

SOLUCIÓN EXAMEN 13 ENERO 2016

Problema 1: Responded a los siguientes apartados:

- a) (1,25 puntos) Realizad la operación siguiente y simplificad el resultado: $\frac{1-i}{3-i}$.

Proporcionad el resultado en forma binómica.

NOTA: Recordad que $\overline{3-i}$ representa el conjugado de $(3-i)$.

- b) (1,25 puntos) Hallad la raíz siguiente: $\sqrt[5]{-\frac{32}{i}}$. Proporcionad el resultado en forma polar.

Solución:

- a) Primero hallamos $\overline{3-i}$; esto es, el conjugado de $3-i$ que es $3+i$. Por tanto, lo que se pide hallar es: $\frac{1-i}{3+i}$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador para eliminarlo:

$$\frac{1-i}{3+i} = \frac{(1-i) \cdot (3-i)}{(3+i) \cdot (3-i)} = \frac{3-i-3i-1}{3^2-i^2} = \frac{2-4i}{9+1} = \frac{2-4i}{10} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Por tanto:

$$\frac{1-i}{3-i} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

- b) Escribimos el complejo $-\frac{32}{i}$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

Para ello, primero, multiplicamos y dividimos por i para eliminar el denominador:

$$-\frac{32}{i} = -\frac{32i}{i^2} = -\frac{32i}{-1} = 32i$$

Ahora escribimos el complejo en forma polar:

$$m = \sqrt{0^2 + 32^2} = 32$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{32}{0}\right) = \arctg\infty = 90^\circ$$

Observemos que no sumamos ni restamos ninguna cantidad dado que la parte real del complejo es nula y la imaginaria del complejo es positiva (apartado 3.4.1 de la página 30 del material impreso).

Tenemos, por tanto, que $\sqrt[5]{-\frac{32}{i}} = \sqrt[5]{32_{90^\circ}}$

Como nos piden las raíces quintas debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$$\sqrt[5]{32_{90^\circ}} = 2_{\frac{90^\circ + 360^\circ k}{5}} \quad \text{para } k=0, 1, 2, 3, 4$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = 2$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \frac{90^\circ + 360^\circ k}{5}$ para $k=0, 1, 2, 3, 4$

- Si $k=0$, tenemos que $\beta_0 = 18^\circ$
- Si $k=1$, tenemos que $\beta_1 = 18^\circ + 72^\circ = 90^\circ$
- Si $k=2$, tenemos que $\beta_2 = 18^\circ + 144^\circ = 162^\circ$
- Si $k=3$, tenemos que $\beta_3 = 18^\circ + 216^\circ = 234^\circ$
- Si $k=4$, tenemos que $\beta_4 = 18^\circ + 288^\circ = 306^\circ$

Por tanto, las cinco raíces quintas del complejo $-\frac{32}{i}$ son:

2_{18°	2_{90°	2_{162°	2_{234°	2_{306°
----------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Problema 2: Sean $v_1=(1,0,0,2)$, $v_2=(0,2,0,0)$, $v_3=(2,2,0,4)$, $v_4=(3,1,0,6)$, $v_5=(0,-1,0,0)$ vectores de \mathbb{R}^4 .

Sea $V=\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$. Sea $w=(4,3,0,8)$.

a) (1,25 puntos) Calculad la dimensión de V y una base A . ¿Pertenece w a V ? En caso afirmativo, encontrad las coordenadas en la base A .

b) (1,25 puntos) Sea $e_1 = -v_1 - \frac{v_2}{2}$ y $e_2 = 4v_1 + 2v_2$. $B=\{e_1, e_2\}$ es una base de V .

Encontrad la matriz de cambio de base de B a A .

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Así la dimensión de V es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros

vectores ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues $A = \{v_1, v_2\}$.

Para ver si w pertenece a V solucionamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: $x=4, y=3/2$. Por tanto las coordenadas de w en la base A son $(4, 3/2)$.

b) Para encontrar la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A . Y en nuestro caso esto es justamente la definición de la base B . Así tenemos que la matriz de cambio de base M es:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3: Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (m+4)x - y = m+4 \\ 3x + my = m+6 \end{cases}$$

con $m \in \mathbb{R}$.

a) (1,25 puntos) Discutid el sistema de ecuaciones para los diferentes valores del parámetro m .

b) (1,25 puntos) Resolved el sistema en aquellos casos que el sistema sea compatible.

Solución:

a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, A', asociadas al sistema son:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m+4 & -1 & m+4 \\ 3 & m & m+6 \end{array} \right)$$

$$\text{rang}(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m+4 & -1 \\ 3 & m \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m+4 & -1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = (m+4)m + 3 = m^2 + 4m + 3 = (m+1)(m+3).$$

- Caso I: Si $m \neq -1, -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A') =$ número de incógnitas y por lo tanto el sistema es Compatible Determinado.
- Caso II: Si $m = -1$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

que corresponde claramente a un sistema incompatible ya que la primera ecuación pide $3x - y = 3$, mientras que la segunda pide $3x - y = 5$.

- Caso III: Si $m = -3$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

y por lo tanto tenemos $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 1$ con lo que el sistema es Compatible Indeterminado con $(2-1=1)$ 1 grado de libertad.

En resumen:

Si $m \neq -1, -3$, el sistema es Compatible Determinado

Si $m = -1$, el sistema es Incompatible.

Si $m = -3$, el sistema es Compatible Indeterminado con 1 grado de libertad

a) Hemos de encontrar la solución para los casos I: $m \neq -1, -3$ y III: $m = -3$.

Caso I: $m \neq -1, -3$

Dado que la matriz de coeficientes es cuadrada y $|A| \neq 0$, podemos resolver directamente el sistema por el método de Crámer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m+4 & -1 \\ m+6 & m \end{vmatrix}}{(m+1)(m+3)} = \frac{m^2 + 4m + m + 6}{(m+1)(m+3)} = \frac{m^2 + 5m + 6}{(m+1)(m+3)} = \frac{(m+2)(m+3)}{(m+1)(m+3)} = \frac{m+2}{m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m+4 & m+4 \\ 3 & m+6 \end{vmatrix}}{(m+1)(m+3)} = \frac{(m+4)(m+6-3)}{(m+1)(m+3)} = \frac{(m+4)(m+3)}{(m+1)(m+3)} = \frac{m+4}{m+1}.$$

Por lo tanto, para cada valor de $m \neq -1, -3$ el punto solución del sistema es $\left(\frac{m+2}{m+1}, \frac{m+4}{m+1}\right)$.

Caso III: $m = -3$

En este caso el sistema queda reducido a una única ecuación $x - y = 1$, ya que la segunda ecuación resulta ser un múltiplo de la primera.

Los puntos solución del sistema son de la forma $(x, x-1)$.

Problema 4: Sea f la aplicación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 definida por $f(-1,1,0)=(1,1,1)$, $f(0,1,0)=(1,1,1)$ y $f(1,1,1)=(2,2,2)$.

- (0,5 punto) Demostrad que $(-1,1,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,1)$ son una base de \mathbb{R}^3 .
- (0,5 punto) Decid cuál es la dimensión de la imagen de f . ¿Es f exhaustiva?
- (0,5 punto) Decid cuál es la dimensión del núcleo de f . ¿Es f inyectiva?
- (1 punto) ¿Diagonaliza f ? Justificad la respuesta.

Solución:

a) Puesto que son tres vectores de \mathbb{R}^3 , para ver que son base es suficiente probar que son linealmente independientes. Veamos que el determinante de la matriz que forman es no nulo. El determinante de la matriz de los tres vectores (por columnas) es:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Por lo tanto, los tres vectores son una base de \mathbb{R}^3 .

b) Para calcular la dimensión de la imagen de f hemos de calcular la dimensión del subespacio generado por $f(-1,1,0)$, $f(0,1,0)$ y $f(1,1,1)$, es decir, la dimensión del subespacio generado por $(1,1,1)$, $(1,1,1)$, $(2,2,2)$. Se ve fácilmente que estos tres vectores tienen rango 1. De ahí que la dimensión de la imagen de f es 1. En particular, f no es exhaustiva ya que la dimensión de la imagen de f es 1 y sin embargo el espacio de llegada tiene dimensión 3.

c) Por el Teorema de la dimensión (o fórmula del rango) (ver Apuntes Módulo 5, página 19) tenemos que:

$$\dim E = \dim \text{Nuc}(f) + \dim \text{Im}(f).$$

Pero ahora $E = \mathbb{R}^3$ y $\dim \text{Im}(f) = 1$. Así, la dimensión del núcleo de f es necesariamente 2. Puesto que el núcleo no es cero, f no es inyectiva.

d) Nombramos $u = (-1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ y $w = (1, 1, 1)$, para simplificar. Tenemos $f(u) = f(v)$. Por tanto, $f(u-v) = 0$ y por tanto, $u-v = (-1, 0, 0)$ es el vector propio de f de valor propio 0. También tenemos $2f(u) = f(w)$ o sea $f(2u-w) = 0$. Es decir, $2u-w = (-3, 1, -1)$ también es vector propio de f de valor propio 0. Además $f(w) = 2w$. Es decir, w es vector propio de f de valor propio 2. Observemos que los tres vectores $u-v$, $2u-w$ y w son linealmente independientes ya que el determinante de los tres es no nulo.

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

En conclusión, tenemos tres vectores, que son el $u-v = (-1, 0, 0)$, el $2u-w = (-3, 1, -1)$ y el $w = (1, 1, 1)$, que forman una base de \mathbb{R}^3 , y que son vectores propios de f . Por tanto, hay una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de f . Eso significa que f diagonaliza.

NOTA: En la realización del examen puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0°	30°	45°	60°	90°	105°	180°	225°	270°	300°	315°	345°
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
Tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$	0	1	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$