EXAMEN 3

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Resolved la ecuación $(4-i)\cdot(z+2)=2+3i$, donde z es un número complejo. Expresad el resultado en forma polar. Trabajad con los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$.

   b) Expresad de forma exponencial el número complejo $\dfrac{(1+i)^4}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^3}$. Trabajad con los ángulos en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución

a) Sabiendo que z es un número complejo, podemos escribirlo en forma binómica como $z=a+bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Así, tenemos:

$$(4-i)\cdot(z+2)=(4-i)\cdot(a+bi+2)=4a+4bi+8-ia-bi^2-2i=$$
$$(4a+b+8)+(4b-a-2)i=2+3i$$

Ahora igualamos las partes reales y las partes imaginarias:

$$\begin{aligned} 4a+b+8&=2\\ 4b-a-2&=3 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema se obtiene: $a=-\dfrac{29}{17}$ y $b=\dfrac{14}{17}$. Con esto, tenemos:

$$z=-\frac{29}{17}+\frac{14}{17}i$$

Para expresar z en forma polar, calculamos el módulo y el argumento (ver apartado 3.4.1, página 30, Módulo 1):

- Módulo: $r=\sqrt{\left(-\dfrac{29}{17}\right)^2+\left(\dfrac{14}{17}\right)^2}\approx 1{,}89$
- Argumento: $\theta=\arctan\left(\dfrac{14}{-29}\right)\approx 154{,}23°$

Nota: la tangente vale $\dfrac{14}{-29}$ en $154{,}23°$ y en $334{,}23°$; pero al ser la parte real negativa y la parte imaginaria positiva, estamos en el segundo cuadrante, es decir, en $154{,}23°$. En resumen:

$$\boxed{z = 1{,}89_{154{,}23^\circ}}$$

b) Pasamos el numerador y el denominador a forma exponencial (ver apartado 3.5, Módulo 1):

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$
$$\left|1-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$$
$$\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{5\pi}{3}$$

Ahora calculamos las potencias (ver apartado 3.5, Módulo 1):

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{i\pi}$$
$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^3 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^3 = 8e^{i5\pi}$$

Finalmente, la división (ver apartado 3.5, Módulo 1):

$$\boxed{\frac{(1+i)^4}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^3} = \frac{4e^{i\pi}}{8e^{i5\pi}} = \frac{1}{2}e^{-i4\pi} = \frac{1}{2}e^{0i} = 0{,}5}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Plantear el sistema igualando parte real y parte imaginaria: 0,5 puntos.
- Encontrar el valor de z: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo de z: 0,25 puntos.
- Calcular el argumento de z: 0,25 puntos.

Apartado b

- Pasar a forma exponencial: 0,5 puntos.
- Calcular las potencias: 0,5 puntos.
- Calcular la división: 0,25 puntos.

2. Considerad la recta $r : \left.\begin{array}{r} x-ky+z = \ \ 1 \\ -kx+y+2z = 5 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi : x+y+z = 2$

   Se pide:

   a) Determinad, razonadamente, para qué valores del parámetro k la recta r no tiene ningún punto en común con el plano π.

   b) Considerad la recta r y el plano π que se obtienen sustituyendo el parámetro k por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y calculad el punto de corte de la recta r con el plano π.

Solución

a) Recordemos que el estudio de la posición relativa de una recta y un plano se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema formado por las ecuaciones que definen la recta y el plano [Ver apartado 8 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”]

$$\left.\begin{array}{r} x-ky+z=1 \\ -kx+y+2z=5 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

Para discutir el sistema utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apartado 4 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -k & 1 \\ -k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad M=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -k & 1 & 1 \\ -k & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, ya que si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & -k & 1 \\ -k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right|=-k^2-3k-2=-(k+2)\cdot(k+1)$$

- Si $k\neq -2$ y $k\neq -1 \rightarrow \mathrm{rg}(A)=3=\mathrm{rg}(M)=$ nº incógnitas $\rightarrow$ sistema compatible determinado, y por tanto $\boxed{\text{la recta } r \text{ corta al plano } \pi \text{ en un único punto}}$.
- Si $k=-2$, entonces $\mathrm{rg}(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0$ (este menor se obtiene considerando segunda y tercera fila y segunda y tercera columna).

  Calculamos, para $k=-2$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:

  $\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right|=0$. Por lo tanto, tenemos $\mathrm{rg}(M)=3$. Así pues, dado que $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(M)<$ nº incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, y podemos afirmar que $\boxed{\text{la recta } r \text{ está contenida en el plano } \pi}$.
- Si $k=-1$, entonces $\mathrm{rg}(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0$,(este menor se obtiene considerando segunda y tercera fila y segunda y tercera columna).

  Calculamos, para $k=-1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Por lo tanto, tenemos $\text{rg}(M) = 3$. Así pues, dado que $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(M)$ el sistema es incompatible, y podemos afirmar que $\boxed{\text{la recta } r \text{ no tienen ningún punto en común con el plano } \pi}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que si k toma el valor de la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC, es decir toma valores enteros de 0 a 9, se tiene que la recta r y el plano π se cortan en un único punto y para encontrar este punto de intersección se debe resolver el sistema compatible determinado formado por las ecuaciones que definen la recta y el plano. Así pues, el sistema que nos piden resolver es:

$$\left.\begin{aligned} x - ky + z &= 1 \\ -kx + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apartado 6 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -k & 1 & 1 \\ -k & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 2+k & 5+k \\ 0 & 1+k & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2 + k \cdot F1 \rightarrow F2, \ \ F3 - F1 \rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{aligned} x - ky + z &= 1 \\ (1-k^2)\, y + (2+k)z &= 5 + k \\ (1+k)y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $y = \frac{1}{1+k}$. Si hacemos la sustitución de este valor de y en la segunda ecuación y aislamos la z obtenemos $z = 2$. Si sustituimos en la primera ecuación estos valores de y y z se obtiene $x = \frac{-1}{1+k}$

Así pues, el punto de intersección de la recta r con el plano π es el punto de coordenadas:

$$\boxed{\left(x = \frac{-1}{1+k},\ y = \frac{1}{1+k},\ z = 2\right)}.$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz A en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k = -2$ y $k = -1$: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente a -2 y -1 la recta y el plano se cortan en un único punto: 0,5 puntos.

- Justificar que para $k = -2$ la recta está contenida en el plano: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k = -1$ la recta no tiene puntos en común con el plano: 0,5 puntos.

Apartado b

- Obtener el punto de corte de la recta con el plano: 0,5 puntos.

3. Sean E y F dos subespacios vectoriales de dimensión 2 de $\mathbb{R}^4$ definidos de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 | a_1 = a_4, a_3 = 0\}$$
$$F = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 | b_1 = b_3, b_2 = 0\}$$

Y sea $w = (a+1, a+2, 0, a+1)$ donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP.

(a) Comprobad que $A = \{(1,0,0,1), (0,1,0,0)\}$ es una base de E. ¿$w \in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Encontrad una base de F. ¿Pertenece w a F? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base que habéis encontrado. ¿Generan E y F el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$? Justificad la respuesta.

Solución

(a) Como sabemos que la dimensión de E es 2, sólo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumplen las condiciones $a_1 = a_4$ y $a_3 = 0$ para los dos vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes, ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues A es una base de E.
Para ver si $w \in E$ podemos comprobar que cumple las condiciones $a_1 = a_4$ y $a_3 = 0$, o alternativamente miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+2 \\ 0 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución$x = a+1$, $y = a+2$. Por tanto, $w \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a+1, a+2)$.

(b) Podemos proponer como base de F: $B = \{(1,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ y de forma análoga al apartado anterior demostrar que es base de F:
Primero comprobaremos que los vectores de B pertenecen a F comprobando que se cumplen las condiciones $b_1 = b_3$ y $b_2 = 0$ para los dos vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Así B es una base de F.
Podemos ver directamente que w no pertenece a F ya que no cumple las condiciones del subespacio (por ejemplo, no cumple $b_2 = 0$).
E y F no generan el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ ya que hay vectores (por ejemplo el w), que pertenecen a uno y no al otro.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Comprobar que A es base: 0,5 puntos.
- Ver que $w \in E$: 0,25 puntos.
- Calcular las coordenadas: 0,5 puntos.

Apartado b

- Proponer base de F y justificar que es base: 0,5 puntos.
- Ver que $w \notin E$: 0,25 puntos.
- Justificar que no generan el mismo subespacio vectorial: 0,5 puntos.

4. Sustituid, antes de hacer cálculos, el parámetro c por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:
$u = (1, c+1, 0)$, $v = (0, -1, 1)$ y $w = (1, 1, c-1)$, escritos en la base canónica C.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que cumple que:
$f(u) = -u$, $f(v) = v$ y $f(w) = (c+1)w$.

Responded razonadamente los siguientes apartados:

a) Comprobad que $B = \{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Calculad la matriz $M(f|B, B)$ que corresponde a la aplicación lineal f en la base B y la matriz $M(f|C, C)$ que corresponde a la aplicación lineal f en la base canónica $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

b) Calculad la imagen en base C del vector $e = -2u + w$ al aplicarle 5 veces la aplicación f, es decir $f^5(e)$, sin utilizar la matriz $M(f|C, C)$.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de c genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir c por su valor en los desarrollos que siguen.

a) Para demostrar que B es una base de $\mathbb{R}^3$ basta con ver que el determinante formato por los tres vectores es diferente de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c+1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c-1 \end{vmatrix} = -(c-1) + 0 + (c+1) - 0 - 1 - 0 = 1$$

El determinante no es nulo y, por tanto, los tres vectores son linealmente independientes y forman base de $\mathbb{R}^3$.

Para construir la matriz de la aplicación f en la base B tenemos que poner en columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base B expresadas en la base B. Los vectores de la base B son u, v y w y sus imágenes se escriben en la propia base B como: $f(u) = -u$ se escribe como $(-1, 0, 0)$, $f(v) = v$ se escribe como $(0, 1, 0)$, $f(w) = (c+1)w$ se escribe como $(0, 0, c+1)$. Por lo tanto, la matriz de f base B es:

$$M(f|B, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c+1 \end{pmatrix}$$

Para construir la matriz de f en la base canónica C tenemos que usar la matriz de cambio de base que podemos construir (como se ve en el apartado 6 del módulo "Aplicaciones lineales") a partir de las coordenadas de los vectores de B en la base canónica que son las que proporciona el enunciado.

$$M(Id|B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c+1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c-1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por esta matriz y por su inversa según la siguiente fórmula, obtendremos la matriz que pide el enunciado. La inversa $M(Id|B, C)^{-1}$ se puede calcular con CalcMe o bien por el método de Gauss.

$$M(f|C, C) = M(Id|B, C) \cdot M(f|B, B) \cdot M(Id|B, C)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c+1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -c & 1 & 1 \\ 1-c^2 & c-1 & c \\ c+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El resultado es:

$$M(f|C, C) = \begin{pmatrix} c^2+3c+1 & -c-2 & -c-2 \\ 3c^2+3c & -3c-1 & -3c-2 \\ c^3-c & c-c^2 & -c^2+c+1 \end{pmatrix}$$

b) Para aplicar n veces una aplicación, que es lo mismo que elevar la matriz de la aplicación a n, recordamos que las potencias de matrices diagonales son las más sencillas de calcular (como se ve en el apartado 8.2 del módulo "Aplicaciones lineales"). Por tanto, conviene usar la matriz de la aplicación f en base B, que es diagonal. Se necesita usar entonces el vector e expresado en base B, que se escribe $(-2, 0, 1)$ porque estos son los coeficientes de la combinación lineal $-2u + w$ de vectores de la base $\{u, v, w\}$.

$$f^5(e) = M(f|B, B)^5 \cdot e = \begin{pmatrix} (-1)^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & (c+1)^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (c+1)^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ (c+1)^5 \end{pmatrix}$$

Se puede ahora calcular la imagen al aplicar 5 veces f sobre e en base C usando la matriz de cambio de base y esta imagen que acabamos de calcular en base B:

$$f^5(e|C) = M(Id|B,C) \cdot f^5(e|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c+1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ (c+1)^5 \end{pmatrix}$$

$$f^5(e|C) = \begin{pmatrix} 2+(c+1)^5 \\ 2(c+1)+(c+1)^5 \\ (c-1)(c+1)^5 \end{pmatrix}$$

Este producto es equivalente a calcular usando las propiedades de las aplicaciones lineales: $f^5(e) = f^5(-2u+w) = -2f^5(u) + f^5(w) = (-2)(-u) + (c+1)^5 w$
$f^5(e|C) = 2(1, c+1, 0) + (c+1)^5(1, 1, c-1)$
$f^5(e|C) = (2+(c+1)^5, 2(c+1)+(c+1)^5, (c-1)(c+1)^5)$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Comprobar que B es base: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de f base B: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de cambio de base B a base C: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de cambio de base C a base B: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de f en base C: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular la imagen de e base B: 0,5 puntos.
- Calcular la imagen de e en base C: 0,5 puntos.