Solución Examen 3

2017-2018 Semestre 1

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 20.01.2018

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad en forma binómica el siguiente número complejo: $\frac{i^{30}(5-i)}{-1+i}$

b) Hallad la raíz siguiente: $\sqrt[3]{-27i}$. Proporcionad el resultado en forma polar.

Solución:

a) Debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria:

$$\frac{i^{30}(5-i)}{-1+i}=\frac{(-1)(5-i)}{-1+i}=\frac{-5+i}{-1+i}=\frac{(-5+i)\cdot(-1-i)}{(-1+i)\cdot(-1-i)}=\frac{5+5i-i+1}{1+1}=\frac{6+4i}{2}=3+2i$$

Por tanto, la respuesta es:

$$\boxed{\frac{i^{30}(5-i)}{-1+i}=3+2i}$$

b) Escribimos el complejo $z=-27i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

$$m=\sqrt{(-27)^2}=27$$

$$\alpha=arctg\left(\frac{-27}{0}\right)=arctg(-\infty)=270^{\circ}$$

Tenemos, por tanto, que $\sqrt[3]{-27i}=\sqrt[3]{27_{270^{\circ}}}$

Como nos piden las raíces terceras debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{27_{270^{\circ}}}=\sqrt[3]{27}_{\frac{270^{\circ}+360^{\circ}k}{3}} \qquad \text{para k=0, 1, 2}$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[3]{27}=3$

Los argumentos de las raíces son $\beta=\frac{270^{\circ}+360^{\circ}k}{3}$ para k=0, 1, 2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 90^o$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 90^o + 120^o = 210^o$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 90^o + 240^o = 330^o$

Por tanto, las tres raíces terceras del complejo $z = -27i$ son:

3_{90^o}	3_{210^o}	3_{330^o}

2. Sea E un subespacio de R^3 generado por los siguientes vectores:

E=< $\left(a-2, \sqrt{(a+2)}, 0\right)$, $\left(0, a+2, 0\right)$, $\left(a^2, a+1, a-2\right)$ >.

a) Determina en función de *a* la dimensión del subespacio E.
b) Para el caso $a = 7$ calcula una base de E. ¿Pertenece v=(-1,5,5) a E? ¿Cuáles son sus coordenadas en la base que habéis encontrado?

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores desarrollando por la última fila:

$$\begin{vmatrix} a-2 & 0 & a^2 \\ \sqrt{(a+2)} & a+2 & a+1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = (a-2)\begin{vmatrix} a-2 & 0 \\ \sqrt{(a+2)} & a+2 \end{vmatrix} = (a-2)^2(a+2)$$

Así para $a \neq -2$ y $a \neq 2$ tenemos que el determinante que forman los vectores será no nulo y por tanto tendremos el número máximo de vectores linealmente independientes. En este caso la dimensión es 3.

Calculamos el rango de los vectores para el caso $a = 2$:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto la dimensión de E es 2 en el caso $a = 2$

Calculamos el rango de los vectores para el caso $a = -2$:

$$rang\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto la dimensión de E es 2 en el caso $a = -2$

En resumen, la dimensión de E es 3 si $a \neq 2, -2$ y es 2 en los otros casos.

b) En el apartado anterior ya hemos visto que para $a = 7$ los tres vectores son linealmente independientes. Por tanto podemos usar como a base los tres vectores con los cuales E está definido: Base={(5,3,0),(0,9,0),(49,8,5)}

Para ver si v pertenece a E y a la vez calcular sus coordenadas en el cas que pertenezca, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 49 \\ 3 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=-10, y=3, z=1. Por tanto, las coordenadas de v en la base calculada son (-10, 3, 1)

3. Considerad el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - az = -3 \\ 2x + (a-5)y + z = 4a + 2 \\ 4x + (a-1)\,\mathrm{y} - 3\mathrm{z} = 4 \end{array}\right\}$$

a) Calculad los valores del parámetro *a* para que el sistema no sea compatible determinado.

b) ¿Hay algún valor de *a* para el cual $x = 1$, $y = -3$, $z = -1$, sean la única solución del sistema?

Solución:

a) La matriz del sistema es cuadrada de orden 3, los valores del parámetro que harán que el sistema no sea compatible determinado son aquellos que anulen el determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 2 & a-5 & 1 \\ 4 & a-1 & -3 \end{vmatrix} =^{(1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & a-9 & 2a+1 \\ 0 & a-9 & 4a-3 \end{vmatrix} =^{(2)} \begin{vmatrix} a-9 & 2a+1 \\ a-9 & 4a-3 \end{vmatrix} =^{(3)} \begin{vmatrix} a-9 & 2a+1 \\ 0 & 2a-4 \end{vmatrix} = (a-9)(2a-4)$$

Las operaciones elementales hechas a cada paso han sido:

(1) F2 − 2F1; F3 − 4F1.

(2) Desarrollando el determinante por la primera columna.

(3) F2 − F1.

Como que detA = 0 si y solamente si a = 2 o a = 9, estos son los valores para los que el sistema no es compatible determinado.

De manera análoga, podemos trabajar con la matriz ampliada (o sin ampliar) obteniendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & -3 \\ 2 & a-5 & 1 & 4a+2 \\ 4 & a-1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & -3 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & 4a+8 \\ 0 & a-9 & 4a-3 & 16 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & -3 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & 4a+8 \\ 0 & 0 & 2a-4 & 8-4a \end{array}\right).$$

Los valores que hacen que $rango(A) \neq 3$ son, evidentemente, $a = 2$ y $a = 9$.

b) Cuando x = 1, y = −3 y z = −1, el sistema se transforma en

$$\left.\begin{array}{r} 1 - 6 + a = -3 \\ 2 - 3(a-5) - 1 = 4a+2 \\ 4 - 3(a-1) + 3 = 4 \end{array}\right\}.$$

Las tres ecuaciones dan el mismo valor para el parámetro: a = 2.

Cuando a = 2, los valores propuestos forman una solución del sistema. Pero, en el apartado anterior hemos visto que para a = 2 el sistema no es compatible determinado. Eso significa que para a = 2 el sistema es compatible indeterminado.

En definitiva, no existe ningún valor del parámetro a para el cual los valores propuestos sean solución única.

4. Consideremos A=(1,0), B=(3,0), C=(3,2).

a) Sea g el giro de ángulo a en sentido antihorario desde el origen de coordenadas. Calculad g(A), g(B) y g(C). Encontrad el ángulo a de manera que el segmento g(B)g(C) sea paralelo al eje x.

b) Sea f el escalado de razón 3 desde el punto (2,0). Calculad f(A),f(B) y f(C).

Solución:

a) Recordemos el Módulo 5, Sección 3.1. La matriz del giro de ángulo a en sentido antihorario desde el origen es:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A, B, C, tenemos que hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & 3\cos(a) & 3\cos(a) - 2\sin(a) \\ \sin(a) & 3\sin(a) & 3\sin(a) + 2\cos(a) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$g(A) = (\cos(a), \sin(a)),$$
$$g(B) = (3\cos(a), 3\sin(a))$$
$$g(C) = (3\cos(a) - 2\sin(a), 3\sin(a) + 2\cos(a))$$

Así, $g(B) - g(C) = (2\sin(a), -2\cos(a))$ y este vector es paralelo al eje x si $\cos(a) = 0$. O sea, cuando el ángulo es de 90º. Entonces los tres puntos son g(A)=(0,1), g(B)=(0,3) y g(C)=(-2,3).

b) Recordemos ahora el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 3 desde el punto (2,0), de derecha a izquierda, primero hacemos translación de vector (-2,0), después hacemos el escalado de razón 3, y después hacemos la translación de vector (2,0):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A, B, C, tenemos que hacer la siguiente multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f(A)=(-1,0), f(B)=(5,0) y f(C)=(5,6).

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	210º	270º	300º	330º	345º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$