Presentación

Esta PEC es una introducción a la teoría de grafos que cubre los contenidos estudiados en los 3 primeros módulos de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre funciones y algoritmos, los fundamentos de la teoría de grafos y los problemas de recorridos y conectividades sobre grafos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer los principales conceptos de combinatoria.
- Conocer el concepto de complejidad temporal y espacial de un algoritmo.
- Conocer el concepto de grafo y los diferentes tipos de grafos (grafos orientados, grafos ponderados, pseudografos, multigrafos, ...).
- Conococer las principales propiedades de los grafos y saber analizarlas.
- Conocer los problemas de conectividad más usuales sobre grafos, los algoritmos que los resuelven y saber aplicarlos en un grafo concreto.
- Ser capaz de representar y analizar un problema en términos de la teoría de grafos.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 25 % = 5 %+10 %+ (5 %+5 %))

   a) En una competición deportiva las camisetas de los deportistas se numeran con un nuevo tipo de dorsal inteligente. Numerar cada camiseta cuesta dos euros por cada dígito que forme parte del número que aparezca en la camiseta. Esto es, por ejemplo el dorsal 6 (un sólo dígito) cuesta 2 euros, el dorsal 34 (dos dígitos) cuesta 4 euros y el dorsal 352 (tres dígitos) cuesta 6 euros. La factura total para numerar las camisetas de todos los deportistas es de 13794 euros. Teniendo en cuenta que se empiezan a repartir los dorsales desde el número 1 y en orden ¿Cuántos deportistas hay en la competición?

   b) Consideremos los 18 primeros números naturales. Esto es, el conjunto $\{1, 2, ..., 18\}$. Calculad de cuántas maneras distintas pueden elegirse 5 números distintos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, de este conjunto de tal forma que la distancia entre dos cualesquiera de ellos, (distintos), sea al menos 2 . Esto es, que $|a_i - a_j| \geq 2$ para todo a_i, a_j con $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., 5\}$.

   c) Sea
   $$f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$$
   una función. Para cada uno de los siguientes casos, **justificad** cuál es el mayor subconjunto A de $\mathbb{R}$ que puede elegirse como dominio de la función, y después decid, (**también justificando la afirmación**), cuál tiene que ser el subconjunto B de $\mathbb{R}$ que nos permitirá afirmar que f es biyectiva.

   1) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.
   2) $f(x) = +\sqrt{2 + 5x}$.

Solución:

a) Se necesitan $\frac{13794}{2} = 6897$ dígitos. Los dorsales del 1 al 9 gastan 9 dígitos, los del 10 al 99 gastan $2 \cdot 90 = 180$ dígitos. Los dorsales del 100 al 999, necesitan $3 \cdot 900 = 2700$ dígitos. De aquí quedan $6897 - 2700 - 180 - 9 = 4008$ dígitos, que deben de agruparse para formar números de 4 cifras. Luego se corresponden con $\frac{4008}{4} = 1002$ nuevos dorsales. De donde el total de deportistas es $1002 + 999 = 2001$.

b) Tomemos una posible elección $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Podemos suponer que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ siendo $a_i - a_{i-1} \geq 2$ para $i \in \{2, ..., 5\}$. Si consideramos los números naturales $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\} = \{a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, a_4 - 3, a_5 - 4\}$, tenemos un subconjunto de cinco números naturales distintos comprendidos entre el 1 y el 14.

Recíprocamente, si elegimos cinco números naturales distintos comprendidos entre el 1 y el 14, y los ordenamos de menor a mayor $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$, podemos asociarles el subconjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ tomando $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 + 1$, $a_3 = b_3 + 2$,$a_4 = b_4 + 3$, $a_5 = b_5 + 4$.

Como cada uno de estos procesos es uno el inverso del otro, hemos construido una biyección entre el conjunto de subconjuntos de cinco números naturales pedidos en el ejercicio, y el conjunto de subconjuntos de cinco números naturales distintos comprendidos entre el 1 y el 14 (de donde tienen el mismo cardinal). El cardinal de este último es $C(14, 5) = 2002$, que es la respuesta al problema planteado.

c) Solución del tercer apartado:

1) $A = \mathbb{R} - \{-2\}$ para poder realizar la división.
Para calcular B, Observemos que siempre $\frac{x-2}{x+2} \neq 1$, de donde $B \subset \mathbb{R} - \{1\}$. Dado $y \in \mathbb{R} - \{1\}$, para comprobar si pertenece a la imagen de f, debemos de ver si la ecuación $\frac{x-2}{x+2} = y$ tiene solución (miramos y como un número fijo y x la incógnita). Operando obtenemos que siempre tiene una única solución que es $x = \frac{2(1+y)}{1-y}$.
Concluimos que para $B = \mathbb{R} - \{1\}$ la aplicación f es biyectiva.

2) Debemos tomar $A = [-\frac{2}{5}, \infty)$ para poder hacer la raíz cuadrada. Observamos que el resultado de calcular $+\sqrt{2+5x}$ es siempre un número real mayor o igual que cero. Esto es $B \subset [0, \infty)$. Igual que en el caso anterior, nos preguntamos si cualquier $y \in [0, \infty)$ es imagen por f de un elemento de A. Resolviendo la ecuación $y = +\sqrt{2+5x}$, (y es un número fijo), obtenemos que $x = \frac{1}{5}(y^2 - 2)$ es solución única. Por tanto, tomando $B = [0, \infty)$ concluímos que f es biyectiva.

---

2. (Valoración de un 25 %=5 % +5 % +5 %+5 %+ (2.5 % + 2.5 %))

Responded **de manera justificada** a las siguientes cuestiones:

a) ¿Existe algún grafo que sea bipartito completo, con orden 5 y medida 7?

b) Un grafo tiene 26 vértices y 58 aristas. Hay cinco vértices de grado 4, seis vértices de grado 5 y siete vértices de grado 6. Si el resto de vértices tienen todos el mismo grado. ¿Cuál es este grado?

c) Usad la teoría de grafos para justificar si es o no posible que cada persona de un grupo de 15 individuos tenga exactamente 3 amigos en ese grupo (suponemos que la relación de amistad es simétrica. Esto es, la amistad surge en los dos sentidos entre dos personas).

d) ¿Se corresponde la siguiente secuencia de números naturales

$$8, 8, 7, 6, 6, 5, 3, 2, 2, 2, 1$$

con la secuencia gráfica de algún grafo? Justificad la respuesta.

e) Calculad el orden y la medida de los siguientes grafos:

- $C_5 + T_4$.
- $C_5 \times T_4$.

Solución:

a) No. Hay dos maneras de dividir 5 vértices en dos subconjuntos. O bien un subconjunto de 1 vértice y otro de 4 vértices; o bien uno de 2 vértices y otro de 3 vértices. Ahora $K_{1,4}$ tiene 4 aristas y $K_{2,3}$ seis aristas. De donde ningún grafo completo bipartito con 5 vértices puede tener mas de 6 aristas. Concluímos que tener 7 aristas es imposible.

Otra posible explicación sería: En un grafo bipartito completo con vértices repartidos en un subconjunto de n vértices y otro de m vértices, la medida es nm. En nuestro caso $nm = 7$. Como 7 es primo, $n, m = 1, 7$. Luego el orden debería ser necesariamente $n + m = 8 \neq 5$.

b) Hay $26-5-6-7 = 8$ vértices de grado x. Por la fórmula de los grados, $54+6\cdot5+7\cdot6+8\cdot x = 2\cdot58$. De aquí $x = 3$ y concluímos que el grado de los restantes 8 vértices es 3.

c) Es imposible. Si construimos un grafo en el que cada persona representa un vértice del mismo y cada arista una relación de amistad, cada vértice tendría grado 3 y tendríamos un grafo con un número impar de vértices de grado impar, lo que es imposible.

d) Sí. Aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi tenemos:

$$8, 8, 7, 6, 6, 5, 3, 2, 2, 2, 1$$
$$7, 6, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 2, 1$$
$$7, 6, 5, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 1$$
$$5, 4, 4, 3, 1, 1, 0, 1, 1$$
$$3, 3, 2, 0, 0, 0, 1, 1$$
$$3, 3, 2, 1, 1, 0, 0, 0$$
$$2, 1, 0, 1, 0, 0, 0$$
$$2, 1, 1, 0, 0, 0, 0$$
$$0, 0, 0, 0, 0, 0$$

Lo que implica que sí estamos ante una secuencia gráfica.

e) Teniendo en cuenta que C_5 tiene 5 vértices y 5 aristas; y que T_4 tiene 4 vértices y 3 aristas, concluímos que:
- El orden de $C_5 + T_4$ es $5 + 4 = 9$ y su medida es $5 + 3 + 5 \cdot 4 = 28$.
- El orden de $C_5 \times T_4$ es $5 \cdot 4 = 20$ y su medida es $5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 35$.

3. (Valoración de un 25 %=6 % +6 % +6 %+7 %)

Una zona rural tiene una red de carreteras estrechas que une sus 8 granjas, siguiendo la siguiente matriz de adyacencias que indica distancias en km. Siendo la quinta granja (quinta columna/fila) la que tiene una salida a la autopista.

Un ladrón ha robado una cabra en la granja número 1, y quiere huir por la autopista. Pero como no conoce mucho el terreno, sigue el itinerario 1-2-4-6-8-5. El propietario de la granja lo ve y lo persigue, sabiendo que se dirije a la autopista. No obstante, cuando arranca el coche, el ladrón ya ha recorrido 2km y lo ha perdido de vista.

$$A = \begin{bmatrix} - & 4 & 7 & - & - & - & - & - \\ - & - & 1 & 5 & - & - & 9 & - \\ - & - & - & - & - & 5 & - & - \\ 3 & - & - & - & - & 2 & - & - \\ - & - & - & - & - & 6 & 4 & - \\ - & 4 & - & - & - & - & - & 8 \\ - & - & 2 & - & - & - & - & 2 \\ 6 & - & - & - & 7 & - & - & - \end{bmatrix}$$

Responded **de manera justificada** usando las metodogías de los apuntes de clase, las siguientes cuestiones:

a) Aplica el algoritmo de Floyd para obtener la matriz de distancias entre vértices. A partir de esa matriz ¿Se puede deducir que el sistema de carreteras entre granjas es un grafo conexo?

b) ¿Qué itinerario deberá seguir el propietario de la granja para llegar a la entrada de la autopista antes que el ladrón? Usa otro algoritmo de los apuntes, que no sea el del apartado anterior para resolverlo.

c) Siguiendo el camino óptimo, cuando el granjero ha recorrido 10km, al ladrón le faltan 13km para llegar a la autopista. Si ambos mantienen una velocidad constante ¿Le alcanzará?

d) Ahora, el granjero puede llamar a otro granjero justo antes de arrancar el coche (solo le da tiempo de llamar a uno, y en el tiempo de llamada el ladrón recorre un km más) para que corte un tramo de carretera (una arista del grafo) y recorrer ese tramo en contra dirección. Teniendo en cuenta que solo puede hacer eso con aristas que salgan de o lleguen a las granjas 1 y 5, ¿Qué tramo debe recorrer en contra dirección para llegar cuanto antes a la entrada de la autopista?

Solución:

a) Aplicamos el algoritmo de Floyd:

$$d_0 = \begin{pmatrix} \infty & 4 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 5 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 4 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & - & - & - & - & - \\ - & 0 & 1 & 5 & - & - & 9 & - \\ - & - & 0 & - & - & 5 & - & - \\ 3 & 7 & 10 & 0 & - & 2 & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 6 & 4 & - \\ - & 4 & - & - & - & 0 & - & 8 \\ - & - & 2 & - & - & - & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 13 & - & 7 & - & - & 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 9 & - & - & 13 & - \\ - & 0 & 1 & 5 & - & - & 9 & - \\ - & - & 0 & - & - & 5 & - & - \\ 3 & 7 & 8 & 0 & - & 2 & 16 & - \\ - & - & - & - & 0 & 6 & 4 & - \\ - & 4 & 5 & 9 & - & 0 & 13 & 8 \\ - & - & 2 & - & - & - & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 11 & 15 & 7 & - & 19 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 9 & - & 10 & 13 & - \\ - & 0 & 1 & 5 & - & 6 & 9 & - \\ - & - & 0 & - & - & 5 & - & - \\ 3 & 7 & 8 & 0 & - & 2 & 16 & - \\ - & - & - & - & 0 & 6 & 4 & - \\ - & 4 & 5 & 9 & - & 0 & 13 & 8 \\ - & - & 2 & - & - & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 11 & 15 & 7 & 16 & 19 & 0 \end{pmatrix}, d_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 9 & - & 10 & 13 & - \\ 8 & 0 & 1 & 5 & - & 6 & 9 & - \\ - & - & 0 & - & - & 5 & - & - \\ 3 & 7 & 8 & 0 & - & 2 & 16 & - \\ - & - & - & - & 0 & 6 & 4 & - \\ 12 & 4 & 5 & 9 & - & 0 & 13 & 8 \\ - & - & 2 & - & - & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 11 & 15 & 7 & 16 & 19 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_5 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 9 & - & 10 & 13 & - \\ 8 & 0 & 1 & 5 & - & 6 & 9 & - \\ - & - & 0 & - & - & 5 & - & - \\ 3 & 7 & 8 & 0 & - & 2 & 16 & - \\ - & - & - & - & 0 & 6 & 4 & - \\ 12 & 4 & 5 & 9 & - & 0 & 13 & 8 \\ - & - & 2 & - & - & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 11 & 15 & 7 & 13 & 11 & 0 \end{pmatrix}, d_6 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 9 & - & 10 & 13 & 18 \\ 8 & 0 & 1 & 5 & - & 6 & 9 & 14 \\ 17 & 9 & 0 & 14 & - & 5 & 18 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & 0 & - & 2 & 15 & 10 \\ 18 & 10 & 11 & 15 & 0 & 6 & 4 & 14 \\ 12 & 4 & 5 & 9 & - & 0 & 13 & 8 \\ 19 & 11 & 2 & 16 & - & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 11 & 15 & 7 & 13 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_7 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 9 & - & 10 & 13 & 15 \\ 8 & 0 & 1 & 5 & - & 6 & 9 & 11 \\ 17 & 9 & 0 & 14 & - & 5 & 18 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & 0 & - & 2 & 15 & 10 \\ 18 & 10 & 6 & 15 & 0 & 6 & 4 & 6 \\ 12 & 4 & 5 & 9 & - & 0 & 13 & 8 \\ 19 & 11 & 2 & 16 & - & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 11 & 15 & 7 & 13 & 11 & 0 \end{pmatrix}, d_8 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 9 & 22 & 10 & 13 & 15 \\ 8 & 0 & 1 & 5 & 18 & 6 & 9 & 11 \\ 17 & 9 & 0 & 14 & 20 & 5 & 18 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & 0 & 17 & 2 & 15 & 10 \\ 12 & 10 & 6 & 15 & 0 & 6 & 4 & 6 \\ 12 & 4 & 5 & 9 & 15 & 0 & 13 & 8 \\ 8 & 11 & 2 & 16 & 9 & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 11 & 15 & 7 & 13 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Todos los vértices del grafo son alcanzables desde cualquier otro vértice del grafo, ya que la matriz de distancias obtenida con el algoritmo de Floyd está llena. Por lo tanto, las granjas forman un grafo conexo.

b) Aplicamos Dijkstra:

it	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$(0,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$
2	$(0,1)^\star$	$(4,1)$	$(7,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$
3	$(0,1)$	$(4,1)^\star$	$(5,2)$	$(9,2)$	$(\infty,1)$	$(\infty,1)$	$(13,2)$	$(\infty,1)$
4	$(0,1)$	$(4,1)$	$(5,2)^\star$	$(9,2)$	$(\infty,1)$	$(10,3)$	$(13,2)$	$(\infty,1)$
5	$(0,1)$	$(4,1)$	$(5,2)$	$(9,2)^\star$	$(\infty,1)$	$(10,3)$	$(13,2)$	$(\infty,1)$
6	$(0,1)$	$(4,1)$	$(5,2)$	$(9,2)$	$(\infty,1)$	$(10,3)^\star$	$(13,2)$	$(18,6)$
7	$(0,1)$	$(4,1)$	$(5,2)$	$(9,2)$	$(\infty,1)$	$(10,3)$	$(13,2)^\star$	$(15,7)$
8	$(0,1)$	$(4,1)$	$(5,2)$	$(9,2)$	$(22,8)$	$(10,3)$	$(13,2)$	$(15,7)^\star$

Donde vemos que el camino más corto desde la granja 1 hasta la granja 5 es $1-2-7-8-5$, con un coste de 22km

c) Sabemos que el ladrón (L) recorre el itinerario 1-2-4-6-8-5, que tiene una longitud de 26km, y el resultado del apartado anterior, de que el granjero (G) tiene que recorrer 22km. En el momento en que el granjero arranca, le faltan 22km por los $26-2=24$ del ladrón. Al rato, al ladrón le faltan 13, por lo que ha recorrido 11km por los 10 del granjero. Podemos comparar las velocidades de ambos como:

$$v_G = \frac{10}{11}v_L$$

Y con esto, calcular el tiempo que tardarán en llegar a la autopista en función de la velocidad del ladrón, dividiendo la distancia que les falta entre la velocidad a la que van:

$$t_G = \frac{12\cdot 11}{10v_L} = 13{,}2/v_L$$
$$t_L = \frac{13}{v_L} = 13/v_L$$

Como $13 < 13{,}2$, el ladrón llegará antes a la autopista y se escapará.

d) Partimos desde el vértice 5. A priori solo se puede llegar desde 8, pero en contra dirección también desde 6 o 7. Si revertimos esas conexiones, podemos mirar en la matriz de Floyd: El camino de 1 a 6 serían 10km, mas 6 yendo de 6 a 5, sumando un total de 16km. Si hacemos lo mismo con la granja 7, obtenemos un total de 17km. La otra opción es reducir el camino para llegar a 8. Para ello, si giramos la arista 1-8 obtenemos que podemos llegar a 5 con un coste de 13km.

---

4. (Valoración de un 25 %) Cuestionario de evaluación Canvas

Dentro del aula de la asignatura, en el Campus Virtual, encontraréis la herramienta Canvas. En este Canvas hay un cuestionario con diversas preguntas que debéis resolver como último ejercicio de esta PEC.

Leed atentamente las siguientes instrucciones **antes de abrir el cuestionario**:

- Los contenidos que se evalúan en este cuestionario corresponden al módulo "Fundamentos de grafos" y "Recorridos y conectividad". Es importante que hayáis asimilado estos conocimientos **antes de abrir el cuestionario**.
- El cuestionario estará abierto durante el plazo de la PEC y lo podéis resolver cuando queráis. De todas formas, una vez lo abráis tendréis un **tiempo limitado** para resolverlo (1 hora).

  Importante: El cuestionario quedará cerrado a las 23:59 de la fecha límite de entrega. Si empezáis a hacerlo después de las 22:59 del último día, ¡tendréis menos de una hora para hacerlo!
- Las respuestas a las preguntas se tienen que introducir directamente en el cuestionario Canvas. No es necesario que las entreguéis junto con el resto de respuestas de la PEC.
- Las preguntas del cuestionario son aleatorias: cada estudiante recibirá un enunciado diferente.
- En algunas preguntas tendréis que introducir la respuesta en un formato específico (p. ej. con los valores ordenados de una determinada forma y sin espacios). Es muy importante **seguir fielmente el formato indicado** a la hora de introducir vuestra respuesta.
- Disponéis de **2 intentos** para resolver el cuestionario. El objetivo de tener dos intentos es poder solventar posibles problemas que hayáis tenido en la realización del cuestionario, ya sean problemas técnicos o bien que hayáis abierto el cuestionario por error. Por tanto, debéis tener en cuenta que:
  - La nota que obtendréis en el cuestionario será la de vuestro último intento.
  - Después del 1er intento, no recibiréis la calificación obtenida ni recibiréis feedback sobre vuestra propuesta de solución. Por lo tanto, no recomendamos usar el 2^{o} intento para intentar mejorar nota, ya que puede ser que obtengáis una nota inferior.
  - Si usáis el 2^{o} intento, el enunciado que encontraréis será diferente del 1er intento.
  - Podéis realizar los dos intentos en días diferentes, siempre que sea dentro del plazo de la PEC. Dispondréis de 1 hora para cada intento.
  - Cada vez que iniciéis el cuestionario contará como un intento, aunque no enviéis la respuesta. Por ejemplo, **si habéis hecho el 1er intento y volvéis a abrir el cuestionario, invalidaréis vuestro 1er intento y os quedaréis con la nota del 2^{o}**.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 1. Conceptos previos: funciones y algoritmos.
- Módulo didáctico 2. Fundamentos de grafos.
- Módulo didáctico 3. Recorridos y conectividad.
- Colección de problemas.

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**. En caso que hayáis consultado recursos externos, es necesario referenciarlos.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC1_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar **antes de las 23:59 del día 27/10/2025**. **No se aceptarán entregas fuera de plazo.**