EXAMEN 1

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Dados los números complejos $z_1 = 5 + 4i$, $z_2 = 1 + 2i$ y $z_3 = a + bi$. Encontrad los valores de a y b tales que el producto del conjugado de z_1 por el inverso de z_2 sea igual a z_3.

   b) Calculad las raíces quintas del número complejo $-1 + i\sqrt{3}$. Proporcionad el resultado en forma polar y los ángulos en grados en el intervalo $[0°, 360°)$.

Solución

a) Primero, calculamos el conjugado de z_1:

$$\overline{z_1} = \overline{5 + 4i} = 5 - 4i$$

Ahora calculamos el inverso de z_2:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{1^2 + (2)^2} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Ahora podemos calcular el producto de $\overline{z_1}$ y z_2^{-1}:

$$\overline{z_1} \cdot z_2^{-1} = (5-4i) \cdot \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{5}i\right) = \tfrac{5}{5} - \tfrac{10}{5}i - \tfrac{4}{5}i + \tfrac{8}{5}i^2 = 1 - \tfrac{14}{5}i - \tfrac{8}{5} = -\tfrac{3}{5} - \tfrac{14}{5}i$$

Igualamos la expresión anterior a z_3:

$$z_3 = a + bi = -\tfrac{3}{5} - \tfrac{14}{5}i$$

Por lo tanto:

$$\boxed{a = -\tfrac{3}{5}\ ;\ b = -\tfrac{14}{5}}$$

b) Expresamos el número complejo $-1 + i\sqrt{3}$ en forma polar:

Módulo: $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Argumento: $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = 120°$

La tangente de un ángulo vale $\dfrac{\sqrt{3}}{-1}$ en $120°$ y en $300°$. Ahora bien, el número complejo que estamos analizando tiene la parte real negativa y la parte imaginaria positiva, por lo que se encuentra en el segundo cuadrante, es decir, $120°$. Así, $-1 + i\sqrt{3} = 2_{120°}$.

Ahora aplicamos la raíz quinta que se pide en el enunciado:

$$\sqrt[5]{2_{120^\circ}} = \sqrt[5]{2}_{\frac{120^\circ + 360^\circ k}{5}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

El módulo de las raíces es: $r = \sqrt[5]{2}$

Los argumentos de las raíces son: $\alpha_k = \frac{120^\circ + 360^\circ k}{5}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

- Para $k = 0$, tenemos $\alpha_0 = 24^\circ$.
- Para $k = 1$, tenemos $\alpha_1 = 96^\circ$.
- Para $k = 2$, tenemos $\alpha_2 = 168^\circ$.
- Para $k = 3$, tenemos $\alpha_3 = 240^\circ$.
- Para $k = 4$, tenemos $\alpha_4 = 312^\circ$.

En resumen:

$$\boxed{\text{Las raíces quintas son: } (\sqrt[5]{2})_{24^\circ},\ (\sqrt[5]{2})_{96^\circ},\ (\sqrt[5]{2})_{168^\circ},\ (\sqrt[5]{2})_{240^\circ},\ \text{y } (\sqrt[5]{2})_{312^\circ}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Conjugado de z_1: 0,25 puntos.
- Inverso de z_2: 0,25 puntos.
- Producto de z_1 y z_2: 0,5 puntos.
- Valores de a y b: 0,25 puntos.

Apartado b

- Módulo del número complejo: 0,25 puntos.
- Argumento del número complejo: 0,25 puntos.
- Módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Argumentos de las raíces: 0,5 puntos.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 2 \\ x - ay - z = m \\ ky + 5z = -10 \end{array}\right\}$$

Sustituid el parámetro "a" por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con el sistema obtenido:

a) Discutid el sistema en función de los diferentes valores de los parámetros $k \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{R}$.

b) Resolved el sistema para $k = 2a + 2$ y $m = 6$.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) Para discutir el sistema utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apartado 4 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & -1 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -a & -1 & m \\ 0 & k & 5 & -10 \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, ya que si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & -1 \\ 0 & k & 5 \end{vmatrix} = -10a + 3k - 5 + 2k = 5k - (10a + 5)$$

- Si $k \neq 2a + 1$ y m cualquiera $\rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas y, por tanto, podemos afirmar que el $\boxed{\text{sistema es compatible determinado}}$.
- Si $k = 2a + 1$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.

  Calculamos, para $k = 2a + 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & m \\ 0 & 5 & -10 \end{vmatrix} = 60 - 10m$. Así pues, tenemos que:
  - Si $k = 2a + 1$ y $m = 6 \rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 2 \neq \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas y, por tanto, podemos afirmar que el $\boxed{\text{sistema es compatible indeterminado}}$.
  - Si $k = 2a + 1$ y $m \neq 6 \rightarrow \text{rg}(A) \neq \text{rg}(M)$ y, por tanto, podemos afirmar que el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que para $k = 2a + 2$ y $m = 6$ el sistema que se obtiene es compatible determinado:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ x - ay - z &= 6 \\ (2a + 2)\, y + 5z &= -10 \end{aligned}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apartado 6 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -a & -1 & 6 \\ 0 & 2a+2 & 5 & -10 \end{array}\right) \underset{(1)}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2a-1 & -5 & 10 \\ 0 & 2a+2 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\underset{(2)}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2a-1 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $2 \cdot F2 - F1 \rightarrow F2$, (2): $(-2a-1)\,F3-(2a+2)\,F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{rr} 2x+y+3z= & 2 \\ (-2a-1)\,y-5z= & 10 \\ 5z= & -10 \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $z=-2$. Si hacemos la sustitución de este valor de $z=-2$ en la segunda ecuación y aislamos la y obtenemos $y=0$. Si sustituimos en la primera ecuación estos valores de $y=0$ y $z=-2$ se obtiene $x=4$.

Así pues, para $k=2a+2$ y $m=6$ la solución del sistema es: $\boxed{(x=4, y=0, z=-2)}$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz A en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener el valor $k=2a+1$: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente a $2a+1$ el sistema es compatible determinado: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k=2a+1$ y $m=6$ el sistema es compatible indeterminado: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k=2a+1$ y m diferente a 6 el sistema es incompatible: 0,5 puntos.

Apartado b

- Obtener la solución: 0,5 puntos.

3. Sean $v_1=(1,-2,0)$, $v_2=(-1,0,1)$, $v_3=(0,-2,1)$, $v_4=(-1,-4,3)$ y $v_5=(-6,4,4)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sea $E=<v_1,v_2,v_3,v_4,v_5>$. Sea $w=(5a-2,-14a,2a+2)$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP.

   a) Calculad la dimensión de E y una base A.

   b) ¿Pertenece w a E? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

   c) Sean $e_1=v_1+2v_2$ y $e_2=w$. $B=\{e_1,e_2\}$ es una base de E. Calculad las matrices de cambio de base de la base A a la base B y de la base B a la base A.

Solución

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rango\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Y vemos que es 2, ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y todos los menores 3×3 resultantes de orlar el menor anterior tienen determinante nulo. Como base podemos seleccionar $A = \{v_1, v_2\}$ ya que los dos vectores son de E y son linealmente independientes (contienen el menor no nulo anterior).

b) Para ver si w pertenece a E y calcular sus coordenadas en la base A en el caso de que sí pertenezca, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-2 \\ -14a \\ 2a+2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 7a$ y $y = 2a + 2$. Por tanto, $w \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(7a, 2a + 2)$.

c) Para calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A debemos expresar los vectores de la base B en función de los de la base A. Para el primer vector e_1 podemos obtener esta expresión directamente de su definición ($e_1 = v_1 + 2v_2$) y para el segundo vector $e_2 = w$, la hemos calculado en el apartado anterior.

Así, tenemos que la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B \to A} = \begin{pmatrix} 1 & 7a \\ 2 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base en la dirección contraria calculamos la inversa de la matriz anterior:

$$C_{A \to B} = C_{B \to A}^{-1} = \frac{1}{2-12a} \cdot \begin{pmatrix} 2+2a & -7a \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular la dimensión: 0,5 puntos.
- Dar una base: 0,25 puntos.
- Justificar por qué es base: 0,25 puntos.

Apartado b

- Ver que $w \in E$: 0,25 puntos.
- Calcular sus coordenadas: 0,25 puntos.

Apartado c

- Calcular $C_{B \to A}$: 0,5 puntos.
- Calcular $C_{A \to B}$: 0,5 puntos.

4. Sustituid, antes de hacer cálculos, el parámetro c por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, c+1, -1)$, $v = (0, -1, 1)$ y $w = (1, 0, c+1)$, escritos en la base canónica C.

   Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que cumple que: $f(u) = u$, $f(v) = -(c+1)v$ y $f(w) = -(c+1)w$.

   Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Comprobad que $B = \{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Calculad la matriz $M(f|B, B)$ que corresponde a la aplicación lineal f en la base B y la matriz $M(f|C, C)$ que corresponde a la aplicación lineal f en la base canónica $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

   b) Calculad la imagen en base B del vector $e = u + v - w$ por la aplicación f utilizando la matriz $M(f|B, B)$.

   c) Calculad la imagen en base C del vector $e = u + v - w$.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de c genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir c por su valor en los desarrollos que siguen.

a) Para demostrar que B es una base de $\mathbb{R}^3$ basta con ver que el determinante formato por los tres vectores es diferente de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c+1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & c+1 \end{vmatrix} = -(c+1) + (c+1) - 1 = -1$$

El determinante no es nulo y, por lo tanto, los tres vectores son linealmente independientes y forman base de $\mathbb{R}^3$.

Para construir la matriz de la aplicación f en la base B tenemos que poner en columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base B expresadas en la base B. Los vectores de la base B son u, v y w y sus imágenes se escriben en la propia base B como: $f(u) = u$ se escribe como $(1, 0, 0)$ $f(v) = -(c+1)v$ se escribe como $(0, -c-1, 0)$ $f(w) = -(c+1)w$ se escribe como $(0, 0, -c-1)$. Por lo tanto, la matriz de f base B es:

$$M(f|B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c-1 & 0 \\ 0 & 0 & -c-1 \end{pmatrix}$$

Para construir la matriz de f en la base canónica C tenemos que usar la matriz de cambio de base que podemos construir (como se ve en el apartado 6 del módulo “Aplicaciones lineales”) a partir de las coordenadas de los vectores de B en la base canónica que son las que proporciona el enunciado.

$$M(Id|B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c+1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & c+1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por esta matriz y por su inversa según la siguiente fórmula obtendremos la matriz que pide el enunciado. La inversa $M(Id|B,C)^{-1}$ se puede calcular con CalcMe o bien por el método de Gauss.

$$M(f|C,C) = M(Id|B,C) \cdot M(f|B,B) \cdot M(Id|B,C)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c+1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & c+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c-1 & 0 \\ 0 & 0 & -c-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c+1 & -1 & -1 \\ (c+1)^2 & -c-2 & -c-1 \\ -c & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} c^2+2c+1 & -c-2 & -c-2 \\ c^3+4c^2+5c+2 & -c^2-4c-3 & -c^2-3c-2 \\ -c^2-3c-2 & c+2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) El vector e expresado base B se escribe $(1,1,-1)$ porque estos son los coeficientes de la combinación lineal de vectores de la base $\{u,v,w\}$. La imagen de e por la aplicación f se calcula en esta base haciendo:

$$f(e) = M(f|B,B) \cdot e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c-1 & 0 \\ 0 & 0 & -c-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -c-1 \\ c+1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $f(e) = u-(c+1)v+(c+1)w$ y las coordenadas base B son $(1,-c-1,c+1)$.

c) El vector e expresado en base C se escribe: $u+v-w = (1,c+1,-1)+(0,-1,1)-(1,0,c+1) = (0,c,-c-1)$ La imagen de e por la aplicación f se puede calcular en esta base haciendo:

$$f(e|C) = M(f|C,C) \cdot (e|C)$$

$$\begin{pmatrix} c^2+2c+1 & -c-2 & -c-2 \\ c^3+4c^2+5c+2 & -c^2-4c-3 & -c^2-3c-2 \\ -c^2-3c-2 & c+2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -c-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -c^2-2c+c^2+2c+c+2 \\ -c^3-4c^2-3c+c^3+3c^2+2c+c^2+3c+2 \\ c^2+2c-c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+2 \\ 2c+2 \\ c^2+c-1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $f(e) = (c+2, 2c+2, c^2+c-1)$ en base C.

Sin tener la matriz $M(f|C,C)$, también se puede calcular esta imagen de e en base C usando la matriz de cambio de base y la imagen de e base B:

$$f(e|C) = M(Id|B,C) \cdot f(e|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c+1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & c+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -c-1 \\ c+1 \end{pmatrix}$$

$$f(e|C) = \begin{pmatrix} 1+c+1 \\ c+1+c+1 \\ -1-c-1+c^2+c+c+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+2 \\ 2c+2 \\ c^2+c-1 \end{pmatrix}$$

Este método es equivalente a observar que, por las propiedades de las aplicaciones lineales: $f(e) = f(u) + f(v) - f(w) = u - (c+1)v + (c+1)w$
$f(e) = (1, c+1, -1) - (c+1)(0, -1, 1) + (c+1)(1, 0, c+1)$
$f(e) = (1+c+1, c+1+c+1, (c+1)^2 - c - 2) = (c+2, 2c+2, c^2+c-1)$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Comprobar que B es base: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de f base B: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de cambio de base B a base C: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de cambio de base C a base B: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de f en base C: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular la imagen de e base B: 0,5 puntos.

Apartado c

- Calcular la imagen de e en base C: 0,5 puntos.