

EXAMEN 2

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

- Dados los números complejos $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$ y $z_3 = 2i$. Realizad la operación $(\overline{z_1} \cdot z_2) \cdot z_3^3$. Proporcionad el resultado en forma binómica. Nota: $\overline{z_1}$ representa el conjugado de z_1 y $\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}$ representa el conjugado de $(\overline{z_1} \cdot z_2)$.
- Se sabe que la primera raíz cuarta del número complejo $m - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ es $\sqrt[4]{3}e^{60^\circ}$ (es decir, para $k = 0$, el ángulo es 60°). Determinad el parámetro $m \in \mathbb{R}$, así como el resto de raíces del número complejo, en forma polar. Nota: hace falta trabajar con todos los ángulos en grados y en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

Solución

- a) Primero calculamos el conjugado de z_1 :

$$\overline{z_1} = \overline{1 - 2i} = 1 + 2i$$

Ahora podemos calcular la primera multiplicación:

$$\overline{z_1} \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (-3 + i) = -3 + 1i - 6i + 2i^2 = -5 - 5i$$

El conjugado del número anterior es:

$$\overline{\overline{z_1} \cdot z_2} = \overline{-5 - 5i} = -5 + 5i$$

En paralelo calculamos el cubo de z_3 :

$$z_3^3 = (2i)^3 = -8i$$

Finalmente, pasamos a resolver la multiplicación global:

$$(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}) \cdot z_3^3 = (-5 + 5i) \cdot (-8i)$$

Por tanto:

$$\boxed{(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}) \cdot z_3^3 = 40 + 40i}$$

- b) Sabemos que el módulo de la raíz cuarta que nos da el enunciado es $\sqrt[4]{3}$, de forma que el módulo del número complejo es 3. Este valor lo podemos equiparar al módulo del número complejo de la siguiente manera:

$$r = \sqrt{m^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3 \text{ y, por tanto, } m = \pm\frac{3}{2}$$

De esta forma, tenemos ahora dos opciones para el argumento:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = 300^\circ \text{ o bien } \theta = \arctan\left(\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}}\right) = 240^\circ$$

Nota: sabemos que la parte imaginaria del número complejo es negativa, de modo que nos encontramos en el tercer o cuarto cuadrante. Así, los ángulos son 300° (para $m = \frac{3}{2}$) y 240° (para $m = -\frac{3}{2}$).

Conociendo el argumento de la raíz del enunciado, podemos deducir lo siguiente:

$$\frac{\theta + 360^\circ k}{4} = 60^\circ \quad \text{para } k = 0$$

Esta ecuación sólo se cumple para $\theta = 240^\circ$ y $m = -\frac{3}{2}$. Así, el número complejo es:

$$\boxed{-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

El resto de raíces se encuentran con la ecuación anterior para los diferentes valores de k :

- Para $k = 0$, tenemos $\alpha_0 = 60^\circ$.
- Para $k = 1$, tenemos $\alpha_1 = 150^\circ$.
- Para $k = 2$, tenemos $\alpha_2 = 240^\circ$.
- Para $k = 3$, tenemos $\alpha_3 = 330^\circ$.

En resumen, las raíces son:

$$\boxed{(\sqrt[4]{3})_{60^\circ}, (\sqrt[4]{3})_{150^\circ}, (\sqrt[4]{3})_{240^\circ} \text{ y } (\sqrt[4]{3})_{330^\circ}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular \bar{z}_1 : 0,25 puntos.
- Calcular $\bar{z}_1 \cdot z_2$: 0,25 puntos.
- Calcular $\overline{\bar{z}_1 \cdot z_2}$: 0,25 puntos.
- Calcular z_3^3 : 0,25 puntos.
- Calcular $(\overline{\bar{z}_1 \cdot z_2}) \cdot z_3^3$: 0,25 puntos.

Apartado b

- Hallar los 2 valores posibles de m igualando módulos: 0,5 puntos.

- Determinar el valor de m correcto con el argumento: 0,5 puntos.
- Determinar el resto de raíces: 0,25 puntos.

2. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & -k+2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k+2a+2 \end{pmatrix}$

Substituid el parámetro “ a ” de la matriz M por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con la matriz obtenida:

- Estudiad el rango de la matriz M en función de los diferentes valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.
- Considerad el sistema de ecuaciones lineales que tiene la matriz M como matriz ampliada, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} x + ky = 1 \\ (-k+2)y + 2z = 1 \\ -y - z = k \\ y + z = k + 2a + 2 \end{array} \right\}$$

Discutid este sistema en función de los diferentes valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a , de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

- Dado que la matriz M es cuadrada de orden 4, estudiaremos su rango utilizando que el rango es 4, solo si el determinante de la matriz es diferente a cero [ver apartado 4.5 del módulo “Elementos de álgebra lineal y geometría”]:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & -k+2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k+2a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k+2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & k+2a+2 \end{vmatrix} = 2k(k+(a+1))$$

En consecuencia,

- Si $k \neq 0$ y $k \neq -a - 1$, entonces $\text{rg}(M) = 4$.

- Si $k = 0$, entonces $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\text{rg}(M) = 3$, puesto que $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

- Si $k = -a - 1$, entonces $M = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 & 1 \\ 0 & -a+1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & a+1 \\ 0 & 1 & 1 & 3a+3 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\text{rg}(M) = 3$, puesto que $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a+3 \neq 0$, puesto que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9.

b) El sistema de ecuaciones que tiene como matriz ampliada la matriz M es:

$$\left. \begin{array}{l} x + ky = 1 \\ (-k+2)y + 2z = 1 \\ -y - z = k \\ y + z = k + 2a + 2 \end{array} \right\}$$

Para discutir el sistema utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröhnius [ver apartado 4 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”].

La matriz de coeficientes, A , y la matriz ampliada, M , asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & -k+2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & -k+2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k+2a+2 \end{pmatrix}$$

Notemos que, dado que en A la tercera y cuarta fila son proporcionales, el estudio del $\text{rg}(A)$ se puede reducir al estudio del menor formado con las tres primeras filas y columnas.

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & -k+2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = k$$

Así pues, a partir de este menor de orden 3 y de lo que hemos deducido en el apartado anterior, podemos afirmar:

- Si $k \neq 0$ y $k \neq -a - 1$, $\text{rg}(A) = 3 \neq \text{rg}(M) = 4$ y, por lo tanto, se obtiene que el sistema es incompatible.
- Si $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(M) = 3$ y, por lo tanto, se obtiene que el sistema es incompatible.
- Si $k = -a - 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 3 = \text{nº incógnitas}$, se obtiene que el sistema es compatible determinado.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz M en función de k : 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k = 0$ y $k = -a - 1$: 0,25 puntos.

- Justificar que para k diferente de 0 y $-a - 1$ el $\text{rg}(M) = 4$: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = 0$ el $\text{rg}(M) = 3$: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = -a - 1$ el $\text{rg}(M) = 3$: 0,25 puntos.

Apartado b

- Determinar que para k diferente a 0 $\text{rg}(A) = 3$: 0,25 puntos.
- Determinar que para $k = 0$ el $\text{rg}(A) = 2$: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente a 0 y $-a - 1$ el sistema es incompatible: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = 0$ el sistema es incompatible: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = -a - 1$ el sistema es compatible determinado: 0,25 puntos.

3. Sea F el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 definido por:

$$F = \langle (1, 0, 3), (3\lambda, -2\lambda, \lambda), (0, 2, -3), (-1, 2, 0) \rangle, \lambda \in \mathbb{R}$$

- Calculad la dimensión de F según λ y una base A en cada caso.
- Sean $v_1 = (a - 1, 8, 3a - 3)$, $v_2 = (0, 2a + 6, 3 - 3a)$, $v_3 = (1 - a, 2a + 6, 0)$ **donde a es la tercera cifra de la derecha del vuestro IDP**. ¿Cuáles pertenecen a F ? Para los que pertenezcan, calculad sus coordenadas en la base A que habéis encontrado en el apartado anterior.
- Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ el conjunto formado por los vectores del apartado anterior. B es una base de F . Calculad la matriz $C_{B \rightarrow A}$ de cambio de base de la base B a las bases A que habéis encontrado en el primer apartado.

Solución

- Calculamos el rango de los vectores con los que está definido F . Si calculemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

Vemos directamente que la dimensión de F es 3 independientemente del parámetro λ . Una base puede ser la formada por los tres vectores que conforman el determinante anterior:

$$A = \{(1, 0, 3), (0, 2, -3), (-1, 2, 0)\}.$$

- Como la dimensión de F es 3, ya sabemos directamente que todos los vectores v_i serán de F . Para calcular las coordenadas de v_1 resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 1 \\ 8 \\ 3a - 3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a + 1$, $y = 2$, $z = 2$. Por tanto, las coordenadas de v_1 en la base A son $(a + 1, 2, 2)$.

Para calcular las coordenadas de v_2 procedemos de forma análoga resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a + 6 \\ 3 - 3a \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 2$, $y = a + 1$, $z = 2$. Por tanto, las coordenadas de v_2 en la base A son $(2, a + 1, 2)$.

Una vez más, para a calcular las coordenadas de v_3 procedemos de forma análoga resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a \\ 2a + 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 2$, $y = 2$, $z = a + 1$. Por tanto, las coordenadas de v_3 en la base A son $(2, 2, a + 1)$.

- c) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A , y esto es justamente lo que hemos realizado en el apartado anterior. Así, la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B \rightarrow A} = \begin{pmatrix} a + 1 & 2 & 2 \\ 2 & a + 1 & 2 \\ 2 & 2 & a + 1 \end{pmatrix}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular la dimensión de F : 0,5 puntos.
- Dar una base justificada: 0,5 puntos.

Apartado b

- Ver que el vector v_1 pertenece a F y calcular sus coordenadas: 0,25 puntos.
- Ver que el vector v_2 pertenece a F y calcular sus coordenadas: 0,25 puntos.
- Ver que el vector v_3 pertenece a F y calcular sus coordenadas: 0,25 puntos.

Apartado c

- Calcular la matriz de cambio de base: 0,75 puntos.
4. Sustituid, antes de hacer cálculos, el parámetro c por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC en los siguientes puntos de \mathbb{R}^2 :

$$A = (c, 0) \quad B = (c + 1, 0) \quad C = (c + 1, \frac{1}{2}) \quad D = (c + 1, -\frac{1}{2})$$

Se calculará paso a paso la matriz de la transformación geométrica que transforma los segmentos AB y CD en los segmentos $A'B'$ y $C'D'$ formatos por los puntos:

$$A' = (0, 0) \quad B' = (0, 2) \quad C' = (-1, 2) \quad D' = (1, 2)$$

Responded razonadamente los siguientes apartados para construirla:

- a) Escribid la matriz 3×3 del escalado de razón 2 centrado en el punto $B = (c+1, 0)$.
- b) Escribid la matriz 3×3 de la traslación que lleva el punto $B = (c + 1, 0)$ en su punto $B' = (0, 2)$.
- c) Escribid la matriz 3×3 de un giro de ángulo 90° centrado en el punto $B' = (0, 2)$.
- d) Construid la matriz composición de las tres anteriores. Comprobad que transforma los segmentos AB , CD en los segmentos $A'B'$ y $C'D'$ respectivamente, tal como se quería.

Solución

Resolvemos el problema para un valor de c genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir c por su valor en los resultados siguientes.

- a) La matriz del escalado de razón 2 y centro $(c + 1, 0)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(-c - 1, 0)$, la del escalado de razón 2 centrado en el origen y la de la traslación de vector $(c + 1, 0)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 4.3 “Escalado a partir de un punto genérico” del módulo “Transformaciones geométricas”.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & c+1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2c-2+c+1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -c-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Para escribir la matriz de la traslación se necesita el vector que lleva el punto $B = (c + 1, 0)$ al punto $B' = (0, 2)$. Basta con calcular la diferencia $B' - B = (0, 2) - (c + 1, 0) = (-c - 1, 2)$. La matriz se escribe entonces simplemente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) La matriz del giro de ángulo 90° y centro $(0, 2)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(0, -2)$, la del giro de ángulo 90° centrado en el origen y la de la traslación de vector $(0, 2)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 3.4 “Rotación alrededor de un punto genérico” del módulo “Transformaciones geométricas”. Calculamos la composición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) & 0 \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- d) Calculamos la composición:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -c-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -c-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las imágenes de los puntos $A = (c, 0)$, $B = (c + 1, 0)$, $C = (c + 1, \frac{1}{2})$ y $D = (c + 1, -\frac{1}{2})$ se pueden calcular mediante una sola multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & c+1 & c+1 & c+1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2) \cdot \frac{1}{2} & (-2) \cdot (-\frac{1}{2}) \\ 2c-2c & 2c+2-2c & 2c+2-2c & 2c+2-2c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado son los puntos $A' = (0, 0)$ y $B' = (0, 2)$, y $C' = (-1, 2)$ y $D' = (1, 2)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Escribir la composición de tres matrices: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,50 puntos.

Apartado b

- Calcular el vector de traslación y escribir la matriz: 0,25 puntos.

Apartado c

- Escribir la composición de tres matrices: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,50 puntos.

Apartado d

- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,25 puntos.
- Comprobar las imágenes de los puntos: 0,50 puntos.