Álgebra

EXAMEN 2

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Sea $z = -4 - 4\sqrt{3}\, i$. Expresad z, z^{-1} y z^2 en forma exponencial. Trabajad con los ángulos en grados y en el intervalo $[0°, 360°)$.

   b) Sea $w = 16\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Obtened las cuatro raíces cuartas de w y expresadlas en forma exponencial. Expresad los argumentos en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución

a) Empecemos por expresar z en forma exponencial. El módulo es:

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 16 \cdot 3} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$$

El argumento es tal que:

$$\tan\theta = \frac{-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3}$$

El valor $\arctan(\sqrt{3})$ puede ser $60°$ o $240°$. En este caso, tanto la parte real como la imaginaria son negativas, por lo que estamos en el tercer cuadrante, es decir $\theta = 240°$.

En resumen:

$$\boxed{z = 8e^{i240°}}$$

Una vez tenemos la forma exponencial, calculamos las potencias (ver apartado 3.5.1 del módulo "Los números"). Así, obtenemos:

$$z^{-1} = (8e^{i240°})^{-1} = 8^{-1}e^{-i240°} = \frac{1}{8}e^{i120°}$$

$$z^2 = (8e^{i240°})^2 = 8^2e^{2i240°} = 64e^{i120°}$$

En resumen:

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{8}e^{i120°}}$$
$$\boxed{z^2 = 64e^{i120°}}$$

b) Empecemos por el módulo: si $x^4 = w$, entonces $|x|^4 = 16 \Rightarrow |x| = 16^{1/4} = 2$.
Sigamos ahora con los argumentos:

$$\arg(x_k) = \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{4} = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Por tanto, las cuatro raíces son:

$$x_k = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

De forma detallada:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = 2e^{i\frac{3\pi}{16}} \\ x_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{16}} \\ x_2 = 2e^{i\frac{19\pi}{16}} \\ x_3 = 2e^{i\frac{27\pi}{16}} \end{array}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Expresar z en forma exponencial: 0,25 puntos.
- Calcular z^{-1}: 0,5 puntos.
- Calcular z^2: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular el módulo de las raíces: 0,5 puntos.
- Calcular los argumentos de las raíces: 0,75 puntos.

2. Considerad la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k+3 & k+(a+2) \\ 2k & -k-3 & k+(a+2) \\ 2k & k+3 & k+(a+2) \end{pmatrix}$$

donde el parámetro a es **la primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Se pide:

a) Estudiad el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Determinad la posición relativa de los planos

$$\begin{array}{rrcl} \pi_1 : & (k+3)y + (k+(a+2))z & = & k+3, \\ \pi_2 : & 2kx - (k+3)y + (k+(a+2))z & = & k+3, \\ \pi_3 : & 2kx + (k+3)y + (k+(a+2))z & = & 3, \end{array}$$

según los valores de k (sustituyendo el parámetro a por **la primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC).

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

a) Dado que la matriz A es cuadrada de orden 3, estudiamos su rango utilizando que el rango es 3, solo si el determinante de la matriz es diferente de cero [ver apartado 4.5 del módulo “Elementos de álgebra lineal y geometría”].

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k+3 & k+(a+2) \\ 2k & -k-3 & k+(a+2) \\ 2k & k+3 & k+(a+2) \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2k\cdot(k+3)\cdot(k+(a+2))\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(1): Se ha aplicado la propiedad de extraer el factor común a todos los elementos de una columna [ver propiedad 5 del apartado 4.3 del módulo “Elementos de álgebra lineal y geometría”].

Así pues, obtenemos,

$$|A| = 2k\cdot(k+3)\cdot(k+(a+2))\cdot 4$$

En consecuencia,

- Si $k\neq 0$, $k\neq -3$ y $k\neq -(a+2)$ entonces, $\boxed{\mathrm{rg}(A)=3}$.
- Si $k=0$, entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & a+2 \\ 0 & -3 & a+2 \\ 0 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\boxed{\mathrm{rg}(A)=2}$, puesto que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 3 & a+2 \\ -3 & a+2 \end{vmatrix} = 6a+12\neq 0$.
- Si $k=-3$, entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ -6 & 0 & a-1 \\ -6 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que
  - Si $a\neq 1$, $\boxed{\mathrm{rg}(A)=2}$, puesto que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 0 & a-1 \\ -6 & a-1 \end{vmatrix} = 6a-6\neq 0$.
  - Si $a=1$, $\boxed{\mathrm{rg}(A)=1}$, puesto que $|A|=0$ y todos los menores de orden 2 son nulos.
- Si $k=-(a+2)$, entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & -a+1 & 0 \\ -2(a+2) & a-1 & 0 \\ -2(a+2) & -a+1 & 0 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que
  - Si $a\neq 1$, $\boxed{\mathrm{rg}(A)=2}$, puesto que $|A|=0$ y existe un menor de orden dos no nulo, $\begin{vmatrix} 0 & -a+1 \\ -2(a+2) & a-1 \end{vmatrix} = 2(a+2)(-a+1)\neq 0$.
  - Si $a=1$, $\boxed{\mathrm{rg}(A)=1}$, puesto que $|A|=0$ y todos los menores de orden 2 son nulos.

b) Recordemos que, el estudio de la posición relativa de tres planos se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema, formado por las tres ecuaciones que definen estos planos [ver apartado 8 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”].

$$\left.\begin{array}{rcl} (k+3)y+(k+(a+2))z &=& k+3 \\ 2kx-(k+3)y+(k+(a+2))z &=& k+3 \\ 2kx+(k+3)y+(k+(a+2))z &=& 3 \end{array}\right\}$$

Para discutirlo utilizaremos el teorema de Rouché-Fröbenius [ver apartado 4 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & k+3 & k+(a+2) \\ 2k & -k-3 & k+(a+2) \\ 2k & k+3 & k+(a+2) \end{pmatrix} \quad M=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & k+3 & k+(a+2) & k+3 \\ 2k & -k-3 & k+(a+2) & k+3 \\ 2k & k+3 & k+(a+2) & 3 \end{array}\right)$$

Utilizando el estudio del rango de la matriz A, del apartado anterior, tenemos que:

- Si $k\neq 0$, $k\neq -3$ y $k\neq -(a+2)$ $\rightarrow$ $\mathrm{rg}(A)=3=\mathrm{rg}(M)=$ n° incógnitas y el sistema es compatible determinado. Por lo tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{los tres planos se cortan en un único punto}}$.
- Si $k=0$, entonces

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & a+2 \\ 0 & -3 & a+2 \\ 0 & 3 & a+2 \end{pmatrix} \qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & (a+2) & 3 \\ 0 & -3 & (a+2) & 3 \\ 0 & 3 & (a+2) & 3 \end{array}\right)$$

  y podemos afirmar que $\mathrm{rg}(M)=2$ dado que todos sus menores de orden tres son nulos. Así pues, tenemos $\mathrm{rg}(A)=2=\mathrm{rg}(M)\neq$ n° incógnitas y el sistema es compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1. Por lo tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{los tres planos se cortan en una recta}}$.
- Si $k=-3$, entonces

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ -6 & 0 & a-1 \\ -6 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & a-1 & 0 \\ -6 & 0 & a-1 & 0 \\ -6 & 0 & a-1 & 3 \end{array}\right)$$

  y podemos afirmar que
  - Si $a\neq 1$, $\mathrm{rg}(M)=3$, puesto que $\begin{vmatrix} 0 & a-1 & 0 \\ -6 & a-1 & 0 \\ -6 & a-1 & 3 \end{vmatrix}=18a-18\neq 0$. Así pues, tenemos $\mathrm{rg}(A)=2\neq\mathrm{rg}(M)=3$ y el sistema es incompatible. Por lo tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{los tres planos no tienen ningún punto en común}}$.
  - Si $a=1$, $\mathrm{rg}(A)=1\neq\mathrm{rg}(M)=2$, dado que la matriz M tiene el menor $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}=-18\neq 0$. Obteniendo que el sistema es incompatible. Por lo tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{no existe ningún punto común a los tres planos}}$.

- Si $k=-(a+2)$, entonces

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -a+1 & 0 \\ -2(a+2) & a-1 & 0 \\ -2(a+2) & -a+1 & 0 \end{pmatrix} \quad M=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -a+1 & 0 & -a+1 \\ -2(a+2) & a-1 & 0 & -a+1 \\ -2(a+2) & -a+1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

y notemos que el único menor de M que puede ser no nulo es:

$$\begin{vmatrix} 0 & -a+1 & -a+1 \\ -2(a+2) & a-1 & -a+1 \\ -2(a+2) & -a+1 & 3 \end{vmatrix} = -6a\cdot(a-1)\cdot(a+2).$$

podemos afirmar que

  - Si $a\neq 0$ y $a\neq 1$, tenemos $\text{rg}(A)=2\neq\text{rg}(M)=3$ y podemos afirmar que el sistema es incompatible. Por lo tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{no existe ningún punto común a los tres planos}}$.
  - Si $a=0$, tenemos $\text{rg}(A)=2=\text{rg}(M)\neq$ n° incógnitas. Así pues, el sistema es compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1. Por lo tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{los tres planos se cortan en una recta}}$.
  - Si $a=1$, tenemos que

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$\text{rg}(A)=1\neq\text{rg}(M)=2$, dado que la matriz M tiene el menor $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -18\neq 0$. Obteniendo que el sistema es incompatible. Por lo tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{no existe ningún punto común a los tres planos}}$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Obtener los valores $k=0$, $k=-3$ y $k=-(a+2)$: 0,25 puntos.
- Determinar el rango de A para k diferente de 0, -3 y $-(a+2)$: 0,25 puntos.
- Determinar el rango de A para $k=0$: 0,25 puntos.
- Determinar el rango de A para $k=-3$: 0,25 puntos.
- Determinar el rango de A para $k=-(a+2)$: 0,25 puntos.

Apartado b

- Plantear el estudio de la posición relativa de los tres planos a partir de la discusión de compatibilidad del sistema formado por las tres ecuaciones que definen dichos planos: 0,25 puntos.
- Determinar la posición relativa de los tres planos para k diferente de 0, -3 y $-(a+2)$: 0,25 puntos.
- Determinar la posición relativa de los tres planos para $k=0$: 0,25 puntos.

- Determinar la posición relativa de los tres planos para $k = -3$: 0,25 puntos.
- Determinar la posición relativa de los tres planos para $k = -(a+2)$: 0,25 puntos.

3. Sean $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,0)$ y $v_3 = (3,2,3,0)$ vectores de $\mathbb{R}^4$. Sea $E =< v_1, v_2, v_3 >$. Sea $w = (2a+3, a+2, 2a+3, 0)$ donde a es la tercera cifra de la derecha de tu IDP.

   a) Calculad la dimensión de E y una base A formada exclusivamente por vectores del conjunto generador original.
   b) ¿Pertenece w a E? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.
   c) A partir de la base A construid una base ortonormal de E utilizando el método de Gram-Schmidt.

Solución

a) Estudiemos el rango de la matriz formada por los generadores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1, F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 2. Así pues, el tercer vector es combinación lineal de los dos primeros y por tanto, $\dim(E) = 2$.
El enunciado nos pide una base formada únicamente por vectores del conjunto original. Como las filas 1 y 2 (que corresponden a v_1 y v_2 originales antes de las operaciones) son independientes, escogemos estos dos vectores para la base $A = \{v_1, v_2\} = \{(1,0,1,0), (1,1,1,0)\}$

b) Para ver si $w \in E$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3 \\ a+2 \\ 2a+3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a+1$ y $y = a+2$. Por tanto $w \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a+1, a+2)$.

c) Partimos de la base $A = \{v_1, v_2\}$, donde $v_1 = (1,0,1,0)$ y $v_2 = (1,1,1,0)$ y aplicamos el método de Gram-Schmidt en dos fases: primero ortogonalizamos y después normalizamos. Vamos a ortogonalizar:

- Primer vector: El primer vector se mantiene igual que en la base original.

$$g_1 = v_1 = (1,0,1,0)$$

- Segundo vector: Lo calculamos restando su proyección sobre el primero. La fórmula es:

$$g_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot g_1}{g_1 \cdot g_1} g_1$$

Primero, calculamos los productos escalares necesarios por separado:
$v_2 \cdot g_1 = (1)(1) + (1)(0) + (1)(1) + (0)(0) = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$
$v_1 \cdot g_1 = (1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 2$

Y substituimos estos valores en la fórmula:
$g_2 = (1, 1, 1, 0) - \frac{2}{2}(1, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0) - (1, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0)$

Así la base ortogonal obtenida es $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$.
Para normalizar dividimos cada vector por su norma (módulo) para obtener los vectores unitarios:

- Normalización de g_1: Calculamos la norma: $\|g_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.

$$e_1 = \frac{1}{\|g_1\|}\vec{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

- Normalización de g_2: Calculamos la norma: $\|g_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$.

$$e_2 = \frac{1}{\|g_2\|}\vec{g}_2 = \frac{1}{1}(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$$

Por tanto la base ortonormal es:

$$B = \{e_1, e_2\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, 1, 0, 0)\right\}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular dimensión: 0,5 puntos.
- Escoger vectores y justificar que son base: 0,25 puntos.

Apartado b

- Ver que $w \in F$: 0,25 puntos.
- Calcular las coordenadas: 0,5 puntos.

Apartado c

- Calcular base ortogonal 0,75 puntos.
- Normalizar los vectores: 0,25 puntos.

4. Sustituid, antes de hacer ningún cálculo, el parámetro c por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:

$$M(f|C, C) = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ c+1 & a & d \\ 0 & a & -2 \end{pmatrix}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal y $M(f|C, C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$ y a, b y d son parámetros reales.

Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Calculad una base del núcleo de la aplicación f en el caso $a = 0$, decid cuál es la dimensión del núcleo y determinad la dimensión de la imagen de f.

b) Si $a \neq 0$, ¿qué deben cumplir los parámetros b y d para que el núcleo de f no sea nulo?

c) En el caso $a = 0$, encontrad un vector propio de f de valor propio -1.

d) En el caso $a = 0$, decid cuáles son los tres valores propios de la aplicación f.

Solución

Se resuelven los apartados para un valor de c genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir c por su valor en los desarrollos que siguen.

a) El núcleo de f se obtiene resolviendo el sistema $M(f|C,C) \cdot w = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ c+1 & 0 & d \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta expresión se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x + bz &= 0 \\ (c+1)x + dz &= 0 \\ -2z &= 0 \end{aligned}$$

La solución inmediata de la tercera ecuación, $-2z = 0$, es $z = 0$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación $-x + bz = 0$ obtenemos $-x = 0$ y, por tanto, $x = 0$. La segunda ecuación $(c+1)x + dz = 0$ también se cumple para estos valores $x = 0$ y $z = 0$. Por tanto, el núcleo de f está formado por vectores de la forma $(0, y, 0)$, tiene dimensión 1 y una base es $\{(0, 1, 0)\}$. Por el Teorema de la dimensión del punto 4. “Núcleo e imagen de una aplicación lineal” del módulo “Aplicaciones lineales”, la imagen tendrá dimensión 2, ya que la suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen debe ser la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$ que es 3.

b) El núcleo será no nulo si el determinante de la matriz M asociada a la aplicación lineal f es nulo:

$$|M(f|C,C)| = \begin{vmatrix} -1 & a & b \\ c+1 & a & d \\ 0 & a & -2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} -1 & 1 & b \\ c+1 & 1 & d \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = a(2 + b(c+1) + d + 2(c+1))$$

Para que esta expresión sea 0 cuando $a \neq 0$ es necesario que el segundo factor sea 0: $2 + b(c+1) + d + 2(c+1) = 0$. Es necesario entonces que $d = -(c+1)b - 2c - 4$ para que el núcleo no sea nulo.

c) Para calcular un VEP de VAP -1 hay que buscar una base del $Ker(f + \mathrm{I})$. Es decir, resolver el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} -1+1 & 0 & b \\ c+1 & 1 & d \\ 0 & 0 & -2+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la ecuación correspondiente a la tercera fila, que es $-z = 0$, se obtiene que $z = 0$. Para este valor de z, la primera ecuación $bz = 0$ también se cumple, sin que el valor de b afecte a este resultado. De la segunda ecuación $(c+1)x + y = 0$, se obtiene $y = -(c+1)x$ y, por tanto, las soluciones son de la forma $(x, (-c-1)x, 0)$ y el vector propio que se pide puede ser el $(1, -c-1, 0)$.

d) Los VAPs de f son las soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$, donde p es el polinomio característico de f, que se define como: $p(\lambda) = |M(f|C, C) - \lambda \mathrm{I}|$ en el punto "7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales". Desarrollando el determinante por Sarrus, obtenemos:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & b \\ c+1 & -\lambda & d \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$$

Los tres VAPS de f son 0, -1 y -2, porque su polinomio característico tiene estos tres valores como soluciones. El 0 y el -1 ya se podían deducir de los apartados anteriores.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular la base del núcleo: 0,5 puntos.
- Calcular las dimensiones del núcleo y la imagen: 0,25 puntos.

Apartado b

- Plantear la ecuación con el determinante igualado a 0: 0,25 puntos.
- Encontrar la relación entre b y d que hace que se cumpla la condición: 0,25 puntos.

Apartado c

- Plantear el sistema para el cálculo del VEP de VAP -1: 0,25 puntos.
- Resolver el sistema y escribir el VEP de VAP -1: 0,5 puntos.

Apartado d

- Escribir el polinomio característico: 0,25 puntos.
- Dar los tres valores propios justificando que son los valores que lo hacen 0: 0,25 puntos.