

EXAMEN 3

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

- a) Resolved la ecuación $x \cdot y = 1$, donde y es el siguiente número complejo: $2\frac{5\pi}{6}$. Proporcionad x en forma binómica.
- b) Calculad todas las raíces quintas del siguiente número complejo: $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Proporcionad el resultado en forma polar.

Solución

- a) Primero ponemos el número complejo y en forma binómica y después calculamos el inverso. Para pasar a forma binómica, utilizamos la relación que establece que $a = r \cos \theta$ y $b = r \sin \theta$ (ver apartado 3.4.2, página 33, Módulo 1):

$$r = 2 \quad \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Ahora aplicamos la transformación:

$$y = 2\frac{5\pi}{6} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2}i = -\sqrt{3} + i$$

Calculamos ahora x como el inverso del número y en forma binómica:

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{-\sqrt{3} + i} \cdot \frac{-\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3} - i}{(-\sqrt{3})^2 - i^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$$

- b) Escribimos el número complejo $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ en forma polar (ver apartado 3.4.1, página 30, Módulo 1):

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan \left(\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} \right) = \arctan 1 = 225^\circ$$

NOTA ACLARATORIA: sabemos que la tangente de un ángulo vale 1 en 45° y en 225° . Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando pasamos un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos, hacer un dibujo. Por tanto, si dibujamos el número $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ en el plano complejo, veremos que está asociado al punto $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, que se encuentra en el tercer cuadrante, es decir, en 225° .

Tenemos entonces que $-\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2_{225^\circ}$. Ahora podemos aplicar la raíz quinta que se pide en el enunciado (ver apartado 3.6.1, página 43, Módulo 1):

$$\sqrt[5]{2_{225^\circ}} = \sqrt[5]{2_{\frac{225^\circ + 360^\circ k}{5}}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

El módulo de las raíces es: $r = \sqrt[5]{2}$

Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \frac{225^\circ + 360^\circ k}{5}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

- Si $k = 0$, tenemos $\beta_0 = 45^\circ$ y se obtiene la raíz $(\sqrt[5]{2})_{45^\circ}$.
- Si $k = 1$, tenemos $\beta_1 = 117^\circ$ y se obtiene la raíz $(\sqrt[5]{2})_{117^\circ}$.
- Si $k = 2$, tenemos $\beta_2 = 189^\circ$ y se obtiene la raíz $(\sqrt[5]{2})_{189^\circ}$.
- Si $k = 3$, tenemos $\beta_3 = 261^\circ$ y se obtiene la raíz $(\sqrt[5]{2})_{261^\circ}$.
- Si $k = 4$, tenemos $\beta_4 = 333^\circ$ y se obtiene la raíz $(\sqrt[5]{2})_{333^\circ}$.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = k \\ -mx - (1 + m)y + z = 2k \\ x + y - mz = -km \end{array} \right\}$$

donde k es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC, y $m \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

Se pide:

- Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$.
- Calculad la solución del sistema para $m = 2022$.
- Determinad la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema para $m = -1$.

Solución

- Resolvemos el ejercicio de forma paramétrica, en función de k , de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro k por tu valor asignado.

La matriz de coeficientes, A , y la matriz ampliada, M , asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -m & -1-m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ -m & -1-m & 1 & 2k \\ 1 & 1 & -m & -km \end{array} \right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A , puesto que si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -m & -1-m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = m + 1$$

- Si $m \neq -1 \rightarrow \text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(M) = \text{n}^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow$

Sistema compatible determinado.

- Si $m = -1$, entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto $\text{rango}(A) = 2$. Calculamos, para $k = -1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 2k \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rango}(M) = 2 = \text{rango}(A) \neq \text{n}^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow$$

Sistema compatible indeterminado.

b) Para $m = 2022$, el sistema que debemos resolver es:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = k \\ -2022x - 2023y + z = 2k \\ x + y - 2022z = -2022k \end{array} \right\}$$

Sabemos por el apartado anterior que para $m = 2022$ el sistema es compatible determinado.

Utilizaremos el método de Gauss [ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ -2022 & -2023 & 1 & 2k \\ 1 & 1 & -2022 & -2022k \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 2023 & 2024k \\ 0 & 0 & -2023 & -2023k \end{array} \right)$$

Operaciones: (1) $F2 + 2022 \cdot F1 \rightarrow F2$ y $F3 - F1 \rightarrow F3$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = k \\ -y + 2023z = 2024k \\ -2023z = -2023k \end{array} \right\} \implies \text{Solución: } (x = k, y = -k, z = k)$$

Así pues, la solución del sistema, en función de los diferentes valores del parámetro k , es:

	$(x = k, y = -k, z = k)$
Si $k = 0$	$(x = 0, y = 0, z = 0)$
Si $k = 1$	$(x = 1, y = -1, z = 1)$
Si $k = 2$	$(x = 2, y = -2, z = 2)$
Si $k = 3$	$(x = 3, y = -3, z = 3)$
Si $k = 4$	$(x = 4, y = -4, z = 4)$
Si $k = 5$	$(x = 5, y = -5, z = 5)$
Si $k = 6$	$(x = 6, y = -6, z = 6)$
Si $k = 7$	$(x = 7, y = -7, z = 7)$
Si $k = 8$	$(x = 8, y = -8, z = 8)$
Si $k = 9$	$(x = 9, y = -9, z = 9)$

c) Para $m = -1$ el sistema a considerar es:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = k \\ x + z = 2k \\ x + y + z = k \end{array} \right\}$$

En el primer apartado de este ejercicio hemos visto que este sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad, por lo tanto, tenemos que los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema se cortan formando una recta. Más concretamente, si observamos los tres planos definidos por las tres ecuaciones del sistema:

$$\pi_1 : x + y + z = k \quad \pi_2 : x + z = 2k \quad \pi_3 : x + y + z = k$$

vemos que la ecuación de π_1 y de π_3 es la misma, por lo tanto tenemos que π_1 y π_3 son planos coincidentes y el plano π_2 corta a estos en una recta.

3. Sean E y F dos subespacios vectoriales de dimensión 2 de \mathbb{R}^5 definidos de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5 \mid a_1 = a_4, a_3 = 0, a_5 = 0\}$$

$$F = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{R}^5 \mid b_1 = b_3, b_2 = 0, b_4 = 0\}$$

Y sea $w = (a, -3a - 3, 0, a, 0)$ donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP.

- Comprobad que $A = \{(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}$ es una base de E . ¿ $w \in E$? En caso afirmativo calculad las coordenadas de w en la base A .
- Hallad una base de F . ¿Pertenece w a F ? En caso afirmativo calculad las coordenadas de w en la base que habéis hallado. ¿Generan E y F el mismo subespacio vectorial de \mathbb{R}^5 ? Justificad la respuesta.

Solución

- Como sabemos que la dimensión de E es 2, sólo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumplen las condiciones $a_1 = a_4$, $a_3 = 0$ y $a_5 = 0$ para los dos vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes, ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues A es una base de E .

Para ver si $w \in E$ podemos comprobar que cumple las condiciones $a_1 = a_4$, $a_3 = 0$ y $a_5 = 0$, o alternatively miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -3a - 3 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a$, $y = -3a - 3$. Por tanto, $w \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a, -3a - 3)$.

- b) Podemos proponer como base de F : $B = \{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ y de forma análoga al apartado anterior demostrar que es base:

Primero comprobaremos que los vectores de B pertenecen a F comprobando que se cumplen las condiciones $b_1 = b_3$, $b_2 = 0$ y $b_4 = 0$ para los dos vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Así B es una base de F .

Podemos ver directamente que w no pertenece a F ya que no cumple las condiciones del subespacio (por ejemplo, no cumple $b_2 = 0$).

E y F no generan el mismo subespacio vectorial de \mathbb{R}^5 ya que hay vectores (por ejemplo el w), que pertenecen a uno y no al otro.

4. Sean $A = (a + 1, 2)$ y $C = (2a + 2, b)$ dos puntos del plano. Sea la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3a+1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{a+7}{4} \\ \frac{2}{0} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y sea f la transformación afín definida por la matriz M .

Sustituid a por la tercera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC (b es un parámetro real). Se pide:

- Escribid la matriz del escalado de razón $\frac{1}{2}$ centrado en el punto C .
- Escribid la matriz del giro en sentido antihorario de ángulo 270° centrado en el punto A .
- Determinad qué valor tiene que tener b para que la transformación f sea equivalente a un giro de 270° centrado en el punto A seguido de un escalado de razón $\frac{1}{2}$ centrado en el punto C .

Solución

Resolvemos el problema para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los resultados siguientes. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

- La matriz del escalado desde el punto $C = (2a + 2, b)$ y de razón $\frac{1}{2}$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda son: la matriz de la traslación de vector $(-2a - 2, -b)$, la del escalado de razón $\frac{1}{2}$ centrado en el origen y la de la traslación de vector $(2a + 2, b)$. Corresponden a las aplicaciones

que tenemos que componer según se explica en el punto “4.3. Escalado de un objeto a partir de un punto fijo genérico”.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a+2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2a-2 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a+2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -a-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & a+1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz en función de vuestro IDP será:

$$\begin{array}{ll} a=0 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a=1 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a=2 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a=3 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a=4 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{ll} a=5 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a=6 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a=7 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a=8 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a=9 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- (b) La matriz del giro de 270° desde el punto $A = (a+1, 2)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda son: la matriz de la traslación de vector $(-a-1, -2)$, la del giro de 270° centrado en el origen y la de la traslación de vector $(a+1, 2)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto “3.3. Rotación de un objeto alrededor de un punto de rotación genérico”.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2+a+1 \\ -1 & 0 & a+1+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ -1 & 0 & a+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz en función de vuestro IDP será:

$$\begin{array}{ll}
 a = 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & a = 5 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 a = 1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & a = 6 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 a = 2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & a = 7 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 a = 3 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & a = 8 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 a = 4 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & a = 9 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

- (c) Según se explica en el punto “6. Composición de transformaciones”, la matriz de la composición se obtiene multiplicando las matrices que, empezando de derecha a izquierda son: la matriz del giro de 270° centrado en A y la del escalado de razón $\frac{1}{2}$ centrado en C :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & a+1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ -1 & 0 & a+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & a+1+\frac{a-1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{a+3}{2}+\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3a+1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{a+b+3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Casi todos los elementos de esta matriz son iguales que los de M . Para que esta matriz sea exactamente igual a M solo falta que los elementos correspondientes de la segunda fila y tercera columna sean iguales entre sí:

$$\begin{aligned}
 \frac{a+b+3}{2} &= \frac{a+7}{4} \\
 2a+2b+6 &= a+7 \\
 2b &= 1-a \\
 b &= \frac{1-a}{2}
 \end{aligned}$$

El resultado en función del valor de vuestro IDP será:

$$\begin{aligned}
 a = 0 & \quad b = \frac{1}{2} \\
 a = 1 & \quad b = 0 \\
 a = 2 & \quad b = -\frac{1}{2} \\
 a = 3 & \quad b = -1 \\
 a = 4 & \quad b = -\frac{3}{2} \\
 a = 5 & \quad b = -2 \\
 a = 6 & \quad b = -\frac{5}{2} \\
 a = 7 & \quad b = -3 \\
 a = 8 & \quad b = -\frac{7}{2} \\
 a = 9 & \quad b = -4
 \end{aligned}$$