EXAMEN 3

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Resolved la ecuación $x = i + y^2$, donde y es el número complejo: $3_{\frac{\pi}{6}}$. Proporcionad x en forma binómica.

   b) Calculad todas las raíces resultantes de la ecuación: $x^3 = 10 + 5i$. Dad el resultado en forma polar con los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$.

Solución

a) Primero calculamos el cuadrado del número complejo y (ver apartado 3.5.1, Módulo 1):

$$y^2 = (3_{\frac{\pi}{6}})^2 = (3^2)_{\frac{2\pi}{6}} = 9_{\frac{\pi}{3}}$$

Ahora pasamos el número complejo obtenido a forma binómica para poder hacer la suma (ver apartado 3.4.2, Módulo 1):

Parte real: $9\cos\frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}$

Parte imaginaria: $9\sin\frac{\pi}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Finalmente, pasamos a calcular el número complejo x:

$$x = i + y^2 = i + \frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i = \frac{9}{2} + \frac{2+9\sqrt{3}}{2}i$$

En resumen:

$$\boxed{x = \frac{9}{2} + \frac{2+9\sqrt{3}}{2}i}$$

b) Este ejercicio es equivalente a calcular las raíces cúbicas del número complejo $10 + 5i$. Así, primero calculamos el módulo y el argumento de dicho número (ver apartado 3.4.1, Módulo 1):

Módulo: $r = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18$

Argumento: $\theta = \arctan\left(\frac{5}{10}\right) \approx 26{,}57°$

NOTA: la tangente de un ángulo vale $\frac{5}{10}$ en $26{,}57°$ y en $206{,}57°$. Ahora bien, dado que tanto la parte real como la imaginaria son positivas, estamos en el primer cuadrante, por lo que el ángulo vale $26{,}57°$.

Así, tenemos que $10 + 5i = 11{,}18_{26{,}57°}$. Ahora aplicamos la raíz cúbica (ver apartado 3.6.1, Módulo 1):

$$\sqrt[3]{11{,}18_{26{,}57^\circ}} = \sqrt[3]{11{,}18}_{\frac{26{,}57^\circ+360^\circ k}{3}} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2$$

El módulo de las raíces es: $r = \sqrt[3]{11{,}18} \approx 2{,}24$

Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \dfrac{26{,}57^\circ + 360^\circ k}{3}$ para $k = 0, 1, 2$

- Para $k = 0$, tenemos $\beta_0 \approx 8{,}86^\circ$.
- Para $k = 1$, tenemos $\beta_1 \approx 128{,}86^\circ$.
- Para $k = 2$, tenemos $\beta_2 \approx 248{,}86^\circ$.

En resumen:

$$\boxed{\text{Las raíces son: } 2{,}24_{8{,}86^\circ},\ 2{,}24_{128{,}86^\circ} \text{ y } 2{,}24_{248{,}86^\circ}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular el cuadrado de y: 0,5 puntos.
- Pasar a forma binómica: 0,5 puntos.
- Determinar x: 0,25 puntos.

Apartado b

- Calcular el módulo: 0,25 puntos.
- Calcular el argumento: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Calcular los argumentos de las raíces: 0,5 puntos.

2. Considerad los tres planos siguientes:

$$\begin{aligned}
\pi_1 : &\quad (a+1)x + my + z = a,\\
\pi_2 : &\quad (2a+2)x + ky - z = -m,\\
\pi_3 : &\quad (a+1)x - y + z = k.
\end{aligned}$$

Sustituid el parámetro "a" por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con los tres planes obtenidos:

a) Determinad, de manera razonada, la posición relativa de estos tres planos en función de los diferentes valores de los parámetros $m \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$.

b) Determinad qué punto tienen en común los tres planos cuando $m = 2$ y $k = 1$.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) Recordamos que el estudio de la posición relativa de tres planos se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema formado por las 3 ecuaciones que definen estos planos [ver apuntes módulo 3, apartado 8]

$$\left.\begin{array}{r}(a+1)x+my+z=a\\(2a+2)x+ky-z=-m\\(a+1)x-y+z=k\end{array}\right\}$$

Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [ver apuntes módulo 3, apartado 4].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & m & 1\\2a+2 & k & -1\\a+1 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad M=\begin{pmatrix}a+1 & m & 1 & a\\2a+2 & k & -1 & -m\\a+1 & -1 & 1 & k\end{pmatrix}.$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, puesto que si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A|=\begin{vmatrix}a+1 & m & 1\\2a+2 & k & -1\\a+1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix}1 & m & 1\\2 & k & -1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(a+1)(-3m-3).$$

- Si $m\neq-1$ y k cualquier valor, entonces se verifica que rango$(A)=3=$ rango$(M)=$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado. Por lo tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{los tres planos se cortan en un punto}}$.
- Si $m=-1$, entonces rango$(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}a+1 & 1\\2a+2 & -1\end{vmatrix}=-3a-3\neq0$, puesto que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9.
  Calculamos, para $m=-1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes

$$\begin{vmatrix}a+1 & 1 & a\\2a+2 & -1 & 1\\a+1 & 1 & k\end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\2 & -1 & 1\\1 & 1 & k\end{vmatrix}=(a+1)(-3k+3a).$$

  Notamos que este menor solo se anula si $k=a$, por lo tanto, tenemos que:
  - Si $m=-1$ y $k\neq a$, entonces rango$(A)=2\neq$ rango$(M)=3$ y el sistema es incompatible, es decir, $\boxed{\text{los tres planos no tienen ningún punto en común}}$.
  - Si $m=-1$ y $k=a$, entonces rango$(A)=2=$ rango$(M)<$ número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad. Por tanto, tenemos que $\boxed{\text{los tres planos se cortan en una recta}}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que si $m=2$ y $k=1$ los tres planos π_1, π_2 y π_3 se cortan en un punto y este punto es la solución del sistema compatible determinado dado por las tres ecuaciones de los planos:

$$\left.\begin{array}{r}(a+1)x+2y+z=a\\(2a+2)x+y-z=-2\\(a+1)x-y+z=1\end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [ver apuntes módulo 3, apartado 6] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & 1 & a\\ 2a+2 & 1 & -1 & -2\\ a+1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & 1 & a\\ 0 & -3 & -3 & -2-2a\\ 0 & -3 & 0 & 1-a\end{array}\right).$$

Operaciones: (1): $F2-2\cdot F1\to F2, \qquad F3-F1\to F3.$
El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{rl}(a+1)x+2y+z= & a\\ -3y-3z= & -2-2a\\ -3y= & 1-a\end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $y=\frac{a-1}{3}$. Si hacemos la sustitución de $y=\frac{a-1}{3}$ en la segunda ecuación obtenemos $z=\frac{a+3}{3}$. Si sustituimos los valores encontrados de y y de z en la primera ecuación se obtiene $x=\frac{-1}{3a+3}$.
Así pues, el punto de intersección de los tres planos π_1, π_2 y π_3 es:

$$\boxed{\left(x=\frac{-1}{3a+3}, y=\frac{a-1}{3}, z=\frac{a+3}{3}\right)}.$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN:

Apartado a

- Calcular el determinante de la matriz A en función de: m 0,25 puntos.
- Obtener el valor $m=-1$: 0,25 puntos.
- Justificar que para $m\neq-1$ y cualquier valor de k los tres planos se cortan en un punto: 0,25 puntos.
- Justificar que para $m=-1$ y $k\neq a$ los tres planos no tienen ningún punto en común: 0,25 puntos.
- Justificar que para $m=-1$ y $k=a$ los tres planos se cortan en una recta: 0,25 puntos.

Apartado b

- Plantear el sistema que se tiene que resolver para obtener las coordenadas del punto de corte de los tres planos: 0,25 puntos.
- Obtener las coordenadas del punto de corte: 1 punto.

3. Sean $e_1=(-1,1,0,1)$, $e_2=(0,-1,1,2)$, $e_3=(0,0,0,a+5)$, $e_4=(-1,0,1,a+8)$ vectores de $\mathbb{R}^4$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP. Y sea $F=<e_1,e_2,e_3,e_4>$.

a) Calculad la dimensión de F y una base A.

b) Sea $B = \{(1,0,-1,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,1)\}$. ¿Es B base de F? En caso afirmativo calculad la matriz de cambio de base de la base A a la base B. ¿Es B una base ortogonal de F?

Solución

a) Calculamos el rango de la matriz formada por los vectores:

$$rang \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a+5 & a+8 \end{pmatrix} = 3$$

Ya que tenemos que $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, por tanto $dim(F) \geq 2$. Orlando este menor encontramos $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a+5 \end{vmatrix} = a+5 \neq 0$, por tanto $dim(F) \geq 3$. Y para ver que la dimensión no es 4 podemos calcular el determinante de todos los vectores juntos y ver que es 0, o podemos ver directamente que $v_1 + v_2 + v_3 = v_4$ (es decir, son linealmente dependientes). Así tenemos que la dimensión de F es 3. Y como base podemos escoger los tres vectores del menor 3×3 anterior: $A = \{(-1,1,0,1),(0,-1,1,2),(0,0,0,a+5)\}$

b) Para comenzar, B tiene 3 elementos (recordemos que la dimensión de F es 3) y son linealmente independientes. Así que de momento vamos bien.
Para a calcular la matriz de cambio de base de la base A a la base B, debemos expresar los vectores de la base A como combinación lineal de los de la base B. Veamos si lo podemos calcular. Así veremos si B es base y en caso de que lo sea encontraremos la matriz de cambio de base de la base A a la base B.
Vamos a expresar e_1 en la base B. Resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -1$, $y = 1$, $z = 1$.
Procedemos análogamente para e_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 0$, $y = -1$, $z = 2$.

Y finalmente para e_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a+5 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 0$, $y = 0$, $z = a + 5$.
Así vemos que podemos expresar los vectores de A en función de los de B, además sabemos que los dos conjuntos tienen el mismo rango, por tanto B también será base de F, y la matriz de cambio de base de la base A a la base B es:

$$C_{A\to B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a+5 \end{pmatrix}$$

Por último, veamos si es ortogonal: debemos mirar si los vectores dos a dos lo son. Empezamos por los dos primeros: $(1, 0, -1, 0) \cdot (0, 1, -1, 0) = 1$ por tanto no son ortogonales. Y por tanto la base B no es una base ortogonal.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente la dimensión de F: 0,5 puntos.
- Calcular y justificar una base A: 0,5 puntos.

Apartado b

- Demostrar que es base: 0,5 puntos.
- Calcular la matriz de cambio de base: 0,5 puntos.
- Ver que no es ortogonal: 0,5 puntos.

4. Sustituid el parámetro a por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} (a-b) & 2(a-b) & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ (a+1)(b+1) & 2(a+1)(b-a) & a+1 \end{pmatrix}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal, $M(f|C,C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$ y b es un parámetro real diferente de -1 y diferente de a.

Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Calculad el polinomio característico de f, su vector propio u de valor propio $(a-b)$ y el valor propio correspondiente al vector propio w= $(0, 0, 1)$.

b) Justificad, a partir del hecho de que $v = (-1, 1, a+1)$ es vector propio de f, que $B = \{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y escribid la matriz $M(f|B,B)$ asociada a la aplicación lineal f en la base B.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

a) El polinomio característico de f es $p(\lambda) = |M(f|C, C) - \lambda \mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales". Desarrollando el determinante por la tercera columna obtenemos:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} (a-b)-\lambda & 2(a-b) & 0 \\ 0 & b-a-\lambda & 0 \\ (a+1)(b+1) & 2(a+1)(b-a) & a+1-\lambda \end{vmatrix} = (a+1-\lambda)(a-b-\lambda)(b-a-\lambda)$$

Los VAPs de f son las soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$, en este caso los valores $a+1$, $a-b$ y $b-a$.

Para calcular el VEP u de VAP $(a-b)$ hay que buscar una base del $Ker(f-(a-b)\mathrm{I})$. Es decir, resolver el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2(a-b) & 0 \\ 0 & b-a-(a-b) & 0 \\ (a+1)(b+1) & 2(a+1)(b-a) & a+1-(a-b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $b \neq a$, de la primera ecuación que es $(a-b)y = 0$ se obtiene que $y = 0$, y lo mismo de la segunda que es $2(b-a)y = 0$. De la tercera ecuación $(a+1)(b+1)x + 2(a+1)(b-a)y + (b+1)z = 0$, sustituyendo y por 0, se obtiene $(b+1)z = -(a+1)(b+1)x$ y, como $b \neq -1$, $z = -(a+1)x$. Por tanto, las soluciones son de la forma $(x, 0, -(a+1)x)$ y el vector propio de valor propio $a-b$ puede ser u=$(1, 0, -(a+1))$.

Para calcular el valor propio correspondiente al vector propio w=$(0, 0, 1)$ basta con calcular la imagen por f de este vector y determinar por qué factor es múltiplo del mismo. Se multiplica la matriz de la aplicación f por el vector w:

$$\begin{pmatrix} (a-b) & 2(a-b) & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ (a+1)(b+1) & 2(a+1)(b-a) & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

Y se ve que la imagen de w es $(a+1)(0, 0, 1) = (a+1)w$, por lo que el valor propio correspondiente a w es $a+1$, otro de los valores propios que ya se habían calculado.

El resultado en función de vuestro IDP es:

$a=0$	$p(\lambda)=(b-\lambda)(-b-\lambda)(1-\lambda)$	VEP	$(1,0,-1)$	VAP	1
$a=1$	$p(\lambda)=(b-1-\lambda)(1-b-\lambda)(2-\lambda)$	VEP	$(1,0,-2)$	VAP	2
$a=2$	$p(\lambda)=(b-2-\lambda)(2-b-\lambda)(3-\lambda)$	VEP	$(1,0,-3)$	VAP	3
$a=3$	$p(\lambda)=(b-3-\lambda)(3-b-\lambda)(4-\lambda)$	VEP	$(1,0,-4)$	VAP	4
$a=4$	$p(\lambda)=(b-4-\lambda)(4-b-\lambda)(5-\lambda)$	VEP	$(1,0,-5)$	VAP	5
$a=5$	$p(\lambda)=(b-5-\lambda)(5-b-\lambda)(6-\lambda)$	VEP	$(1,0,-6)$	VAP	6
$a=6$	$p(\lambda)=(b-6-\lambda)(6-b-\lambda)(7-\lambda)$	VEP	$(1,0,-7)$	VAP	7
$a=7$	$p(\lambda)=(b-7-\lambda)(7-b-\lambda)(8-\lambda)$	VEP	$(1,0,-8)$	VAP	8
$a=8$	$p(\lambda)=(b-8-\lambda)(8-b-\lambda)(9-\lambda)$	VEP	$(1,0,-9)$	VAP	9
$a=9$	$p(\lambda)=(b-9-\lambda)(9-b-\lambda)(10-\lambda)$	VEP	$(1,0,-10)$	VAP	10

b) La imagen de v es $f(v)=(b-a)v$ ya que:

$$\begin{aligned}
f(-1,1,a+1) = & \quad (a-b, b-a, (a+1)[-(b+1)+2(b-a)+(a+1)]) \\
f(-1,1,a+1) = & \quad (-(b-a), b-a, (a+1)(b-a)) = (b-a)(-1,1,a+1)
\end{aligned}$$

Por tanto, v es un vector propio de valor propio $(b-a)$. Al ser $a+1 \neq a-b$ porque $b \neq -1$ y también $b-a \neq a-b$ porque $b \neq a$, resulta que u, v y w son tres vectores propios de valores propios distintos, con lo que sabemos que son linealmente independientes por las proposiciones del punto 8.1 "Diagonalización de endomorfismos". Por tanto, B es una base de $\mathbb{R}^3$.

La matriz $M(f|B,B)$ asociada a la aplicación lineal f en la base B se obtiene poniendo en columnas las imágenes de los vectores de la base B. Se ha visto que son vectores propios y que sus imágenes son:

$$\begin{aligned}
f(u) &= (a-b)u \\
f(v) &= (b-a)v \\
f(w) &= (a+1)w
\end{aligned}$$

La matriz resultante es, por tanto, la siguiente:

$$M(f|B,B) = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular el polinomio característico: 0,5 puntos.
- Calcular un VEP de VAP $a - b$: 0,5 puntos.
- Calcular el VAP del VEP w: 0,25 puntos.

Apartado b

- Calcular el VAP que corresponde al VEP v: 0,25 puntos.
- Justificar que los tres vectores son base por el hecho de ser VEPs de VAPs diferentes: 0,5 puntos.
- Construir la matriz de la aplicación: 0,5 puntos.