EXAMEN 1

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Calculad el número complejo que se obtiene haciendo $\frac{x^2}{\overline{y} \cdot z}$, donde x, y y z son números complejos tales que: $x = 2 + i$, $y = -3 + 2i$ y $z = -i$. Proporcionad el resultado en forma binómica.

   b) Calculad la siguiente raíz, expresando los resultados en forma polar y trabajando con los ángulos en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$\sqrt[4]{81(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})}$$

Solución

a) En el numerador, calculamos el cuadrado (ver apartado 3.3.2, Módulo 1):

$$x^2 = (2+i)^2 = (2+i)(2+i) = 4 + 2i + 2i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$$

En el denominador, sabemos que el conjugado de y es: $\overline{y} = -3 - 2i$, por lo que podemos calcular la multiplicación:

$$\overline{y} \cdot z = (-3-2i)(-i) = 3i + 2i^2 = -2 + 3i$$

Ahora podemos calcular la división (ver apartado 3.3.4, Módulo 1):

$$\frac{x^2}{\overline{y} \cdot z} = \frac{3+4i}{-2+3i} = \frac{(3+4i)}{(-2+3i)} \cdot \frac{(-2-3i)}{(-2-3i)} = \frac{-6-9i-8i-12i^2}{4-9i^2} = \frac{6-17i}{13}$$

En resumen:

$$\boxed{\frac{x^2}{\overline{y} \cdot z} = \frac{6}{13} - \frac{17}{13}i}$$

b) En primer lugar, debemos pasar el número complejo a forma polar. Para ello, vemos claramente que el módulo es 81 y el ángulo es $\frac{2\pi}{3}$. Por tanto, obtenemos:

$$\sqrt[4]{81(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[4]{81_{\frac{2\pi}{3}}}$$

Ahora podemos calcular el módulo y los argumentos de las raíces:
El módulo de las raíces es: $r = \sqrt[4]{81} = 3$
Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \dfrac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

- Para $k = 0$, tenemos $\beta_0 = \dfrac{\pi}{6}$.
- Para $k = 1$, tenemos $\beta_1 = \dfrac{2\pi}{3}$.
- Para $k = 2$, tenemos $\beta_2 = \dfrac{7\pi}{6}$.
- Para $k = 3$, tenemos $\beta_3 = \dfrac{5\pi}{3}$.

En resumen:

$$\boxed{\text{Las raíces son: } 3_{\frac{\pi}{6}},\ 3_{\frac{2\pi}{3}},\ 3_{\frac{7\pi}{6}} \text{ y } 3_{\frac{5\pi}{3}}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular el cuadrado de x: 0,25 puntos.
- Calcular el conjugado de y: 0,25 puntos.
- Calcular la multiplicación del denominador: 0,25 puntos.
- Calcular la división: 0,5 puntos.

Apartado b

- Expresar el número complejo en forma polar: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Calcular los argumentos de las raíces: 0,75 puntos.

2. Considerad el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ (a+1)x + ky + (a+1)z = a+1 \\ (a+1)x + (a+1)y + kz = a+1 \\ (a+1)x + (a+1)y + (a+1)z = k \end{array}\right\}$$

Sustituid el parámetro "a"del sistema por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con el sistema obtenido se pide:

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Considerad el sistema, de tres ecuaciones con tres incógnitas, que se obtiene eliminando la cuarta ecuación del sistema inicial y determinad su solución para $k = 2023$.

Solución

a) Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

Para discutir el sistema utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apuntes módulo 3, apartado 4].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & k & a+1 \\ a+1 & a+1 & k \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}, \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a+1 & k & a+1 & a+1 \\ a+1 & a+1 & k & a+1 \\ a+1 & a+1 & a+1 & k \end{array}\right).$$

Dado que la matriz A no es cuadrada, pero la matriz M sí que lo es, empezaremos calculando el determinante de la matriz M

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a+1 & k & a+1 & a+1 \\ a+1 & a+1 & k & a+1 \\ a+1 & a+1 & a+1 & k \end{vmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-a-1 \end{vmatrix}$$

(*) Operaciones: $F2-(a+1)F1 \to F2$, $F3-(a+1)F1 \to F3$ y $F4-(a+1)F1 \to F4$

notemos que, dado que todos los elementos de debajo de la diagonal principal son nulos, entonces el determinante de la matriz M se obtiene multiplicando los elementos de la diagonal, por lo tanto:

$$|M| = (k-(a+1))^3$$

- Si $k \neq a+1$ entonces rango$(M) = 4$ y como la matriz A solo tiene tres columnas, esta nunca puede tener rango 4. Así pues, rango$(M) \neq$ rango(A) y, por lo tanto, tenemos que el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.
- Si $k = a+1$, entonces el sistema se reduce a una única ecuación: $x+y+z=1$, puesto que las otras tres ecuaciones son múltiplos de esta. Por lo tanto, como tenemos una única ecuación y tres incógnitas, se trata de un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$ con dos grados de libertad.

b) Consideramos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ (a+1)x+2023y+(a+1)z=a+1 \\ (a+1)x+(a+1)y+2023z=a+1 \end{array}\right\}$$

Para calcular las soluciones de este sistema utilizaremos el método de Gauss [ver apuntes módulo 3, apartado 6].

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a+1 & 2023 & a+1 & a+1 \\ a+1 & a+1 & 2023 & a+1 \end{array}\right) \underset{(*)}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2023-a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2023-a-1 & 0 \end{array}\right)$$

(*) Operaciones: $F2-(a+1)F1 \to F2$ y $F3-(a+1)F1 \to F3$
El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ (2023-a-1)y=0 \\ (2023-a-1)z=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Solución: } \boxed{(x=1, y=0, z=0).}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular el determinante de la matriz M en función de k: 0,5 puntos.
- Obtener el valor $k=a+1$: 0,5 puntos.
- Justificar que SI para k diferente de $a+1$: 0,5 puntos.
- Justificar que SCI para $k=a+1$: 0,5 puntos.

Apartado b

- Obtener la solución del sistema: 0,5 puntos.

3. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$E=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4 | a_1+a_2+a_3=a_4\}.$$

Y sea $v=(a+1,a+2,a+3,3a+6)$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP.

a) Comprobad que $A=\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ es una base de E. ¿$v\in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

b) Sea $C_{B\to A}=\begin{pmatrix} k & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ con $k\in\mathbb{R}$, $k\neq 0$, la matriz de cambio de base de una base B a la base A. Calculad la base B. ¿Existe algún valor de k tal que B sea una base ortonormal?

Solución

a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, sólo debemos mirar que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobamos que los vectores de A pertenecen a E verificando que se cumple la condición $a_1+a_2+a_3=a_4$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes, ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$. Así pues A es una base de E.
Para ver si $v\in E$ miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+1 \\ a+2 \\ a+3 \\ 3a+6 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a + 1$, $y = a + 2$ y $z = a + 3$. Por tanto $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a + 1, a + 2, a + 3)$.

b) Para calcular la base B podemos multiplicar directamente los vectores de la base A por la matriz de cambio de base y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} k & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ k & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

Con las columnas de la matriz resultante tenemos:
$B = \{(k, 0, 0, k), (\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}), (\frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})\}$.
Ahora para calcular el valor de k que hace que la base B sea ortonormal imponemos que el módulo del primer vector sea 1:

$$1 = \sqrt{k^2 + 0 + 0 + k^2} = \sqrt{2k^2} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

Y comprobamos que el módulo dels resto de vectores también es 1:
$\sqrt{(\frac{-\sqrt{6}}{6})^2 + (\frac{\sqrt{6}}{3})^2 + 0 + (\frac{\sqrt{6}}{6})^2} = \sqrt{\frac{6}{36} + \frac{6}{9} + \frac{6}{36}} = 1$
$\sqrt{(\frac{-\sqrt{3}}{6})^2 + (\frac{-\sqrt{3}}{6})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{6})^2} = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3}{4} + \frac{3}{36}} = 1$
Comprobamos que para los valores de k calculados, el vector $(k, 0, 0, k)$ es ortogonal a los otros dos de la base. De hecho, lo es independientemente del valor de k:
$(k, 0, 0, k) \cdot (\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}) = k \cdot \frac{-\sqrt{6}}{6} + 0 + 0 + k \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = 0$
$(k, 0, 0, k) \cdot (\frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}) = k \cdot \frac{-\sqrt{3}}{6} + 0 + 0 + k \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = 0$
Y por último, el segundo y tercer vector también son ortogonales entre ellos:
$(\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}) \cdot (\frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{-\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}) = \frac{\sqrt{18}}{36} + \frac{-\sqrt{18}}{18} + 0 + \frac{\sqrt{18}}{36} = 0$
Así pues, para $k = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$ la base B es ortonormal.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Comprobar que los vectores son de E: 0,25 puntos.
- Comprobar que los vectores son linealmente independientes y justificar que es suficiente con estas dos comprobaciones porque conocemos la dimensión: 0,25 puntos.
- Ver que $v \in E$ y calcular sus coordenadas: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular la base B: 0,5 puntos.
- Calcular el valor de k: 0,5 puntos.
- Comprobar que los vectores son unitarios: 0,25 puntos.
- Comprobar que los vectores son ortogonales: 0,25 puntos.

4. Sea a la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC.

   a) Escribid la matriz del escalado de razón $a+2$ centrado en el punto $(-5,a)$ y calculad la imagen del punto $(1,1)$ por esa transformación.

   b) Dada la matriz de un giro:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & (2-\sqrt{3})(a+1) \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Averiguad el ángulo y el centro del giro.

Solución

Resolvemos el problema para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los resultados siguientes.

a) La matriz del escalado de razón $a+2$ y centro $(-5,a)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(5,-a)$, la del escalado de razón $a+2$ centrado en el origen y la de la traslación de vector $(-5,a)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 4.3 “Escalado a partir de un punto genérico”del módulo “Transformaciones geométricas”.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a+2 & 0 & -5 \\ 0 & a+2 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a+2 & 0 & 5a+5 \\ 0 & a+2 & -a^2-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La imagen del punto $(1,1)$ se puede calcular mediante la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} a+2 & 0 & 5a+5 \\ 0 & a+2 & -a^2-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a+7 \\ 2-a^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el punto $(6a+7, 2-a^2)$.

b) Comparando la matriz con la del punto 3.4 “Rotación alrededor de un punto genérico” del módulo “Transformaciones geométricas”, se ve que el ángulo de giro tiene coseno $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y seno $\dfrac{1}{2}$, por lo que se trata del ángulo de $30°$ o $\dfrac{\pi}{6}$ radianes. La matriz del giro de ángulo $30°$ y centro en un punto (x,y) se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(-x,-y)$, la del giro centrado en el origen y la de la traslación de vector (x,y). Calculamos la composición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & x \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}x + \frac{2-\sqrt{3}}{2}y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparando esta matriz resultante con la del enunciado se ve que el centro del giro (x,y) debe ser tal que se cumplan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{2-\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y &= (2-\sqrt{3})(a+1) \\ \frac{-1}{2}x + \frac{2-\sqrt{3}}{2}y &= -(a+1) \end{aligned}$$

Multiplicando por 2 las expresiones:

$$\begin{aligned} (2-\sqrt{3})x + y &= 2(2-\sqrt{3})(a+1) \\ -x + (2-\sqrt{3})y &= -2(a+1) \end{aligned}$$

Aislando x de la segunda se obtiene $x = 2(a+1) + (2-\sqrt{3})y$ y sustituyendo en la primera:

$$\begin{aligned} (2-\sqrt{3})(2(a+1) + (2-\sqrt{3})y) + y &= 2(2-\sqrt{3})(a+1) \\ (2-\sqrt{3})2(a+1) + ((2-\sqrt{3})^2 + 1)y &= 2(2-\sqrt{3})(a+1) \\ ((2-\sqrt{3})^2+1)y = 2(2-\sqrt{3})(a+1) - (2-\sqrt{3})2(a+1) &= 0 \end{aligned}$$

Y con este resultado $y=0$ se puede ya obtener $x = 2(a+1)$. Por tanto, el centro del giro es el punto $(2(a+1), 0)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Escribir correctamente el producto de matrices: 0,5 puntos.
- Calcular la matriz de la composición: 0,5 puntos.
- Calcular la imagen del punto: 0,25 puntos.

Apartado b

- Determinar el ángulo de giro: 0,25 puntos.
- Escribir correctamente el producto de matrices y calcularlo: 0,5 puntos.
- Resolver el sistema para determinar el centro del giro: 0,5 puntos.