

Àlgebra/ Matemàtiques I

Solució examen 17-06-2015

Problema1.

a) Troba el resultat de la següent expressió:

$$\frac{i^{54} + (1-i)^2}{2i^{320} + i^3}$$

b) Calcula: $\sqrt{5+12i}$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

NOTA:

En la realització dels problemes pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0°	$33,5^\circ$	45°	67°	90°	135°	$213,5^\circ$	270°	315°
$\sin(\alpha)$	0	0,552	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,92	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,552	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	0,834	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,39	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,834	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan(\alpha)$	0	0,67	1	2,4	∞	-1	0,67	$-\infty$	-1

Resolució:

a) Operem l'expressió de l'enunciat, recordant, tal com s'explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2 = -1$. Per tant: $i^{54} = i^2 = -1$ i $i^{320} = i^0 = 1$

$$\frac{i^{54} + (1-i)^2}{2i^{320} + i^3} = \frac{-1 + 1 - 2i - 1}{2 \cdot 1 - i} = \frac{-2i - 1}{2 - i} = \frac{(-2i - 1) \cdot (2 + i)}{(2 - i) \cdot (2 + i)} = \frac{-4i + 2 - 2 - i}{5} = \frac{-5i}{5} = -i$$

Per tant:

$$\frac{i^{54} + (1-i)^2}{2i^{320} + i^3} = -i$$

b) Escrivim el complex $5+12i$ en forma polar tal com s'explica a l'apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{12}{5}\right) = \arctg(2,4) = 67^\circ$$

Àlgebra/ Matemàtiques I

Observem que ni sumem ni restem cap angle donat que la part real i la part imaginària del complex són positives (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt{5+12i} = \sqrt{13}_{67^\circ}$

Com que ens demanen les arrels quadrades hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$$\sqrt{13}_{67^\circ} = \sqrt{13^{\frac{67^\circ+360^\circ k}{2}}} \text{ per a } k=0, 1$$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt{13}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \frac{67^\circ+360^\circ k}{2}$ per a $k=0, 1$

1 Si $k=0$, tenim que $\beta_0 = 33,5^\circ$

2 Si $k=1$, tenim que $\beta_1 = 33,5^\circ+180^\circ = 213,5^\circ$

Per tant, les dues arrels quadrades del complex $\sqrt{5+12i}$ són:

$$\sqrt{13}_{33,5^\circ} = \sqrt{13} \cdot (\cos 33,5^\circ + i \sin 33,5^\circ) = \sqrt{13} \cdot (0,834 + 0,552i) = 3 + 2i$$

$$\sqrt{13}_{213,5^\circ} = \sqrt{13} \cdot (\cos 213,5^\circ + i \sin 213,5^\circ) = \sqrt{13} \cdot (-0,834 - 0,552i) = -3 - 2i$$

Una altra forma de resoldre l'exercici:

El resultat de l'arrel serà un complex de la forma $x+iy$, amb x i y reals. Per tant:

$$\sqrt{5+12i} = x+iy \rightarrow 5+12i = (x+iy)^2 \rightarrow 5+12i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Aplicant a aquesta última expressió el principi d'igualtat dels nombres complexos, es té que:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \rightarrow x = \frac{6}{y} \end{cases}$$

$$\left(\frac{6}{y}\right)^2 - y^2 = 5 \rightarrow 36 - y^4 = 5y^2 \rightarrow y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \rightarrow y^2 = \begin{cases} 4 \\ -9 \end{cases}$$

$$y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$

$$y^2 = -9 \rightarrow y = \pm 3i$$

Àlgebra/ Matemàtiques I

Aquesta última solució d'í no serveix ja que, independentment de què x i y siguin la part real i imaginària del complex buscat, x i y han de ser nombres reals.

Per tant,

$$\text{Per a } y = 2 \rightarrow x = 3 \rightarrow 3 + 2i$$

$$\text{Per a } y = -2 \rightarrow x = -3 \rightarrow -3 - 2i$$

Ara ja tenim les solucions en forma binòmica, falta passar-les a forma polar:

Per a $3+2i$

$$m = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{2}{3}\right) = \arctg(0,67) = 33,5^\circ$$

$$\text{Tenim, per tant, que } 3 + 2i = \sqrt{13}_{33,5^\circ}$$

Per a $-3-2i$

$$m = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{-2}{-3}\right) + 180^\circ = \arctg(0,67) + 180^\circ = 213,5^\circ$$

$$\text{Tenim, per tant, que } -3 - 2i = \sqrt{13}_{213,5^\circ}$$

Problema 2.

Siguin A i B els subespais de \mathbb{R}^4 generats pels conjunts de vectors següents:

$$A = \langle (a, a, 1, 1), (0, a, a, 1), (0, 0, a, a), (0, 0, 0, a^2) \rangle, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$B = \langle (a^3, 0, 0, 0), (a^2, a^3, 0, 0), (a, a^2, a^3, 0), (1, a, a^2, a^3) \rangle, \quad a \in \mathbb{R}$$

- Troba la dimensió d' A i de B en funció d' a . Troba una base per a cada espai en cada cas.
- Si $a = 2$ trobeu les coordenades del vector $v = (16, 16, 16, 16)$ en cada una de les bases. Per a quins valors d' a són A i B el mateix espai vectorial?

Resolució:

- Calculem el rang de la matriu de vectors de l'espai A :

Àlgebra/ Matemàtiques I

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ 1 & a & a & 0 \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = a^5$$

Així per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 4 i per tant la dimensió d'A també és 4 i

$\{(a, a, 1, 1), (0, a, a, 1), (0, 0, a, a), (0, 0, 0, a^2)\}$ són base d'A.

Si $a = 0$ el rang de la matriu és 2 i per tant la dimensió d'A també. Una base la poden formar els dos vectors no nuls linealment independents: $\{(0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$

Fem el mateix per a l'espai B:

$$\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ 0 & a^3 & a^2 & a \\ 0 & 0 & a^3 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{vmatrix} = a^{12}$$

Així per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 4 i per tant la dimensió de B també és 4 i

$\{(a^3, 0, 0, 0), (a^2, a^3, 0, 0), (a, a^2, a^3, 0), (1, a, a^2, a^3)\}$ són base d'B.

Si $a = 0$ el rang de la matriu és 1 i per tant la dimensió de B també. Una base la pot formar el vector: $\{(1, 0, 0, 0)\}$

b) Per a calcular les coordenades de v en A quan $a = 2$ resollem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x=8, y=0, z=4, t=0$. Per tant les coordenades de v en A quan $a = 2$ són $(8, 0, 4, 0)$.

Per a calcular les coordenades de v en B quan $a = 2$ resollem de forma anàloga el següent sistema:

Àlgebra/ Matemàtiques I

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x=1, y=1, z=1, t=2$. Per tant les coordenades de v en A quan $a=2$ són $(1,1,1,2)$.

Hem vist a l'apartat anterior que quan $a \neq 0$ llavors els espais A i B tenen dimensió 4. Al ser subespais de \mathbb{R}^4 de dimensió 4 són els dos \mathbb{R}^4 , és a dir, el mateix espai.

Si $a=0$ hem vist que A té dimensió 2 i B dimensió 1, per tant no són el mateix espai vectorial.

Problema 3.

Donat el sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y + 4z = 4k - 7 \\ 2x - ky = -1 \\ -2x + kz = k + 1 \end{array} \right\}$$

- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real k .
- b) Resoleu el sistema per al cas $k=2$ i per al cas $k=0$.

Resolució:

- a) La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A' , són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 4k-7 \\ 2 & -k & 0 & -1 \\ -2 & 0 & k & k+1 \end{array} \right)}_{A'}$$

Estudiem primer per a quins valors del paràmetre k el $\text{rang}(A)$ és màxim. Per això calcularem $\det(A)$ i estudiarem quan s'anula.

Àlgebra/ Matemàtiques I

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & k \end{vmatrix} = -2k^2 - 8k - 8k = -2k^2 - 16k = -2k(k+8)$$

Per tant el determinant d'A s'anul·la només en els casos $k = 0$ i $k = -8$ i per tant tenim els següents tres casos.

Cas I: $k \neq 0, -8$

En aquest cas tenim $\text{rang}(A) = 3$, per tant $\text{rang}(A') = 3 = \text{nombre d'incògnites}$. Per tant el sistema és Compatible Determinat.

Cas II: $k = 0$

En aquest cas la matriu del sistema és

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \middle| \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{A'}$$

Com que $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A) < 3$, però el menor $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ ens diu que $\text{rang}(A) = 2$.

Per a saber el rang de la matriu ampliada orem el menor anterior i calculem el determinant.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$ llavors $\text{rang}(A') = 2 = \text{rang}(A)$ i per tant el sistema és

Compatible Indeterminat amb 1 (3-2) grau de llibertat.

Cas III: $k = -8$

En aquest cas la matriu del sistema és

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}}_A \middle| \begin{pmatrix} -39 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \right)_{A'}$$

Com que $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A) < 3$, però el menor $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ ens diu que $\text{rang}(A) = 2$.

Àlgebra/ Matemàtiques I

Per a saber el rang de la matriu ampliada orem el menor anterior i calculem el determinant.

$$\text{Com que } \begin{vmatrix} 2 & 4 & -39 \\ 2 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -112 + 8 - 624 + 56 = -672 \neq 0 \text{ llavors } \text{rang}(A')=3 \text{ i } \text{rang}(A)=2$$

per tant el sistema és Incompatible.

En resum:

- Si $k \neq 0, -8$: Sistema Compatible Determinat.
- Si $k = 0$: Sistema Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat.
- Si $k = -8$: Sistema Incompatible.

b) $k = 2$

En aquest cas el sistema és compatible determinat i la solució única la podem trobar, per exemple, aplicant la regla de Cramer. En aquest cas la matriu del sistema és

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A'} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

I per tant tindrem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{28}{-40} = \frac{-7}{10}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8}{-40} = \frac{-1}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-32}{-40} = \frac{4}{5}$$

Així doncs la solució en aquest cas és el punt $(\frac{-7}{10}, \frac{-1}{5}, \frac{4}{5})$

Àlgebra/ Matemàtiques I

$k = 0$.

És el cas II de l'apartat anterior en el que ja hem vist que el sistema era Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat. Per la matriu resultant, tenim que el sistema inicial és equivalent al sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y = -7 - 4z \\ 2x = -1 \end{array} \right\}$$

D'on podem obtenir $x = \frac{-1}{2}$ i substituint a la primera equació tenim $y = -\frac{3+2z}{2}$, utilitzant la variable z com a indeterminada. Així doncs la solució en el cas $k = 0$ són els punts de la forma $(\frac{-1}{2}, \frac{-3-2z}{2}, z)$

Problema 4.

Considerem $A=(1,1)$, $B=(0,1)$, $C=(0,0)$.

a) Sigui g el gir de 45° . Calculeu $g(A)$, $g(B)$ i $g(C)$.

b) Sigui f l'escalatge de raó 2 des del punt $(-1,0)$. Calculeu $f(A)$, $f(B)$ i $f(C)$.

Resolució:

a) La matriu del gir d'angle 45° és:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a trobar les imatges dels punts A, B, C , hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Per tant,}$$

$$g(A) = 0, \sqrt{2}, g(B) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), g(C) = 0, 0.$$

Àlgebra/ Matemàtiques I

b) Per trobar la matriu de l'escalatge de raó 2, d'esquerra a dreta, fem la translació des del punt $(-1,0)$, després l'escalatge de raó 2, i després desfem la translació des del punt $(-1,0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trobar les imatges dels punts A,B,C, hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $f(A)=(3,2)$, $f(B)=(1,2)$ i $f(C)=(1,0)$.

