Álgebra

EXAMEN 3

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Dados los números complejos $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 1 - 4i$ y $z_3 = -3 + 3i$. Realizad la operación $\frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_3}$. Proporcionad el resultado en forma binómica. Nota: $\overline{z_1}$ representa el conjugado de z_1.

   b) Calculad las raíces cuartas del siguiente número $z = (2 + i)^2$. Dad el resultado en forma polar y los ángulos en grados en el intervalo $[0°, 360°)$.

Solución

a) Primero calculamos el conjugado:

$$\overline{z_1} = \overline{2 + 2i} = 2 - 2i$$

Ahora podemos calcular la multiplicación:

$$\overline{z_1} \cdot z_2 = (2 - 2i) \cdot (1 - 4i) = 2 - 8i - 2i + 8i^2 = -6 - 10i$$

Finalmente, pasamos a resolver la división (multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador):

$$\frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_3} = \frac{(-6 - 10i) \cdot (-3 - 3i)}{(-3 + 3i) \cdot (-3 - 3i)} = \frac{18 + 18i + 30i + 30i^2}{9 + 9} = \frac{-12 + 48i}{18}$$

Por tanto:

$$\boxed{\frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_3} = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3}i}$$

b) Primero calculamos z, elevando al cuadrado $2 + i$:

$$z = (2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$$

Ahora podemos pasar a calcular las raíces. Para hacerlo, escribimos el número z en forma polar (ver apartado 3.4.1, página 30, Módulo 1):

Módulo: $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Argumento: $\theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13°$

Nota: sabemos que la tangente de un ángulo vale $\frac{4}{3}$ en 53,13° y en 233,13°. Como se indica en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando pasamos un número de forma binómica a forma polar, es recomendable hacer un dibujo para no equivocarnos. Así, si dibujamos el número $3+4i$ en el plano complejo, veremos que está asociado al punto $(3,4)$, que se encuentra en el primer cuadrante, es decir, en 53,13°.

Tenemos entonces que $3+4i = 5_{53{,}13^\circ}$. Ahora podemos aplicar la raíz cuarta (ver apartado 3.6.1, página 43, Módulo 1):

$$\sqrt[4]{5_{53{,}13^\circ}} = \sqrt[4]{5}_{\frac{53{,}13^\circ+360^\circ k}{4}} \qquad \text{para } k = 0,1,2,3$$

El módulo de las raíces es: $r = \sqrt[4]{5}$

Los argumentos de las raíces son: $\alpha_k = \frac{53{,}13^\circ+360^\circ k}{4}$ para $k = 0,1,2,3$

- Para $k=0$, tenemos $\alpha_0 = 13{,}28^\circ$.
- Para $k=1$, tenemos $\alpha_1 = 103{,}28^\circ$.
- Para $k=2$, tenemos $\alpha_2 = 193{,}28^\circ$.
- Para $k=3$, tenemos $\alpha_3 = 283{,}28^\circ$.

En resumen:

$$\boxed{\text{Las raíces son: } (\sqrt[4]{5})_{13{,}28^\circ},\ (\sqrt[4]{5})_{103{,}28^\circ},\ (\sqrt[4]{5})_{193{,}28^\circ} \text{ y } (\sqrt[4]{5})_{283{,}28^\circ}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular el conjugado de z_1: 0,25 puntos.
- Calcular el producto: 0,25 puntos.
- Calcular la división: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular el complejo z: 0,25 puntos.
- Módulo del número complejo: 0,25 puntos.
- Argumento del número complejo: 0,25 puntos.
- Módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Argumentos de las raíces: 0,5 puntos.

2. Considerad los tres planos siguientes:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: kx + (2a+1)z = k-1 \\ \pi_2 &: -kx + (k+1)y = k \\ \pi_3 &: kx - y + (2k-1)z = 2k+1 \end{aligned}$$

Sustituid el parámetro "a" por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con los tres planos obtenidos:

a) Determinad, de manera razonada, la posición relativa de los tres planos en función de los diferentes valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Para $k = a - 10$ determinad el punto de corte de estos tres planos.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) Recordemos que el estudio de la posición relativa de tres planos se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema formado por las ecuaciones que definen estos planos [ver apartado 8 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"]

$$\left.\begin{aligned} kx + (2a+1)z = k-1 \\ -kx + (k+1)y = k \\ kx - y + (2k-1)z = 2k+1 \end{aligned}\right\}$$

Para discutir el sistema utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apartado 4 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} k & 0 & 2a+1 \\ -k & k+1 & 0 \\ k & -1 & 2k-1 \end{array}\right) \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2a+1 & k-1 \\ -k & k+1 & 0 & k \\ k & -1 & 2k-1 & 2k+1 \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, ya que si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc} k & 0 & 2a+1 \\ -k & k+1 & 0 \\ k & -1 & 2k-1 \end{array}\right| = 2k^3 - 2ak^2 - k = 2k \cdot \left(k - \tfrac{a+\sqrt{a^2+2}}{2}\right) \cdot \left(k - \tfrac{a-\sqrt{a^2+2}}{2}\right)$$

- Si $k \neq 0$, $k \neq \frac{a+\sqrt{a^2+2}}{2}$ y $k \neq \frac{a-\sqrt{a^2+2}}{2}$, entonces $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) =$ nº incógnitas, así pues, podemos afirmar que el sistema compatible determinado, y, por lo tanto, $\boxed{\text{los tres planos se cortan en un único punto}}$.
- Si $k = 0$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{array}\right| = -1 \neq 0$ (este menor se obtiene considerando segunda y tercera fila y segunda y tercera columna).

  Calculamos, para $k = 0$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:

  $\left|\begin{array}{ccc} 0 & 2a+1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right| = -2a$. Por lo tanto, si $a = 0$ este menor es nulo y tenemos $\text{rg}(M) = 2$, pero si $a \neq 0$ este menor no es nulo y $\text{rg}(M) = 3$.

  Así pues,

- Si $a=0 \longrightarrow \mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(A)=2 \neq$ nº incógnitas $\longrightarrow$ sistema compatible indeterminado con 1 grado de libertad, y, por tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{los tres planos se cortan en una recta}}$,
- si $a \neq 0 \longrightarrow \mathrm{rg}(A)=2 \neq\ \mathrm{rg}(M)=3 \longrightarrow$ sistema es incompatible, y, por tanto, $\boxed{\text{los tres planos no tienen ningún punto en común}}$.

- Si $k=\frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}$, entonces $\mathrm{rg}(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y tenemos que el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} \frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}+1 & 0 \\ -1 & 2\left(\frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}\right)-1 \end{vmatrix} \neq 0$, puesto que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9.
Calculamos, para $k=\frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene, orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} 0 & 2a+1 & \frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}-1 \\ \frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}+1 & 0 & \frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2} \\ -1 & 2\left(\frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}\right)-1 & 2\left(\frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}\right)+1 \end{vmatrix} \neq 0$, puesto que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9. Así pues, tenemos que $\mathrm{rg}(A)=2 \neq\ \mathrm{rg}(M)=3$, por lo tanto, el sistema es incompatible, y en consecuencia $\boxed{\text{los tres planos no tienen ningún punto en común}}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que para $k=a-10$ los tres planos se cortan en un único punto y para encontrar este punto de intersección se tiene que resolver el sistema compatible determinado formado por las ecuaciones que definen estos tres planos. Así pues, el sistema que nos piden resolver es:

$$\left.\begin{array}{rl} (a-10)\,x+(2a+1)z= & a-11 \\ -\,(a-10)\,x+(a-9)y= & a-10 \\ (a-10)\,x-y+(2a-21)z= & 2a-19 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [ver apartado 6 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-10 & 0 & 2a+1 & a-11 \\ -a+10 & a-9 & 0 & a-10 \\ a-10 & -1 & 2a-21 & 2a-19 \end{array}\right)$$

$$\underset{(1)}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} a-10 & 0 & 2a+1 & a-11 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & 2a-21 \\ a-10 & -1 & 2a-21 & 2a-19 \end{array}\right)$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} a-10 & 0 & 2a+1 & a-11 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & 2a-21 \\ 0 & -1 & -22 & a-8 \end{array}\right)$$

$$\underset{(3)}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} a-10 & 0 & 2a+1 & a-11 \\ 0 & -1 & -22 & a-8 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & 2a-21 \end{array}\right)$$

$$\underset{(4)}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} a-10 & 0 & 2a+1 & a-11 \\ 0 & -1 & -22 & a-8 \\ 0 & 0 & -20a+199 & a^2-15a+51 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2 + F1 \to F2$,
(2): $F3 - F1 \to F3$,
(3): Intercambio $F3$ con $F2$,
(4): $F3 + (a-9)F1 \to F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{rl} (a-10)\,x + (2a+1)\,z = & a-11 \\ -y-22z = & a-8 \\ (-20a+199)z = & a^2-15a+51 \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $z = \frac{a^2-15a+51}{-20a+199}$. Si hacemos la sustitución de este valor de z en la segunda ecuación y despejamos la y obtenemos $y = \frac{-2a^2-29a+470}{-20a+199}$. Si sustituimos en la primera ecuación el valor de z se obtiene $x = \frac{-2a^3+9a^2+332a-2240}{(-20a+199)(a-10)}$. Así, la solución de este sistema, en función de los diferentes valores del parámetro a, es:

	$x = \frac{-2a^3+9a^2+332a-2240}{(-20a+199)(a-10)}$	$y = \frac{-2a^2-29a+470}{-20a+199}$,	$z = \frac{a^2-15a+51}{-20a+199}$
Si $a=0$	$x = 224/199 \approx 1,13$	$y = 470/199 \approx 2,36$	$z = 51/199 \approx 0,26$
Si $a=1$	$x = 1901/1611 \approx 1,18$	$y = 439/179 \approx 2,45$	$z = 37/179 \approx 0,21$
Si $a=2$	$x = 389/318 \approx 1,22$	$y = 404/159 \approx 2,54$	$z = 25/159 \approx 0,16$
Si $a=3$	$x = 1217/973 \approx 1,25$	$y = 365/139 \approx 2,63$	$z = 15/139 \approx 0,11$
Si $a=4$	$x = 64/51 \approx 1,25$	$y = 46/17 \approx 2,71$	$z = 1/17 \approx 0,06$
Si $a=5$	$x = 11/9 \approx 1,22$	$y = 25/9 \approx 2,78$	$z = 1/99 \approx 0,01$
Si $a=6$	$x = 89/79 \approx 1,13$	$y = 224/79 \approx 2,84$	$z = -3/79 \approx -0,04$
Si $a=7$	$x = 161/177 \approx 0,91$	$y = 169/59 \approx 2,86$	$z = -5/59 \approx -0,08$
Si $a=8$	$x = 16/39 \approx 0,41$	$y = 110/39 \approx 2,82$	$z = -5/39 \approx -0,13$
Si $a=9$	$x = -1$	$y = 47/19 \approx 2,47$	$z = -3/19 \approx -0,16$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz A en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k = 0$ y $k = \frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}$: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente a 0 y $\frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}$ los tres planos se cortan en un único punto: 0,5 puntos.
- Justificar para $k = 0$ la posición relativa de los tres planos: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k = \frac{a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}$ los tres planos no tienen ningún punto en común: 0,5 puntos.

Apartado b

- Obtener la solución: 0,5 puntos.

3. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^5$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{R}^5 | b_1 + b_2 = 0, b_3 + b_4 = 0\}.$$

Y sea $v = (2a+3, -2a-3, a-2, 2-a, a-3)$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP.

a) Demostrad que $A = \{(1,-1,0,0,0), (1,-1,1,-1,0), (0,0,0,0,1)\}$ es una base de E.

b) ¿Pertenece v a E? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

c) Si $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de una base B a la base A. ¿Cuál es la base B?

d) ¿Es la base B ortonormal?

Solución

a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, sólo debemos comprobar que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobamos que los vectors de A pertenecen a E comprobando que se cumplen las condiciones $b_1 + b_2 = 0$ y $b_3 + b_4 = 0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes, ya que contenen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues, A es una base de E.

b) Efectivamente, $v \in E$ ya que cumplen las condiciones $b_1 + b_2 = 0$ y $b_3 + b_4 = 0$, para calcular sus coordenadas solucionamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3 \\ -2a-3 \\ a-2 \\ 2-a \\ a-3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a+5$, $y = a-2$, $z = a-3$. Por tanto, las coordenadas de v en la base A son $(a+5, a-2, a-3)$.

c) Para calcular la base B sólo debemos multiplicar los vectores de la base A por la matriz de cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_{B\to A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Así pues, la base B es: $B = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0), (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$.

d) Para que la base B sea ortonormal es necesario que los vectores tengan módulo 1 y sean ortogonales dos a dos.
Comencemos calculando los módulos de los vectores de la base B:
$\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 0 + 0 + 0} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 0 + 0 + 0} = 1$
$\sqrt{0 + 0 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{-\sqrt{2}}{2})^2 + 0} = \sqrt{0 + 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 0} = 1$
$\sqrt{0 + 0 + 0 + 0 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{0 + 0 + 0 + 0 + \frac{2}{4}} \neq 1$

Así pues, el tercer vector de la base B no tiene módulo 1 y por tanto la base B no es ortonormal.
Nota: Los vectores sí son ortogonales dos a dos, y por tanto, la base B es ortogonal, pero no ortonormal.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Demostrar que los vectores pertenecen a E: 0,25 puntos.
- Demostrar que los vectores son l.i.: 0,25 puntos.
- Ver que con las dos condiciones anteriores es suficiente para que sean base: 0,25 puntos.

Apartado b

- Demostrar que $v \in E$: 0,25 puntos.
- Calcular coordenadas: 0,25 puntos.

Apartado c

- Calcular base B: 0,75 puntos.

Apartado d

- Calcular módulos y ver que el tercer vector no es unitario: 0,5 puntos.

4. Sustituid, antes de hacer cálculos, el parámetro c por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 2c+1 & 0 & 0 \\ -2c-1 & 0 & 0 \\ 2c^2+3c+1 & 2c^2+c-1 & 2c-1 \end{pmatrix}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal y $M(f|C,C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$.

Responded razonadamente los siguientes apartados:

a) Calculad una base del núcleo de la aplicación f, decid cuál es su dimensión y determinad la dimensión de la imagen de f.

b) Calculad el polinomio característico de f y un vector propio de valor propio no nulo y que sea diferente de $(0, 0, 1)$.

Solución Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen.

a) El núcleo de f se obtiene resolviendo el sistema $M(f|C, C) \cdot w = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2c+1 & 0 & 0 \\ -2c-1 & 0 & 0 \\ 2c^2+3c+1 & 2c^2+c-1 & 2c-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta expresión se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{gathered} (2c+1)x = 0 \\ (-2c-1)x = 0 \\ (2c^2+3c+1)x + (2c^2+c-1)y + (2c-1)z = 0 \end{gathered}$$

La solución inmediata de la primera ecuación, $(2c + 1)x = 0$, al ser c una cifra ($c \geq 0$ y, por tanto, $2c + 1 > 0$) es $x = 0$. La solución inmediata de la segunda ecuación, $(-2c - 1)x = 0$, al ser c una cifra ($c \geq 0$ y, por tanto, $-2c - 1 < 0$) es también $x = 0$. Sustituyendo este valor en la tercera ecuación se obtiene $(2c^2 + c - 1)y + (2c - 1)z = 0$ y, por tanto, $z = -\frac{2c^2+c-1}{2c-1} y = -(c + 1)y$. Los vectores del núcleo tienen la forma $(0, y, -(c+1)y)$ y una base del núcleo de f es el vector $w = (0, -1, c+1)$, este tiene dimensión 1 y, entonces, por el Teorema de la dimensión del punto 4. "Núcleo e imagen de una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales", la imagen tendrá dimensión 2, ya que la suma de las dimensiones del núcleo y la imagen tiene que ser la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$.

b) El polinomio característico de f es $p(\lambda) = |M(f|C, C) - \lambda \mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales". Desarrollando el determinante por Sarrus, obtenemos:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2c+1-\lambda & 0 & 0 \\ -2c-1 & -\lambda & 0 \\ 2c^2+3c+1 & 2c^2+c-1 & 2c-1-\lambda \end{vmatrix} = (2c+1-\lambda)(-\lambda)(2c-1-\lambda)$$

Los VAPs de f son las soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$, en este caso los valores: $2c + 1$, 0 y $2c - 1$.

Para calcular el vector propio que se pide, descartamos el de VAP 0 porque así lo dice el enunciado y entonces solo queda saber a cuál de los otros dos valores propios corresponde. Para calcular el VAP correspondiente al VEP $(0, 0, 1)$ basta con calcular la imagen de este vector al aplicarle f y determinar por qué factor es múltiplo del mismo. Se multiplica la matriz de la aplicación por el vector:

$$\begin{pmatrix} 2c+1 & 0 & 0 \\ -2c-1 & 0 & 0 \\ 2c^2+3c+1 & 2c^2+c-1 & 2c-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2c-1 \end{pmatrix}$$

Se ve así que la imagen de $(0,0,1)$ es $(2c-1)(0,0,1)$, por lo cual el valor propio que le corresponde es $2c-1$.

Descartados los VAPs 0 y $2c-1$, queda el VAP $2c+1$. Para calcular un VEP de VAP $2c+1$ hay que buscar una base del $Ker(f-(2c+1)\mathrm{I})$. Es decir, resolver el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2c+1-2c-1 & 0 & 0 \\ -2c-1 & -2c-1 & 0 \\ 2c^2+3c+1 & 2c^2+c-1 & 2c-1-2c-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La primera fila es nula. De la ecuación correspondiente a la segunda fila, que es $-(2c+1)x-(2c+1)y=0$, se obtiene que $y=-x$ pues $2c+1\neq 0$. De la tercera ecuación $(2c^2+3c+1)x+(2c^2+c-1)y-2z=0$, sustituyendo y por $-x$, se obtiene $(2c^2+3c+1)x-(2c^2+c-1)x-2z=0$. Simplificando los dos primeros términos queda $2cx+2x-2z=0$ y, entonces, $z=(c+1)x$. Por tanto, las soluciones son de la forma $(x,-x,(c+1)x)$ y un vector propio de valor propio $2c+1$ puede ser $(1,-1,c+1)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Plantear el sistema para encontrar el núcleo: 0,5 puntos.
- Calcular la base del núcleo: 0,5 puntos.
- Calcular las dimensiones: 0,25 puntos.

Apartado b

- Calcular el polinomio característico: 0,5 puntos.
- Descartar los VAPs 0 y $2c-1$: 0,25 puntos.
- Calcular el VEP de VAP $2c+1$: 0,5 puntos.