EXAMEN 3

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Sean $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = -3 + 4i$. Calculad $z_1 - z_2$ y expresad el resultado en forma polar, indicando el argumento en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$.

   b) Sea $z = -27i$. Expresad z en forma polar y calculad todas las raíces cúbicas de z en forma polar, dando los argumentos en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$. Calculad la octava potencia de la primera raíz.

Solución

a) Calculamos la resta pedida:

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (-3 + 4i) = 2 + i + 3 - 4i = 5 - 3i$$

Ahora determinamos la forma polar de $5 - 3i$. Módulo:

$$|5 - 3i| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

Argumento:

$$\tan\theta = \frac{-3}{5} = -0{,}6$$

Como la parte real es positiva y la imaginaria negativa, el número está en el cuarto cuadrante, por lo que el argumento es $\theta = \arctan(-0{,}6)$. Podemos darlo en radianes:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 5{,}743 \text{ rad}$$

Por tanto:

$$\boxed{z_1 - z_2 = \sqrt{34}_{5{,}743}}$$

b) Aquí tenemos que la parte real es nula y la parte imaginaria es negativa. El módulo es fácil de calcular e igual a 27. Además, en este caso, también se puede determinar que el argumento es $\frac{3\pi}{2}$. Así, en forma polar:

$$z = 27_{\frac{3\pi}{2}}$$

En cuanto al cálculo de las raíces cúbicas, tenemos que: si $x^3 = z$, entonces $|x|^3 = 27 \Rightarrow |x| = 3$.
Los argumentos son:

$$\arg(x_k) = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} k = 0: &\quad \arg(x_0) = \frac{\pi}{2} \\ k = 1: &\quad \arg(x_1) = \frac{7\pi}{6} \\ k = 2: &\quad \arg(x_2) = \frac{11\pi}{6} \end{aligned}$$

En resumen, las tres raíces (en forma polar) son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = 3_{\frac{\pi}{2}} \\ x_1 = 3_{\frac{7\pi}{6}} \\ x_2 = 3_{\frac{11\pi}{6}} \end{array}}$$

Finalmente calculamos la octava potencia de la primera raíz. Para ello, expresamos la raíz en forma exponencial y calculamos su potencia (ver apartado 3.5.1 del módulo "Los números"):

$$x_0^8 = (3e^{i\frac{\pi}{2}})^8 = 3^8 e^{8i\frac{\pi}{2}} = 6561 e^{i4\pi} = 6561 e^{i0}$$

En resumen:

$$\boxed{x_0^8 = 6561}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular la resta: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo: 0,25 puntos.
- Calcular el argumento: 0,25 puntos.
- Expresarlo en forma polar: 0,25 puntos.

Apartado b

- Expresar z en forma polar: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Calcular los argumentos de las raíces: 0,75 puntos.
- Calcular la octava potencia: 0,25 puntos.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl}(a+3)x+(a+1)y+z & = & 1\\ x+(a+1)y-z & = & 3\end{array}\right\}$$

donde el parámetro a es **la primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Se pide:

a) Determinad los valores de k y m de forma que, al añadir al sistema anterior una tercera ecuación de la forma

$$-ax+(2a+2)y+kz=m,$$

el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema inicial.

b) Determinad la solución del sistema dado, tal que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a **la primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

a) El sistema dado inicialmente:

$$\left.\begin{array}{rcl}(a+3)x+(a+1)y+z & = & 1\\ x+(a+1)y-z & = & 3\end{array}\right\}$$

tiene como matriz de coeficientes y como matriz ampliada las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} a+3 & a+1 & 1\\ 1 & a+1 & -1\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a+3 & a+1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & -1 & 3\end{array}\right)$$

Observemos que el menor de orden dos que se obtiene considerando la primera y la tercera columna siempre es diferente de cero: $\begin{vmatrix} a+3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -a-4 \neq 0$. Así pues, podemos afirmar que el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada coinciden y son iguales a 2. Dado que el número de incógnitas del sistema es 3, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius [ver apuntes apartado 4 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"] podemos afirmar que el sistema dado es compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1.

A continuación consideramos el sistema resultante de añadir, al sistema anterior, una tercera ecuación de la forma $-ax+(2a+2)y+kz=m$, es decir:

$$\left.\begin{array}{rcl}(a+3)x+(a+1)y+z & = & 1\\ x+(a+1)y-z & = & 3\\ -ax+(2a+2)y+kz & = & m\end{array}\right\}$$

que tiene como matriz de coeficientes, A, y como matriz ampliada, M, las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a+3 & a+1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -a & 2a+2 & k \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} a+3 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & 3 \\ -a & 2a+2 & k & m \end{array}\right)$$

Si queremos que este nuevo sistema tenga las mismas soluciones que el sistema inicial, tendremos que buscar los valores de k y m que hacen que el sistema sea compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1.

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes A, considerando su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+3 & a+1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -a & 2a+2 & k \end{vmatrix} = (a+1)\cdot(k(a+2)+4(a+2))$$

Notemos que si $k=-4$, entonces $\mathrm{rg}(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y el menor $\begin{vmatrix} a+3 & a+1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)\cdot(a+2) \neq 0$, dado que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9.

Si calculamos el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes

$$\begin{vmatrix} a+3 & a+1 & 1 \\ 1 & a+1 & 3 \\ -a & 2a+2 & m \end{vmatrix} = (a+1)\cdot(m(a+2)-8(a+2))$$

tenemos que para $m=8$ este menor se anula y, por lo tanto, se verifica que $\mathrm{rg}(M)=2$.

Así pues, si $k=-4$ y $m=8$ se verifica que $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(A)=2 \neq$ n° incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1, obteniendo que este sistema de tres ecuaciones y el sistema de dos ecuaciones dado inicialmente tienen las mismas soluciones.

b) Este apartado se puede resolver de varias formas. Por ejemplo, una manera es solucionar directamente el sistema de tres ecuaciones formado por las dos ecuaciones iniciales, añadiendo como tercera ecuación la ecuación $x+y+z=a$ que es la que se corresponde con la afirmación dada de que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ (a+3)x+(a+1)y+z & = & 1 \\ x+(a+1)y-z & = & 3 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [ver apartado 6 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a+3 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -a-2 & -a^2-3a+1 \\ 0 & a & -2 & 3-a \end{array}\right)$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -a-2 & -a^2-3a+1 \\ 0 & 0 & -a^2-2a-4 & -a^3-3a^2-a+6 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2-(a+3)\cdot F1 \to F2$, $F3-F1 \to F3$ (2): $2\cdot F3+a\cdot F2 \to F3$.
El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& a \\ -2y-(a+2)\,z &=& -a^2-3a+1 \\ -\left(a^2+2a+4\right)z &=& -\left(a^3+3a^2+a-6\right) \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $z=\frac{a^3+3a^2+a-6}{a^2+2a+4}$. Si hacemos la sustitución de este valor de z en la segunda ecuación y despejamos la y obtenemos $y=\frac{a^2+7a+4}{a^2+2a+4}$. Si sustituimos en la primera ecuación estos valores de y y z se obtiene $x=\frac{-2(a^2+2a-1)}{a^2+2a+4}$.
Otra manera de proceder es resolver el sistema de dos ecuaciones dado inicialmente

$$\left.\begin{array}{rcl} (a+3)x+(a+1)y+z &=& 1 \\ x+(a+1)y-z &=& 3 \end{array}\right\} \to \left(x=x,\ y=\frac{-(a+4)x+4}{2(a+1)},\ z=\frac{-(a+2)x-2}{2}\right)$$

y a continuación imponemos que $x+y+z=a$, es decir:

$$x+\frac{-(a+4)x+4}{2(a+1)}+\frac{-(a+2)x-2}{2}=a \qquad \to \qquad x=\frac{-2(a^2+2a-1)}{a^2+2a+4}$$

y sustituyendo este valor de x en las soluciones anteriores, se obtiene la solución que se pide:

$$\left(x=\frac{-2(a^2+2a-1)}{a^2+2a+4},\ y=\frac{a^2+7a+4}{a^2+2a+4},\ z=\frac{a^3+3a^2+a-6}{a^2+2a+4}\right).$$

Así pues, la solución de este sistema, en función de los diferentes valores del parámetro a, es:

	$x=\frac{-2(a^2+2a-1)}{a^2+2a+4}$,	$y=\frac{a^2+7a+4}{a^2+2a+4}$,	$z=\frac{a^3+3a^2+a-6}{a^2+2a+4}$
Si $a=0$	$x=1/2$	$y=1$	$z=-3/2$
Si $a=1$	$x=-4/7$	$y=12/7$	$z=-1/7$
Si $a=2$	$x=-7/6$	$y=11/6$	$z=4/3$
Si $a=3$	$x=-28/19$	$y=34/19$	$z=51/19$
Si $a=4$	$x=-23/14$	$y=12/7$	$z=55/14$
Si $a=5$	$x=-68/39$	$y=64/39$	$z=199/39$
Si $a=6$	$x=-47/26$	$y=41/26$	$z=81/13$
Si $a=7$	$x=-124/67$	$y=102/67$	$z=491/67$
Si $a=8$	$x=-79/42$	$y=31/21$	$z=353/42$
Si $a=9$	$x=-196/103$	$y=148/103$	$z=975/103$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Determinar que el sistema inicial de dos ecuaciones es compatible indeterminado: 0,25 puntos.
- Determinar el valor de $k = -4$: 0,5 puntos.
- Determinar el valor de $m = 8$: 0,5 puntos.

Apartado b

- Plantear la ecuación $x + y + z = a$: 0,25 puntos.
- Encontrar la solución del sistema: 1 punto.

3. Sean E y F dos subespacios vectoriales de dimensión 2 de $\mathbb{R}^5$ definidos de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5 | a_1 = a_4, a_3 = a_5, a_2 = 0\}$$
$$F = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{R}^5 | b_1 = b_3, b_2 = b_5, b_4 = 0\}$$

Y sea $w = (a + 3, 0, a + 2, a + 3, a + 2)$ donde a es la tercera cifra de la derecha de tu IDP.

a) Comprobad que $A = \{(1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1)\}$ es una base de E.

b) ¿$w \in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

c) Calculad una base de F. ¿Pertenece w a F? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base que habéis encontrado. ¿Generan E y F el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$? Justificad la respuesta.

Solución

a) Como sabemos que la dimensión de E es 2, sólo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobamos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumplen las condiciones $a_1 = a_4$, $a_3 = a_5$ y $a_2 = 0$ para los dos vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes, ja que la matriz cuyas filas estan formadas por los vectores de A contiene el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues A es una base de E.

b) Para ver si $w \in E$ podemos ver que cumple las condiciones $a_1 = a_4$, $a_3 = a_5$ y $a_2 = 0$, o alternativamente miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 \\ 0 \\ a+2 \\ a+3 \\ a+2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a + 3$, $y = a + 2$. Por tanto $w \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a + 3, a + 2)$.

c) Podemos proponer como base de F: $B = \{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1)\}$ y de forma análoga a como hemos hecho antes podemos probar que es base:
Primero comprobamos que los vectores de B pertenecen a F comprobando que se cumplen las condiciones $b_1 = b_3$, $b_2 = b_5$ y $b_4 = 0$ para los dos vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues B es una base de F.
Podemos ver directamente que w no pertenece a F ya que no cumple las condiciones del subespacio (por ejemplo, no cumple $b_4 = 0$).
E y F no generan el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ ya que hay vectores (como el w), que pertenecen a uno y no al otro.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Comprobar que A es base: 0,5 puntos.

Apartado b

- Ver que $w \in E$: 0,25 puntos.
- Calcular las coordenadas: 0,5 puntos.

Apartado c

- Proponer base de F y justificar que lo es: 0,5 puntos.
- Ver que $w \notin E$: 0,25 puntos.
- Justificar que no generan el mismo subespacio vectorial: 0,5 puntos.

4. Sustituid, antes de hacer ningún cálculo, el parámetro c por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:

$$M(f|C, C) = \begin{pmatrix} -1 & -c-2 & (c+1)(c+2) \\ -1 & -c-2 & c+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal y $M(f|C, C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$.

Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Calculad la dimensión de la imagen de f y la de su núcleo.

b) Encontrad los valores propios correspondientes a los vectores $(0, c+1, 1)$ y $(c+1, 0, 1)$.

c) Encontrad un vector propio de f de valor propio $(-c-3)$.

d) Escribid la ecuación característica de f sin calcular ningún determinante y explicad cómo la habéis obtenido. Nota: La ecuación característica es $p(\lambda) = 0$ donde $p(\lambda)$ es el polinomio característico de f.

Solución

Se resuelven los apartados para un valor de c genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir c por su valor en los desarrollos que siguen.

a)

$$\begin{vmatrix} -1 & -c-2 & (c+1)(c+2) \\ -1 & -c-2 & c+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-(c+2)(c+1)1 + (-1)(-1)(c+1)(c+2) - (-1)(-1)(c+1) + (c+1)(c+2)^2 =$$

$$(c+1)[(c+2)^2 - 1]$$

El determinante nunca es nulo porque al ser c una cifra se cumple que $c+1 > 0$ y $(c+2)^2 - 1 > 2$, por tanto, la dimensión de la imagen de f es 3. Por el Teorema de la dimensión del punto 4. "Núcleo e imagen de una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales", el núcleo tendrá dimensión 0, ya que la suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen debe ser la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$ que es 3.

b) Para calcular el valor propio correspondiente al vector $(0, c+1, 1)$ basta con calcular la imagen de este vector al aplicarle f y determinar por qué factor es múltiplo del mismo. Se multiplica la matriz de la aplicación por el vector:

$$\begin{pmatrix} -1 & -c-2 & (c+1)(c+2) \\ -1 & -c-2 & c+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ c+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c+2)(c+1) + (c+1)(c+2) \\ -(c+2)(c+1) + (c+1) \\ -(c+1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -(c+2-1)(c+1) \\ -(c+1) \end{pmatrix} = -(c+1) \begin{pmatrix} 0 \\ (c+1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se ve que esta imagen es múltiplo del vector por un factor $-(c+1)$. Así, se obtiene que el valor propio asociado al vector propio $(0, c+1, 1)$ es $-c-1$.

Para calcular el valor propio correspondiente al vector $(c+1,0,1)$ basta con calcular la imagen de este vector al aplicarle f y determinar por qué factor es múltiplo del mismo. Se multiplica la matriz de la aplicación por el vector:

$$\begin{pmatrix} -1 & -c-2 & (c+1)(c+2) \\ -1 & -c-2 & c+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c+1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c+1)+(c+1)(c+2) \\ -(c+1)+(c+1) \\ (c+1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (c+1)(-1+c+2) \\ 0 \\ (c+1) \end{pmatrix} = (c+1) \begin{pmatrix} (c+1) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se ve que esta imagen es múltiplo del vector por un factor $(c+1)$. Así, se obtiene que el valor propio asociado al vector propio $(c+1,0,1)$ es $c+1$.

c) Para calcular un VEP de VAP $-c-3$ hay que buscar una base del $Ker(f+(c+3)\mathrm{I})$. Es decir, resolver el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} -1+c+3 & -c-2 & (c+1)(c+2) \\ -1 & -c-2+c+3 & c+1 \\ 1 & -1 & c+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sumando la segunda ecuación $-x+y+(c+1)z=0$ y la tercera ecuación $x-y+(c+3)z=0$ se obtiene $(2c+4)z=0$ de donde $z=0$ (dado que c es una cifra y por tanto $(2c+4)>0$). De la ecuación correspondiente a la tercera fila, al sustituir z por 0, se obtiene $x-y=0$ y, por tanto, $y=x$. Se ve que con estos valores se cumple la segunda ecuación, que es $-x+x+0=0$, y la primera, que es $(c+2)x-(c+2)x+(c+1)(c+2)0=0$. Las soluciones son, por tanto, de la forma $(x,x,0)$ y el vector propio que se pide puede ser el $(1,1,0)$.

e) Como ya se ha visto que los tres VAPS de f son $c+1$, $-c-1$ y $-c-3$, y la ecuación característica de f tiene los valores propios de f como soluciones, esa ecuación puede ser $(\lambda-c-1)(\lambda+c+1)(\lambda+c+3)=0$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular el rango de la matriz M para saber la dimensión de la imagen: 0,25 puntos.
- Calcular las dimensiones de la imagen y del núcleo: 0,25 puntos.

Apartado b

- Calcular las imágenes de los vectores: 0,5 puntos.
- Igualar a un múltiplo del vector y encontrar los VAPs, y comprobar que efectivamente son VEPs: 0,5 puntos.

Apartado c

- Plantear el sistema para el cálculo del VEP de VAP $-c-3$: 0,25 puntos.
- Resolver el sistema y encontrar el VEP de VAP $-c-3$: 0,25 puntos.

Apartado d

- Escribir el polinomio característico a partir de los VAPs: 0,25 puntos.
- Justificar que son los valores que lo hacen 0: 0,25 puntos.