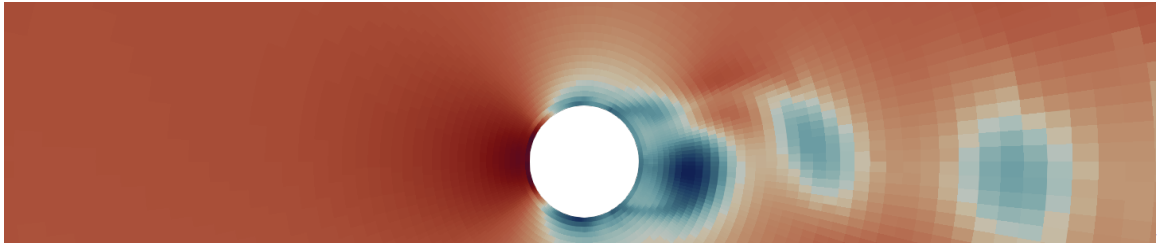


Navier-Stokes Gleichungen

University of Stuttgart IAG

Studentenvortrag
6. Februar, 2023



① Grundlagen

Navier-Stokes Gleichungen
viskose Zeitschrittbedingung

② Ergebnisse

SineWave Testcase
Blasius Boundary Layer
Zylinderumströmung

③ Lessons learned

Flussberechnung

Navier-Stokes Gleichungen

Eulergleichungen sind Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen für $\text{Re} \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\rho_t + \nabla \cdot (\rho v) &= 0 \\ (\rho v)_t + \nabla \cdot ((\rho v) \circ v) + \nabla p &= \nabla \tau \\ e_t + \nabla \cdot (v(e + p)) &= \nabla \cdot (\tau \cdot v) - \nabla \cdot q\end{aligned}\tag{1}$$

Zusätzliche Terme:

Reibungstensor $\tau = \mu(\nabla v + (\nabla v)^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v)$

Wärmeleitung $q = -\frac{c_p \mu}{Pr} \nabla T$

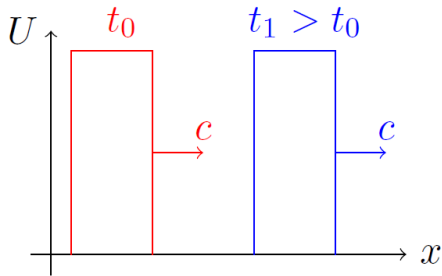
Analog zu den Eulergleichungen können auch die Navier-Stokes-Gleichungen in die Flussformulierung gebracht werden.

$$U_t + \nabla \cdot \mathbb{F}^C(U) = \nabla \cdot \mathbb{F}^D(U, \nabla U)\tag{2}$$

Navier-Stokes Flüsse

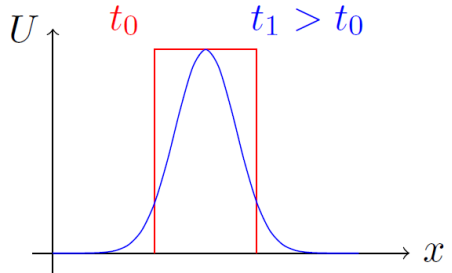
konvektive Flüsse:

- hyperbolisch
- Transport von Information



viskose Flüsse:

- parabolisch
- Dissipation und Wärmeleitung



$$\mathbf{F}_x^D = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \left(\frac{4}{3} (v_1)_x - \frac{2}{3} (v_2)_y \right) \\ \mu \left((v_1)_y + (v_2)_x \right) \\ \mu \left[v_1 \left(\frac{4}{3} (v_1)_x - \frac{2}{3} (v_2)_y \right) + v_2 \left((v_1)_y + (v_2)_x \right) \right] + \lambda T_x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_y^D = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \left((v_1)_y + (v_2)_x \right) \\ \mu \left(\frac{4}{3} (v_2)_y - \frac{2}{3} (v_1)_x \right) \\ \mu \left[v_1 \left((v_1)_y + (v_2)_x \right) + v_2 \left(\frac{4}{3} (v_2)_y - \frac{2}{3} (v_1)_x \right) \right] + \lambda T_y \end{pmatrix}$$

Parabolischer Charakter der Reibungsterme beeinflussen die Stabilität des numerischen Verfahrens stark \Rightarrow DFL-Bedingung.

DFL-Bedingung:

$$\Delta t \leq \frac{\min(\rho) \Delta x^2}{2\mu} \quad (3)$$

CFL-Bedingung

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max(|v| + c)} \quad (4)$$

viskose Zeitschrittbedingung - projizierte Flächen

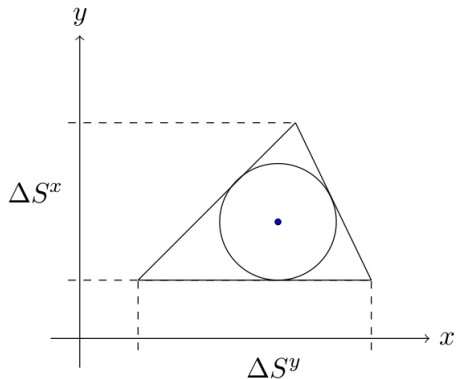
Viskose Zeitschritt wird über die projizierten Längen S_x und S_y der Gitterelemente berechnet.

$$\Delta t_{\text{visc}} = \text{DFL} \frac{S}{4(\Lambda_x + \Lambda_y)} \quad (5)$$

Die viskosen spektralen Radien sind dabei:

$$\Lambda_x = \max\left(\frac{4}{3}, \frac{\gamma}{\text{Pr}}\right) \frac{\mu}{\rho} \frac{S_x^2}{S} \quad (6)$$

$$\Lambda_y = \max\left(\frac{4}{3}, \frac{\gamma}{\text{Pr}}\right) \frac{\mu}{\rho} \frac{S_y^2}{S} \quad (7)$$



SineWave Testcase

Konvergenzordnung

Es wird ein sinusförmiger Dichtepuls transportiert.

Raumordnung: 1, 2

μ : 0, 0.01, 0.05, 0.1

Gitterzahl: 100x100, 200x200, 400x400

Die empirische Konvergenzordnung des Verfahrens ergibt sich zu

$$n = \frac{\log(\frac{E_1}{E_2})}{\log(\frac{h_1}{h_2})}, \quad (8)$$

wobei E die Diskretisierungsfehler und h den gemittelten Gitterabstand darstellen.

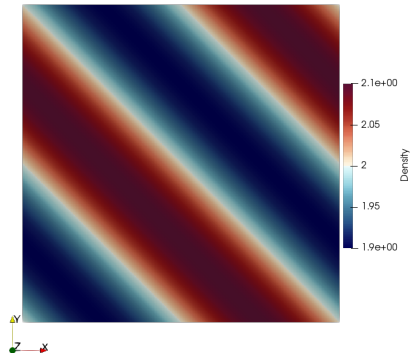


Abbildung: SineWave Testcase
Density für $\mu = 0.1$

SineWave Testcase

Konvergenzordnung

Ordnung	μ	n_2 -Ordnung	Rechenzeit [s]
1 (E)	-	0.983	68.11
1 (NS)	0	0.980	91.50
1 (NS)	0.01	0.979	387.41
1 (NS)	0.05	0.962	1906.77
1 (NS)	0.1	0.972	3263.09

Tabelle: Rechenzeit (400x400 Zellen) und Ordnung bei O1.

SineWave Testcase

Konvergenzordnung

Ordnung	μ	n_2 -Ordnung	Rechenzeit [s]
2 (E)	-	1.84	300.55
2 (NS)	0	1.85	262.63
2 (NS)	0.01	2.02	1205.84
2 (NS)	0.05	1.87	6123.78
2 (NS)	0.1	1.81	11998.56

Tabelle: Rechenzeit (400x400 Zellen) und Ordnung bei O2.

- Entdimensionalisierung der Größen
- Vergleich der numerischen Ergebnisse mit der analytischen Lösung der Grenzschichtgleichung.
- Implizite Berechnung (DFL-Bedingung)

Grenzschichtgleichung:

$$\delta_{99} = \frac{5 \cdot x}{\sqrt{Re_x}} \quad (9)$$



Abbildung: Axialgeschwindigkeit über einer laminar angeströmten ebenen Platte.

Grenzschichtströmung

Geschwindigkeitsprofil

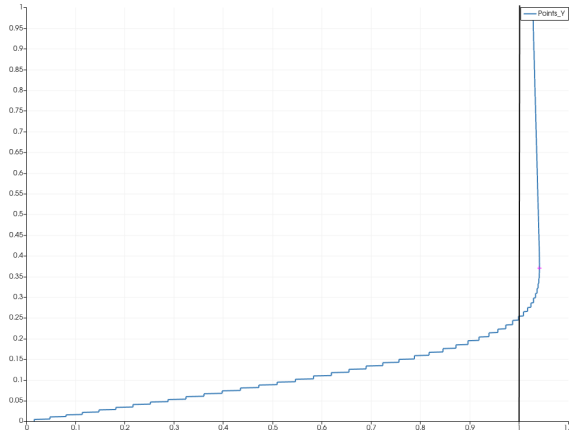


Abbildung: Profil der Axialgeschwindigkeit an der Stelle $x=2$.

Grenzschichtströmung

Grenzschichtdicke

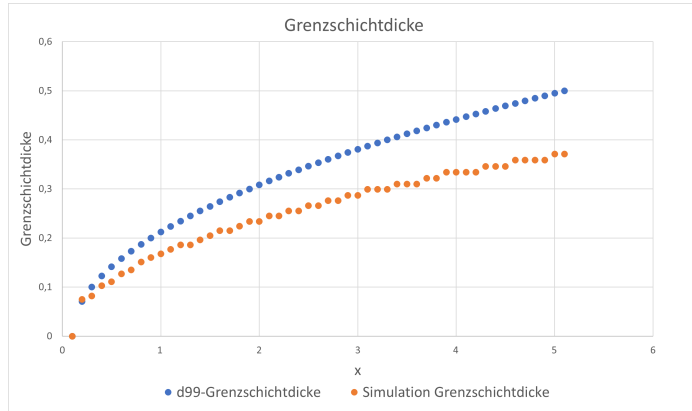
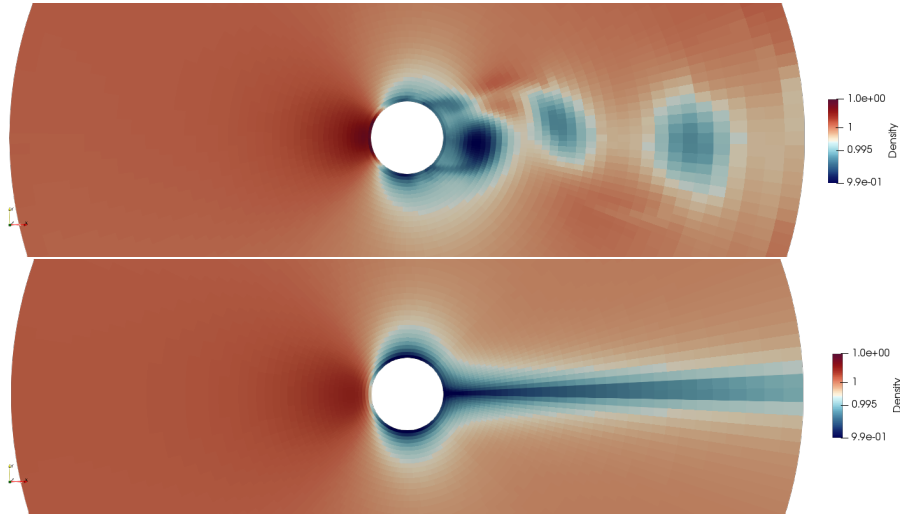


Abbildung: Vergleich der theoretischen Grenzschichtdicke zur Simulation.

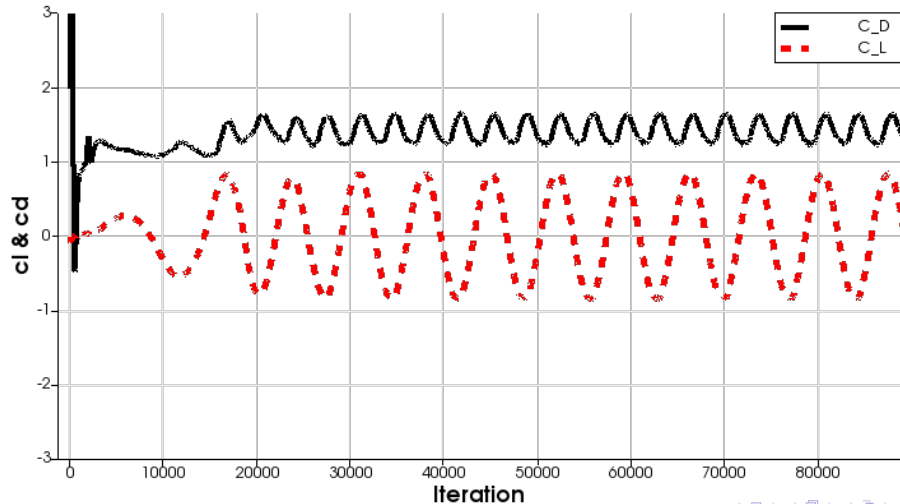
Cylinder Testcase

Viskoser Fall oben - Euler Fall unten



Cylinder Testcase

Auftriebs- und Widerstandsbeiwert



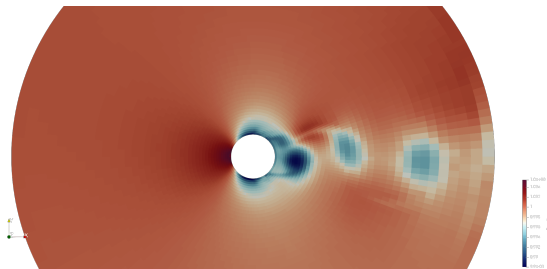
Cylinder Testcase

Vergleich Auftriebs- und Widerstandsbeiwert

Rechnung	Rechenzeit [s]	$c_l[-]$	$c_d[-]$
$\mu = 0$	150.83	0.001063	0.323603
$\mu = 0.002$	3229.61	[-0.8; 0.8]	[1.259; 1.63]

- DFL-Bedingung erhöht Rechenzeit unter Umständen spürbar
- Viskosität hat keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten
- Turbulenz ist ein 3-dimensionales Phänomen
- Ergebnisse der numerischen Lösung sind Modellabhängig \Rightarrow Vorsicht bei der Konstruktion der Randbedingungen!

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!



Ordnung	μ	Gitter	L_1 – Fehler	L_2 – Fehler	L_{inf} – Fehler
1	0	100x100	3.36E-3	4.26E-3	1.11E-2
1	0	200x200	1.71E-3	2.17E-3	5.73E-3
1	0	400x400	8.67E-4	1.10E-3	2.93E-3
2	0	100x100	7.97E-5	1.13E-4	5.16E-4
2	0	200x200	2.04E-5	2.80E-	1.42E-4
2	0	400x400	5.86E-6	7.78E-6	4.05E-5
1	0.01	100x100	3.19E-3	4.06E-3	1.06E-2
1	0.01	200x200	1.59E-3	2.01E-3	6.55E-3
1	0.01	400x400	8.15E-4	1.02E-3	3.89E-3
2	0.01	100x100	5.26E-5	6.79E-5	2.61E-4
2	0.01	200x200	1.25E-5	1.62E-5	7.32E-5
2	0.01	400x400	3.06E-6	4.00E-6	2.23E-5

Flussberechnung auf strukturierten Gittern

1. Satz von Green

$$\int_{v'} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} dx = \oint_{\partial v'} g dx + f dy$$

2. Setze $f = u; g = 0$

3. Integral auflösen

$$\begin{aligned} V' \frac{\partial u}{\partial x} &= \Delta y (U_{i,j} + U_{i+1,j}) \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x} \end{aligned}$$

Analog:

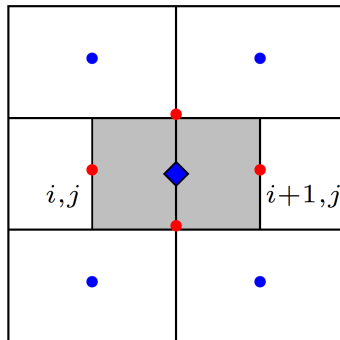
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

Flussbrechung auf strukturierten Gittern

Bei der Gradientenbestimmung werden Werte an den Seitenmittelpunkten verwendet. Diese werden wie folgt berechnet:

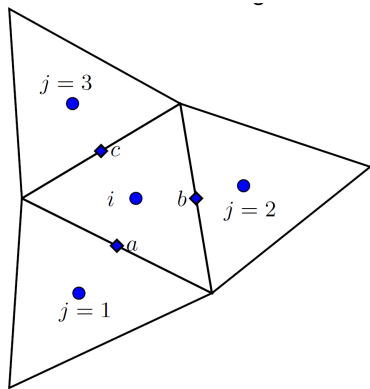
$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(u_{i,j}+u_{i,j+1}+u_{i+1,j}+u_{i+1,j+1})$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(u_{i,j}+u_{i,j+1}+u_{i+1,j}+u_{i+1,j+1})$$



Flussberechnung auf unstrukturierten Gittern

Im Gegensatz zum strukturierten Gitter müssen auf unstrukturierten Gittern auch die nicht abgeleiteten Größen durch Mittelung der Nachbarzellen bestimmt werden.



$$(v_1)_a = \frac{(v_1)_{i,a} + (v_1)_{j,a}}{2} \quad (10)$$

$$(v_2)_a = \frac{(v_2)_{i,a} + (v_2)_{j,a}}{2} \quad (11)$$

$$(\mu_2)_a = \frac{(\mu)_{i,a} + (\mu)_{j,a}}{2} \quad (12)$$

$$(\lambda)_a = \frac{(\lambda)_{i,a} + (\lambda)_{j,a}}{2} \quad (13)$$

Flussberechnung auf unstrukturierten Gittern

Die Gradienten können auf den Zellseiten nicht effizient mit dem Satz von Green bestimmt werden. Lösung mit dem empirischen Ansatz:

$$\nabla U_a = (\overline{\nabla U})_{i,j} - \left[(\overline{\nabla U})_{i,j} \cdot \vec{t}_{i,j} - \left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{i,j} \right] \vec{t}_{i,j} \quad (14)$$

Dabei ist $\vec{t}_{i,j} = \frac{\vec{r}_{i,j}}{l_{i,j}}$ der Vektor, zu dem der Gradient

$$(\overline{\nabla U})_{i,j} = 0.5(\nabla U_i + \nabla U_j) \quad (15)$$

verwendet wird. Tangential zu $\vec{t}_{i,j}$ wird die Richtungsableitung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{i,j} = \frac{U_j - U_i}{l_{i,j}} \quad (16)$$

verwendet.

Ordnung	μ	Gitter	$L_1 - \text{Fehler}$	$L_2 - \text{Fehler}$	$L_{\text{inf}} - \text{Fehler}$
1	0.5	100x100	2.98E-3	3.72E-3	1.23E-2
1	0.5	200x200	1.55E-3	1.93E-3	7.00E-3
1	0.05	400x400	7.94E-4	9.91E-4	3.84E-3
2	0.05	100x100	5.08E-5	7.10E-5	3.32E-4
2	0.05	200x200	1.28E-5	1.90E-5	1.16E-4
2	0.05	400x400	3.27E-6	5.20E-6	4.07E-5
1	0.1	100x100	3.22E-3	3.90E-3	1.21E-2
1	0.1	200x200	1.67E-3	2.02E-3	6.73E-3
1	0.1	400x400	8.53E-4	1.03E-3	3.58E-3
2	0.1	100x100	5.58E-5	8.57E-5	4.18E-4
2	0.1	200x200	1.44E-5	2.42E-5	1.52E-4
2	0.1	400x400	3.70E-6	6.88E-6	5.56E-5

Die Blasius-Gleichung ist eine Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen und beschreibt die stationäre, inkompressible Strömung auf einer 2D Ebenen Platte auf der sich eine Grenzschicht ausbildet.

$$f''(\theta) + \frac{1}{2}f'(\theta) \cdot \int_0^\theta f(t) dt$$