

## Presentación

Esta PEC profundiza en el concepto de complejidad computacional que cubre los contenidos estudiados en los módulos 6 y 7 de la asignatura. Los ejercicios trabajan los conceptos de medida de complejidad, la reducción y completitud, la clase NP-completo y algunos de los problemas intratables más importantes que se conocen.

## Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuado en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlo.

## Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Entender los conceptos de intratabilidad y no-determinismo.
- Conocer las diferentes clases de complejidad y saber clasificar los problemas en cada una de estas.
- Entender el concepto de reducción entre problemas y saber demostrar cuando un problema es NP-completo.
- Reconocer problemas intratables que aparecen de forma habitual en informática y en ingeniería.
- Entender y saber aplicar las técnicas básicas de reducción polinómica de los problemas NP-completos.

## Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 25 % = (2 % + 2 % + 3 % + 8 % + 10 %))

Definimos el problema  $X$  como, dado un grafo  $G = (V, A)$  y dos vértices  $u, v \in V$ , determinar la distancia entre  $u$  y  $v$ .

Definimos el problema  $Y$  como, dado un grafo  $G = (V, A)$ , dos vértices  $u, v \in V$ , y un número natural  $k$ , determinar si hay un camino en  $G$  con como mucho  $k$  aristas que conecte  $u$  y  $v$ .

- Indica si  $X$  es un problema de decisión, de optimización, o ninguna de las dos cosas. Si es un problema de optimización, di también cuál es la función de valoración, y si se minimiza o maximiza.
- Indica si  $Y$  es un problema de decisión, de optimización, o ninguna de las dos cosas. Si es un problema de optimización, di también cuál es la función de valoración, y si se minimiza o maximiza.
- ¿Qué algoritmo de los vistos en los módulos usarías para resolver el problema  $X$  lo más eficientemente posible? En notación  $O$ , ¿qué coste tiene en términos de  $|V|$  y  $|A|$ ?
- Supongamos que tenemos un procedimiento  $P_X$  que resuelve  $X$ : dado un grafo  $G = (V, A)$  y dos vértices  $u, v \in V$ , devuelve  $P_X(G, u, v)$ , la distancia entre  $u$  y  $v$ .  
Usando  $P_X$ , implementa en pseudo-código un procedimiento  $P_Y$  que resuelva  $Y$ :

**Entrada:** grafo  $G = (V, A)$ ; vértices  $u, v \in V$ ; número natural  $k$

**Salida:** SÍ si hay un camino en  $G$  con como mucho  $k$  aristas que conecta  $u$  y  $v$ , NO en caso contrario.

**algoritmo**  $P_Y(G, u, v, k)$

**inicio**

... (A COMPLETAR)

**fin**

Se valorará que uses el menor número posible de llamadas a  $P_X$  por llamada a  $P_Y$ . En el peor de los casos, ¿cuántas se hacen? Usa notación  $O$ .

- Supongamos que tenemos un procedimiento  $Q_Y$  que resuelve  $Y$ : dado un grafo  $G = (V, A)$ , dos vértices  $u, v \in V$ , y un número natural  $k$ , devuelve  $Q_Y(G, u, v, k)$ , que es:
  - SÍ si hay un camino en  $G$  con como mucho  $k$  aristas que conecta  $u$  y  $v$ .
  - NO en caso contrario.

Usando  $Q_Y$ , implementa en pseudo-código un procedimiento  $Q_X$  que resuelva  $X$ :

**Entrada:** grafo  $G = (V, A)$ ; vértices  $u, v \in V$

**Salida:** la distancia entre  $u$  y  $v$

**algoritmo**  $Q_X(G, u, v)$

**inicio**

... (A COMPLETAR)

**fin**

Se valorará que uses el menor número posible de llamadas a  $Q_Y$  por llamada a  $Q_X$ . En el peor de los casos, ¿cuántas se hacen? Usa notación  $O$ .

2. (Valoración de un 25 % = (3 % + 5 % + 6 % + 8 % + 3 %))

El problema  $T$  se define así: dados  $N > 0$ , un vector de naturales  $w = (w_0, \dots, w_{N-1})$ , un vector de naturales  $v = (v_0, \dots, v_{N-1})$ , y dos naturales  $W$  y  $V$ , determinar si existe un subconjunto  $S \subseteq \{0, \dots, N-1\}$  tal que  $\sum_{i \in S} w_i \leq W$  y  $\sum_{i \in S} v_i \geq V$ .

a) Identifica  $T$  con uno de los problemas vistos en los módulos. Describe del modo más preciso posible su clase de complejidad.

b) Completa el pseudo-código del siguiente procedimiento  $P_T$  para resolver  $T$ :

**Entrada:** vector de naturales  $w = (w_0, \dots, w_{N-1})$ ; vector de naturales  $v = (v_0, \dots, v_{N-1})$ ; naturales  $W$  y  $V$

**Salida:** SÍ si existe un subconjunto  $S \subseteq \{0, \dots, N-1\}$  tal que  $\sum_{i \in S} w_i \leq W$  y  $\sum_{i \in S} v_i \geq V$ , NO en caso contrario.

**algoritmo**  $P_T(w, v, W, V)$

**inicio**

**para**  $i \leftarrow 0$  **hasta**  $N$

**para**  $j \leftarrow 0$  **hasta**  $W$

$m[i][j] = 0$ ;

**finpara**

**finpara**

**para**  $i \leftarrow 1$  **hasta**  $N$

**para**  $j \leftarrow 0$  **hasta**  $W$

**si**  $w[i-1] > j$

**entonces**  $m[i][j] \leftarrow m[i-1][j]$ ;

**sino**  $m[i][j] \leftarrow \max(m[i-1][j - w[i-1]] + v[i-1], m[i-1][j])$ ;

**finsi**

**finpara**

finpara  
retorno ... (A COMPLETAR)  
fin

*Pista:* la parte que falta se evalúa en tiempo  $O(1)$ .

- c) El estudiante  $A$  afirma que el problema  $T$  es NP-Difícil. El estudiante  $B$  afirma que el procedimiento  $P_T$  tiene coste  $O(N \cdot W)$ . El estudiante  $C$  dice que  $A$  y  $B$  no pueden tener los dos la razón, porque eso implicaría que  $P = NP$ . Para cada estudiante di si tiene razón o no, y por qué.
- d) El problema  $U$  se define así: dado un multiconjunto de  $P > 0$  naturales  $M = \{m_0, \dots, m_{P-1}\}$ , y un natural  $Q$ , determinar si existe un subconjunto  $S$  de  $M$  tal que la suma de todos los elementos de  $S$  sea igual a  $Q$ . Da una reducción polinómica de  $U$  a  $T$  indicando claramente qué entrada de  $T$  devuelve la reducción si se le pasa como argumento una entrada  $(M, Q)$  de  $U$ . Justifica por qué se trata de una reducción polinómica.
- e) ¿Existe una reducción (no hace falta darla explícitamente) de  $T$  a  $U$ ? ¿Por qué?

3. (Valoración de un 25 % = (2 % + 2 % + 2 % + 2 % + 2 % ) + (2,5 % + 2,5 % ) + (5 % + 5 % ))

- a) Para cada una de las siguientes fórmulas proposicionales, indica si está en **forma normal conjuntiva (FNC)**. Si lo está, indica el **número de cláusulas** y el **número de literales** de cada una. Si no lo está, explica brevemente por qué y cómo podría transformarse para que lo estuviera.

1)

$$F_1 = (a \vee \neg b) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg c)$$

2)

$$F_2 = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c)$$

3)

$$F_3 = (\neg a \vee b) \wedge \neg(\neg b \vee c)$$

4)

$$F_4 = (a \leftrightarrow b) \vee (\neg b \wedge c)$$

5)

$$F_5 = (a \vee b) \wedge (c) \wedge (\neg d \vee \neg c \vee b)$$

- b) Sea la siguiente fórmula booleana en **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**:

$$F = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

- 1) Transforma  $F$  en una fórmula  $F'$  equivalente en **Forma Normal Disyuntiva (FND)**. Se valorará que la FND tenga el mínimo número de términos.
  - 2) Determina si  $F$  es satisfacible. En caso afirmativo, proporciona una **asignación de verdad** para las variables que satisfaga la fórmula.
- c) Se consideran dos problemas numéricos clásicos:
- **Factorización:** dado un entero  $N > 1$ , encontrar (si existen) dos enteros  $p, q > 1$  tales que  $N = p \cdot q$ .
  - **Primalidad:** dado un entero  $N > 1$ , determinar si  $N$  es primo.
- 1) ¿Qué tipo de problema son? Indica si cada uno es un **problema de decisión** o de **optimización/construcción** y justifica tu respuesta.
  - 2) ¿En términos de complejidad, en qué se diferencian?

#### 4. (Valoración de un 25 %) Parte online de la evaluación

En el Campus Virtual, dentro de la sección de “Contenidos” del aula de la asignatura, encontraréis la sección “PEC3 - Parte online”. Ahí hay un cuestionario con diversas preguntas que debéis resolver como último ejercicio de esta PEC.

Leed atentamente las siguientes instrucciones **antes de abrir el cuestionario**:

- Los contenidos que se evalúan en este cuestionario corresponden a los módulos 6 y 7 de la asignatura. Es importante que hayáis asimilado estos conocimientos **antes de abrir el cuestionario**.
- Para visualizar correctamente el cuestionario, utilizad Chrome o Firefox.
- El cuestionario estará abierto durante el plazo de la PEC y lo podéis resolver cuando queráis. De todas formas, una vez lo abráis tendréis un **tiempo limitado** para resolverlo (40 minutos).  
**Importante:** El cuestionario quedará cerrado a las 23:59 de la fecha límite de entrega. Si empezáis a hacerlo después de las 23:19 del último día, ¡tendréis menos de cuarenta minutos para hacerlo!
- Las respuestas a las preguntas se tienen que introducir directamente en el cuestionario. No es necesario que las entreguéis junto con el resto de respuestas de la PEC.
- Las preguntas del cuestionario son aleatorias: cada estudiante recibirá un enunciado diferente.
- En algunas preguntas tendréis que introducir la respuesta en un formato específico (p. ej. con los valores ordenados de una determinada forma y sin espacios). Es muy importante **seguir fielmente el formato indicado** a la hora de introducir vuestra respuesta.

- Disponéis de **2 intentos** para resolver el cuestionario. El objetivo de tener dos intentos es poder solventar posibles problemas que hayáis tenido en la realización del cuestionario, ya sean problemas técnicos o bien que hayáis abierto el cuestionario por error. Por tanto, debéis tener en cuenta que:
  - La nota que obtendréis en el cuestionario será la de vuestro último intento.
  - Después del 1r intento, no recibiréis la calificación obtenida ni recibiréis feedback sobre vuestra propuesta de solución. Por lo tanto, no recomendamos usar el 2o intento para intentar mejorar nota, ya que puede ser que obtengáis una nota inferior.
  - Si usáis el 2o intento, el enunciado que encontraréis será diferente del del 1r intento.
  - Podéis realizar los dos intentos en días diferentes, siempre que sea dentro del plazo de la PEC. Dispondréis de 40 minutos para cada intento.
  - Cada vez que iniciéis el cuestionario contará como un intento, aunque no enviéis la respuesta. Por ejemplo, **si habéis hecho el 1r intento y volvéis a abrir el cuestionario, invalidaréis vuestro 1r intento y os quedaréis con la nota del 2o.**

## Recursos

### Recursos Básicos

- Módulo didáctico 6. Complejidad computacional.
- Módulo didáctico 7. Problemas intratables.
- Colección de problemas

### Recursos Complementarios

- PACs de semestres anteriors.

## Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**. En caso que hayáis consultado recursos externos, es necesario referenciarlos.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven. Hay que seguir el formato mostrado en los apuntes.
- Se considerará el uso de herramientas de inteligencia artificial (ChatGPT, etc.) como un acto de plagio.

## Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC3\_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**. El documento no puede exceder las 10 páginas y no debe contener los enunciados, sólo la información necesaria para poder identificar a qué ejercicio se corresponde cada respuesta.

Este documento se tiene que entregar en la subsección **Entrega de la actividad PEC3** del “Reto 3. Los límites de la computación” **antes de las 23:59 del día 22/12/2025. Verificad que la entrega se ha realizado con éxito y que el documento entregado es el correcto. No se aceptarán entregas fuera de plazo.**