ÀLGEBRA

SOLUCIÓ EXAMEN
19 de juny 2019

1. Responeu als apartats següents:

   a) Trobeu l´invers del nombre complex següent: $2+3i$. Expresseu aquest invers en forma binòmica.

   b) Calculeu totes les arrels cinquenes del nombre complex següent: $\frac{1}{32}$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Resolució:

a) L´invers de $2+3i$ és $\frac{1}{2+3i}$ però cal expresar-lo en forma binòmica.

Primer de tot hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Per a això multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal i com s'explica a l'apartat 3.3.4, pàgina 26, del material imprès sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica) i agrupem part real i part imaginària

$$\frac{1}{2+3i}=\frac{1\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)}=\frac{2-3i}{4+9}=\frac{2-3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{(-3)}{13}i$$

Per tant, la resposta a l'exercici és: $\frac{1}{2+3i}=\frac{2}{13}+\frac{(-3)}{13}i$

b) Mirem l'exercici d'autoavaluació 30 de la pàgina 50 del material imprès. De fet el que es demana són les arrels cinquenes de $\frac{1}{32}$.

Per determinar les arrels cinquenes de $\frac{1}{32}$ determinem primer el mòdul i l´argument d'aquest:

$$m=\sqrt{\left(\frac{1}{32}\right)^2+(0)^2}=\frac{1}{32}$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{1/32}=arctg(0)=0^{\circ}$$

(Observem que, en ser la part imaginària nul·la, no cal sumar ni restar cap quantitat, tal com es diu en l'apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del mòdul imprès).

NOTA ACLARIDORA: Sabem que la tangent d'un angle val 0 en 0º i en 180º. Com l'afix del punt buscat és (1/32, 0) l'angle està en el primer quadrant, és a dir, en 0º.

Com es diu en l'exercici 19 d'autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre 1/32 en el pla complex. Aquest número està associat al punt (1/32, 0), per tant, és un nombre que es troba en el primer quadrant.

Tenim, per tant,que $\frac{1}{32} = \left(\frac{1}{32}\right)_{0^\circ}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes, hem de fer:

$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right)_{\frac{0^\circ+360^\circ k}{5}}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2^5}\right)} = \frac{1}{2}$ (això és sobre els reals)

Els arguments de les arrels són $\beta_k = \frac{0^\circ+360^\circ k}{5}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 0^\circ$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 0^\circ+72^\circ = 72^\circ$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 0^\circ+144^\circ = 144^\circ$
- Si k=3, tenim que $\beta_1 = 0^\circ+216^\circ = 216^\circ$
- Si k=4, tenim que $\beta_2 = 0^\circ+288^\circ = 288^\circ$

Per tant, les tres arrels de l'equació, en forma polar, són:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{0^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{72^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{144^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{216^{o}}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{288^{o}}}$$

2. Siguin els vectors de $\mathbb{R}^4$ següents:

   $e_1 = (-1,3,2,0), e_2 = (2,-1,-1,-1), e_3 = (1,2,1,-1), e_4 = (-5,0,1,3)$.

   Sigui $F = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$.

   I sigui $v = (-12,1,3,7)$.

   a) Calculeu la dimensió de F i una base A. Pertany v a F? En cas afirmatiu, calculeu les seves coordenades en la base A.

   b) Siguin $w_1 = e_1 + e_2, w_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. $B = \{w_1, w_2\}$ és una base de F. Calculeu la matriu de canvi de base de B a A.

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trobem el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ i orlant trobem que tots els determinants 3x3 són zero. Així la dimensió de F és 2 i una base pot estar formada per els dos primers vectors ja que son linealment independents (contenen el menor anterior). Així doncs A={e_1, e_2}.
Per mirar si v pertany a F resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=-2, y=-7. Per tant v pertany a E, i les seves coordenades en la base A són (-2, -7).

b) Per trobar la matriu de canvi de base de B a A cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la d'A. Així és justament com tenim definit el primer vector de la base B. Anem a trobar la expressió del segon resolent el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=-1. Per tant les coordenades de w_2 en la base A són (1,-1).
De manera que la matriu de canvi de base de B a A serà:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Considereu el sistema d´equacions lineals:

$$\begin{cases} x + y - (1+2a)z = -6 \\ x + 4y + (a-6)z = -9 \\ -x + (a+1)y + z = 2a+1 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema pels diferents valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculeu les solucions del sistema per $a = 0$

Resolució:

a) Per discutir-lo utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Veure mòdul 3, apartat 4, pàg. 13]

La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1-2a & -6 \\ 1 & 4 & a-6 & -9 \\ -1 & a+1 & 1 & 2a+1 \end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = -3a^2 - 7a + 10 = -3(a-1)(a+\frac{10}{3})$$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq {}^{-10}/_{3} \to \mathrm{rang}(A) = 3 = \mathrm{rang}(M) = \mathrm{num.\,incògnites}$

  $\to \boxed{\mathrm{S.\,Comp.\,Determinat}}$.

- Si $a = 1 \to \mathrm{rang}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculem, per $a = 1$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \to \mathrm{rang}(M) = 2 \to \boxed{\mathrm{S.\,Comp.\,Indeterminat}}.$$

- Si $a = \frac{-10}{3} \to \mathrm{rang}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Per altra banda, per $a = \frac{-10}{3}$, la matriu ampliada té un menor d'ordre 3 no nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & -7/3 & -17/3 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \to \mathrm{rang}(M) = 3 \to \boxed{\mathrm{S.\,Incompatible}}.$$

b) Considerem la matriu ampliada del sistema quan $a = 0$ i apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & -6 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -9 \end{array}\right)$$

(1) Operacions: F2=F2-F1 i F3=F3+F1.

(2) Operacions: F3=3·F3-2·F2.

D'on s'obté el sistema i la solució següent:

$$\begin{cases} x+\ y-\ \ z\ = -6 \\ \quad 3y-5z\ = -3 \\ \qquad 10z\ = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+\ y-\ \ z\ = -6 \\ \quad 3y-5z\ = -3 \\ \qquad\quad z\ = -9/10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+\ y-\ \ z\ = -6 \\ \qquad\quad y\ = -5/2 \\ \qquad\quad z\ = -9/10 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -22/5 \\ y = -5/2 \\ z = -9/10 \end{cases}}$$

4. Considerem $A = (2,1), B = (3,1), C = (3,2)$.

   a) Sigui f l´escalatge de raó 3 des del punt $(1,-2)$. Calculeu $f(A), f(B)$ i $f(C)$.

   b) Sigui g el gir d´angle $a = 30°$ en sentit antihorari des de l´origen. Calculeu $g(A), g(B)$ i $g(C)$.

Resolució:

a) Recordem el Mòdul 5, Secció 4. Per a trobar la matriu de l'escalatge de raó 3 des del punt (1,-2) cal multiplicar per la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trobar les imatges dels punts A,B,C, hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, f(A)=(4,7), f(B)=(7,7) i f(C)=(7,10).

b) El Mòdul 5, Seccions 3 i 5, diu que la matriu del gir d'angle $a = 30^o$ en sentit antihorari és:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on denotem c=cos(a) i s=sin(a), per abreujar. Per a trobar les imatges de A,B,C multipliquem:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c-s & 3c-s & 3c-2s \\ c+2s & c+3s & 2c+3s \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

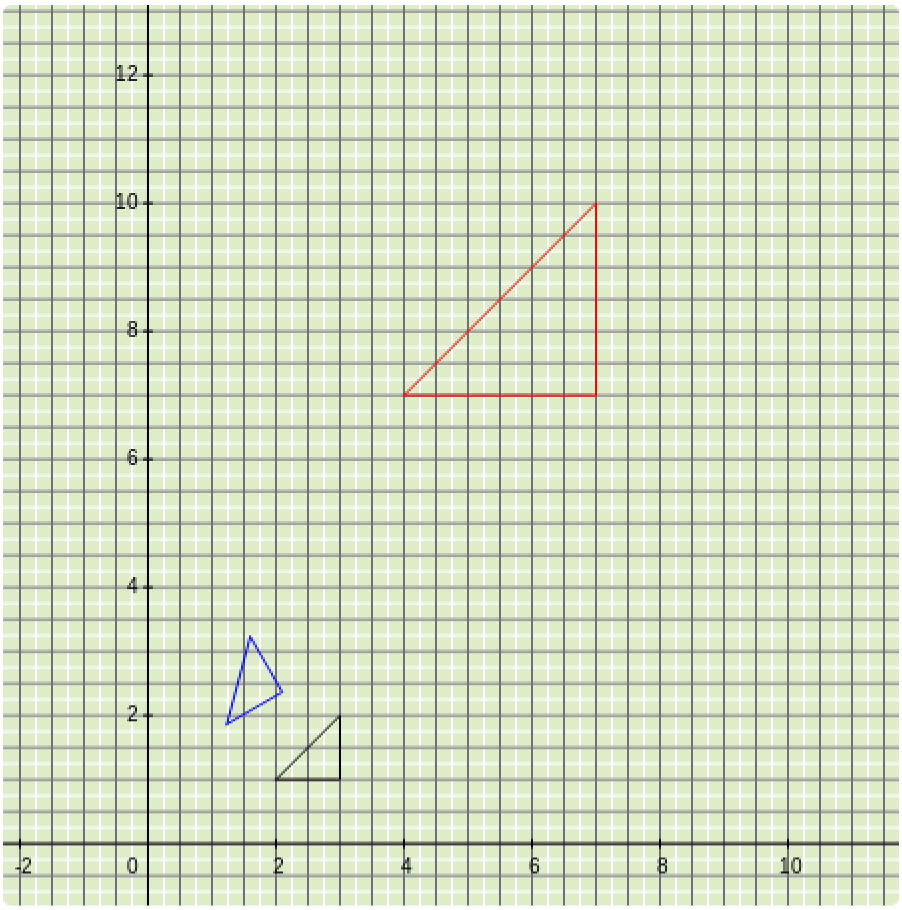
Així g(A)=(2c-s,c+2s), g(B)=(3c-s,c+3s), g(C)=(3c-2s,2c+3s). En el cas en què $a = 30^o$, aleshores $\cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(30^o) = \frac{1}{2}$. Per tant,

$$g(A) = (2c-s, c+2s) = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right),$$

$$g(B) = (3c-s, c+3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$$

i

$$g(C) = (3c-2s, 2c+3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2}\right).$$



NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels valors següents:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$