

ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN

12 de enero 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

- Expresad el cociente $\frac{4+2i}{i}$ en forma binómica.
- Hallad todas las soluciones de la raíz siguiente: $\sqrt[6]{729i}$. Proporcionad el resultado en forma polar.

Resolución:

- Debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria; recordemos que $i^2 = -1$:

$$\frac{4+2i}{i} = \frac{(4+2i) \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-4i - 2i^2}{-i^2} = \frac{-4i + 2}{1} = -4i + 2$$

Por tanto, la respuesta es:

$$\frac{4+2i}{i} = -4i + 2$$

- Escribimos el complejo $z = 729i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

$$r = \sqrt{729^2} = 729$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{729}{0}\right) = \arctg\infty = 90^\circ$$

Tenemos, por tanto, que $729i = 729_{90^\circ}$.

Como nos piden las raíces sextas debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{729_{90^\circ}} = \sqrt[6]{729_{\frac{90^\circ + 360^\circ k}{6}}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \frac{90^\circ + 360^\circ k}{6}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

- Si $k=0$, tenemos que $\beta_0 = 15^\circ$
- Si $k=1$, tenemos que $\beta_1 = 15^\circ + 60^\circ = 75^\circ$
- Si $k=2$, tenemos que $\beta_2 = 15^\circ + 120^\circ = 135^\circ$
- Si $k=3$, tenemos que $\beta_3 = 15^\circ + 180^\circ = 195^\circ$
- Si $k=4$, tenemos que $\beta_4 = 15^\circ + 240^\circ = 255^\circ$
- Si $k=5$, tenemos que $\beta_5 = 15^\circ + 300^\circ = 315^\circ$

Por tanto, las seis raíces del complejo $z = 729i$ son:

$$3_{15^\circ}$$

$$3_{75^\circ}$$

$$3_{135^\circ}$$

$$3_{195^\circ}$$

$$3_{255^\circ}$$

$$3_{315^\circ}$$

2. Sean $e_1 = (0,0,1)$, $e_2 = (-1,1,3)$, $e_3 = (2,-2,5)$ vectores de \mathbb{R}^3 .

Sea $E = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. Sea $v = (4, -4, -2)$.

- Calculad la dimensión de E y una base A . ¿Pertenece v a E ? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A .
- Sean $w_1 = 2 \cdot e_1 + e_2$, $w_2 = 5 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2$. $B = \{w_1, w_2\}$ es una base de E . Calculad la matriz de cambio de base de B a A . ¿Cuáles son las coordenadas de v en la base B ?

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores, ya que son linealmente independientes: contienen el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$

Así pues, $A = \{e_1, e_2\}$.

Para ver si v pertenece a E resolvemos el sistema:
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: $x=10$, $y=-4$. Por tanto, v pertenece a E, y sus coordenadas en la base A son (10, -4).

b) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A. Y así es justamente como tenemos definida la base B. De manera que la matriz de cambio de base de B a A será directamente:

$$C_{B \rightarrow A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para calcular las coordenadas de v en la base B, podemos extraer de las coordenadas calculadas en el apartado anterior y de la definición de w_2 , que es directamente $2 \cdot w_2$ y por tanto sus coordenadas en B serán (0,2).

Nota 1: Alternativamente podemos solucionar el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Nota 2: Alternativamente también podemos calcular la matriz de cambio de base de A a B (inversa de la matriz de cambio de base de B a A) y aplicarla a las coordenadas (10,-4).

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 5x + (a-1)y - z = -1 \\ 3x + y + (a-2)z = 2a-1 \end{cases}$$

- Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
- Resolved el sistema para $a = 2$.

Resolución:

- Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página13].

La matriz de coeficientes, A , y la matriz ampliada, M , asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & a-1 & -1 \\ 3 & 1 & a-2 \end{pmatrix} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & a-1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & a-2 & 2a-1 \end{array} \right)$$

Como que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A , porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & a-1 & -1 \\ 3 & 1 & a-2 \end{vmatrix} = a^2 - 10a + 9 = (a-1)(a-9)$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 9 \rightarrow \text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(M) = \text{n}^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow$
S. Comp. Determinado.
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rango}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculemos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rango}(M) = 2 \rightarrow \text{S. Comp. Indeterminado}.$$

- Si $a = 9 \rightarrow \text{rango}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = 9$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 17 \end{vmatrix} = -96 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(M) = 3 \rightarrow \text{S. Incompatible}.$$

- b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 2$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{(1)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & 4 & -16 \\ 0 & -5 & 3 & -6 \end{array}\right) \underset{(2)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & 7 & 26 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: $F_2 = F_2 - 5 \cdot F_1$ y $F_3 = F_3 - 3 \cdot F_1$.

(2) Operaciones: $F_3 = 9 \cdot F_3 - 5 \cdot F_2$.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -9y + 4z = -16 \\ 7z = 26 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -9y + 4z = -16 \\ z = 26/7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y = 24/7 \\ z = 26/7 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -1/7 \\ y = 24/7 \\ z = 26/7 \end{cases}$$

4. Sea f la aplicación lineal de \mathbb{R}^4 en \mathbb{R}^4 definida por:

$$f(x, y, z, t) = (x + 5t, y + 2z, 2y + z, 5x + t).$$

- Encontrad la matriz de f en las bases canónicas.
- Calculad el polinomio característico de f y los valores propios de f .
- Estudiad si f diagonaliza.
- Encontrad una base de \mathbb{R}^4 con el número máximo de vectores propios de f .

Resolución:

- a) $f(1,0,0,0)=(1,0,0,5)$, $f(0,1,0,0)=(0,1,2,0)$, $f(0,0,1,0)=(0,2,1,0)$ y $f(0,0,0,1)=(5,0,0,1)$.
Estos vectores imagen están expresados en la base canónica. Por lo tanto, por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Recordemos en el Módulo 4, Sección 7, la definición de polinomio característico de f .

$$Q(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1-t & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}.$$

Sumando a la primera columna la cuarta y sumando a la segunda columna la tercera nos queda:

$$Q(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 6-t & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3-t & 2 & 0 \\ 0 & 3-t & 1-t & 0 \\ 6-t & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}.$$

Sacando factor común (6-t) de la primera columna y (3-t) de la segunda columna, nos queda:

$$Q(t) = (6-t)(3-t) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}.$$

Ahora a la cuarta fila le restamos la primera y a la tercera fila le restamos la segunda. Después desarrollamos por la primera columna cuatro veces. Nos queda:

$$\begin{aligned} Q(t) &= (6-t)(3-t) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4-t \end{pmatrix} \\ &= (6-t)(3-t)(-1-t)(-4-t). \end{aligned}$$

Las raíces son -4, -1, 3 y 6 con multiplicidad algebraica 1 (ver Módulo 4, Sección 8.1).

Los valores propios de f son el -4,-1,3, y 6 con multiplicidad algebraica 1.

- c) Puesto que f tiene cuatro valores propios diferentes, entonces podemos asegurar que diagonaliza. (Ver Módulo 4, sección 8).

La aplicación f diagonaliza porque tiene cuatro valores propios diferentes. Alternativamente, f diagonaliza porque la matriz de f en la base canónica es simétrica.

- d) Usemos ahora el Módulo 4, Sección 7, para encontrar los vectores propios de f. Encontremos vectores propios de f de valor propio -4. Es decir, busquemos el núcleo de la matriz $A - (-4)I$. O sea, resolvamos el sistema $(A + 4I)X = 0$:

$$(A + 4I)X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema $5x+5t=0$, $5y+2z=0$, $2y+5z=0$. Es decir, $t=-x$, $y=0$ y $z=0$. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: $(x,y,z,t)=(x,0,0,-x)=x(1,0,0,-1)$. En particular, $(1,0,0,-1)$ es vector propio de f de valor propio -4.

Ahora encontremos vectores propios de f de valor propio -1 . O sea, busquemos el núcleo de $A - (-1)I$. Resolvamos pues el sistema $(A + I)X = 0$:

$$(A + I)X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema $2x + 5t = 0$, $y + z = 0$, $5x + 2t = 0$. Es decir, $x = 0$, $z = -y$, $t = 0$. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: $(x, y, z, t) = (0, y, -y, 0) = y(0, 1, -1, 0)$. En particular, $(0, 1, -1, 0)$ es vector propio de f de valor propio -1 .

Ahora encontremos vectores propios de f de valor propio 3 . Es decir, busquemos el núcleo de $A - 3I$. O sea, resolvamos el sistema $(A - 3I)X = 0$:

$$(A - 3I)X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema $-2x + 5t = 0$, $-y + z = 0$, $5x - 2t = 0$. Es decir, $x = 0$, $z = y$, $t = 0$. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: $(x, y, z, t) = (0, y, y, 0) = y(0, 1, 1, 0)$. En particular, $(0, 1, 1, 0)$ es vector propio de f de valor propio 3 .

Ahora encontremos vectores propios de f de valor propio 6 . Es decir, busquemos el núcleo de $A - 6I$. O sea, resolvamos el sistema $(A - 6I)X = 0$:

$$(A - 6I)X = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema $-5x + 5t = 0$, $-5y + 2z = 0$, $2y - 5z = 0$. Es decir, $t = x$, $y = 0$, $z = 0$. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: $(x, y, z, t) = (x, 0, 0, x) = x(1, 0, 0, 1)$. En particular, $(1, 0, 0, 1)$ es vector propio de f de valor propio 6 .

$(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, -1, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$ es una base de \mathbb{R}^4 formada por vectores propios de f .

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0°	30°	45°	60°	90°	105°	180°	270°	285°	300°	330°	345°
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$	-1	0	$-\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$	0	$-\infty$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$