

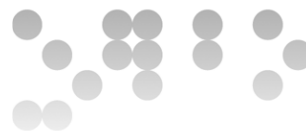
Solución Examen 3

2016-2017 Semestre 2

75.557 Àlgebra

81.506 Matemàtiques I

Fecha 21.06.2017



1. Responded a los siguientes apartados:

a) Hallad la condición que tienen que cumplir x e y para que el número complejo

$$\frac{(x-1) + yi}{(x+1) + yi}$$

sea un número imaginario puro.

b) Hallad el módulo y el argumento de $-2 + 2i$.

Solución:

a) Tal como se dice en la página 20 del material impreso, para que sea un número imaginario puro es necesario que la parte real sea 0. Vamos a ver cuál es la parte real de este número complejo. Para ello efectuamos el cociente para obtener el número de la forma $a + bi$ (ver apartado 3.3., página 20, "Operaciones con números complejos"):

$$\begin{aligned} \frac{(x-1) + yi}{(x+1) + yi} &= \\ &= \frac{((x-1) + yi) \cdot ((x+1) - yi)}{((x+1) + yi) \cdot ((x+1) - yi)} = \frac{(x-1) \cdot (x+1) - (x-1) \cdot yi + (x+1) \cdot yi + y^2}{(x+1)^2 + y^2} = \\ &= \frac{x^2 - 1 - xyi + yi + xyi + y^2}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2 - 1) + 2yi}{(x+1)^2 + y^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} i \end{aligned}$$

Una vez tenemos el número complejo expresado de la forma $a + bi$ imponemos que la parte real es 0 (para que el número sea imaginario puro):

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

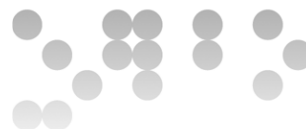
Por lo tanto, la condición es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

a) Buscamos el módulo y el argumento del complejo $-2 + 2i$. Para ello aplicamos las explicaciones del apartado 3.4, página 27, del material impreso.

$$m = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Ahora vamos a por el ángulo. El ángulo del complejo dado es:



$$\alpha = \arctan \frac{2}{-2} + 180^\circ = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$$

Por lo tanto:

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135^\circ}$$

2. Sean E , F y G los subespacios vectoriales de \mathfrak{R}^3 generados de la forma siguiente:

$$E = \langle (2,2,0), (2,4,4), (0,2,a), (b,4,2) \rangle, a, b \in \mathfrak{R}$$

$$F = \langle (-1,-1,0), (0,1,2), (1,0,-2) \rangle$$

$$G = \langle (2,2,0), (2,4,4) \rangle$$

- a) Hallad a y b para que la dimensión de E sea 2 y hallad una base en este caso. Hallad la dimensión de F y de G y hallad también una base.
- b) ¿Son F y G el mismo subespacio vectorial? En caso afirmativo, hallad la matriz de cambio de base de la base de G a la base de F que habéis propuesto en el apartado anterior.

Solución:

- a) Primero de todo vemos que los dos primeros vectores son linealmente independientes ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ así que ya generan un subespacio vectorial de dimensión 2.

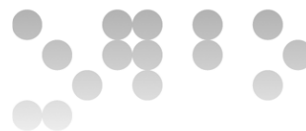
Ahora imponemos que los otros dos vectores sean combinación lineal de estos dos primeros para que la dimensión de E sea 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & a \end{vmatrix} = 4a - 16$$

Por lo tanto, si imponemos que el determinante anterior sea 0 tenemos que $a=4$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & b \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8b - 24$$

Por lo tanto, si imponemos que el determinante anterior sea 0 tenemos que $b=3$.



Como base podremos usar los vectores que contienen el menor que hemos encontrado en primer lugar $A = \{(2, 2, 0), (2, 4, 4)\}$

En cuanto a F: Calculamos el rango de los vectores. Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Pero podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así la dimensión de F es 2 y como base podríamos usar los dos vectores que contienen el menor anterior y, por lo tanto, $B = \{(-1, -1, 0), (0, 1, 2)\}$

Respecto G procedemos de manera análoga y encontramos que la dimensión es 2 ya que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ y una base puede ser } C = \{(2, 2, 0), (2, 4, 4)\}.$$

- b) Para comprobar si son el mismo subespacio vectorial, como la dimensión de los dos espacios es igual, será suficiente con comprobar si una base de G pertenece a F.

Así para $(2, 2, 0)$ de la base de G planteamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ que tiene solución } x=-2, y=0 \text{ y, por lo tanto, } (2, 2, 0) \in F$$

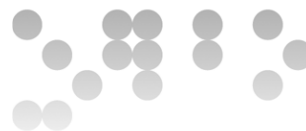
Para $(2, 4, 4)$ de la base de G planteamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ que tiene solución } x=-2, y=2 \text{ y, por lo tanto, } (2, 4, 4) \in F$$

Por lo tanto F y G son el mismo subespacio vectorial.

Para calcular la matriz de cambio de base de C a B, pondremos los vectores de la base C como combinación lineal de los de la base B. Esto lo acabamos de resolver, por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales siguiente que depende del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

- a) Estudiad para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible.
b) Resolved el sistema para el caso $\lambda = 1$.

Solució:

- a) Estudiamos para qué valores de λ el sistema es incompatible.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5\lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5\lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda(5\lambda + 5) = 5\lambda(\lambda + 1)$$

CASO I – Si $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -1$

$$Rang M = Rang \overline{M} = \text{núm. incògn} = 3$$

En virtud del teorema de Rouché-Frobenius, en este caso el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

CASO II – Si $\lambda = 0$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Rang M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \Rightarrow Rang \overline{M} = 3$$

$$Rang M \neq Rang \overline{M}$$



En virtud del teorema de Rouché-Frobénius el sistema es INCOMPATIBLE

CASO III - $\lambda = -1$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rang } M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -5 & 30 \end{vmatrix} = 120 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } \overline{M} = 3$$

$$\text{Rang } M = 2 \quad \text{Rang } \overline{M} = 3$$

$$\text{Rang } M \neq \text{Rang } \overline{M}$$

En virtud del teorema de Rouché-Frobénius el sistema es INCOMPATIBLE

El sistema es incompatible para dos valores del parámetro λ : $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

b) Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2x - y + 5z = 30 \end{cases}$$

En este caso el sistema es compatible determinado, tiene una única solución, y el sistema se puede resolver por cualquier método conocido, por ejemplo por el método de Gauss:

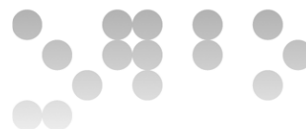
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 30 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & 30 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array} \right)$$

De la tercera ecuación tenemos $10z = 60$, por lo tanto, $z = 6$

De la segunda ecuación tenemos $y + z = 10$, por lo tanto, $y = 4$

De la primera ecuación tenemos $x + y - z = 0$, por lo tanto, $x = 2$

Solución: $(x = 2, y = 4, z = 6)$



4. Consideremos $A = (2,0)$, $B = (2,3)$, $C = (1,3)$.
- a) Sea g el giro de ángulo a en sentido antihorario desde el origen de coordenadas. Calculad $g(A)$, $g(B)$ y $g(C)$. Hallad el ángulo a de manera que el segmento $g(B)$, $g(C)$ sea perpendicular al eje x.
- b) Sea f el escalado de razón 2 desde el punto $(0,-2)$. Calculad $f(A)$, $f(B)$ y $f(C)$.

Solución:

- a) Recordemos el Módulo 5, Sección 3.1. La matriz del giro de ángulo a en sentido antihorario desde el origen es:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar las imágenes de los puntos A,B,C, tenemos que hacer la multiplicación siguiente:

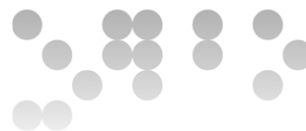
$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(a) & 2\cos(a)-3\sin(a) & \cos(a)-3\sin(a) \\ 2\sin(a) & 2\sin(a)+3\cos(a) & \sin(a)+3\cos(a) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g(A) &= (2\cos(a), 2\sin(a)), \\ g(B) &= (2\cos(a)-3\sin(a), 2\sin(a)+3\cos(a)) \\ g(C) &= (\cos(a)-3\sin(a), \sin(a)+3\cos(a)) \end{aligned}$$

Así, $g(B)-g(C) = (\cos(a), \sin(a))$ y este vector es perpendicular al eje x si al multiplicarlo por el vector $(1,0)$ da 0. Es decir, si $\cos(a) = 0$. Es decir, cuando el ángulo es de 90° . Entonces los tres puntos son $g(A)=(0,2)$, $g(B)=(-3,2)$ y $g(C)=(-3,1)$.

- b) Recordemos ahora el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 2 desde el punto $(0, -2)$, de derecha a izquierda, primero hacemos la traslación de vector $(0, 2)$, luego hacemos el escalado de razón 2, y luego hacemos la traslación de vector $(0, -2)$:



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar las imágenes de los puntos A,B,C, tenemos que hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $f(A)=(4,2)$, $f(B)=(4,8)$ y $f(C)=(2,8)$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar alguno/s de los siguientes valores:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	300°	315°	360°
$\text{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\text{cos}(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\text{tan}(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	$-\sqrt{3}$	-1	0