Funciones exponencial y logarítmica (solución)

Solución

1. En primer lugar, recordamos la fórmula del cambio de base
$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$
Utilizándola, tenemos que nuestra ecuación se puede escribir como
$$\log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 4 = 1.$$
También sabemos que la suma de logaritmos en la misma base es el logaritmo del producto, por lo tanto llegamos a
$$\log_a(2 \cdot 3 \cdot 4) = \log_a 24 = 1,$$
dónde podemos aplicar la propiedad de los logaritmos que afirma que:
$$log_b(b) = 1$$
con lo que obtenemos $a = 24$.

2. Para simplificar, podemos escribir nuestra expresión logarítmica en forma exponencial. Primero nos fijamos en el primer logaritmo, que tiene base 2 y argumento todo lo de dentro del paréntesis. Como el resultado final es 0, tenemos que $\log_{2^a}(\log_{2^b}(2^{1000})) = 1$ (ya que $2^0 = 1$). Repetimos el mismo argumento para decir que $\log_{2^b}(2^{1000}) = 2^a$. Y aún una última vez para finalmente eliminar todos los logaritmos y obtener
$$\left(2^b\right)^{(2^a)} = 2^{1000}.$$
Ahora utilizamos que $(a^x)^y = a^{xy}$ para simplificar la última expresión obtenida a
$$2^{b \cdot 2^a} = 2^{1000}.$$
Como las bases son iguales, las podemos eliminar, y nos queda
$$b \cdot 2^a = 1000.$$
El valor más grande de a para el que 2^a divide a 1000 es 3 (puesto que para valores de $a > 3$ la división de 1000 entre 2^a no da exacta), por lo que solo necesitamos comprobar los casos en que a es 1, 2 o 3. Si $a = 1$ entonces $b = 500$, para $a = 2$ es $b = 250$, y para $a = 3$ es $b = 125$. Tomando todas estas combinaciones y sumándolas, obtenemos que la respuesta es 881.