EXAMEN 1

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Determinad el resultado de la división de $1+i$ entre el conjugado de 2_{45°. Expresad el resultado en forma binómica.

   b) Calculad todas las soluciones de la siguiente raíz: $\sqrt[3]{-1-3i}$. Proporcionad el resultado en forma polar y los ángulos en grados en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

Solución

a) Primero pasamos 2_{45° a forma binómica, utilizando la relación que establece que $a = r \cdot \cos\theta$ y $b = r \cdot \operatorname{sen}\theta$ (ver apartado 3.4.2, Módulo 1):

- $r = 2$
- $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Así, obtenemos:

$$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Ahora calculamos el conjugado:

$$\overline{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Finalmente, podemos proceder con la división:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i^2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-(i\sqrt{2})^2} = \frac{2i\sqrt{2}}{4}$$

En resumen:

$$\boxed{\frac{i+1}{\overline{2_{45^\circ}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

b) Primero escribimos el número complejo $-1-3i$ en forma polar (ver apartado 3.4.1, Módulo 1):

Módulo: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

Argumento: $\theta = \arctan\left(\dfrac{-3}{-1}\right) = 251{,}57^\circ$

NOTA: la tangente de un ángulo vale $\dfrac{-3}{-1}$ en 71,57° y en 251,57°. Ahora bien, el número complejo que estamos analizando tiene la parte real y la imaginaria negativas, por lo que se encuentra en el tercer cuadrante, es decir, 251,57°.
Tenemos entonces que $-1-3i = \sqrt{10}_{251{,}57^\circ}$. Ahora podemos aplicar la raíz cúbica (ver apartado 3.6.1, Módulo 1):

$$\sqrt[3]{\sqrt{10}_{251{,}57^\circ}} = \sqrt[3]{\sqrt{10}}_{\frac{251{,}57^\circ+360^\circ k}{3}} \qquad \text{para } k=0,1,2$$

El módulo de las raíces es: $\sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}$
Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \frac{251{,}57^\circ+360^\circ k}{3}$ para $k=0,1,2$

- Para $k=0$, tenemos $\beta_0 = 83{,}86^\circ$.
- Para $k=1$, tenemos $\beta_1 = 203{,}86^\circ$.
- Para $k=2$, tenemos $\beta_2 = 323{,}86^\circ$.

En resumen, las raíces cúbicas de $-1-3i$ son:

$$\boxed{\sqrt[6]{10}_{83{,}86^\circ},\ \sqrt[6]{10}_{203{,}86^\circ} \text{ y } \sqrt[6]{10}_{323{,}86^\circ}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Pasar el denominador a forma binómica: 0,5 puntos.
- Hacer el conjugado del denominador: 0,25 puntos.
- Calcular la división: 0,5 puntos.

Apartado b

- Escribir el complejo en forma polar: 0,5 puntos.
- Calcular el módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Calcular los argumentos de las raíces: 0,5 puntos.

2. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} k & a+2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$

Substituid el parámetro "a"de la matriz M por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con la matriz obtenida:

a) Determinad, de manera razonada, el rango de la matriz M en función de los diferentes valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Considerad el sistema de ecuaciones lineales que tiene la matriz M como matriz ampliada, es decir:

$$\left.\begin{aligned} kx + (a+2)\,y &= 0 \\ ky &= 1 \\ (2a+1)\,x + (3a+3)\,y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Razonad para qué valores de k el sistema es compatible indeterminado y calculad las soluciones del sistema para $k = a+2$.

Solución
Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) Dado que la matriz M es cuadrada de orden 3, estudiaremos su rango utilizando que el rango es 3, solo si el determinante de la matriz es diferente de cero [Ver apartado 4.5 del módulo “Elementos de álgebra lineal y geometría”]:

$$\begin{vmatrix} k & a+2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{vmatrix} = k^2-(3a+3)\,k+(a+2)\,(2a+1) = (k-(a+2))\,(k-(2a+1))$$

En consecuencia,

- Si $k \neq 2a+1$ y $k \neq a+2 \rightarrow \ \mathrm{rg}(M) = 3$.
- Si $k = 2a+1$, entonces $M = \begin{pmatrix} 2a+1 & a+2 & 0 \\ 0 & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\mathrm{rg}(M) = 2$, puesto que $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2a+1 & a+2 \\ 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = (2a+1)^2 \neq 0$.
- Si $k = a+2$, entonces $M = \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\mathrm{rg}(M) = 2$, puesto que $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} a+2 & a+2 \\ 0 & a+2 \end{vmatrix} = (a+2)^2 \neq 0$.

b) El sistema que tiene por matriz ampliada la matriz M es:

$$\left.\begin{aligned} kx + (a+2)\,y &= 0 \\ ky &= 1 \\ (2a+1)\,x + (3a+3)\,y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Para discutir el sistema utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apartado 4 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”].
La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} k & a+2 \\ 0 & k \\ 2a+1 & 3a+3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} k & a+2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de lo que hemos deducido en el apartado anterior, podemos afirmar,

- Si $k \neq 2a+1$ y $k \neq a+2$, $\mathrm{rg}(M) = 3 > \mathrm{rg}(A)$ y, por lo tanto, se obtiene que el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.
- Si $k = 2a+1$, $\ \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) = 2 \ = \mathrm{n}^o$ incógnitas y, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es compatible determinado}}$.
- Si $k = a+2$, $\ \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) = 2 \ = \mathrm{n}^o$ incógnitas y, por lo tanto, podemos afirmar que el $\boxed{\text{sistema es compatible determinado}}$.

Así pues, podemos afirmar que no existe ningún valor del parámetro k tal que el sistema sea compatible indeterminado.

Calculamos, a continuación, la solución del sistema compatible determinado que se obtiene si $k = a + 2$.

$$\left.\begin{aligned} (a+2)\,x + (a+2)\,y &= 0 \\ (a+2)\,y &= 1 \\ (2a+1)\,x + (3a+3)\,y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apartado 6 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & (a+2)^2 & a+2 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones: (1): $(a+2)\cdot F3 - (2a+1)\cdot F1 \to F3$.

Operaciones: (2): $F3 - (a+2)\cdot F2 \to F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{aligned} (a+2)\,x + (a+2)\,y &= 0 \\ (a+2)\,y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene $y = \frac{1}{a+2}$. Si sustituimos en la primera ecuación este valor de y obtenemos $x = -\frac{1}{a+2}$.

Así, la solución de este sistema, en función de los diferentes valores del parámetro a, son:

	$x = -\frac{1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$
Si $a = 0$	$x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$
Si $a = 1$	$x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$
Si $a = 2$	$x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}$
Si $a = 3$	$x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{5}$
Si $a = 4$	$x = -\frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{6}$
Si $a = 5$	$x = -\frac{1}{7}$, $y = \frac{1}{7}$
Si $a = 6$	$x = -\frac{1}{8}$, $y = \frac{1}{8}$
Si $a = 7$	$x = -\frac{1}{9}$, $y = \frac{1}{9}$
Si $a = 8$	$x = -\frac{1}{10}$, $y = \frac{1}{10}$
Si $a = 9$	$x = -\frac{1}{11}$, $y = \frac{1}{11}$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz M en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k = 2a + 1$ y $k = a + 2$: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente de $2a + 1$ y $a + 2$ el $\text{rg}(A) = 3$: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = 2a + 1$ y para $k = a + 2$ el $\text{rg}(A) = 2$: 0,5 puntos.

Apartado b

- Justificar que para k diferente de $2a + 1$ y $a + 2$ el sistema es SI: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = 2a + 1$ y para $k = a + 2$ el sistema es SCD: 0,25 puntos.
- Comentar que no existe ningún valor de k que hace que el sistema sea SCI: 0,25 puntos.
- Calcular las soluciones del sistema para $k = a + 2$: 0,5 puntos.

3. Sean $v_1 = (1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (2, -2, -2)$, $v_4 = (-1, 2, 0)$ y $v_5 = (4, 2, -10)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sea $E =< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 >$. Sea $w = (a + 2, -2, -2a - 2)$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP.
Decid si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y **justificad vuestra respuesta**:

a) La dimensión de E es 2.

b) $A = \{(2, -2, -2), (-1, 2, 0)\}$ es una base de E y las coordenadas de w en esta base son $(a + 1, a + 2)$.

c) Sean $e_1 = v_3 + v_4$ y $e_2 = v_3 + 5v_4$. $B = \{e_1, e_2\}$ es una base de E.

d) La matriz de cambio de base de la base A a la base B es:

$$C_{A\to B} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

a) **VERDADERO**. Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -10 \end{pmatrix} = 2$$

Ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y todos los menores 3×3 resultantes de orlar el anterior tienen determinante nulo.
La dimensión de E es 2.

b) **FALSO**. A es base, ya que sus dos vectores son de E (son v_3 y v_4), son linealmente independientes (contienen el menor no nulo $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$) y tiene tantos vectores como la dimensión.
Pero si calculamos las coordenadas de $w \in E$ resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ -2 \\ -2a-2 \end{pmatrix}$$

Encontramos que la solución es $x = a+1$ y $y = a$. Por tanto, las coordenadas de w en la base A son $(a+1, a)$, no las del enunciado.

c) **VERDADERO**. Tenemos que $e_1 = (1, 0, -2)$ y $e_2 = (-3, 8, -2)$. Son base porque son de E (son combinación lineal de vectores de E), son linealmente independientes (contienen el menor no nulo $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$) y tenemos tantos vectores como la dimensión.

d) **VERDADERO**. Para calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A debemos expresar los vectores de la base B en función de los de la base A. ¡Y esta es justamente la definición de estos vectores!
Así, tenemos que la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base en la dirección contraria calculamos la inversa de la matriz anterior:

$$C_{A\to B} = C_{B\to A}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado b

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado c

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado d

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

4. Sustituid el parámetro a por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal, $M(f|C,C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$ y b es un parámetro real diferente de $a+1$.

Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Calculad, en función del valor del parámetro b, una base del núcleo de la aplicación f, decid cuál es su dimensión y determinad la dimensión de la imagen de f.

b) Calculad el polinomio característico de f y un vector propio que sea linealmente independiente con $(0,0,1)$ y $(1,0,-1)$.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen.

a) El núcleo de f se obtiene resolviendo el sistema $M(f|C,C) \cdot w = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta expresión se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{gathered} x + (a+1)(a+3)y = 0 \\ (a+4)y = 0 \\ (a-b+1)x - (a+1)(a-b+1)y + (a-b+2)z = 0 \end{gathered}$$

La solución inmediata de la segunda ecuación, $(a+4)y = 0$, al ser a una cifra ($a \geq 0$ y, por tanto, $a+4 > 0$) es $y = 0$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación se obtiene $x = 0$. Con estos dos valores la tercera ecuación se transforma en $(a-b+2)z = 0$. Aquí aparecen dos posibilidades. Si $b \neq a+2$ se obtiene $z = 0$ y, por tanto, el núcleo se reduce al vector nulo y tiene dimensión 0 y entonces, por el Teorema de la dimensión del punto 4. "Núcleo e imagen de una aplicación lineal", la imagen tendrá dimensión 3. En cambio, si $b = a+2$, la tercera ecuación no restringe el valor de z los vectores del núcleo tienen la forma $(0,0,z)$ y una base del núcleo de f es el vector $w = (0,0,1)$, éste tiene dimensión 1 y la imagen tendrá dimensión 2.

b) El polinomio característico de f es $p(\lambda) = |M(f|C,C) - \lambda \mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales". Desarrollando el determinante por la tercera columna, y después el menor que queda por la primera, obtenemos:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4-\lambda & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2-\lambda \end{vmatrix} = (a-b+2-\lambda)(1-\lambda)(a+4-\lambda)$$

Los VAPs de f son las soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$, en este caso los valores: $a-b+2$, 1 y $a+4$.

Para calcular el vector propio que pide el enunciado debemos saber a qué valor propio corresponde de estos tres. Como dos vectores propios son conocidos, es sencillo ver a qué VAP corresponden. Para calcular el VAP correspondiente al VEP w=$(0,0,1)$ basta con calcular la imagen de este vector al aplicarle f y determinar por qué factor es múltiplo del mismo. Se multiplica la matriz de la aplicación f por el vector w:

$$\begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-b+2 \end{pmatrix}$$

Se ve así que la imagen de w es $(a-b+2)(0,0,1) = (a-b+2)w$, por lo que el valor propio correspondiente a w es $a-b+2$.

Para calcular el VAP correspondiente al VEP u=$(1,0,-1)$ se multiplica del mismo modo la matriz de la aplicación f por el vector u:

$$\begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se ve así que la imagen de u es u, por lo que el valor propio correspondiente a u es 1.

Descartados los VAPs $a-b+2$ y 1 por estar asociados a los VEPS w y u, queda el VAP $a+4$. Si los tres VAPs son diferentes (cosa que ocurrirá siempre que $b \neq -2$, pues que $b \neq a+1$ nos lo dice el enunciado), el VEP correspondiente a $a+4$ será linealmente independiente de los anteriores, por las proposiciones del punto 8.1 "Diagonalización de endomorfismos". Para calcular el VEP v de VAP $a+4$ se tiene que buscar una base del $Ker(f-(a+4)\mathrm{I})$. Es decir, resolver el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1-a-4 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4-a-4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2-a-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La segunda fila es nula. De la ecuación correspondiente a la primera fila, que es $-(a+3)x + (a+1)(a+3)y = 0$, se obtiene que $x = (a+1)y$ pues $a \neq -3$. De la tercera ecuación $(a-b+1)x - (a+1)(a-b+1)y + (-b-2)z = 0$, sustituyendo x por $(a+1)y$, se obtiene $(a-b+1)(a+1)y - (a+1)(a-b+1)y + (-b-2)z = 0$.

Se anulan los dos primeros términos y queda $(-b-2)z=0$ y entonces, siempre que $b\neq -2$, $z=0$. Por tanto, las soluciones son de la forma $((a+1)y,y,0)$ y un vector propio de valor propio $a+4$ puede ser v=$(a+1,1,0)$. Si fuera $b=-2$ la variable z quedaría libre y tendríamos 2 VEPs de VAP $a+4$: $(a+1,1,0)$ y $(0,0,1)$, este segundo vector coherente con el resultado obtenido previamente.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Plantear el sistema para encontrar el núcleo: 0,25 puntos.
- Calcular la base del núcleo en el caso $b=a+2$: 0,25 puntos.
- Calcular la base del núcleo en el caso $b\neq a+2$: 0,25 puntos.
- Calcular las dimensiones en el caso $b=a+2$: 0,25 puntos.
- Calcular las dimensiones en el caso $b\neq a+2$: 0,25 puntos.

Apartado b

- Calcular el polinomio característico: 0,5 puntos.
- Comprobar que los VEPs del enunciado corresponden a los VAPs 1 y $a-b+2$: 0,25 puntos.
- Calcular el VEP de VAP $a+4$: 0,5 puntos.