EXAMEN 3 25/01/2013

1.

a) Efectúa la siguiente operación con números complejos, expresando el resultado en forma binómica.

$$\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)$$

b) Calcula todas las raíces de la ecuación siguiente: $x^6+1=0$ (proporciona los resultados en forma binómica y polar)

Solución:

a) Hacemos el producto de los complejos, recordando, tal como se explica en el recuadro gris de la página 17, que $i^2=-1$:

$$\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)=\frac{(1+2i)\cdot(2+i)}{2-i}+\frac{(1-2i)\cdot(2-i)}{2+i}=\frac{(1+2i)\cdot(2+i)^2}{(2-i)\cdot(2+i)}+$$
$$+\frac{(1-2i)\cdot(2-i)^2}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{(1+2i)\cdot(4+4i-1)+(1-2i)\cdot(4-4i-1)}{4+1}=$$
$$=\frac{(1+2i)\cdot(3+4i)+(1-2i)\cdot(3-4i)}{5}=\frac{3+4i+6i-8+3-4i-6i-8}{5}=\frac{-10}{5}=-2$$

Por tanto:

$$\boxed{\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)=-2}$$

b) Primero despejamos la incógnita de la ecuación:

$$x^6+1=0\rightarrow x^6=-1\rightarrow x=\sqrt[6]{-1}$$

Escribimos el complejo z=-1 en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejo:

$$m=\sqrt{(-1)^2}=1$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{-1}+180^o=arctg0+180^o=180^o$$

Observemos que sumamos 180º dado que la parte real del complejo es negativa y la parte imaginaria es 0 (apartado 3.4.1 de la página 30 del material impreso). De hecho, dado que la parte imaginaria es 0 podríamos sumar o restar 180º, el ángulo es el mismo.

Tenemos, por tanto, que $z=1_{180^o}$

Como nos piden las raíces sextas, debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{1_{180^{\circ}}} = 1_{\frac{180^{\circ}+360^{\circ}k}{6}} = 1_{30^{\circ}+60^{\circ}k}$ para k=0, 1, 2, 3, 4, 5

Los argumentos de las raíces son:

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 30^{\circ}$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 30^{\circ}+60^{\circ} = 90^{\circ}$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 90^{\circ}+60^{\circ} = 150^{\circ}$
- Si k=3, tenemos que $\beta_3 = 150^{\circ}+60^{\circ} = 210^{\circ}$
- Si k=4, tenemos que $\beta_4 = 210^{\circ}+60^{\circ} = 270^{\circ}$
- Si k=5, tenemos que $\beta_5 = 270^{\circ}+60^{\circ} = 330^{\circ}$

Por tanto, las seis raíces de la ecuación $x^6+1=0$ son:

$$1_{30^{\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = 0{,}866 + 0{,}5i$$

$$1_{90^{\circ}} = i$$

$$1_{150^{\circ}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = -0{,}866 + 0{,}5i$$

$$1_{210^{\circ}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = -0{,}866 - 0{,}5i$$

$$1_{270^{\circ}} = -i$$

$$1_{330^{\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = 0{,}866 - 0{,}5i$$

2. Sean A y B dos subespacios vectoriales de dimensión 3 de R^5 definidos de la siguiente forma:

$A=\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1=a_4, a_5=0\}$

$B=\{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid b_1=b_3, b_4=0\}$

Y sea v=(0,0,-2,0,0)

a) Comprueba que W={(1, 0, 0, 1, 0,), (0, 2, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0)} es una base de A. ¿Pertenece v a A? En caso afirmativo calcula sus coordenadas en la base anterior.

b) Encuentra una base de B. ¿Pertenece v a B? En caso afirmativo calcula sus coordenadas en la base que has encontrado. ¿Generan A y B el mismo subespacio vectorial de R^5? Justifica tu respuesta.

Solución

a) Como sabemos que la dimensión de A es 3, solo tenemos que mirar que los vectores de W pertenezcan a A y que sean linealmente independientes.

Primer comprobamos que los vectores de W pertenezcan a A comprobando que se cumplen las condiciones $a_1=a_4$, $a_5=0$ para los tres vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3$$

Ya que podemos encontrar el menor 3x3 con determinante diferente de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$$

Así pues W es una base de A.

Para ver si v pertenece a A miramos si tiene solución el siguiente sistema: (también podríamos comprobar si cumple las condiciones)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0 \\ z=-2 \\ x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$ que tiene solución x=2, y=0, z=-2.

Por tanto v pertenece a A y sus coordenadas en la base anterior son (2,0,-2).

b) Podemos proponer como a base de B:

T={(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)}. De forma análoga al apartado anterior, podemos comprobar que es base:

Primero comprobamos que los vectores de T perteneces a B comprobando que se cumplen las condiciones $b_1=b_3$, $b_4=0$ para los tres vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=3$$

Ya que podemos encontrar el menor 3x3 con determinante diferente de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

Así pues T es una base de B.

Podemos ver directamente que v no pertenece a B ya que no cumple $b_1=b_3$

A y B no generan el mismo subespacio vectorial de R^5 ya que hay vectores (como por ejemplo el v), que pertenecen a uno y no al otro.

3. Considera los siguientes planos de $\mathbb{R}^3$:

$$\pi_1: 2x+(m-2)y+z=m-2,\ \ \pi_2: (m+2)x+10y+4z=11 \text{ y } \pi_3: x+y+z=2,$$

donde *m* es un parámetro real ($m\in\mathbb{R}$).

a) Estudia, según los valores de *m*, la posición relativa de los tres planos.
b) Calcula, para aquellos valores de *m* que tenga sentido, los puntos, rectas o planos intersección de los tres planos $\square_1$, $\square_2$ y $\square_3$.

3. Considerad los siguientes planos de R^3 :

$$\pi_1: 2x+(m-2)y+z=m-2,$$

$$\pi_2: (m+2)x+10y+4z=11$$

$$\pi_3: x+y+z=2,$$

donde *m* es un parámetro real ($m\in R$).

a) Estudiad, según los valores de *m*, la posición relativa de los tres planos.
b) Calculad, para aquellos valores de *m* que tenga sentido, los puntos, rectas o planos intersección de los tres planos π_1, π_2 y π_3.

Resolución:

a)

Para estudiar la posición relativa planteamos la matriz 3x4 correspondiente al sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas formado por los tres planos, para estudiar si tiene o no solución y denotamos por A y A’ la matriu de coeficientes y la matriz ampliada, respectivamente, y reordenamos las filas por dificultat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & m-2 & 1 & m-2 \\ m+2 & 10 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

Dado que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos que rang(A) ≥ 2. Por lo tanto el rang(A) sólo valdrá 3 cuando el determinante de la matriz A sea distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \\ m+2 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 4(m-2)+20+m+2-(m-2)(m+2)-10-8 = -m^2+5\mathrm{m} = -m(m-5)$$

, que sólo se anula cuando $m=0$ o $m=5$.

Por lo tanto:

- Caso I: Si $m \neq 0{,}5 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ entonces el sistema es SCD y por lo tanto los tres planos se intersectan en un punto.

- Caso II: Si $m = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ y debemos calcular el rang(A’).

Al substituir el valor de m, el rang(A’) sólo depende del determinante obtenido a partir de orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ con la tercera fila y el término independiente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11+16-4-4+8-22=5\neq 0 \Rightarrow rang\left(A'\right)=3>2=rang\left(A\right)$$ y por lo tanto el sistema es incompatible, es decir que los tres planos no tienen ningún punto en común.

- Cas III: Si $m=5 \Rightarrow rang(A)=2$ y debemos calcular el rang(A').

De nuevo, al substituir el valor de *m*, el rang(A') sólo depende del determinante obtenido a partir de orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ con la tercera fila y el término independiente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11+16+21-14-12-22=0 \Rightarrow rang\left(A'\right)=2=rang\left(A\right)$$ y por lo tanto el sistema es Compatible Indeterminado con (3-2=1) 1 grado de libertad, es decir que los tres planos se cortan en una recta.

En resumen:

- Si $m \neq 0,5$ los tres planos se cortan en un punto
- Si $m=0$ los tres planos no tienen ningún punto en común
- Si $m=5$ los tres planos se intersectan en una recta

b)

Por lo que se ha visto en el apartado anterior, se trata de calcular el punto intersección en el caso $m \neq 0,5$ y la recta intersección en el caso $m=5$.

- Caso $m \neq 0,5$

El correspondiente sistema es SCD y resoldremos por el método de Cramer, en función de los valores del parámetro *m*.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m-2 & m-2 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{-m(m-5)}=\frac{8(m-2)+10(m-2)+11-11(m-2)-20-4(m-2)}{-m(m-5)}=\frac{3m-15}{-m(m-5)}=\frac{3(m-5)}{-m(m-5)}=\frac{-}{m}$$

,

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \\ m+2 & 11 & 4 \end{vmatrix}}{-m(m-5)}=\frac{4(m-2)+22+2(m+2)-(m+2)(m-2)-11-16}{-m(m-5)}=\frac{-m^2+6m-5}{-m(m-5)}=\frac{-(m-1)(m-5)}{-m(m-5)}=$$

,

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m-2 & m-2 \\ m+2 & 10 & 11 \end{vmatrix}}{-m(m-5)}=\frac{11(m-2)+40+(m+2)(m-2)-2(m+2)(m-2)-10(m-2)-22}{-m(m-5)}=\frac{-m^2+m+20}{-m(m-5)}=$$

.

Por lo tanto el punto intersección es $\left(\frac{-3}{m},\frac{m-1}{m},\frac{m+4}{m}\right)$, para los distintos valores de $m\neq 0,5$.

- Caso $m=5$

Como hemos visto en el apartado anterior, en este caso los tres planos se intersectan en una recta que es la formada por la intersección de dos de ellos, por ejemplo el primero y el segundo. Así pues la recta resulta de la resolución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y+z & \text{¿} \quad 2 \\ 2x+3y+z & \text{¿} \quad 3 \end{cases}$$

o equivalentemente (restando a la segunda ecuación dos veces la primera)

$$\begin{cases} x+y+z & \text{¿} \quad 2 \\ y-z & \text{¿} \quad -1 \end{cases}.$$

De la segunda ecuación tenemos y = z-1 y substituyendo en la primera x = 2-y-z = 2-z+1-z = 3-2z. Por lo tanto los puntos de la recta son de la forma $(3-2z, z-1, z)=(3,-1,0)+\langle(-2,1,1)\rangle$. Es decir, es la recta que pasa por el punto $(3,-1,0)$ y que tiene vector director $(-2,1,1)$.

Resumiendo:

• Caso $m \neq 0, 5$, los tres planos se cortan en el punto $\left(\frac{-3}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m+4}{m}\right)$ • Caso $m=5$, los tres planos tienen por interesección la recta $(3-2z, z-1, z)=(3,-1,0)+\langle(-2,1,1)\rangle$

4. Sea $f: R^3 \to R^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z)=(0, x+y-4z, x-4y+z).$$

   a) Halla la matriz A de f en las bases canónicas.
   b) Calcula el polinomio característico de f y los valores propios de f.
   c) Estudia si f diagonaliza.
   d) Halla una base de R^3 con el máximo número posible de vectores propios de f.

Resolución:

a) La matriz de f en las bases canónicas es: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

(Ver apuntes M5, Matriz asociada a una aplicación lineal.)

b) El polinomio característico de f es

$$Q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix} 0-t & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & -4 \\ 1 & -4 & 1-t \end{vmatrix}=(0-t)\begin{vmatrix} 1-t & -4 \\ -4 & 1-t \end{vmatrix}=$$

$$(-t)[(1-t)(1-t)-16]=(-t)(t^2-2t-15)=(-t)(t+3)(t-5).$$

Así, Q(t) tiene raíces 0, -3 y 5. Por lo tanto, f tiene valores propios 0, -3 y 5.

c) Puesto que f tiene tres valores propios distintos, deducimos que f diagonaliza (*ver apuntes M5, Teorema de diagonalización).*

d) Para encontar los vectores propios de f de valores propios -3, 0 y 5 hay que resolver los sistemas de ecuaciones lineales: (A-(-3)I)X=0, (A-0·I)X=0 y (A-5·I)X=0. O sea:

$$(A-(-3)I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(A+3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3&0&0\\1&1+3&-4\\1&-4&1+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&-4\\1&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$(A-0I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&-4\\1&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$(A-5I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-5&0&0\\1&1-5&-4\\1&-4&1-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&0&0\\1&-4&-4\\1&-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Una base de soluciones del primer sistema es: (0,1,1).

Una base de soluciones del segundo sistema es: (3,1,1).

Una base de soluciones del tercer sistema es: (0,1,-1).

Entonces, (0,1,1), (3,1,1), (0,1,-1) es una base de R^3 formada por 3 vectores propios de f.