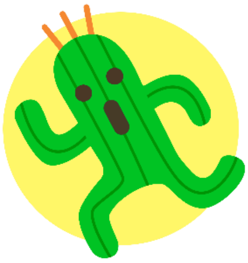
Análisis matemático sin espinas

(1) Funciones reales de variable real



v0.3 24_25 S1

Aprende sin espinas
con @carlos_cactus

Sócrates se equivocaba. El conocimiento no es lo único que crece al compartirse: La alegría también.

Al Cibergrupo y al tHash_A, por su amistad,
y, sobre todo, a quienes dicen "pero quiero"
cuando sienten "no puedo".

¡Un saludo sin espinas!

Y si quieres saber más:
¡Encuéntrame en Telegram como @carlos_cactus o habla con Espinito, el bot Sin Espinas, en @GestionSinEspinasBot.

Únete a la comunidad de Telegram Sin Espinas y no te pierdas nada!

Deja de preocuparte por aprobar y ¡Aprende sin Espinas!

1. CONJUNTOS DE NÚMEROS

1.1 (ℕ) ℕATURALES

Conjunto formado por los enteros positivos. NO INCLUYEN el 0.

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$$

Generalmente, el 0 se EXCLUYE de los naturales. No hay consenso al respecto. Cuando se incluye, se escribe: $\mathbb{N}_{\mathbf{0}} = \{0,1,2,3,\ldots\}$

Propiedades:

Asociativa de la suma:	$(a+b)+c = a+(b+c)$
conmutativa de la suma:	$a+b = b+a$
Elemento neutro de la suma:	$a+0 = a$
Asociativa del producto:	$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
Conmutativa del producto:	$a\cdot b = b\cdot a$
Elemento neutro del producto:	$a\cdot 1 = a$
El 0 es absorbente respecto el producto:	$a\cdot 0 = 0$
Distributiva de producto respecto suma:	$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
Ordenación:	$a \leq b \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \mid a+n = b$
Consecuencias de la ordenación:	
Propiedad reflexiva:	$a \leq a$
Propiedad antisimétrica:	$a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a = b$
Propiedad transitiva:	$a \leq b \;\wedge\; b \leq c \rightarrow a \leq c$
Propiedad de orden total:	$\forall a, b \in \mathbb{N} \rightarrow a \leq b \vee b \leq a$

Constituye un semianillo conmutativo

1.2 (ℤ) Enteros

Conjunto formado por los naturales, sus opuestos y EL CERO.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2 - 1 - ,0,1,2, \ldots\}$$

Propiedades:

Todas las propiedades de los números naturales.

Elemento opuesto respecto de la suma: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Constituye un anillo conmutativo.

1.3 ($\mathbb{Q}$) Racionales

Se pueden expresar como el cociente entre dos enteros, siempre que el divisor sea distinto de 0.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \, a, b \, \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Incluye las fracciones, sean o no irreductibles, que representan los números fraccionarios decimales exactos o periódicos.
Todo número decimal finito se puede expresar como fracción cuyo denominador sea una potencia de 10.
todo número decimal periódico se puede expresar en forma de fracción generatriz.

Propiedades:

Todas las propiedades de los números enteros.
Elemento inverso respecto del producto: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Constituye un cuerpo conmutativo.

1.4 Irracionales

No expresables vía cociente de enteros (ni decimal exacto ni periódico).
No se pueden expresar de forma fraccionaria.
En forma decimal, tienen un número infinito de decimales no periódicos.
Se evita el uso de $\mathbb{I}$ para prevenir ambigüedad con Imaginarios.

$$irracionales = \{\sqrt{2}, \pi, e \dots\}$$

A veces se usa $\mathbb{Q}^*$ para denotarlos, no hay una notación consolidada.

Constituye un cuerpo conmutativo y también es un cuerpo ordenado.

1.5 ($\mathbb{R}$) $\mathbb{R}$eales

Conjunto formado por los racionales y los irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \boldsymbol{Irracionales}$$

1.6 Imaginarios

Conjunto formado por los complejos cuya parte real es nula.
Se evita el uso de $\mathbb{I}$ para prevenir ambigüedad con Irracionales.

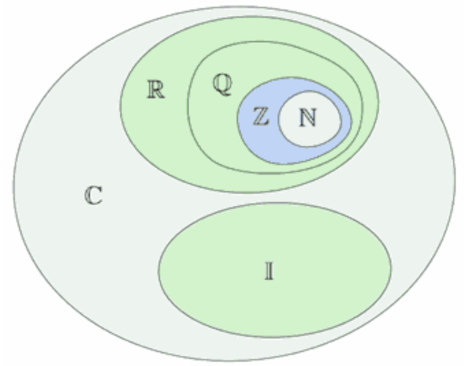
1.7 ($\mathbb{C}$) $\mathbb{C}$omplejos

Conjunto formado por los reales y los imaginarios.

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \boldsymbol{Imaginarios}$$

1.8 Relación de inclusión entre los conjuntos numéricos

Cada conjunto está incluido en otro, hasta los complejos:



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \boldsymbol{Imaginarios}$$
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \boldsymbol{Irracionales}$$
$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \boldsymbol{fraccionarios}$$
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbf{0} \cup \boldsymbol{Op}(\mathbb{N})$$

Cada conjunto más complejo permite resolver un mayor abanico de ecuaciones:

$$x + 3 = 8 \to x = 5$$
$$x + 3 = 1 \to x = -2$$
$$2x = 5 \to x = \frac{5}{2}$$
$$x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2} \in Irracionales$$
$$x^2 = -1 \to x = \sqrt{-1} \in \mathbb{I}$$

$$\mathbb{C}\quad \text{Complejos}\begin{cases}\mathbb{R}\quad \text{Reales}\begin{cases}\mathbb{Q}\quad \text{Racionales}\begin{cases}\mathbb{Z}\quad \text{Enteros}\begin{cases}\mathbb{N}\quad \text{Naturales}\begin{cases}1 & \text{Uno}\\ & \text{Primos}\\ & \text{Compuestos}\end{cases}\\ 0\quad \text{Cero}\\ \quad\ \ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\begin{cases}\text{Exactos}\\ \text{Periódicos}\begin{cases}\text{Puros}\\ \text{Mixtos}\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

Cada conjunto más complejo permite resolver un mayor abanico de tipos de ecuaciones:

$$x + 5 = 9 \to x = 4$$
$$x + 4 = 3 \to x = -1$$
$$3x = 7 \to x = \frac{7}{3}$$
$$x^2 = 5 \to x = \pm\sqrt{5} \in \boldsymbol{Irracionales}$$
$$x^2 = -1 \to x = \sqrt{-1} \in \boldsymbol{imaginarios}$$

2. APÉNDICES DE PROPIEDADES Y ESTRATEGIAS

2.1 Propiedades de las potencias

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^b : a^c = a^{b-c}$$

$$a^0 = 1$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$$

$$0^k = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ k > 0 \\ \infty \ si \ \ k < 0 \end{cases}$$

$$k^{\infty} = \begin{cases} \infty \qquad si \ \ k > 1 \\ 0 \ \ si \ \ 0 < k < 1 \end{cases}$$

$$1^{\infty} = \boldsymbol{INDETERMINACIÓN}$$

$$\infty^{\infty} = \infty$$

2.2 Identidades notables

cuadrado de la suma	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
cuadrado de la resta	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
suma por diferencia	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2.3 Notación de intervalos

- Intervalo abierto (a, b)
- intervalo cerrado $[a, b]$
- intervalo abierto por la izquierda (semi abierto/semi cerrado) $(a, b]$
- intervalo abierto por la derecha (semi abierto/semi cerrado) $[a, b)$
- intervalo no acotado (un único extremo): $[a, \infty), (a, \infty), (-\infty, b], (-\infty, b)$

El infinito ±∞ siempre se toma abierto, usando () y nunca cerrado [].

2.4 Propiedades de valor absoluto

Distancia entre números reales: $d(a,b) = |a-b|\ con\ x,y \in \mathbb{R}$

$$||a|| = |a|$$

$$|-a| = a$$

$$|a-b| = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\forall\ b \neq 0, \left|\frac{a}{b}\right| = \left|-\frac{a}{b}\right|$$

$$|a^b| = |a|^b\ \forall\ b \in \mathbb{Z}$$

$$-|a| \leq a \leq |a|\ (acotación)$$

$$|a| \leq k \quad \Leftrightarrow\ -k \leq a \leq k$$

$$|a| \geq k \Leftrightarrow a \geq k \vee a \leq -k$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|\ (Desigualdad\ triangular)$$

2.5 Propiedades de logaritmos

Se define: $\log_{\mathrm{b}} n = x \leftrightarrow b^x = n$

Donde:

b = base del logaritmo

n = argumento del logaritmo

x = LOGARITMO: exponente que verifica $b^x = n$

De esto, se desprende el carácter INVERSO entre la función exponencial y la función logaritmo.
Se cumple:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

$$\log_a a = 1 \leftrightarrow a^1 = 1$$

$$\log_a 1 = 0 \leftrightarrow a^0 = 1$$

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$$

2.6 Regla de Ruffini & teorema del resto

También se puede factorizar un polinomio mediante la regla de Ruffini, que permite identificar raíces ENTERAS de un polinomio:

Un valor a es raíz de un polinomio p(x) cuando se cumple p(a) = 0.

EJEMPLO

Si 3 es raíz de $p(x) = x^2 - 2x - 3$ entonces p(3) = 0, o sea: $p(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$
Si -1 es raíz de $p(x) = x^2 - 2x - 3$ entonces p(-1) = 0, o sea: $p(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$

Para el polinomio anterior:

	1	-2	-3
a			
	1		

En la parte superior, se colocan los coeficientes, tomando una columna para cada grado y **DEJANDO 0 EN LAS COLUMNAS DESIERTAS** (en caso de que no esté completo el polinomio).

En la parte inferior, se encuentra “a”, una **raíz del polinomio** que, a su vez, es divisor del término independiente del polinomio (en este caso, a es divisor de 3).

Entonces, se multiplica a por el primer coeficiente, y se suma al segundo. El resultado, se multiplica de nuevo por a y se suma al siguiente coeficiente y así sucesivamente.
Se prueba con a = 1

	1	-2	-3
1		1	-1
	1	-1	-4

No se alcanza un 0, por tanto, 1 no es una raíz del polinomio.

Se prueba con -1:
Se alcanza un 0, por tanto, **-1 sí es una raíz del polinomio** (se anula cuando x adopta ese valor). Por tanto, el polinomio factorizado contendrá el término (x + 1).

	1	-2	-3
-1		-1	3
	1	-3	0

Se continúa con los otros divisores del término independiente, o sea, a = 3

	1	-2	-3
-1		-1	3
	1	-3	0
3		3	
	1	0	

Se alcanza un 0, por tanto, **5 sí es una raíz del polinomio** (se anula cuando x adopta ese valor). Por tanto, el polinomio factorizado contendrá el término (x – 3).

El polinomio factorizado es: $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

Nótese que:

1) Cada vez que se divide un polinomio de grado n entre un factor lineal de la forma (x-a), con independencia de si el término a es o no es raíz del polinomio, se obtiene un polinomio de grado n – 1.

2) Se cumple para todo polinomio p(x) que si se evalúa en x = a, el valor p(a) que se obtiene es exactamente el RESTO de dividir p(x) entre (x-a).
O sea, por teorema del resto:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a) + p(a)$$

3) Una consecuencia de lo anterior es que la búsqueda de raíces de un polinomio equivale a la búsqueda de factores de la forma (x-a) que permitan construir divisiones exactas.
O sea, si a es raíz de p(x) se tiene:

$$p(a) = 0 \leftrightarrow p(x) = q(x) \cdot (x - a) + 0$$

4) Dos o más polinomios pueden compartir las mismas raíces sin ser equivalentes:

$$P(x) = 2x^2 - 10x + 12$$
$$Q(x) = 5x^2 - 25x + 30$$

Ambos polinomios tienen como raíces x = 2 y x = 3 pero no son equivalentes, sino que:

$$\frac{5}{2}P(x) = Q(x)$$

2.7 Estrategias para factorizar polinomios

a) Sacar factor común

Es una consecuencia de la propiedad distributiva del producto sobre la suma:

$$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

De modo que se puede aplicar en sentido reverso:

$$ab - ac = a(b-c)$$

Es relevante notar que ocurre cuando el factor común extraído de la expresión es uno de sus términos:

$$acb - bc + bdc = cb(a - 1 + d)$$

EJEMPLO

$$42x^2 - 12x^4 + 24x = 6x(7x - 2x^3 + 4)$$

EJEMPLO

$$4a^2b + 2ab + 6ab^2 = 2ab(2a + 1 + 3b)$$

b) Ecuación cuadrática para poliomios completos de grado 2

Se basa en el concepto de raíz polinomio. Se aplica a polinomios de grado 2 de la forma:

$$ax^2 + bx + c$$

Para los cuales, se cumple:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Que tiene 2 soluciones:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde las 2 soluciones r que la fórmula devuelve corresponden con las raíces del polinomio (valores para x que anulan el polinomio, de modo que p(r)= 0) que se desea factorizar, ya sean reales o imaginarias, y que permiten expresarlo como producto de factores lineales de la forma (x – r) con r como raíz.

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Las soluciones r_1 y r_2 son solución de la ecuación que resulta de igualar el polinomio a 0:

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x = r_1, x = r_2$$

EJEMPLO

Dado el polinomio: $2x^2 + 5x - 3$ se desea factorizar.

Se puede escribir la ecuación:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

cuyas soluciones corresponden con:
a = 2
b = 5
c = -3

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -3$$

Ahora:

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - (-3)\right)$$

c) Regla de Ruffini para poliomios con raíces enteras

A priori, no se puede identificar el carácter entero de las raíces de un polinomio, pero es estratégico considerar los divisores de su término independiente.

Ver apartado regla de Ruffini.

2.8 Resolución de ecuaciones de 2° grado incompletas

Un polinomio es incompleto cuando no presenta términos de cada uno de los grados comprendidos entre el de mayor grado que tiene y el término independiente, es decir:

$$ax^2 + bx + c \; es\; completo \rightarrow presenta\; términos\; de\; grado\; 2, 1\; e\; independiente$$
$$ax^2 + c\; es\; incompleto \rightarrow \; no\; hay\; término\; de\; grado\; 1\; (falta\; bx)$$

Para resolver ecuaciones de segundo grado incompletas:

1. Si falta el término independiente (grado 0) → Factorizar el polinomio sacando factor común x:

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. Si falta el término de grado 1 → Aislar x:

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

EJEMPLO

$$\boldsymbol{x^2 = 8x}$$
$$\boldsymbol{x^2 - 8x = 0}$$
$$x(x-8) = 0$$

Un producto de 2 factores es 0 si uno o el otro o ambos factores son 0:

$$\underbrace{x}_{x_1=0}\ \underbrace{(x-8)}_{x_2=8} = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 8$$

EJEMPLO

$$9x^2 - 6 - 5x^2 = 4$$

$$4x^2 = 10$$

$$x^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x_1 = +\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$$

2.9 Ecuaciones con valor absoluto

En las ecuaciones con valor absoluto, se recomienda:

1- Aislar en un miembro el valor absoluto.

Es útil en esto notar que: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

2- Desprender 2 ecuaciones, correspondientes con cada una de las soluciones:
- Una ecuación se obtiene sustituyendo el valor absoluto por la expresión que aloja.
- La otra se obtiene sustituyendo valor absoluto por la expresión que aloja y sustituyendo el otro miembro por su opuesto.

3- Resolver la ecuación resultante.

EJEMPLO

$$\big||5-2x|-4\big| = 10 \to \begin{cases} |5-2x|-4 = 10 \\ |5-2x|-4 = -10 \end{cases}$$

$$|5-2x|-4 = 10 \to |5-2x| = 14 \to \begin{cases} 5-2x = 14 \to x_1 = -\dfrac{9}{2} \\ 5-2x = -14 \to x_2 = \dfrac{19}{2} \end{cases}$$

$$|5-2x|-4 = -10 \to |5-2x| = -6 \to \mathit{No\ tiene\ solución}$$

EJEMPLO

$$|4x+6| = |x+2|$$

$$\frac{|4x+6|}{|4x+6|} = \frac{|x+2|}{|4x+6|}$$

$$\left|\frac{4x+6}{4x+6}\right| = \left|\frac{x+2}{4x+6}\right|$$

$$1 = \left|\frac{x+2}{4x+6}\right|$$

$$\begin{cases} \frac{x+2}{4x+6} = 1 \rightarrow x_1 = -\frac{4}{3} \\ \frac{x+2}{4x+6} = -1 \rightarrow x_2 = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

Se evalúan ambas soluciones:

$$x_1 = -\frac{4}{3} \rightarrow \left|4\left(-\frac{4}{3}\right)+6\right| = \left|\left(-\frac{4}{3}\right)+2\right|$$

$$\left|\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2}{3}\right| \rightarrow -\frac{4}{3}\, es\ solución$$

$$x_2 = -\frac{8}{5} \rightarrow \left|4\left(-\frac{8}{5}\right)+6\right| = \left|\left(-\frac{8}{5}\right)+2\right|$$

$$\left|-\frac{2}{5}\right| = \left|\frac{2}{5}\right| \rightarrow -\frac{8}{5}\, también\ es\ solución$$

2.10 Ecuaciones exponenciales

Se caracterizan por presentar las incógnitas en exponentes de potencias.
Una de las estrategias principales es escribir ambos miembros como potencias de la misma base y evaluar la igualdad entre exponentes:

$$b^a = b^x \leftrightarrow a = x$$

Para ello, es estratégico tener presente:

- Las propiedades de las potencias
- Estrategias de factorización para escribir cualquier término como potencia
- La estrategia de cambio de variable.

EJEMPLO

$$2^{3x-1} + 4^{2x-2} = 8^x$$

Se observan distintas bases, pero todos los términos se pueden expresar como potencia de 2:

$$2^{3x-1} = 2^{3x} \cdot 2^{-1}$$

$$4^{2x-2} = (2^2)^{2x} \cdot (2^2)^{-2} = 2^{4x-4}$$

$$8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$$

Así que se puede reescribir:

$$2^{3x-1} + 2^{4x-4} = 2^{3x}$$

Ahora es estratégico emplear un cambio de variable $t = 2^x$

$$t^3 = (2^x)^3 = 2^{3x}$$

$$t^4 = (2^x)^4 = 2^{4x}$$

O sea:

$$2^{3x-1} + 4^{2x-2} = 8^x$$

$$\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{2^4} = t^3$$

Operando:

$$\frac{8}{16}t^3 + \frac{1}{16}t^4 = \frac{16}{16}t^3$$

$$-8t^3 + t^4 = 0$$

Sacando factor común:

$$t^3(t-8) = 0$$

$$t = \{0,8\}$$

Deshaciendo el cambio de variable, se observa:

$$2^x = t \rightarrow 2^x = 0 \rightarrow Se\ descarta$$

$$2^x = 8 \rightarrow x = 3$$

2.11 Inecuaciones

Las inecuaciones se caracterizan por relacionar dos expresiones de acuerdo con una desigualdad $(>, <, \geq, \leq)$.

Por tanto, la solución a una inecuación nunca es un número único, sino que es un conjunto de infinitos números que se representa mediante un intervalo.

Las mismas estrategias de resolución de ecuaciones ordinarias son válidas para las inecuaciones, pero se debe considerar una propiedad adicional: el producto de la inecuación por un término negativo provoca la inversión de la desigualdad (esto es una consecuencia de las propiedades del opuesto: $signo(a) \neq signo(Op(a))$):

$$a \geq b$$

$$-a \leq -b$$

EJEMPLO

$$2x + \frac{1}{2} > 3x - 7$$

$$2x - 3x > -7 - \frac{1}{2}$$

$$-x > -7 - \frac{1}{2}$$

$$-2x > -14 - 1$$

$$-2x > -15$$

$$2x < 15$$

$$x < \frac{15}{2}$$

a) Inecuaciones racionales

Se caracterizan por presentar un cociente de polinomios como alguno de los miembros de la desigualdad.

Requieren estudiar el signo de los polinomios numerador y denominador.

No admiten el producto por polinomios para suprimir el cociente, ya que el signo de los polinomios depende del valor de x, sino que hay que conseguir anular un miembro (que valga 0) y luego estudiar por separado el numerador y el denominador del otro miembro.

Ejemplo de **RESOLUCIÓN INCORRECTA**:

$$\frac{6}{x-2} \leq x-3$$

$$6 \leq (x-3)(x-2)$$

$$6 \leq x^2 - 2x - 3x + 6$$

$$0 \leq x^2 - 5x$$

$$0 \leq x(x-5)$$

Se identifican las dos únicas raíces del polinomio de grado 2:

$$x_1 = 0, x_2 = 5$$

se evaluarían por la izquierda y por la derecha de cada una de ellas:

$Si\ x = -1 \rightarrow -1(-1-5) < 0 \rightarrow \text{satisface la desigualdad}$

$Si\ x = 2 \rightarrow 2(2-5) < 0 \rightarrow \text{satisface la desigualdad}$

$Si\ x = 6 \rightarrow 6(6-5) > 0 \rightarrow \text{NO satisface la desigualdad}$

Y la solución podría parecer (-∞,5], pero es incorrecta, ya que, por ejemplo, x = 7 es solución:

$$\frac{6}{x-2} \leq x-3 \rightarrow \frac{6}{7-2} \leq 7-3 \rightarrow \frac{6}{5} \leq 4$$

EJEMPLO

En cambio, sí se debe operar:

$$\frac{6}{x-2} \leq x-3$$

$$\frac{6}{x-2} - (\mathrm{x}-3) \leq 0$$

$$\frac{6}{x-2} - (\mathrm{x}-3)\frac{\mathrm{x}-2}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{6-(\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{6-(\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+6)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{6-\mathrm{x}^2+5x-6}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{-\mathrm{x}^2+5x}{x-2} \leq 0 \rightarrow \frac{x(5-x)}{x-2} \leq 0$$

Una vez expresa toda la ecuación como una desigualdad entre un cociente de polinomios y el cero, se identifican las raíces del numerador y del denominador:

$$p(x) = x(5-x) \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5$$
$$q(x) = x-2 \rightarrow x_3 = 2$$

Y se evalúa la satisfacción de la desigualdad de acuerdo con una idea sencilla:
Para que un cociente sea menor o igual a 0 hay 2 posibilidades:

- O bien el numerador debe ser cero (tanto x = 0 como x = 5 son solución)
- O bien numerador y denominador deben tener signos distintos.

Pero de ningún modo el denominador puede ser cero, puesto que la indeterminación que supone dividir entre 0 no permite resolver el signo del cociente (o sea, x = 2 no es solución).

Ahora basta con evaluar el signo ambos polinomios en el entorno de sus raíces tomando valores arbitrarios:

		0		2		5	
p(x)	-		+		+		-
q(x)	-		-		+		+
p(x)/q(x)	+		-		+		-

Luego la solución es:$x = [0,2) \cup [5, \infty)$

b) Inecuaciones de segundo grado

Para resolver inecuaciones de segundo grado se consideran dos métodos:

→ Método basado en las raíces del polinomio:

1. Se opera hasta que un miembro es nulo.
2. Se calculan las raíces del polinomio.
3. Se evalúa en qué intervalos el polinomio es positivo y negativo en el entorno de las raíces.
4. Se incorporan los valores de las raíces (extremos del intervalo) al intervalo solución en función de si la desigualdad es estricta > (o <) o no ≥ (o ≤).

→ Método basado en factorizar el polinomio:

1. Se opera hasta que un miembro es nulo.
2. Se escribe el polinomio como producto.
3. Se evalúa el signo de cada factor de acuerdo con la desigualdad ha de satisfacer:
   - Un producto es nulo si alguno de sus factores o ambos es nulo.
   - Un producto es positivo si sus factores son del mismo signo.
   - Un producto es negativo si sus factores son de signos opuestos.

   Se deben estudiar cuáles de los 3 casos deben cumplirse según el tipo de desigualdad.
4. Se desprende 1 inecuación de primer grado de cada factor lineal.
5. La INTERSECCIÓN de las soluciones de cada inecuación de lugar a un intervalo que satisface la desigualdad original.
6. La UNIÓN de los intervalos encontrados es solución de la inecuación original.

EJEMPLO

$$3x^2 + 7x + 2 > 0$$

Las raíces del polinomio $p(x) = 3x^2 + 7x + 2$ son:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -2$$

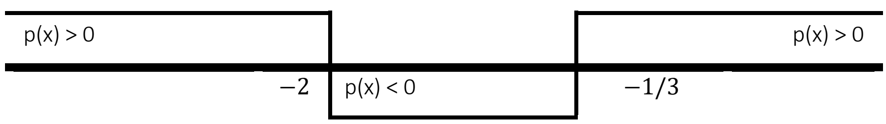
Se evalúa el signo del polinomio en un valor comprendido entre ambas raíces:

$$p(-1) = 3 - 7 + 2 < 0$$

Como p(x) es de grado 2, solo tiene 2 raíces. En este caso, ambas son reales. Esos son los únicos 2 puntos en que la gráfica de la función que representa p(x) cruza y = 0, o sea, su signo (positivo o negativo) solo cambia en esos puntos.

Por tanto, si en el intervalo $\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$ es negativa:

- En el intervalo $x \in (-\infty, -2) \rightarrow p(x) > 0$
- En el intervalo $x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right) \rightarrow p(x) > 0$



Por tanto, el intervalo solución es: $(-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

EJEMPLO

$$2x^2 - x - 1 \geq 0$$

Las raíces del polinomio $p(x) = 2x^2 - x - 1$ son:

	2	-1	-1
1		2	1
	2	1	0

O sea, $r_1 = 1$ es raíz, luego el primer factor lineal es (x – 1)

El otro factor lineal es (2x + 1) cuya raíz asociada es $r_2 = -\frac{1}{2}$

Se escribe el polinomio factorizado:

$$p(x) = 2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$$

Se tiene:

$$(x - 1)(2x + 1) \geq 0$$

Para satisfacer la igualdad, hay que considerar:

- El producto es positivo si ambos factores son de igual signo (ya sea positivo o negativo).
- El producto es nulo si un factor o el otro o bien ambos son nulos.

Se estudia la inecuación original de segundo grado mediante inecuaciones de primer grado:

→ Para que AMBOS factores sean nulos o POSITIVOS:

$$x - 1 \geq 0 \rightarrow x_1 \geq 1$$

$$2x + 1 \geq 0 \rightarrow x_2 \geq -\frac{1}{2}$$

La INTERSECCIÓN de ambos intervalos es: $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \cap [1, \infty) = [1, \infty)$

$$x \in [1, \infty) \rightarrow p(x) \geq 0$$

→ Para que AMBOS factores sean nulos o NEGATIVOS:

$$x - 1 \leq 0 \rightarrow x_3 \leq 1$$

$$2x + 1 \leq 0 \rightarrow x_4 \leq -\frac{1}{2}$$

La INTERSECCIÓN de ambos intervalos es: $(-\infty, 1] \cap \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \rightarrow p(x) \leq 0$$

La solución a la ecuación original es la UNIÓN de ambos intervalos:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$$

c) Inecuaciones irracionales

La estrategia de resolución se basa en expresar un miembro como la raíz de un polinomio, y a continuación elevar al cuadrado en ambos miembros.

La única consideración es el caso $\sqrt{q(x)} < p(x)$ o $\sqrt{q(x)} \leq p(x)$ ya que se debe cumplir:

$$0 \leq q(x) \leq p^2(x)$$

EJEMPLO

$$\sqrt{x^2 - 3x - 1} \leq 2x + 1$$

$$x^2 - 3x - 1 \leq (2x + 1)^2$$

$$x^2 - 3x - 1 \leq 4x^2 + 1 + 4x$$

$$0 \leq 3x^2 + 7x + 2$$

Se factoriza:

	3	7	2
-2		-6	-2
	3	1	0

$$p(x) = 3x^2 + 7x + 2 = (x+2)(3x+1)$$

Se tiene:

$$0 \leq (x+2)(3x+1)$$

Se evalúan 2 casos:

- Producto nulo o de factores positivos:

$$x + 2 \geq 0 \;\; si\; x \geq -2$$
$$3x + 1 \geq 0\; si\; x \geq -\frac{1}{3}$$

La INTERSECCIÓN de ambas soluciones es: $x \geq -\frac{1}{3} \rightarrow (x+2)(3x+1) \geq 0$

- Producto nulo o de factores negativos:

$$x + 2 \leq 0\; si\; x \leq -2$$
$$3x + 1 \leq 0\; si\; x \leq \; -\frac{1}{3}$$

La INTERSECCIÓN de ambas soluciones es: $x \leq -2 \rightarrow (x+2)(3x+1) \leq 0$

La UNIÓN de ambos intervalos es solución:

$$x \in (-\infty, -2] \cup \left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$$

d) inecuaciones con valor absoluto

Para resolver inecuaciones con valor absoluto:

1. Aislar el valor absoluto en 1 de los miembros considerando que cada cociente o producto por un número negativo que se opere en ambos miembros hola causa el giro de la desigualdad.
2. Desdoblar la inecuación con valor absoluto en 2 inecuaciones sin valor absoluto:
   - Una inecuación en la cual se ve el contenido del valor absoluto.
   - Otra inecuación en la cual se ve el opuesto del contenido del valor absoluto.
3. El intervalo solución es la unión de los intervalos encontrados como solución de cada inecuación.

EJEMPLO ***

2.12 Identidades trigonométricas notables

Razones trigonométricas de ángulos comunes:

Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
°	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	IND	0	IND	0

Teorema fundamental de la trigonometría $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Seno de ángulos complementarios $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Coseno de ángulos complementarios $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

Seno de ángulos suplementarios $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Seno de ángulos suplementarios $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

Seno de ángulos separados π rad $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

Coseno de ángulos separados π rad $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

Seno de ángulos separados π/2 rad $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Coseno de ángulos separados π/2 rad $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

Seno del ángulo suma/resta $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

Seno del ángulo resta $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

Coseno del ángulo suma $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

Coseno del ángulo resta $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

Seno del ángulo doble $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$

Coseno del ángulo doble $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

tangente del Angulo doble $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

cuadrado del seno $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cos(2x)}$

cuadrado del coseno $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos(2x)}$

diferencia de senos $\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

diferencia de cosenos $\cos\ x - \cos\ y = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

EQUIVALENCIAS entre razones trigonométricas

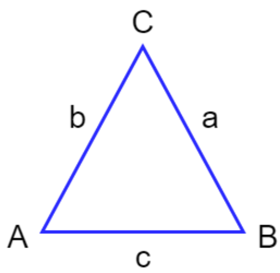
$$\text{sen}\ \theta \equiv \frac{1}{\csc\ \theta} \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \equiv \frac{\tan\ \theta}{\cot\ \theta}$$
$$\cos\ \theta \equiv \frac{1}{\sec\ \theta} \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \equiv \frac{\sin\ \theta}{\tan\ \theta}$$
$$\tan\ \theta \equiv \frac{1}{\cot\ \theta} \equiv \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \equiv \frac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta}$$
$$\cot\ \theta \equiv \frac{1}{\tan\ \theta} \equiv \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \equiv \frac{\cos\ \theta}{\sin\ \theta}$$
$$\csc\ \theta \equiv \frac{1}{\sin\ \theta} \equiv \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \equiv \frac{\cot\ \theta}{\cos\ \theta}$$

Paridad de funciones trigonométricas:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \rightarrow \sin(x)\ es\ IMPAR$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \rightarrow \cos(x)\ es\ PAR$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)\ es\ IMPAR$$

Teorema del seno:
Para un triángulo con vértices A, B y C y lados a, b y c opuestos a A, B y a C respectivamente:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



Teorema del coseno:
Para un triángulo con vértices A, B y C y lados a, b y c opuestos a A, B y a C respectivamente:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Teorema de la tangente:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C+A}{2}\right)}$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

3. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

3.1 Concepto de función y representación

Una función de una variable es una relación de correspondencia UNÍVOCA entre elementos de 2 conjuntos.

Se denota como: $f: A \to B$

Donde:

A es el conjunto de elementos denominado de ORIGEN o SALIDA.

B es el conjunto de elementos denominado de DESTINO, LLEGADA o IMAGEN.

O bien: $f(x) = y$

Donde:

x es el conjunto de elementos denominado de ORIGEN o SALIDA.

y es el conjunto de elementos denominado de DESTINO, LLEGADA o IMAGEN.

La propiedad diferencial de una función es que cada elemento del conjunto de origen tiene asignado un único elemento del conjunto de destino.

EJEMPLO

f(a) = b se lee como “La imagen del elemento a a través de la función f es b”.

EJEMPLO

$f(x) = x^2 + 1$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$
$$f(2) = 4 + 1 = 5$$

Una función puede depender de varias variables.

EJEMPLO

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{z - 2}$$

En este curso, solo se tratan funciones de una única variable, usualmente denotada por la letra x.

Por convenio, se toma, para f(x) = y (leído como “F de x es y”).

En la relación de asignación, se dice:

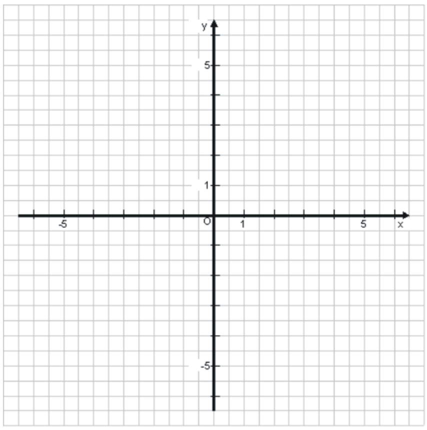
y Variable DEPENDIENTE

x Variable INDEPENDIENTE

Las funciones se pueden representar en el plano cartesiano.

- La variable independiente x se asocia en el plano con el eje de abscisas (horizontal).
- La variable dependiente y (imagen de x a través de la función f) se asocia en el plano con el eje de ordenadas.

Nótese que la construcción del plano cartesiano requiere de:



- 2 ejes perpendiculares ETIQUETADOS:
  - Eje X o eje de ABSCISAS — horizontal
  - Eje Y o eje de ORDENADAS — vertical

- Un sentido EXPLÍCITO para cada eje

En general: positivo = arriba / derecha
negativo = abajo / izquierda

- Una escala uniforme:

1 unidad se asocia a la misma longitud a lo largo del eje.

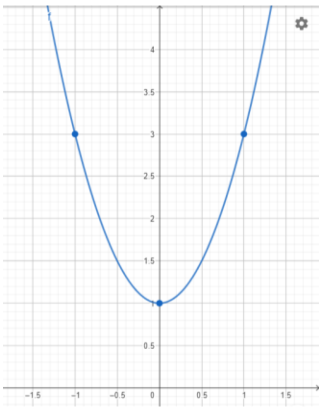
Una función se puede representar de 3 formas principalmente:

- Analíticamente: Como expresión algebraica

EJEMPLO $f(x) = 2x^2 + 1$

- Como tabla:

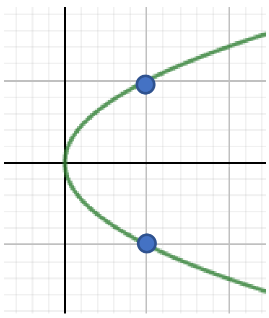
x	f(x)
-2	9
-1	3
0	1
1	3
2	9



- Gráficamente en el plano coordenado:

Para que una relación sea considerada función, se debe cumplir que para cada valor de x debe existir, como máximo, UN ÚNICO valor de y. Por tanto, la correspondencia debe ser UNÍVOCA. Una relación que asigna a un mismo valor de la variable x más de 1 imagen en y, vulnera el carácter unívoco de la asociación y, por tanto, no será una función.

- Ejemplo de relación **NO FUNCIÓN**:



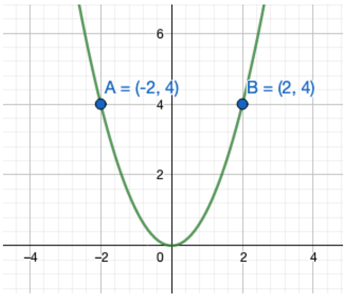
$f: A \rightarrow B$ Se define la relación f que representa la imagen de A en B, que se lee "F de A en B".
Se identifican 2 elementos concretos de la imagen B de A a través de F:

$$f(1) = 1$$
$$f(1) = -1$$

Esta relación NO ES una función, ya que un mismo elemento del conjunto A tiene 2 imágenes distintas en B, es decir, NO ES UNÍVOCA.

En una relación que SÍ ES UNA FUNCIÓN, un elemento del conjunto de origen A no puede tener imágenes distintas en el conjunto de origen, requiere del carácter UNÍVOCO de la relación.

- Ejemplo de relación **SÍ FUNCIÓN**:



$$f(x) = y^2$$
$$f(2) = 4$$
$$f(-2) = 4$$

Un elemento del conjunto de origen A tiene COMO MÁXIMO un único elemento asignado del conjunto de destino B, es decir, de forma UNÍVOCA.

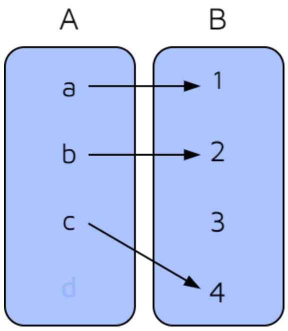
Nótese que, además, en este ejemplo, las imágenes de destino de dos elementos distintos del conjunto origen coinciden.

Cuando distintos elementos del conjunto de salida convergen en el conjunto de llegada, se dice que la función es NO INYECTIVA.
Esto no va en contra del carácter UNÍVOCO de la asignación entre A y B, que es lo que caracteriza una función.

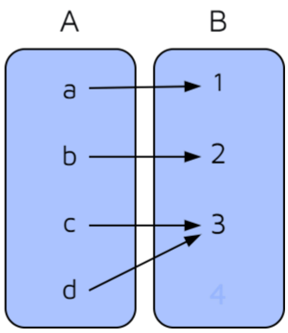
Cuando una función asigna UN ÚNICO elemento del conjunto de llegada B a cada uno de los elementos del conjunto de salida A, se dice que es INYECTIVA.

3.2 Clasificación de funciones

a) Función INYECTIVA



Función INYECTIVA



Función NO INYECTIVA

Es INYECTIVA una función si cualquier pareja de elementos del conjunto de origen presenta imágenes distintas en el conjunto de destino.

Es decir, una función INYECTIVA cumple:

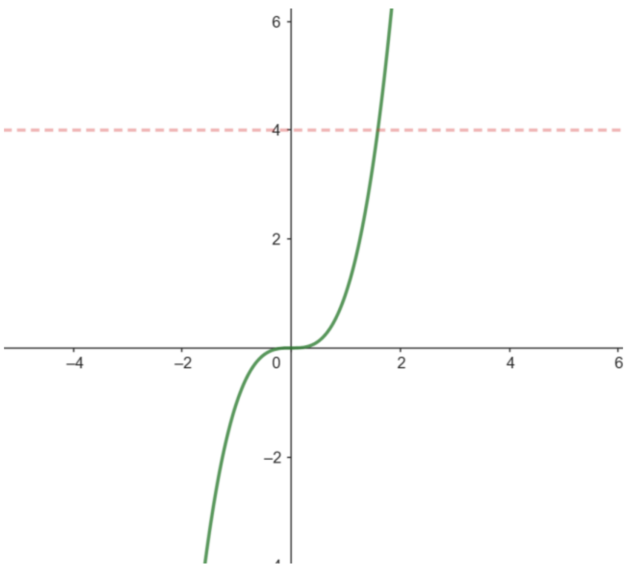
$$\forall x_1 \neq x_2 \in X \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

O sea, la asignación de elementos distintos de X no converge en el mismo elemento de Y.

Gráficamente, se puede determinar el carácter inyectivo de una función f.
Si existe una recta horizontal y = k que cruce más de 1 sola vez el trazado de la función, es que f es NO INYECTIVA.

Analíticamente, las funciones inyectivas se pueden identificar porque NO MUESTRAN NINGUNA SIMETRÍA PAR (respecto del eje Y). Es decir, presenta un único punto de corte con cualqueir función constante de la forma y = k.

EJEMPLO

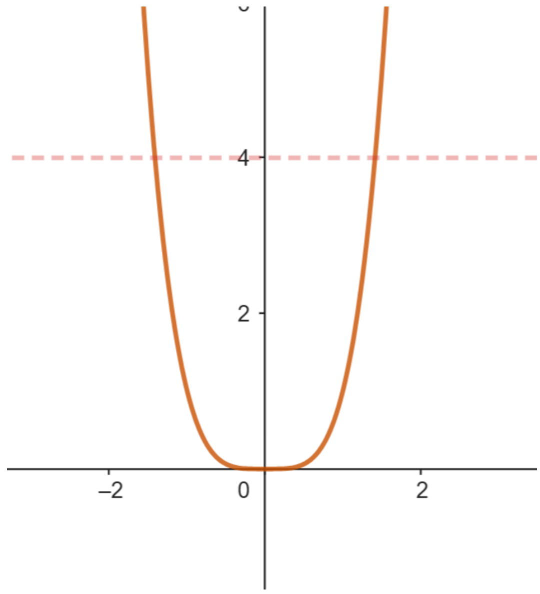


La función x^3 es INYECTIVA puesto que 2 valores distintos cualesquiera de x tienen asociadas imágenes siempre distintas:

No se ve ninguna simetría respecto el eje vertical

Si se traza una línea y = k , por ejemplo, y = 4, esa línea cruza UNA SOLA VEZ el trazado de x^3.

EJEMPLO

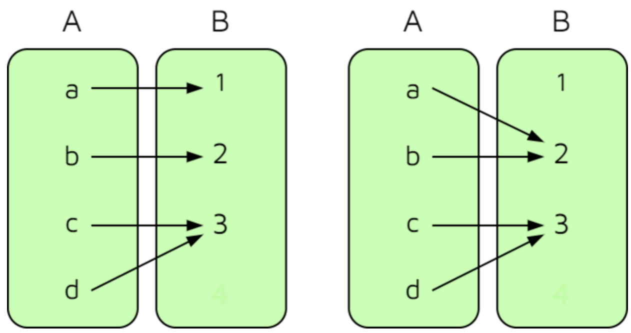


La función x^4 es NO INYECTIVA puesto que NO SE CUMPLE que 2 valores distintos cualesquiera de x tienen asociadas imágenes siempre distintas:

Se ve SIEMTRÍA respecto el eje vertical.

Si se traza una línea y = k , por ejemplo, y = 4, esa línea cruza MÁS DE UNA SOLA VEZ el trazado de x^4.

b) Función SOBREYECTIVA (o EXHAUSTIVA)



Función EXHAUSTIVA

Función NO EXHAUSTIVA

Es SOBREYECTIVA o EXHAUSTIVA (o SUPRAYECTIVA) una función si cada elemento del conjunto de destino es imagen de algún elemento del conjunto de origen.

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : \ f(x) = y$$

Todo elemento del conjunto Y resulta de la asignación de alguno del conjunto de origen X.

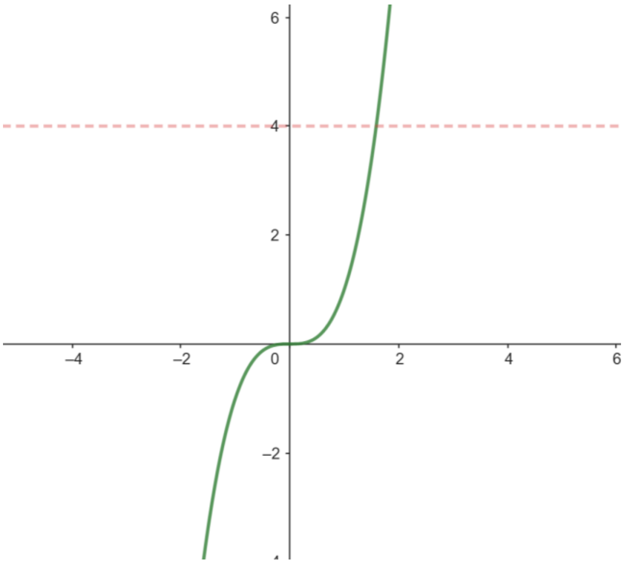
Gráficamente, se puede determinar el carácter exhaustivo de una función f.
Si cada valor de Y resulta de la asignación de algún valor de X, se cumplirá que TODA función constante de la forma y = k CRUZA AL MENOS UNA VEZ el trazado de f.

Analíticamente, las funciones exhaustivas se pueden distinguir de las NO EXHAUSTIVAS, que presentan RESTRICICONES en su conjunto imagen, como es el caso de:

- Funciones trigonométricas como $\sin x$ y $\cos x$, acotadas en [-1,1]
- Funciones exponenciales, cuya imagen está acotada inferiormente
- Funciones logarítmicas de índice par, que no muestran imágenes por debajo de cierto valor.

Es decir, una función es EXHAUSTIVA solo si para cualquier valor k existe una recta y = k que cruza el trazado de la función al menos una vez.

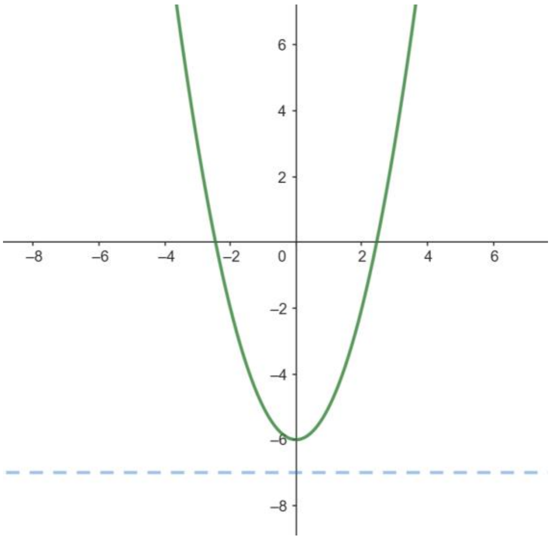
EJEMPLO



La función x^3 es EXHAUSTIVA en el conjunto de los números reales, puesto que su conjunto imagen es $(-\infty, \infty)$

Con independencia del valor k con que se trace y = k, esa recta corta al menos en 1 punto la gráfica de f.

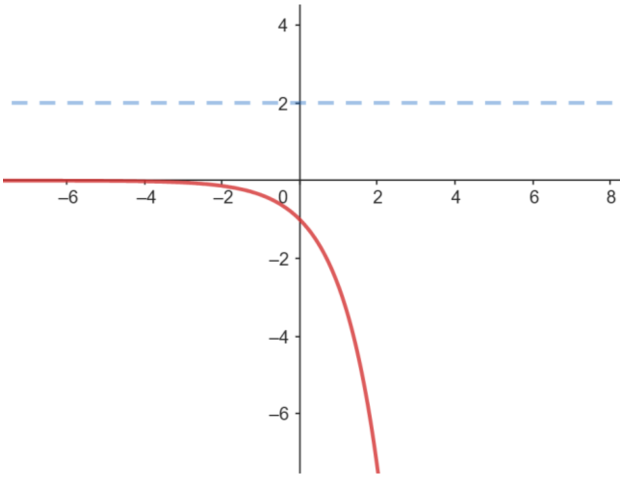
EJEMPLO



La función $f(x) = x^2 - 6$ es NO EXHAUSTIVA en el conjunto de los números reales, puesto que su conjunto imagen es $(-6, +\infty)$.

Se puede trazar una línea de la forma y = k tal que no tiene punto de corte con la gráfica de f.

EJEMPLO

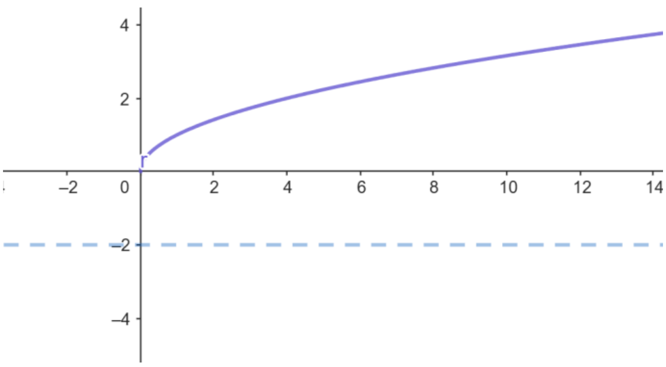


La función $f(x) = -e^x$ es NO EXHAUSTIVA en el conjunto de los números reales, puesto que su conjunto imagen es $(0, -\infty)$.

Se puede trazar una línea de la forma y = k tal que no tiene punto de corte con la gráfica de f.

No todos los valores y del conjunto de llegada corresponden con la imagen de algún valor del conjunto de salida x.

EJEMPLO

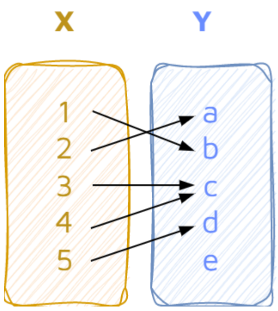


La función $f(x) = \sqrt{x}$ es NO EXHAUSTIVA en el conjunto de los números reales, puesto que su conjunto imagen es $(0, +\infty)$.

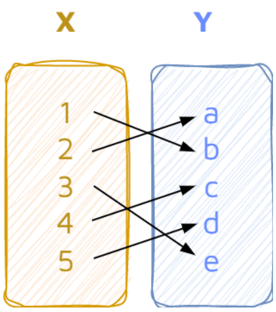
Se puede trazar una línea de la forma y = k tal que no tiene punto de corte con la gráfica de f.

No todos los valores y del conjunto de llegada corresponden con la imagen de algún valor del conjunto de salida x.

c) Función BIYECTIVA



Función NO BIYECTIVA



Función BIYECTIVA

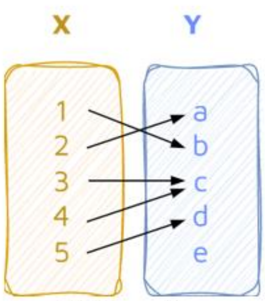
Es BIYECTIVA una función que cumple 2 condiciones DE FORMA SIMULTÁNEA:
- Es INYECTIVA.
- Es SUPRAYECTIVA.

El carácter BIYECTIVO, comporta:

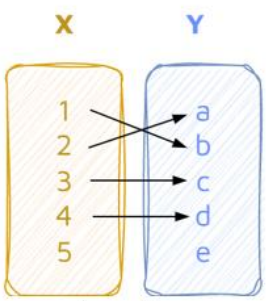
$$\#X = \#Y$$

Lo anterior conlleva que:

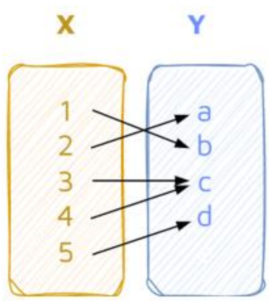
- Todo elemento del conjunto de destino resulta de asignar un elemento del conjunto origen.
- Cada elemento del conjunto de origen se asigna a un ÚNICO elemento del conjunto de destino.



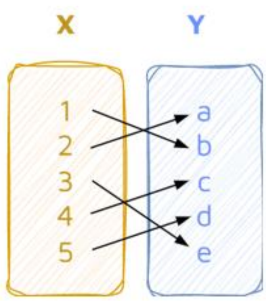
NO Inyectiva
NO sobreyectiva



Inyectiva
NO sobreyectiva

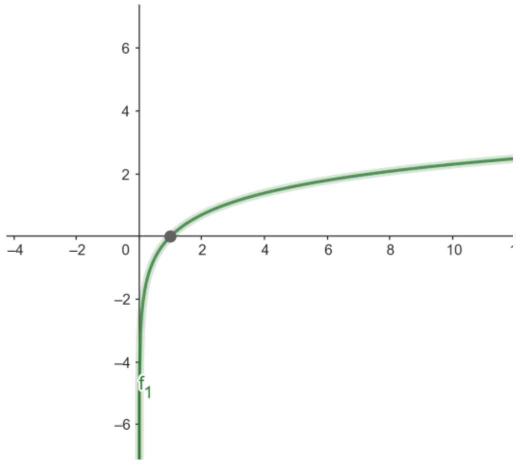


NO inyectiva
Sobreyectiva



Biyectiva

EJEMPLO



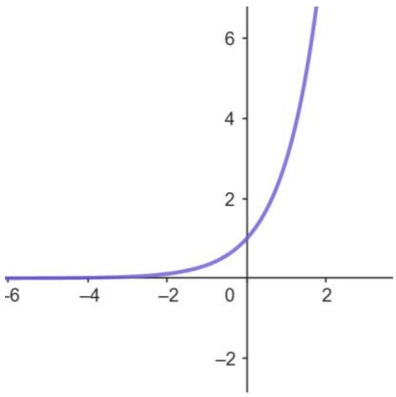
La función $\ln(x)$ es BIYECTIVA en los números reales en tanto que:

- No presenta simetría PAR → es INYECTIVA
- Su recorrido (conjunto de valores imagen) coincide con los reales → es EXHAUSTIVA

Esto no va en detrimento de que su dominio excluya cualquier número negativo.

Contrariamente a lo que pueda parecer de entrada, para valores mayores de x, se ven SIEMPRE mayores valores de y hasta el infinito. Su imagen toma valores en $(-\infty, +\infty)$.

EJEMPLO



La función 3^x es NO BIYECTIVA en los números reales en tanto que:

- No presenta simetría PAR → es INYECTIVA
- Su recorrido (conjunto de valores imagen) NO coincide con los números reales → es NO EXHAUSTIVA

En efecto, su imagen toma valores en $(0, +\infty)$.
De modo que se puede considerar que es solo exhaustiva en el conjunto de los reales positivos (TIENDE a 0 en $x = -\infty$ sin alcanzarlo).

3.3 Dominio de una función

El DOMINIO es el conjunto de valores de x para los cuales la función existe como imagen definida.

$$Dominio \equiv Dom(f) = \{ \, x \in \mathbb{R} \mid \exists \, f(x) \, \}$$

Algunos ejemplos de dominios de tipos de funciones comunes son:

Función	Dominio
$f(x) = p(x) \in \mathbb{R}[x]$	$Dom(f) = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$	$Dom(f) = \mathbb{R} - \{x \mid q(x) = 0\}$
$f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}, n \in \mathbb{N}$	$Dom(f) = \{x \mid g(x) \geq 0\}$
$f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)}, n \in \mathbb{N}$	$Dom(f) = Dom(g)$
$f(x) = \log\big(g(x)\big)$	$Dom(f) = \{x \mid g(x) > 0\}$
$f(x) = \sin\big(g(x)\big)$	$Dom(f) = Dom(g)$
$f(x) = \cos\big(g(x)\big)$	$Dom(f) = Dom(g)$
$f(x) = \tan\big(g(x)\big)$	$Dom(f) = Dom(g) - \{x \mid \cos\big(g(x)\big) = 0\}$
$f(x) = e^{g(x)}$	$Dom(f) = Dom(g)$

El dominio también se denomina antiimagen denotado por $f^{-1}(y)$ y cumple:

$$f^{-1}(y) = \{ \, x \in X \mid y = f(x) \, \}$$

Esto se trata en el apartado FUNCIÓN INVERSA.

EJEMPLO

Se considera la función: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(o sea, cuyo domino está en el conjunto de números reales y cuya imagen está en el conjunto de números reales)

Definida por: $f(x) = x^2$

Se observa que la antiimagen de 4 está formada por el conjunto {2,-2}.

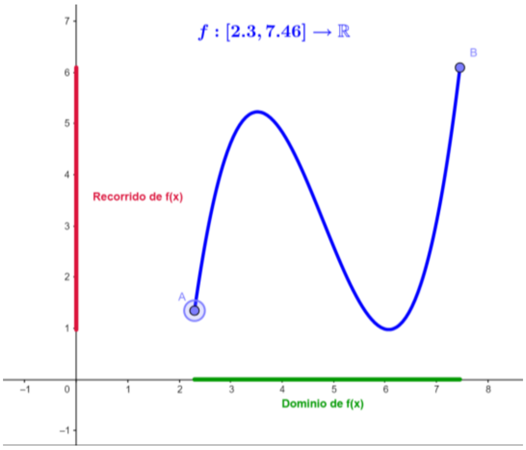
O sea, $f^{-1}(4) = \{-2{,}2\}$

Esto significa que los valores de x cuya imagen es 4 son 2 y -2, ya que f(2) = f(-2) = 4.

Sin embargo: $f^{-1}\,(-2) = \emptyset$

Ya que no hay número real cuyo cuadrado sea -2.

3.4 Imagen o recorrido de una función



$$Recorrido \equiv Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid la\ función\ existe\ \}$$

El RECORRIDO es el conjunto de valores de y para los cuales la función existe.

La imagen coincide con el dominio de la función inversa.

3.5 Gráfica de una función

Se entiende por la gráfica de la función al conjunto de puntos en el plano que relacionan el dominio con su imagen:

$$f: X \to Y$$

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid\ x \in X, f(x) \in Y\}$$

3.6 Igualdad de funciones

Dos o más funciones son iguales si sus dominios y sus imágenes coinciden en todo el dominio:

1. $Dom\big(f(x)\big) = Dom\big(g(x)\big)$
2. $f(x) = g(x)\ \forall x \in Dom\big(f(x)\big)$

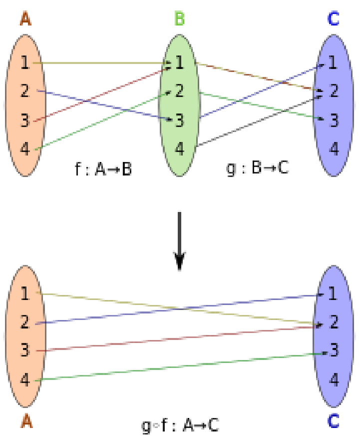
3.7 Operaciones con funciones

Dos o más funciones reales $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ pueden operarse entre ellas y con escalares k. Se definen las operaciones:

- Suma/resta: $f \pm g\colon\ A \cap B \to \mathbb{R}$
  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- Producto por un escalar k: $k \cdot f\colon\ A \to \mathbb{R}$
  $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$
- Producto de funciones: $f \cdot g\colon\ A \cap B \to \mathbb{R}$
  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Cociente de funciones: $\frac{f}{g}\colon\ A \cap B - \{x \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$
  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

En el caso del cociente de funciones, se debe excluir del dominio de la función cociente aquellos valores que anulan el divisor, puesto que generan la indeterminación k/0.

3.8 Composición de funciones



La composición de funciones entre 2 funciones $f: A \to B$ y $g: C \to D$ se denota:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Y da lugar a la función compuesta $(g \circ f)(x)$, donde f es la función externa y g es la función interna.

Para que la composición se pueda definir, es necesario que la imagen B de la función interna f está incluida en el dominio C de la función externa g: $B \subset C$

De ese modo la composición queda definida los conjuntos: $(g \circ f) : A \to D$

El dominio de la función compuesta resulta de la intersección entre el dominio de la función interna y toda región del dominio de la función interna que pertenezca al dominio de la externa:

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f)\ \wedge\ f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$$

En la práctica, se pueden dar dos casos:

1) Que el recorrido de la primera función (externa) está totalmente incluido en el dominio de la segunda (interna), de modo que el dominio de la función compuesta coincide con el dominio de la primera función.

2) Que el recorrido de la primera función (externa) no esté totalmente incluido en el dominio de la segunda (interna), de modo que el dominio de la función compuesta está formado por el conjunto de imágenes de la función externa que son antiimagen del dominio de la función interna:

Es útil verificar dos de sus propiedades:

- La composición de funciones es no conmutativa: $f \circ g \neq g \circ f$
- la composición de funciones es asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

EJEMPLO

Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x} + \sin x$$
$$g(x) = 4x^2 - \tan x$$

encontrar las composiciones:

$$g \circ f$$
$$f \circ g$$

Se tiene:

$$g \circ f = g\big(f(x)\big) = 4\big(f(x)\big)^2 - \tan\big(f(x)\big) = 4(\sqrt{x} + \sin x)^2 - \tan\big(\sqrt{x} + \sin x\big)$$

$$f \circ g = f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} + \sin\big(g(x)\big) = \sqrt{4x^2 - \tan x} + \sin(4x^2 - \tan x)$$

3.9 Función inversa

La función inversa o recíproca de una función dada f (que sea invertible) se denota porf^{-1} y corresponde con una función que permite obtener el conjunto de valores del dominio de la función original (o sea, el conjunto de antiimágenes) a partir del conjunto de imágenes de la función original:

$$f(x) = y \rightarrow f^{-1}(y) = x$$

Por composición de funciones, se cumple, en virtud de la RECIPROCIDAD entre f y su inversa:

$$f^{-1}(f\big((x)\big) = x$$
$$f(f^{-1}\big((x)\big) = x$$

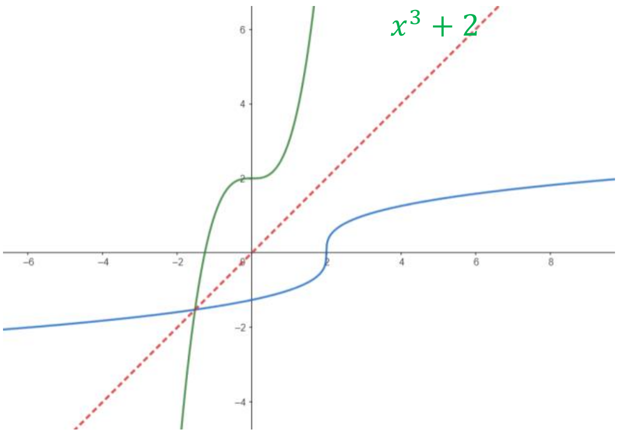
Se dice que la composición de funciones recíprocas es una función IDENTIDAD, pues devuelve x:

$$I(x) = x$$

No todas las funciones son invertibles.

Toda función INYECTIVA, o sea que cumpla, $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ tiene inversa.
Toda función NO INYECTIVA es NO INVERTIBLE.

Gráficamente, la inversa de una función toma el lugar que genera la REFLEXIÓN respecto a la recta y = x:



La función inversa presenta todos los pares (x,y) de la función original como (y,x). De ahí la reflexión respecto a la recta y = x.

$\sqrt[3]{x-2}$

Para calcular la función inversa a partir de una función dada:
1. En la expresión de f(x), se sustituye cada instancia de x por una de y, y viceversa.
2. Se aísla de nuevo y.

EJEMPLO
Se tiene:

$$f(x) = \frac{\ln(x-2)}{3}$$

1. Intercambiando primero cada instancia de x por cada una de y:

$$y = \frac{\ln(x-2)}{3} \rightarrow x = \frac{\ln(y-2)}{3}$$

2. Aislando de nuevo y:

$$x = \frac{\ln(y-2)}{3} \rightarrow e^{3x} = y - 2 \rightarrow \text{y} = e^{3x} + 2$$

Se ha encontrado una función $f^{-1}(x) = e^{3x} + 2$ de modo que:

$$f(x) = y$$
$$f^{-1}(y) = x$$

3. Calculando el DOMINO de la función inversa:

$$Dom\big(f^{-1}(x)\big) = Dom(e^x + 5) = \mathbb{R}$$

Se deduce que el recorrido de la función f(x) es $\mathbb{R}$ puesto que es el dominio de su inversa.

Otra forma de validar la inversa calculada es aprovechar la propiedad de RECIPROCIDAD entre una función y su inversa:

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

EJEMPLO DE FUNCIÓN INVERTIBLE vs. NO INVERTIBLE

La función $y = 2x + 3$ es invertible, ya que intercambiando las instancias de x e y y aislando de nuevo y se tiene:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

Que cumple la reciprocidad.

Po contrario, toda función NO INYECTIVA es NO INVERTIBLE (su inversa no existe como función propiamente):

$$f(x) = x^2 \rightarrow f(2) = f(-2) = 4$$

Esto conlleva que $f^{-1}(x)$ debería asignar a la imagen y = 4 dos objetos distintos del domino simultáneamente, x = 2 y x = -2, lo cual es incompatible con que sea una función. Por eso se dice que $y = x^2$ es NO INVERTIBLE.

3.10 Puntos de corte con los ejes

→ Puntos de corte con el eje OX (eje de abscisas) Cumplen y = 0.
→ Punto de corte con el eje OY (eje de ordenadas) Cumple x = 0.

Nótese que, para una función, solo puede haber 1 único corte con OY (de lo contrario, no sería función).
Ejemplo***

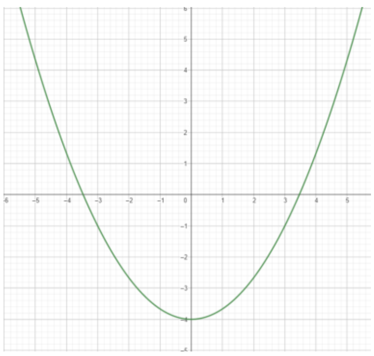
3.11 Simetrías

No todas las funciones tienen simetría.
En caso de tenerla, puede ser par o bien impar, pero no ambas a la vez.

a) Simetría PAR

Una función f es PAR si presenta simetría axial respecto al EJE de ordenadas.
La gráfica se conserva al REFLEJAR sobre el eje Y.
Verifica:

$$f \text{ es par si } f(x) = f(-x), \forall x$$



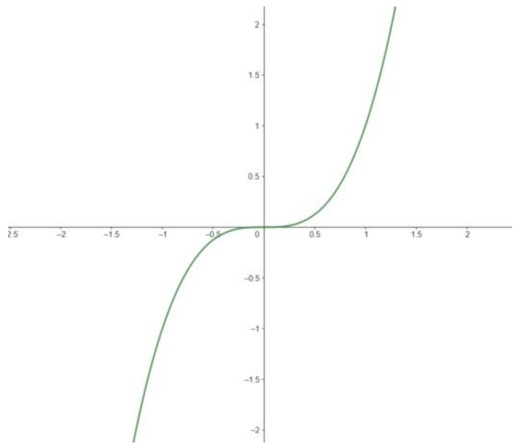
EJEMPLO

$$f(x) = \frac{x^2}{3} - 4$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{3} - 4 = \frac{x^2}{3} - 4$$

b) Simetría IMPAR

Una función f es IMPAR si presenta simetría rotacional con respecto al origen. La gráfica se conserva si se GIRA 180°.



Verifica que: $f(-x) = -f(x), \forall x$

EJEMPLO $f(x) = x^3$
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

3.12 Continuidad y discontinuidades

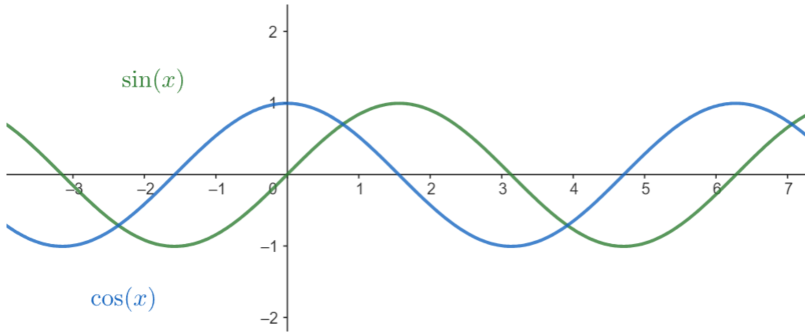
Ver bloque Límites & Continuidad

3.13 Periodicidad

Una función es periódica si su imagen presenta un patrón repetitivo a lo largo de x.
En este curso, se consideran principalmente las funciones periódicas:

$$y = \sin x$$
$$y = \cos x$$

Cuyo periodo es 2π en ambos casos



3.14 Monotonía

De acuerdo con la monotonía, se distinguen:

a) Función positiva
Su imagen es MAYOR O IGUAL a 0 en TODO su dominio. $\forall x \in Dom(f(x)), f(x) \geq 0$

b) Función negativa
Su imagen es MENOR O IGUAL a 0 en TODO su dominio. $\forall x \in Dom(f(x)), f(x) \leq 0$

c) Función creciente en un punto x_0
Se encuentra cualquier punto x consecutivo a x_0 (por la izquierda o la derecha) tal que:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Si se cumple en todo el dominio, se dice que es **monótona creciente**.
Si en un intervalo, la función **solo crece**, se dice que es **estrictamente creciente**.
Si en un intervalo, la función **nunca decrece**, se dice que es **creciente** en el intervalo.

d) Función decreciente en un punto x_0
Se encuentra cualquier punto x consecutivo a x_0 (por la izquierda o la derecha) tal que:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

Si se cumple en todo el dominio, se dice que es **monótona decreciente**.
Si en un intervalo, la función **solo decrece**, entonces es **estrictamente decreciente**.
Si en un intervalo, la función **nunca crece**, se dice que es **decreciente** en el intervalo.

3.15 Extremos

Extremos relativos y absolutos:

- Verifican f'(x) = 0 (anulan la primera derivada). Se clasifican en:
  - Máximos relativos y absolutos
  - Mínimos relativos y absolutos
- Permiten distinguir:
  - Intervalos de crecimiento
  - Intervalos de decrecimiento

3.16 Curvatura

Se distinguen dos tipos de funciones de acuerdo con su curvatura:

- Función cóncava hacia arriba — Forma de ∪
- función cóncava hacia abajo (anteriormente conocida como convexa) — Forma de ∩

Puntos de inflexión → Puntos de x en que la curvatura de una función cambia

- Verifican f''(x) = 0 — Anulan la segunda derivada de la función.
- Permiten distinguir
  - Intervalos de concavidad (concavidad hacia ARRIBA) ∪
  - Intervalos de convexidad (concavidad hacia ABAJO) ∩

3.17 Clasificación de funciones

d) Funciones polinómicas

Genéricamente es:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^m$$

Donde:
a = coeficientes
m = mayor exponente de la expresión → define el grado del polinomio
a_n = coeficiente director → multiplica al término de mayor grado
a_0 = término independiente

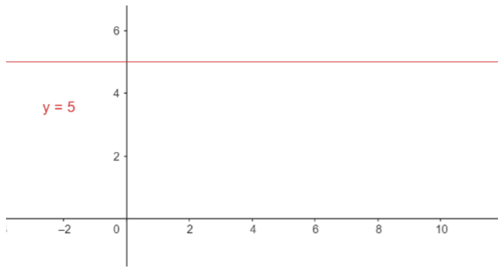
EJEMPLO

$$\frac{2}{3}x^{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{2}x^{\frac{7}{3}}$$

Se pueden clasificar las funciones polinómicas de acuerdo con el GRADO del polinomio que las define.

i. Función constante

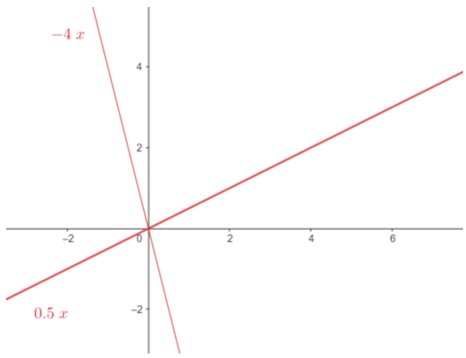
$$f(x) = c, x \in \mathbb{R}$$



Dominio $\mathbb{R}$
Imagen c
Invertible No

Su imagen es una recta de pendiente nula: paralela al eje de abscisas (eje X horizontal).

ii. Función lineal



Son rectas que pasan por el origen. Su forma es:

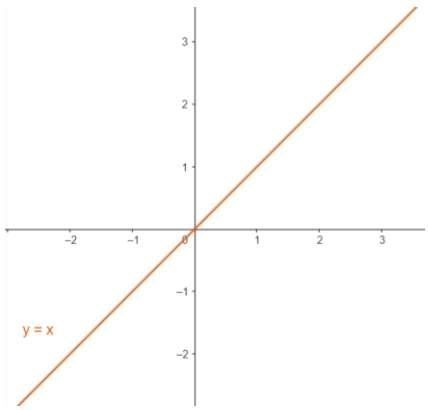
$$f(x) = mx$$

Donde:

m Es la pendiente de la recta: variación de y respecto x. Determina la inclinación y la orientación de la recta:

- Inclinación es proporcional a |m|
- Con m > 0 Recta creciente
- Con m < 0 Recta decreciente

Dominio $\mathbb{R}$
Imagen $\mathbb{R}$
Invertible Sí



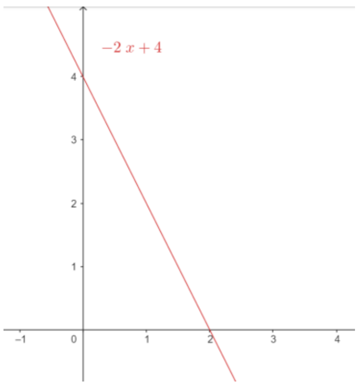
Un caso particular es la denominada función identidad:

$$f(x) = x$$

La función identidad:

- Tiene por inversa a sí misma: $f^{-1}(x) = f(x) = x$
- Representa una recta de pendiente m = 1 que cruza el origen.

iii. Función afín



Son rectas que no pasan por el origen: funciones trasladas en dirección vertical de acuerdo con el valor de n.
Su forma es:

$$f(x) = mx + n$$

Donde:

m Es la pendiente de la recta: variación de y respecto x.
Determina la inclinación y la orientación de la recta:
- Inclinación es proporcional a |m|
- Con m > 0 Recta creciente
- Con m < 0 Recta decreciente

n Es un coeficiente de traslación vertical u ORDENADA EN EL ORIGEN.
Determina el corte con el eje Y.

Dominio	$\mathbb{R}$
Imagen	$\mathbb{R}$
Invertible	Sí

iv. Funciones cuadráticas

Son parábolas
Su forma es: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Donde:

a Coeficiente director:
i a > 0 → Parábola cóncava hacia arriba U
Si a < 0 → Parábola cóncava hacia abajo ∩
La estrechez de la parábola es proporcional a la magnitud del coeficiente director |a|.

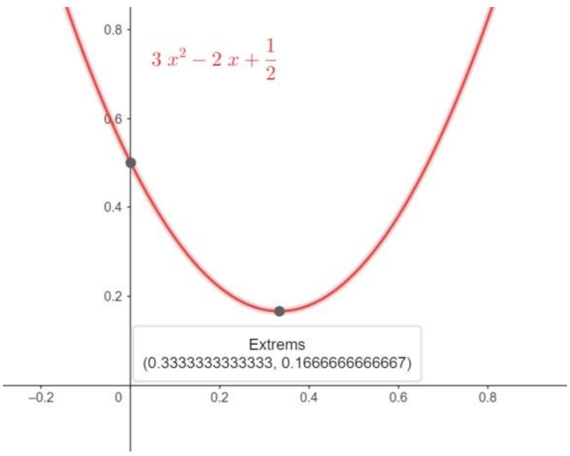
b Aleja el vértice del eje vertical:
b > 0 → vértice a la IZQUIERDA del eje Y
b < 0 → vértice a la DERECHA del eje Y

c Aleja el vértice del eje horizontal:
c > 0 → vértice por ENCIMA del eje Y
c < 0 → vértice por DEBAJO del eje Y

Presentan un punto significativo denominado VÉRTICE cuyas coordenadas son:

$$V = (V_x, V_y) = \left(-\frac{b}{2a}, f(V_x)\right)$$

Ejemplo:



$$f(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

El vértice B es:

$$V = (V_x, V_y)$$
$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$
$$V_y = f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
$$V = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

El vértice es siempre un extremo, por tanto, se puede calcular como f'(x), es decir, la primera derivada de f(x):

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

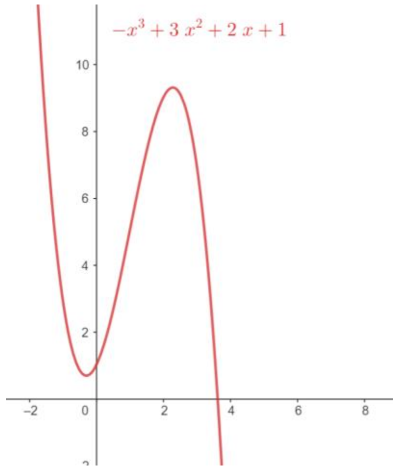
Igualando a 0 la primera derivada (condición de extremo):

$$0 = 2ax + b \rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

v. Funciones cúbicas

Son polinomios de grado 3 de la forma:

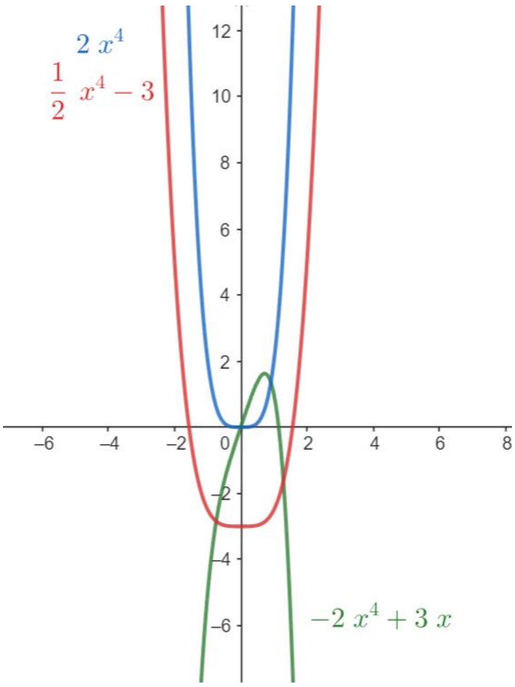
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



Presentan hasta 3 raíces reales

Si a > 0 → CREICENTE
Si a < 0 → DECRECIENTE
d = corte con eje vertical

vi. Funciones de grado superior



Son polinomios de grado mayor que 3:

vii. Cálculo del dominio de funciones polinómicas

Dominio de funciones polinómicas:

- Las funciones polinómicas son continuas
- Dominio de función polinómica $\quad Dom(f) = \{\,\mathbb{R}\,\}$

Ejemplos:

$f(x) = x^{62} + \frac{7}{5}x - 9 \quad \rightarrow Dom\big(f(x)\big) = \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{7} \quad \rightarrow Dom\big(f(x)\big) = \mathbb{R}$

$f(x) = x^{\sqrt{3}} - \sqrt{x} \quad \rightarrow Dom\big(f(x)\big) = \mathbb{R}$

e) Funciones racionales

Se considera un número racional:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Extendiendo el concepto al ámbito de las funciones:

f(x) es racional si se puede definir como:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\ para\ cualquier\ q(x) \neq 0$$

Se calcula su dominio:

$$Dom\big(f(x)\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$$

Luego basta con identificar los valores que anulan el polinomio denominador q(x).

EJEMPLO

$$f(x) = \frac{x-6}{x^2 - 2x - 3}$$

$$Dom\big(f(x)\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \neq 0\}$$

Para encontrar esos valores se resuelve la ecuación que se obtiene al igualar el polinomio a 0:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Para ello, se aplica:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde: a = 1 b = -2 c = -3

Entonces:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{4 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Es decir, el polinomio se puede factorizar como:

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

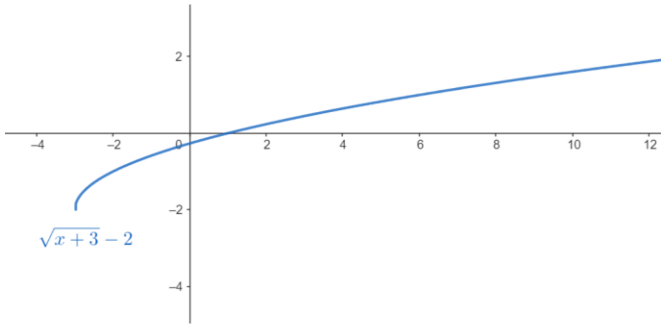
Entonces, el dominio se puede escribir como:

$$Dom\big(f(x)\big) = \mathbb{R} - \{-1{,}3\}$$

f) Funciones radicales

Son de la forma:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$



$$Si\ n\ es\ par \rightarrow Dom\big(f(x)\big) = \{x \in \mathbb{R}\,|\,g(x) \geq 0\}$$

O sea, si el índice es PAR, se debe EVALUAR el signo del radicando:

$$Si\ n\ es\ impar \rightarrow Dom\big(f(x)\big) = Dom\big(g(x)\big)$$

EJEMPLO

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

Resolviendo la ecuación obtenida de igualar a 0 el radicando:

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

Se evalúa el signo de la función radicando g(x) a cada lado de los valores críticos:

$$A\ la\ izquierda\ de -3, se\ toma\ x = -4\ y\ se\ observa\ g(-4) = 16 - 9 > 0$$
$$A\ la\ derecha\ de -3, se\ toma\ x = -2\ y\ se\ observa\ g(-2) = 4 - 9 < 0$$
$$A\ la\ izquierda\ de\ 3, se\ toma\ x = 2\ y\ se\ observa\ g(2) = 4 - 9 < 0$$
$$A\ la\ derecha\ de\ 3, se\ toma\ x = 4\ y\ se\ observa\ g(4) = 16 - 9 > 0$$

Se observa:

+		-		+
	-3		+3	

Entonces, a raíz no devuelve un número real en el intervalo del dominio de g(x) en que g(x) < 0:

$$Dom\big(f(x)\big) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

Los intervalos son cerrados por un extremo ya que f(-3) = f(3) = 0 cuya raíz es 0 y, por tanto, la función sí existe en ellos, mientras que para ∞ siempre será abierto.

EJEMPLO

$$f(x) = \sqrt[31]{9x^2 - 5x}$$

Como el índice es IMPAR, se asimila: $Dom\big(f(x)\big) = Dom\big(g(x)\big) = \mathbb{R}$

EJEMPLO

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{25 - x^2}}$$

Se calculan las raíces de la función del radicando:

$$25 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$$

Se evalúa el signo de la función radicando g(x) a cada lado de los valores críticos:

$$g(-6) < 0$$
$$g(0) > 0$$
$$g(+6) < 0$$

Se observa:

-		+		-
	-5		5	

Por tanto, se tiene que:

$$Dom\big(g(x)\big) = [-5,5]$$

Pero como f(x) es racional, se deben excluir los valores que anulan el denominador. Por tanto, los intervalos deben ser ABIERTOS:

$$Dom\big(f(x)\big) = (-5,5)$$

Para la raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$
Dominio $[0, \infty)$
Imagen $[0, \infty)$
Invertible Sí, en caso de RESTRINGIR el dominio a $[0, \infty)$, su inversa es: $f^{-1}(x) = x^2$

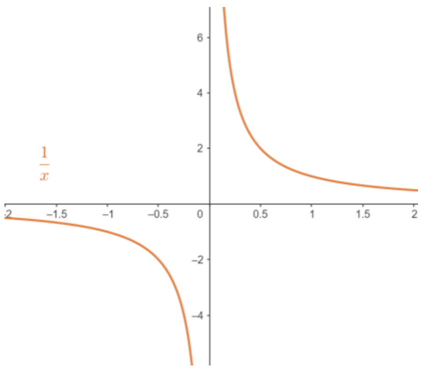
viii. Funciones de proporcionalidad inversa

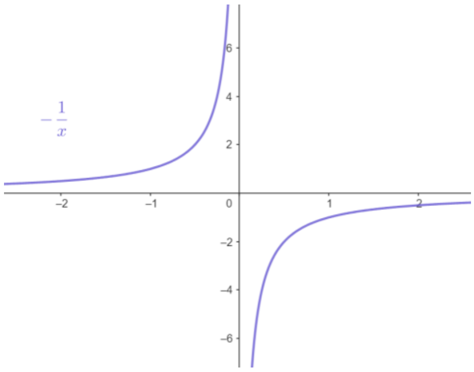
Son hipérbolas, de la forma:

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

Presentan asíntotas horizontales y verticales, es decir, líneas rectas imaginarias hacia las cuales la función tiende, en el infinito, sin alcanzarlas nunca.

En función del valor k, se distinguen 2 trazados:



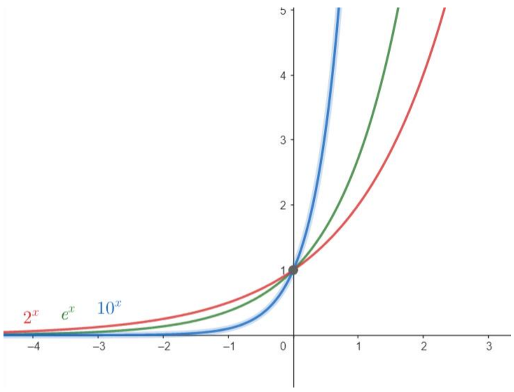


$Si\ k > 0$ $se\ observa\ f(x)$ $en\ los\ cuadrantes\ I\ y\ III$	$Si\ k < 0$ $se\ observa\ f(x)$ $en\ los\ cuadrantes\ II\ y\ IV$

Se observan asíntotas:

- Asíntota vertical (AV) en x = 0
- Asíntota horizontal (AH) en y = 0

ix. Función de tipo exponencial



Es de la forma número elevado a variable:

$$f(x) = a^x$$

Nótese la distinción respecto las funciones POTENCIALES en que la base es la variable y el número es el exponente.

Exponencial número$^{\text{variable}}$
Potencial variable$^{\text{número}}$

- Siempre presenta una AH en y = 0
- Siempre cruza el punto (0,1) o bien el (0, -1)

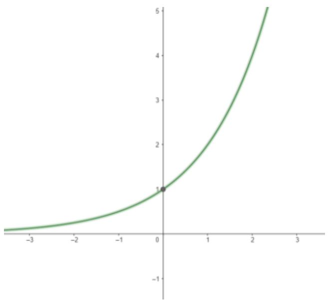
Su representación depende del signo valor de la base:

Si a > 0:

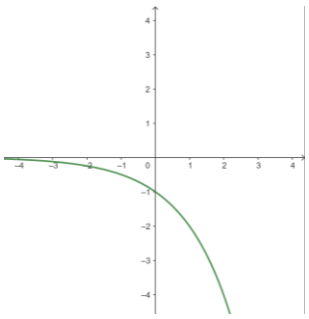
a > 1	Crecimiento exponencial.	Es siempre positiva
0 < a < 1	Decrecimiento exponencial.	Es siempre positiva

Si a < 0:

a < -1	Decrecimiento exponencial.	Es siempre negativa
-1 < a < 0	Crecimiento exponencial.	Es siempre negativa.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = -2^x$

Su dominio se hereda del dominio de la función que ocupa el exponente.

EJEMPLO

$$f(x) = 2^{\sqrt{x-5}}$$

Se evalúa el dominio de la función del exponente $g(x) = \sqrt{x-5}$

Se observa:

$$Dom\big(g(x)\big) = [5, +\infty)$$

Por tanto:

$$Dom\big(f(x)\big) = [5, +\infty)$$

Ya que el radicando se vuelve negativo para valores menores que 5 (pero el intervalo es CERRADO por la izquierda, ya que 5 anula el radicando, pero no la hace negativa).

EJEMPLO

$$f(x) = e^{\frac{2}{x^2-3x}}$$

Consideramos:

$$g(x) = \frac{2}{x^2 - 3x}$$

Entonces: $$Dom\big(f(x)\big) = Dom\big(g(x)\big) = \mathbb{R} - \{0,3\}$$

Ya que:

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$

Se observa que 0 y 3 son los valores que anulan el denominador de la función racional.

EJEMPLO

$$f(x) = \frac{1}{2}^{\frac{2}{x^2-1}}$$

Se evalúa el dominio de la función del exponente:

$$g(x) = \frac{2}{x^2-1} \rightarrow Dom\big(g(x)\big) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

Se excluyen ambos valores ya que son las raíces del polinomio denominador de la función racional que hay en el exponente.

Para cualquier función exponencial, se cumple:

$$Dom\big(g(x)\big) = Dom\big(f(x)\big) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

EJEMPLO

$$f(x) = \frac{1}{2}^{\frac{2}{x^2+1}}$$

Se evalúa el dominio de la función del exponente:

$$g(x) = \frac{2}{x^2+1} \rightarrow Dom\big(g(x)\big) = \mathbb{R}$$

No existen raíces reales del polinomio denominador, ya que:

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1}$$

Entonces:

$$Dom\big(g(x)\big) = Dom\big(f(x)\big) = \mathbb{R}$$

Cuando la base es el número e, se dice que se trata de FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL (por el logaritmo de base e, también llamado logaritmo natural):

$$f(x) = e^x$$

Dominio	(0,∞)
Imagen	$\mathbb{R}$
Invertible	Sí: ln(x)

x. Funciones logarítmicas

Presentan la forma: $$f(x) = \log_a |g(x)|$$

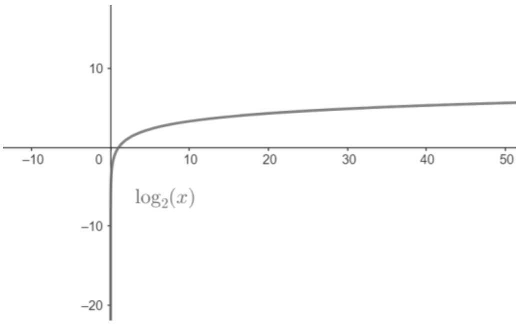
Siendo habitual denotarlas con el valor absoluto del argumento g(x).
Su dominio es:

$$Dom\big(f(x)\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 0\}$$

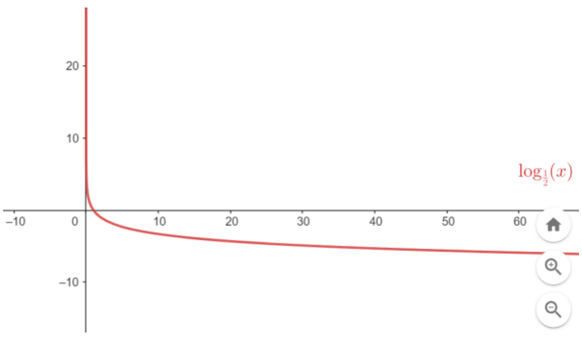
→ No existe el logaritmo de 0. Es decir, el argumento debe ser ESTRICTAMENTE positivo.
→ No existe el logaritmo de un número negativo.

Siempre pasa por el punto (1,0)

Se distinguen 2 tipos en función del valor que toma la base a:



Si a > 1 → Es CRECIENTE
Se observa AV en x = 0



Si 0 < a < 1 → Es DECRECIENTE
Se observa AV en x = 0

EJEMPLO

$$f(x) = \log_2(3x + 4)$$

Se identifican qué valores anulan o vuelven negativa la función argumento g(x):

$$g(x) = 3x + 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Se evalúa el signo de la función argumento a ambos lados del valor crítico identificado:

$$g\left(-\tfrac{4}{3}\right) = 0,\ \ g\left(-\tfrac{5}{3}\right) < 0,\ \ g\left(-\tfrac{3}{3}\right) > 0$$

Entonces: $Dom\big(g(x)\big) = \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$

Se concluye:

$$Dom\big(f(x)\big) = \left\{\mathbb{R} > -\frac{4}{3}\right\} = \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

El intervalo es abierto por la izquierda, ya que el valor -4/3 anula el argumento.

EJEMPLO

$$f(x) = \ln x = \log_e x \rightarrow Dom\big(f(x)\big) = (0, +\infty)$$

EJEMPLO

$$f(x) = \ln(x^3 - 4x) = \log_e(x^3 - 4x)$$

Se identifican qué valores anulan o hacen negativo el argumento g(x):

$$g(x) = x^3 - 4x = 0$$
$$g(x) = x(x^2 - 4)$$

Las 3 raíces del polinomio son:

$$x_1 = 0$$
$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_2 = -2, x_3 = 2$$

Se evalúan valores a ambos lados de los valores críticos identificados:

→ A ambos lados del 0:

$$g(-1) = -1 + 4 > 0$$
$$g(1) = 1 - 4 < 0$$

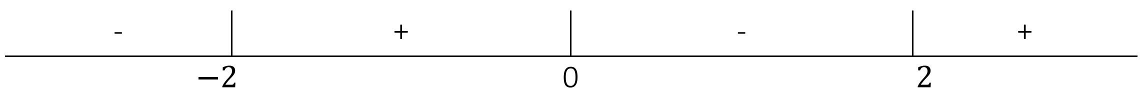
→ A la derecha de 2:

$$g(3) = 15 > 0$$

→ A la izquierda de -2:

$$g(-3) = -39 < 0$$

Representando en la recta real los valores críticos:



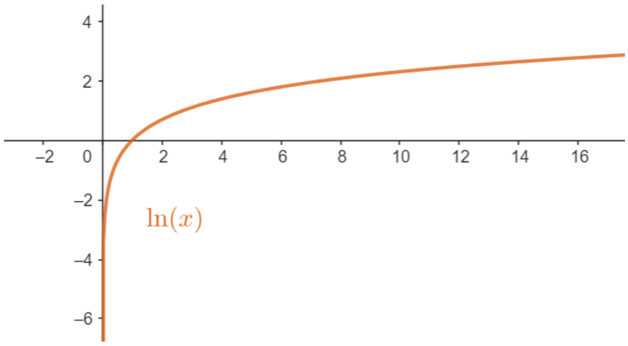
Entonces, el dominio es: $Dom\big(f(x)\big) = (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

→ FUNCIÓN LOGARITMO NEPERIANO

Cuando la base del logaritmo es el número e, se dice que se trata de FUNCIÓN LOGARITMO NEPERIANO (por el logaritmo de base e, también llamado neperiano en honor a John Napier):

$$f(x) = \ln(x)$$

Dominio	$(0,\infty)$
Imagen	$\mathbb{R}$
Invertible	Sí: e^x

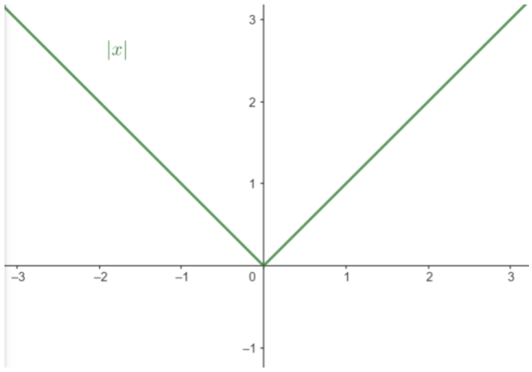


xi. Función valor absoluto

El valor absoluto cumple:

$$|x| = |-x| = x$$

- Para cualquier función positiva, su valor absoluto es la propia función.
- Para cualquier función negativa, su valor absoluto es su OPUESTO.



Por tanto, toda función que contenga un valor absoluto se puede reescribir como una función a trozos que no contenga valor absoluto.

Para poder asignar correctamente a cada uno de los trozos su dominio, hace falta identificar en qué regiones del dominio original la función es positiva y en cuáles es negativa.

Ejemplo: $f(x) = |x^2 + 3x - 4|$

El polinomio $p(x) = x^2 + 3x - 4$ tiene como raíces: $x_1 = -4, x_2 = 1$

Evaluando el signo del polinomio (no de la función) en el entorno de cada raíz:

$$p(0) < 0 \rightarrow para\ x \in \ (-4,1)\ se\ tiene\ p(x) < 0$$
$$p(-5) > 0 \rightarrow \ para\ x < -4\ se\ tiene\ p(x) > 0$$
$$p(5) > 0 \rightarrow \ para\ x > 1\ se\ tiene\ p(x) > 0$$

Y la función a trozos sin valor absoluto equivalente a la función con valor absoluto original es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 4 & \text{si } x < -4 \\ -(x^2 + 3x - 4) & \text{si } -4 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 3x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Arbitrariamente, se ha asignado el valor en que la función es nula, al trozo negativo.

La estrategia es general, aunque la función no esté comprendida íntegramente dentro de un valor absoluto.

EJEMPLO

$$f(x) = x + 9 + |x^2 - 5x - 6|$$

Las raíces del polinomio $p(x) = x^2 - 5x - 6$ son -1 y 6.
Se observa:

$$p(x) > 0 \; \forall \, x < -1$$
$$p(x) > 0 \; \forall \, x > 6$$
$$p(x) \leq 0 \; \forall \, x \in [-1{,}6]$$

Por tanto, los trozos de la función equivalente sin valor absoluto son:

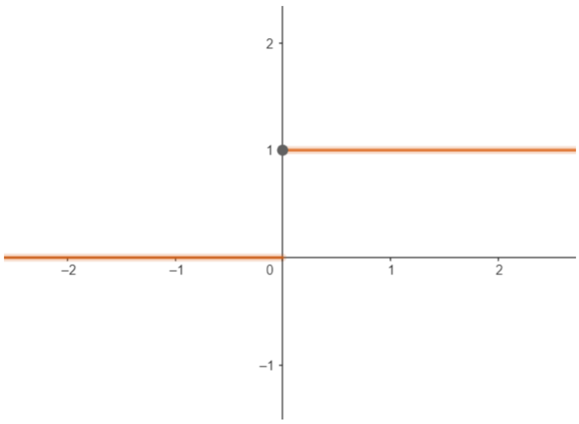
$$f(x) = \begin{cases} x + 9 + (x^2 - 5x - 6) & \text{si } x < -1 \\ x + 9 - (x^2 - 5x - 6) & \text{si } -1 \leq x \leq 6 \\ x + 9 + (x^2 - 5x - 6) & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

Arbitrariamente, se han asignado los extremos del intervalo, en que el polinomio se nula, al trozo negativo.

xii. Función Heaviside

Se define como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$$



Clásicamente, se tiene a = 0, pero en general, se cumple $a \in \mathbb{R}$.
Su gráfica corresponde con un escalón de y = 0 hacia y = 1 en x = 0.

Dominio	$\mathbb{R}$
Imagen	{0,1}
Invertible	No

xiii. Funciones trigonométricas

Son funciones PERIÓDICAS

$y = \sin x$	con periodo T = 2π	dominio $\mathbb{R}$	Imagen [-1,1]
$y = \cos x$	con periodo T = 2π	dominio $\mathbb{R}$	Imagen [-1,1]
$y = \tan x$	con periodo T = π	dominio $\mathbb{R} - \{x \mid cos(x) = 0\}$	Imagen $\mathbb{R}$

Notación de funciones trigonométricas:

$$sin\, x^2 = sin(x^2) \neq sin^2 x = (sin\, x)^2 = (sin\, x)(sin\, x)$$

Propiamente, estas funciones solo son invertibles si se RESTRINGE su dominio:

- Si $f(x) = \sin x$ con dominio RESTRINGIDO a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
  Se tiene $f^{-1}(x) = \arcsin x$ arcoseno (y NO cosecante)

- Si $f(x) = \cos x$ con dominio RESTRINGIDO a $[0, \pi]$
  Se tiene $f^{-1}(x) = \arccos x$ arcososeno (y NO secante)

- Si $f(x) = \tan x$ con dominio RESTRINGIDO a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
  Se tiene $f^{-1}(x) = \arctan x$ arcotangente (y NO cotangente)

Funciones cosecante, secante y cotangente:
NO SON FUNCIONES INVERSAS (no cumplen RECIPROCIDAD) sino que son los INVERSOS multiplicativos (elevar a -1):

$$y = \frac{1}{\sin x} = cosec\ x$$

$$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$y = \frac{1}{\tan x} = cotg\ x$$

Funciones arco (devuelven el ángulo asociado a esa propiedad trigonométrica):
SON FUNCIONES INVERSAS de seno, coseno y tangente:

$$y = \arcsin x$$

$$y = arccos\ x$$

$$y = arctan\ x$$

O sea, cumplen RECIPROCIDAD:

$$\sin(\arcsin(x)) = x$$

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

Efecto de coeficientes en las funciones periódicas:

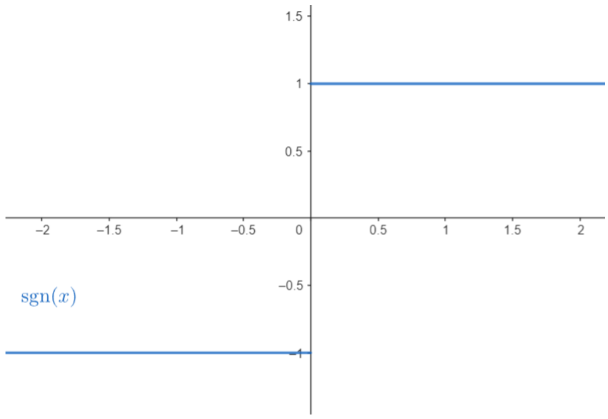
$$y = A \cdot \cos(Bx + C) + D$$

A = Es proporcional a la amplitud de la oscilación.
B = Es proporcional al periodo de la oscilación.
C = Es INVERSAMENTE proporcional a la traslación horizontal (sumar números mayores desplaza más hacia la izquierda).
D = Es proporcional a la traslación vertical (sumar números mayores desplaza hacia más arriba)

xiv. Función signo

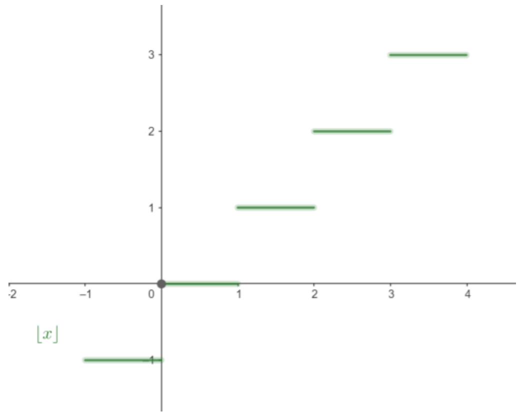
La función signo devuelve 1 cuando el argumento es estrictamente positivo y -1 cuando es estrictamente negativo. Cuando el argumento es exactamente 0, devuelve 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$



Dominio	$\mathbb{R}$
Imagen	$[-1,0,1\}$
Invertible	No

xv. Función parte entera por defecto

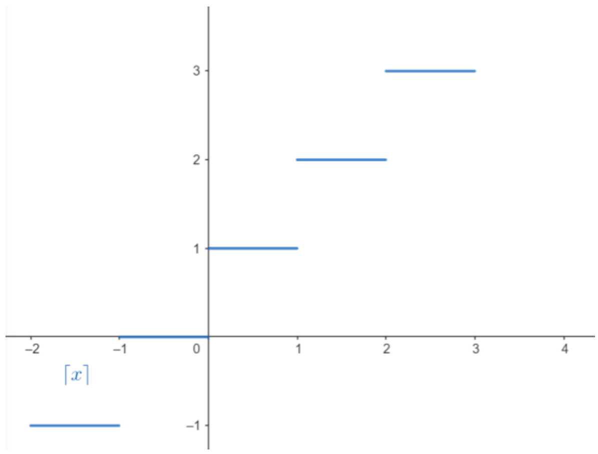


Devuelve la parte entera de un número real, truncando la parte fraccionaria.

$$f(x) = m \quad \text{si} \quad m \in [m, m+1), \quad m \in \mathbb{Z}$$

Dominio	$\mathbb{R}$
Imagen	$\mathbb{Z}$
Invertible	NO

xvi. función parte entera por exceso



Devuelve el número entero consecutivo a un número real dado.

$$f(x) = m \quad \text{si} \quad m \in (m-1, m], \quad m \in \mathbb{Z}$$

Dominio	$\mathbb{R}$
Imagen	$\mathbb{Z}$
Invertible	NO