

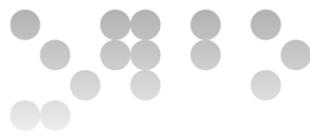
# Solución Examen 1

**2016-2017 Semestre 2**

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 10.06.2017



1. Responded a los siguientes apartados:

- Hallad el valor, o valores, de  $m$  para que el número complejo  $3 - mi$  tenga el mismo módulo que  $2\sqrt{5} + \sqrt{5}i$ .
- Hallad el módulo y el argumento de  $\sqrt{3} + i$

**Solución:**

- Siguiendo las directrices del apartado 3.4.1 del módulo impreso, página 30, "De la forma binómica a la forma polar", primero hallamos el módulo de los complejos:

$$\text{módulo } (3 - mi) = \sqrt{9 + m^2}$$

$$\text{módulo } (2\sqrt{5} + \sqrt{5}i) = \sqrt{4 \cdot 5 + 5} = 5$$

Ahora imponemos que sean iguales:

$$\sqrt{9 + m^2} = 5$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{9 + m^2})^2 = 5^2$$

$$9 + m^2 = 25 \rightarrow m^2 = 16 \rightarrow m = \pm 4$$

Por lo tanto, los valores de  $m$  son:

$$m = \pm 4$$

- Buscamos el módulo y el argumento del complejo  $\sqrt{3} + i$ . Para ello aplicamos las explicaciones del apartado 3.4, página 27, del material impreso.

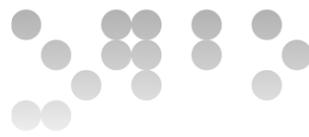
$$m = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

Ahora vamos a por el ángulo. Para esto utilizamos el ejemplo de la página 30 ("Ejemplo de cálculo de la arcotangente") del módulo impreso. El ángulo del complejo dado es:

$$\alpha = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$$



2. Sean  $A$  y  $B$  dos subespacios vectoriales de dimensión 2 de  $\mathbb{R}^3$  definidos de la siguiente forma:

$$A = \langle (a_1, a_2, a_3) \mid a_1 + a_2 = a_3 \rangle$$

$$B = \langle (b_1, b_2, b_3) \mid b_1 - b_2 = b_3 \rangle$$

Y sea  $v = (-3, 5, 2)$

- a) Comprobad que  $W = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  es una base de  $A$ . ¿Pertenece  $v$  a  $A$ ? En caso afirmativo calculad las coordenadas en la base anterior.
- b) Hallad una base de  $B$ . ¿Pertenece  $v$  a  $B$ ? En caso afirmativo calculad las coordenadas en la base que habéis encontrado. ¿Son  $A$  y  $B$  el mismo subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ ? Justificad la respuesta.

#### Solución:

- a) Como sabemos que la dimensión de  $A$  es 2, sólo es necesario mirar que los vectores de  $W$  pertenecen a  $A$  y que son linealmente independientes.

Primero de todo comprobamos que los vectores de  $W$  pertenecen a  $A$  comprobando que se cumple la condición  $a_1 + a_2 = a_3$  para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues  $W$  es una base de  $A$ .

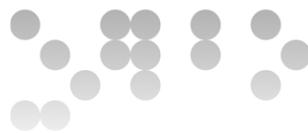
Para ver si  $v$  pertenece a  $A$  miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución  $x = -3$ ,  $y = 5$  y, por lo tanto,  $v$  pertenece a  $A$  y sus coordenadas en la base  $W$  son  $(-3, 5)$ .

- b) Podemos proponer como base de  $B$ :

$T = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ . De forma análoga a como hemos hecho en el apartado anterior podemos probar que es base:



Primero de todo comprobamos que los vectores de T pertenecen a B comprobando que se cumple la condición  $b_1-b_2=b_3$  para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues T es una base de B.

Para ver si v pertenece a B miramos si tiene solución el siguiente sistema: (también podríamos comprobar si cumple las condiciones).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que no tiene solución, y, por lo tanto v no pertenece a B.

Hemos visto que el vector v pertenece a A pero no a B por lo tanto A y B no son el mismo subespacio vectorial.

### 3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

donde  $k$  es un parámetro real.

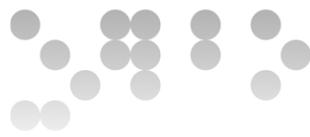
- a) Discutid el sistema según los valores de  $k$ .
- b) Resolved el sistema para el caso  $k = -2$ .

#### Solución:

- a) Hacemos Gauss tomando las variables en el orden dado  $x, y, z$ , obteniendo la matriz M y M' de los coeficientes y ampliada, respectivamente.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2 - 4 \end{array} \right)$$

Substituimos la segunda fila (F2) por F2-2·F1 y la tercera fila (F3) por F3-F1, donde F1 denota la primera fila. Tenemos:



$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 & k^2-4 \end{array} \right)$$

Ahora es suficiente intercambiar las columnas 2 y 3 para tener la matriz diagonalizada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & k^2-4 \end{array} \right)$$

y podemos pasar a la discusión:

- Para  $k \neq 2$  y  $k \neq -2$  tenemos  $\text{rang } M = \text{rang } MA = \text{núm. incog.} = 3$  y, por lo tanto, es un sistema compatible determinado.
- Para  $k = 2$  tenemos  $\text{rang } M = 2$  y  $\text{rang } MA = \text{núm. incog.} = 3$  y, por lo tanto, se trata de un sistema incompatible.
- Para  $k = -2$  tenemos  $\text{rang } M = \text{rang } MA = 2$  y, por lo tanto, es un sistema compatible indeterminado con  $3-2 = 1$  grados de libertad.

Nota: Análogamente, se puede discutir el rango de  $M$  a partir del determinante de la matriz.  $|M| = 4 - k^2$  o del menor una vez aplicado el primer paso de Gauss, con la igualdad  $\begin{vmatrix} 2 & k-2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ , que conduce igualmente a los valores  $k = 2$  y  $k = -2$ , para organizar la discusión.

- b) Ya hemos visto que para  $k = -2$  tenemos un sistema compatible indeterminado y, usando los cálculos del apartado anterior, sabemos que el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Eligiendo  $z$  como parámetro se obtiene  $y = 2z + \frac{1}{2}$  y  $x = y - z = z + \frac{1}{2}$  de donde la solución es:

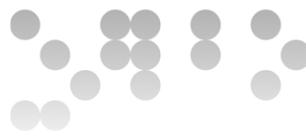
$$(x, y, z) = \left( z + \frac{1}{2}, 2z + \frac{1}{2}, z \right)$$

O alternativamente:

$$(x, y, z) = \left( x, 2x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \right)$$

o

$$(x, y, z) = \left( \frac{2y+1}{4}, y, \frac{2y-1}{4} \right)$$



4. Sea  $f$  la aplicación lineal de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  definida por

$$f(1,1,0) = (2,2,0), f(1,-1,1) = (2,-2,2), f(1,0,0) = (0,0,0).$$

- a) Demostrad que  $\{(1,1,0), (1,-1,1), (1,0,0)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Calculad una base del subespacio Imagen de  $f$ . ¿Es  $f$  exhaustiva?
- c) Calculad una base del subespacio  $Ker(f)$ , el núcleo de  $f$ . ¿Es  $f$  inyectiva?
- d) ¿Diagonaliza  $f$ ? Hallad la matriz de  $f$  en la base  $\{(1,1,0), (1,-1,1), (1,0,0)\}$ .

**Solución:**

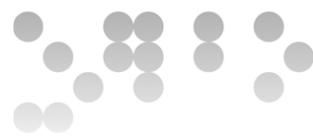
- a) Llamamos  $u=(1,1,0)$ ,  $v=(1,-1,1)$ ,  $w=(1,0,0)$ . El determinante de estos tres vectores es:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Como que es diferente de cero, los tres vectores  $u, v$  y  $w$  son linealmente independientes. Como que son tres vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^3$ , forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

- b) Para calcular el subespacio imagen es suficiente calcular la imagen de una base, o sea, la imagen de la base  $u, v, w$ :  $f(u)=(2,2,0)$ ,  $f(v)=(2,-2,2)$  y  $f(w)=(0,0,0)$ . Por lo tanto,  $Im(f)=\langle(2,2,0), (2,-2,2)\rangle$ . Es decir,  $(2,2,0)$ ,  $(2,-2,2)$  generan el subespacio imagen. Además, como que son linealmente independientes, son una base del subespacio  $Im(f)$ . La aplicación  $f$  no es exhaustiva, ya que la dimensión de la  $Im(f)$  es 2, mientras que el espacio de llegada (que es  $\mathbb{R}^3$ ) tiene dimensión 3 (ver Módulo 4, sección 4).
- c) Recordemos que la fórmula de la dimensión dice que  $\dim E = \dim Im(f) + \dim Nuc(f)$ . Como que  $E=\mathbb{R}^3$  y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del núcleo es 1. Por lo tanto, el núcleo está generado por un solo vector no nulo. Por otro lado,  $f(w)=0$ . Esto quiere decir que  $w$  es vector del núcleo. Concluimos que  $Nuc(f)=\langle(1,0,0)\rangle$ . En particular,  $f$  no es inyectiva, porque el núcleo es diferente de cero (ver Módulo 4, sección 5).
- d) Tenemos que  $f(u)=2u$ . O sea,  $u$  es vector propio de  $f$  de valor propio 2. Análogamente,  $f(v)=2v$  y  $v$  es vector propio de  $f$  de valor propio 2. Finalmente,  $f(w)=0$ . O sea,  $w$  es vector propio de  $f$  de valor propio 0. Por lo tanto,  $u, v, w$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  formada per VEPS de  $f$ . Esto quiere decir que  $f$  diagonaliza. De hecho, la matriz de  $f$  en esta base es:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



**NOTA:** En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar alguno/s de los siguientes valores:

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$360^\circ$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	0	$\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0