

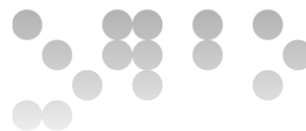
Solución Examen 1

2016-2017 Semestre 2

75.557 Àlgebra

81.506 Matemàtiques I

Fecha 10.06.2017



1. Responded a los siguientes apartados:

- a) Hallad el valor, o valores, de m para que el número complejo $3 - mi$ tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5} + \sqrt{5}i$.
- b) Hallad el módulo y el argumento de $\sqrt{3} + i$

Solución:

- a) Siguiendo las directrices del apartado 3.4.1 del módulo impreso, página 30, “De la forma binómica a la forma polar”, primero hallamos el módulo de los complejos:

$$\text{módulo } (3 - mi) = \sqrt{9 + m^2}$$

$$\text{módulo } (2\sqrt{5} + \sqrt{5}i) = \sqrt{4 \cdot 5 + 5} = 5$$

Ahora imponemos que sean iguales:

$$\sqrt{9 + m^2} = 5$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{9 + m^2})^2 = 5^2$$

$$9 + m^2 = 25 \rightarrow m^2 = 16 \rightarrow m = \pm 4$$

Por lo tanto, los valores de m son:

$$m = \pm 4$$

- b) Buscamos el módulo y el argumento del complejo $\sqrt{3} + i$. Para ello aplicamos las explicaciones del apartado 3.4, página 27, del material impreso.

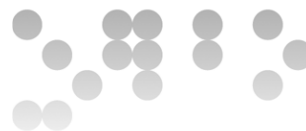
$$m = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

Ahora vamos a por el ángulo. Para esto utilizamos el ejemplo de la página 30 (“Ejemplo de cálculo de la arcotangente”) del módulo impreso. El ángulo del complejo dado es:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$$



2. Sean A y B dos subespacios vectoriales de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 definidos de la siguiente forma:

$$A = \langle (a_1, a_2, a_3) \mid a_1 + a_2 = a_3 \rangle$$

$$B = \langle (b_1, b_2, b_3) \mid b_1 - b_2 = b_3 \rangle$$

Y sea $v = (-3, 5, 2)$

- a) Comprobad que $W = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de A . ¿Pertenece v a A ? En caso afirmativo calculad las coordenadas en la base anterior.
- b) Hallad una base de B . ¿Pertenece v a B ? En caso afirmativo calculad las coordenadas en la base que habéis encontrado. ¿Son A y B el mismo subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 ? Justificad la respuesta.

Solución:

- a) Como sabemos que la dimensión de A es 2, sólo es necesario mirar que los vectores de W pertenecen a A y que son linealmente independientes.

Primero de todo comprobamos que los vectores de W pertenecen a A comprobando que se cumple la condición $a_1 + a_2 = a_3$ para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues W es una base de A .

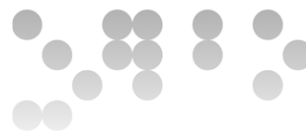
Para ver si v pertenece a A miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -3$, $y = 5$ y, por lo tanto, v pertenece a A y sus coordenadas en la base W son $(-3, 5)$.

- b) Podemos proponer como base de B :

$T = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$. De forma análoga a como hemos hecho en el apartado anterior podemos probar que es base:



Primero de todo comprobamos que los vectores de T pertenecen a B comprobando que se cumple la condición $b_1 - b_2 = b_3$ para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues T es una base de B.

Para ver si v pertenece a B miramos si tiene solución el siguiente sistema: (también podríamos comprobar si cumple las condiciones).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que no tiene solución, y, por lo tanto v no pertenece a B.

Hemos visto que el vector v pertenece a A pero no a B por lo tanto A y B no son el mismo subespacio vectorial.

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

donde k es un parámetro real.

- Discutid el sistema según los valores de k .
- Resolved el sistema para el caso $k = -2$.

Solución:

- Hacemos Gauss tomando las variables en el orden dado x, y, z , obteniendo la matriz M y M' de los coeficientes y ampliada, respectivamente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{array} \right)$$

Substituimos la segunda fila (F2) por F2-2·F1 y la tercera fila (F3) por F3-F1, donde F1 denota la primera fila. Tenemos:



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 & k^2-4 \end{array} \right)$$

Ahora es suficiente intercambiar las columnas 2 y 3 para tener la matriz diagonalizada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & k^2-4 \end{array} \right)$$

y podemos pasar a la discusión:

- Para $k \neq 2$ y $k \neq -2$ tenemos $\text{rang } M = \text{rang } MA = \text{núm. incog.} = 3$ y, por lo tanto, es un sistema compatible determinado.
- Para $k = 2$ tenemos $\text{rang } M = 2$ i $\text{rang } MA = \text{núm. incog.} = 3$ y, por lo tanto, se trata de un sistema incompatible.
- Para $k = -2$ tenemos $\text{rang } M = \text{rang } MA = 2$ y, por lo tanto, es un sistema compatible indeterminado con $3-2 = 1$ grados de libertad.

Nota: Análogamente, se puede discutir el rango de M a partir del determinante de la matriz. $|M| = 4 - k^2$ o del menor una vez aplicado el primer paso de Gauss, con la igualdad $\begin{vmatrix} 2 & k-2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, que conduce igualmente a los valores $k = 2$ y $k = -2$, para organizar la discusión.

- b) Ya hemos visto que para $k = -2$ tenemos un sistema compatible indeterminado y, usando los cálculos del apartado anterior, sabemos que el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Eligiendo z como parámetro se obtiene $y = 2z + \frac{1}{2}$ y $x = y - z = z + \frac{1}{2}$ de donde la solución es:

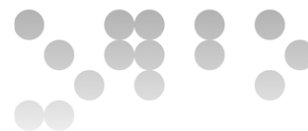
$$(x, y, z) = \left(z + \frac{1}{2}, 2z + \frac{1}{2}, z \right)$$

O alternativamente:

$$(x, y, z) = \left(x, 2x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \right)$$

o

$$(x, y, z) = \left(\frac{2y+1}{4}, y, \frac{2y-1}{4} \right)$$



4. Sea f la aplicación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 definida por

$$f(1,1,0) = (2,2,0), f(1,-1,1) = (2,-2,2), f(1,0,0) = (0,0,0).$$

- Demostrad que $\{(1,1,0), (1,-1,1), (1,0,0)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .
- Calculad una base del subespacio Imagen de f . ¿Es f exhaustiva?
- Calculad una base del subespacio $\text{Ker}(f)$, el núcleo de f . ¿Es f inyectiva?
- ¿Diagonaliza f ? Hallad la matriz de f en la base $\{(1,1,0), (1,-1,1), (1,0,0)\}$.

Solución:

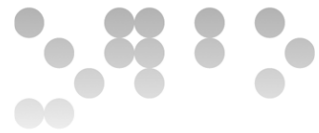
a) Llamamos $u=(1,1,0)$, $v=(1,-1,1)$, $w=(1,0,0)$. El determinante de estos tres vectores es:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Como que es diferente de cero, los tres vectores u, v y w son linealmente independientes. Como que son tres vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^3 , forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

- Para calcular el subespacio imagen es suficiente calcular la imagen de una base, o sea, la imagen de la base u, v, w : $f(u)=(2,2,0)$, $f(v)=(2,-2,2)$ y $f(w)=(0,0,0)$. Por lo tanto, $\text{Im}(f)=\langle (2,2,0), (2,-2,2) \rangle$. Es decir, $(2,2,0)$, $(2,-2,2)$ generan el subespacio imagen. Además, como que son linealmente independientes, son una base del subespacio $\text{Im}(f)$. La aplicación f no es exhaustiva, ya que la dimensión de la $\text{Im}(f)$ es 2, mientras que el espacio de llegada (que es \mathbb{R}^3) tiene dimensión 3 (ver Módulo 4, sección 4).
- Recordemos que la fórmula de la dimensión dice que $\dim E = \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Nuc}(f)$. Como que $E = \mathbb{R}^3$ y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del núcleo es 1. Por lo tanto, el núcleo está generado por un solo vector no nulo. Por otro lado, $f(w)=0$. Esto quiere decir que w es vector del núcleo. Concluimos que $\text{Nuc}(f)=\langle (1,0,0) \rangle$. En particular, f no es inyectiva, porque el núcleo es diferente de cero (ver Módulo 4, sección 5).
- Tenemos que $f(u)=2u$. O sea, u es vector propio de f de valor propio 2. Análogamente, $f(v)=2v$ y v es vector propio de f de valor propio 2. Finalmente, $f(w)=0$. O sea, w es vector propio de f de valor propio 0. Por lo tanto, u, v, w es una base de \mathbb{R}^3 formada por VEPS de f . Esto quiere decir que f diagonaliza. De hecho, la matriz de f en esta base es:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar alguno/s de los siguientes valores:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	300°	315°	360°
$\text{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\text{cos}(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\text{tan}(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	$-\sqrt{3}$	-1	0