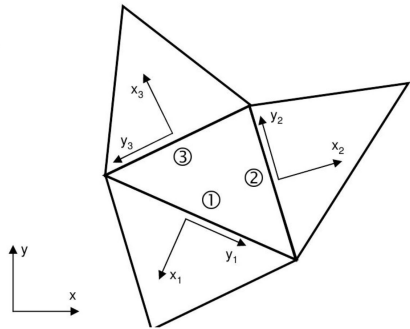
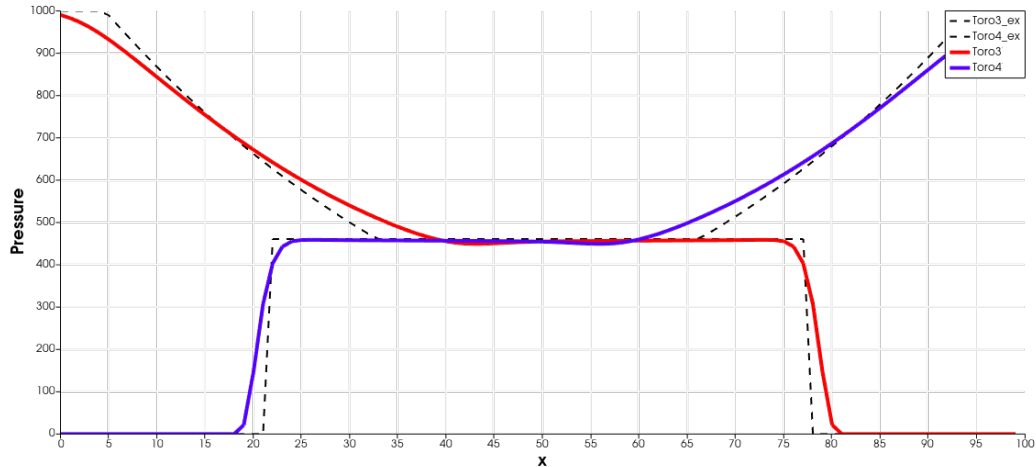
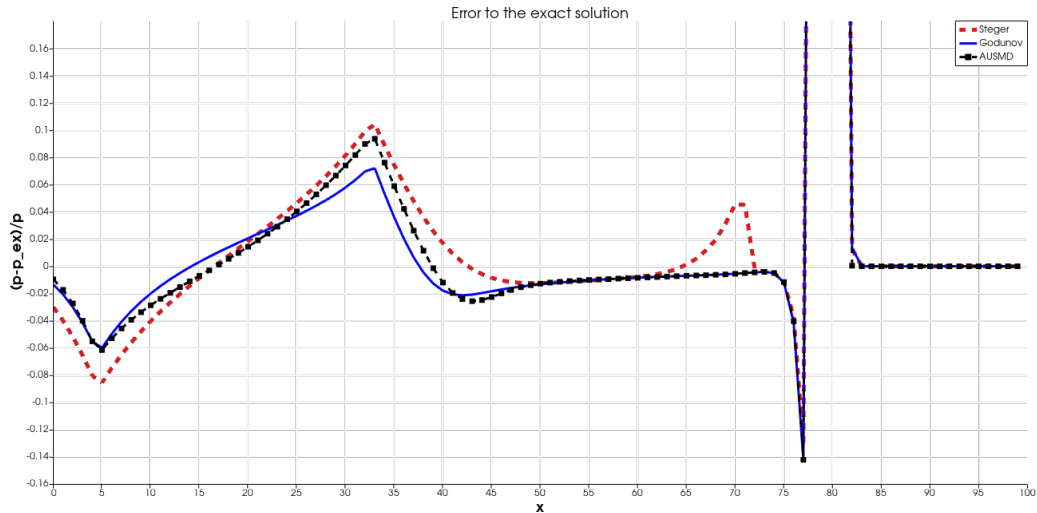


Figure: Lokale Koordinatensysteme im Rechengitter

Fehler zur exakten Lösung



Fehler zur exakten Lösung



Vergleich verschiedener Riemann Löser

TORO3 Testcase

Riemann Löser	Rechenzeit [s]	$L_1[-]$	$L_2[-]$	$L_{inf}[-]$
Godunov	0,0052	2,13E-1	6,34E-1	3,32
Roe 3	0,0027	2,16E-1	6,35E-1	3,33
HLL	0,0026	2,15E-1	6,32E-1	3,38
HLLE	0,0036	2,15E-1	6,32E-1	3,38
HLLC	0,0029	2,13E-1	6,34E-1	3,32
Lax-Friedrichs	0,0023	2,60E-1	6,99E-1	3,45
Steger-Warming	0,0029	2,19E-1	6,41E-1	3,42
AUSMD	0,0026	2,12E-1	6,31E-1	3,31

Table: Rechenzeit und Diskretisierungsfehler verschiedener Riemann Löser

Druckfeld des SineWaveO1 Testcase

Es wird ein sinusförmiger Dichtepuls transportiert.

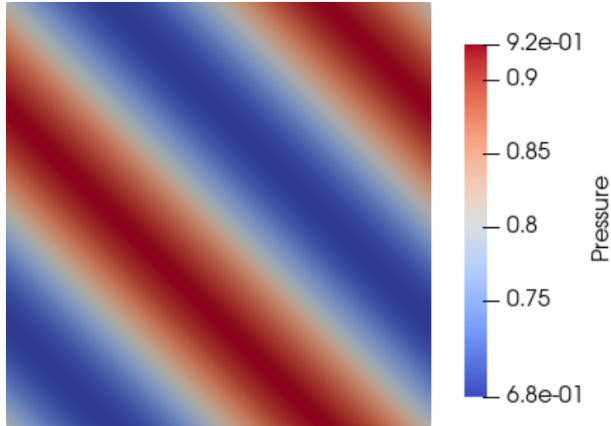


Figure: SineWave mit AUSDM auf einem kartesischen 1600x1600 Netz

Konvergenzordnung mit AUSMD Riemann Löser

2D SineWaveO1 Testcase

Die empirische Konvergenzordnung des Verfahrens ergibt sich zu

$$n = \frac{\log(\frac{E_1}{E_2})}{\log(\frac{h_1}{h_2})},$$

wobei E die Diskretisierungsfehler und h den gemittelten Gitterabstand darstellen.

Gitter	Rechenzeit [s]	$L_1[-]$	$L_2[-]$	$L_{inf}[-]$	$n_{L1}[-]$	$n_{L2}[-]$	$n_{Linf}[-]$
100x100	1,02	3,37E-3	4,28E-3	1,11E-2	0,970	0,973	0,954
200x200	8,20	1,72E-3	2,18E-3	5,73E-3	0,987	0,987	0,968
400x400	61,79	1,72E-3	2,18E-3	5,73E-3	0,990	0,992	0,976
800x800	488,60	4,37E-4	5,53E-4	1,49E-3	0,997	0,992	0,977
1600x1600	3985,18	2,19E-4	2,78E-4	7,57E-4			

Table: Rechenzeit, Diskretisierungsfehler und empirische Konvergenzordnung

Druckfeld des Gausspuls

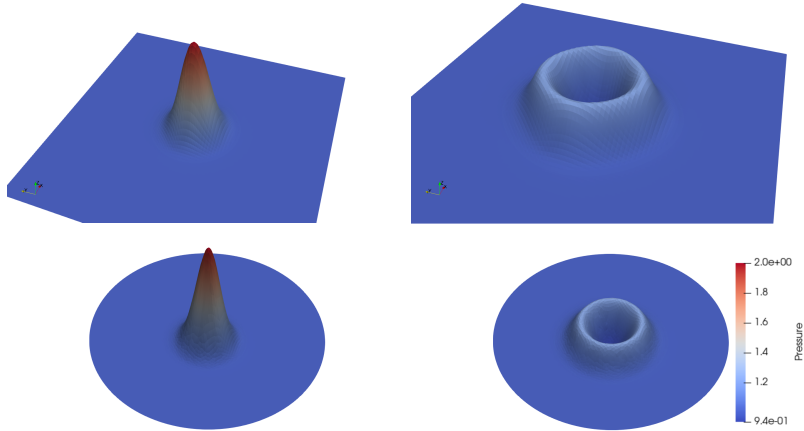


Figure: Gausspuls auf kartesischem Gitter (oben) und unstrukturiertem kreisförmigem Gitter (unten)

- Schwache Formulierung der Transportgleichung erlaubt die Abbildung von Unstetigkeiten
- Numerische Lösung \Rightarrow Rand des KV muss aus stückweise glatten Elementen bestehen
- Bei rotationsinvarianten Problemen kann die Flussberechnung in einem lokalen Koordinatensystem eindimensional erfolgen

The End

Questions? Comments?