EXAMEN 4

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Resolved, en los números complejos, la ecuación siguiente. Proporcionad la respuesta en forma polar y los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$.

   $$iz^3 - 27 = 0.$$

   b) Hallad el valor, si existe, de $k \in \mathbb{R}$ para que el número complejo, $k + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, cumpla que su cuadrado sea igual a su conjugado.

Solución

a) En este caso, despejamos la incógnita: $iz^3 = 27$. De aquí: $z^3 = \frac{27}{i} = \frac{27i}{i^2} = -27i$
Tenemos que partir de que resolver la ecuación es lo mismo que hallar las raíces cúbicas del número $-27i$, esto es, $z = \sqrt[3]{-27i}$ [ver apuntes "Los números", apartado 3.6].
A continuación escribimos el complejo $-27i$ en forma polar:
$m = \sqrt{(0)^2 + (-27)^2} = \sqrt{27^2} = 27$
$\alpha = \arctan\left(\frac{-27}{0}\right) = 270°$
En este caso, la parte real es nula y la parte imaginaria es negativa, por tanto, está entre el tercer y el cuarto cuadrante.
Tenemos, por tanto, que: $-27i = 27_{270°}$
Como que nos piden las raíces cúbicas tenemos que hacer lo siguiente:
$\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27}_{\frac{270°+360^o k}{3}} = 3_{\frac{270°+360^o k}{3}}$ para $k = 0, 1, 2$
Detalladamente queda así:
Solución 1: $3_{90°}$
Solución 2: $3_{210°}$
Solución 3: $3_{330°}$

b) Operamos con el número complejo, recordando que $i^2 = -1$ [ver apuntes "Los números", apartado 3.1] e imponemos que su cuadrado coincida con su conjugado.
Veamos cuál es su cuadrado y su conjugado:
$\left(k + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = k^2 + 2k\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{2}{4}$
Agrupamos parte real y parte imaginaria:

$\left(k^2-\frac{1}{2}\right)+2k\frac{\sqrt{2}}{2}i$

A continuación calculamos el conjugado del complejo:

$k-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

Y ahora imponemos que el cuadrado del complejo sea igual al conjugado:

$\left(k^2-\frac{1}{2}\right)+2k\frac{\sqrt{2}}{2}i=k-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

E igualamos parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria. Por tanto:

$k^2-\frac{1}{2}=k$

$k\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

De la segunda ecuación vemos que k debe valer $-\frac{1}{2}$. Ahora miramos si este valor de k cumple la primera ecuación:

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$

Y comprobamos que esta igualdad no se cumple porque el término de la izquierda vale $-\frac{1}{4}$ y el término de la derecha es $-\frac{1}{2}$. Y sabemos que: $\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}$

Por tanto: No existe ningún valor de k para el cual el número complejo dado cumpla que su cuadrado coincida con su conjugado.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Despejar z de la ecuación: 0,25 puntos.
- Pasar $-27i$ a forma polar: 0,5 puntos.
- Calcular las raíces cúbicas de z: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular el número complejo al cuadrado: 0,5 puntos.
- Calcular el conjugado del número complejo: 0,25 puntos.
- Igualar partes reales e imaginarias y razonar que no existe solución: 0,5 puntos.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+2z &=& 3 \\ (4k+4)\,y+(4k+2a+4)\,z &=& 8k-40 \\ 4y+(k+(a+3))\,z &=& -16 \end{array}\right\}$$

Sustituid el parámetro "a"por la primera **cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con el sistema obtenido:

a) Discutid el sistema para los distintos valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $k=1$. A continuación, razonad si existe alguna solución en la que los valores de x y de y coincidan.

Solución:

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si queréis ver la resolución concreta que corresponde al valor de vuestro IDP, solo tenéis que sustituir el parámetro a por vuestro valor.

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4k+4 & 4k+2a+4 \\ 0 & 4 & k+a+3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4k+4 & 4k+2a+4 & 8k-40 \\ 0 & 4 & k+a+3 & -16 \end{pmatrix}$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4k+4 & 4k+2a+4 \\ 0 & 4 & k+a+3 \end{vmatrix} = (4k+4)(k+a+3) - 4(4k+2a+4) = 4k^2 + 4ak - (4a+4)$$

Por tanto,

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow 4k^2 + 4ak - (4a+4) = 0 \longrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -(a+1) \end{cases}$$

- Si $k \neq -(a+1)$ y $k \neq 1 \rightarrow$ rango$(A) = 3 =$ rango$(M) =$ n^o incógnitas y por tanto, se obtiene que el $\boxed{\text{sistema es compatible determinado}}$.
- Si $k = -(a+1)$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ (este menor se obtiene considerando primera y tercera fila y la primera y segunda columna).
  Calculamos, para $k = -(a+1)$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4(a+1)+4 & -8(a+1)-40 \\ 0 & 4 & -16 \end{vmatrix} = 96a + 192 \neq 0$, puesto que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9. Así pues, tenemos que rango$(A) = 2 \neq$ rango$(M) = 3$, por tanto, el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.
- Si $k = 1$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$.
  Calculamos, para $k = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -32 \\ 0 & 4 & -16 \end{vmatrix} = 0$. Así pues, tenemos que rango$(M) =$ rango$(A) = 2 \neq$ n^o incógnitas y por tanto, el $\boxed{\text{sistema es compatible indeterminado}}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que para $k=1$ el sistema es compatible indeterminado.

Si hacemos la sustitución $k=1$ se obtiene que el sistema que se tiene que resolver es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+2z &=& 3 \\ 8y+(8+2a)\,z &=& -32 \\ 4y+(4+a)\,z &=& -16 \end{array}\right\}$$

Notemos que, la segunda ecuación es la tercera multiplicada por 2, por tanto, el sistema equivalente que se obtiene es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+2z &=& 3 \\ 4y+(4+a)\,z &=& -16 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene $y=\frac{-16-(4+a)z}{4}$.

Si hacemos la sustitución de $y=\frac{-16-(4+a)z}{4}$ en la primera ecuación obtenemos $x=\frac{-4-(12+a)z}{4}$.

Así pues, las soluciones de este sistema, en función del parámetro a, son:

	$x=\frac{-4-(12+a)z}{4}$,	$y=\frac{-16-(4+a)z}{4}$,	$z=z$
Si $a=0$	$x=-3z-1$,	$y=-z-4$,	$z=z$
Si $a=1$	$x=-\frac{13}{4}z-1$,	$y=-\frac{5}{4}z-4$,	$z=z$
Si $a=2$	$x=-\frac{7}{2}z-1$,	$y=-\frac{3}{2}z-4$,	$z=z$
Si $a=3$	$x=-\frac{15}{4}z-1$,	$y=-\frac{7}{4}z-4$,	$z=z$
Si $a=4$	$x=-4z-1$,	$y=-2z-4$,	$z=z$
Si $a=5$	$x=-\frac{17}{4}z-1$,	$y=-\frac{9}{4}z-4$,	$z=z$
Si $a=6$	$x=-\frac{9}{2}z-1$,	$y=-\frac{5}{2}z-4$,	$z=z$
Si $a=7$	$x=-\frac{19}{4}z-1$,	$y=-\frac{11}{4}z-4$,	$z=z$
Si $a=8$	$x=-5z-1$,	$y=-3z-4$,	$z=z$
Si $a=9$	$x=-\frac{21}{4}z-1$,	$y=-\frac{13}{4}z-4$,	$z=z$

Para ver si, de estas infinitas soluciones que hemos encontrado, hay alguna en la que los valores de x y de y coinciden, tendremos que ver si existe algún valor de z que verifique:

$$\frac{-4-(12+a)\,z}{4}=\frac{-16-(4+a)\,z}{4}$$

resolviendo la ecuación se obtiene:

$$\frac{-4-(12+a)\,z}{4}=\frac{-16-(4+a)\,z}{4}\Leftrightarrow(12+a)\,z-(4+a)\,z=16-4\Leftrightarrow 8z=12\Leftrightarrow z=\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que este sistema sí que tiene una solución que verifica que $x=y$ y dicha solución es:

$$\left(x=\frac{-3a-44}{8},y=\frac{-3a-44}{8},z=\frac{3}{2}\right)$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN:

Apartado a

- Calcular el determinante de la matriz A en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k = -(a+1)$ y $k = 1$: 0,25 puntos.
- Justificar que SCD para k diferente de $-(a+1)$ y de 1: 0,25 puntos.
- Justificar que SI para $k = -(a+1)$: 0,25 puntos.
- Justificar que SCI para $k = 1$: 0,25 puntos.

Apartado b

- Obtener las soluciones del sistema para $k = 1$: 0,75 puntos.
- Obtener la solución que verifica $x = y$: 0,5 puntos.

3. Sean $v_1 = (1, 0, 3, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$, $v_3 = (2, -1, k, 0)$ con $k \in \mathbb{R}$ vectores de $\mathbb{R}^4$. Sea $F =< v_1, v_2, v_3 >$.

   (a) Calculad la dimensión de F en función de k. Calculad una base A en cada caso.

   (b) Fijamos ahora $k = 0$. Sea $w = (-2a - 1, a + 3, -6, 7)$ donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP. ¿Pertenece w a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A que has calculado en el apartado anterior.

   Solución

   (a) Para calcular la dimensión de F calculamos el rango de la matriz formada por los vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & k \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Como rápidamente vemos un menor 2×2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ tenemos que el rango será siempre mayor o igual a 2. Vemos cuando puede ser 3 orlando este menor. Tenemos 2 menores 3×3 y calculamos el determinante en cada caso:

   Primer caso: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & k \end{vmatrix} = k - 7$. Por tanto, tendremos que el determinante es cero en el caso $k = 7$.

   Segundo caso: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$. El determinante siempre es distinto de cero.

   Así pues, la dimensión de F es siempre 3, independientemente del valor de k. Como base podemos usar los 3 vectores con los que está definida F, ya que acabamos de ver que son linealmente independientes (contienen un menor 3×3 no nulo): Base $A = \{(1, 0, 3, -1), (0, 1, -1, 2), (2, -1, k, 0)\}$.

   (b) Para ver si w pertenece a F y a su vez calcular sus coordenadas en tal caso, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a - 1 \\ a + 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -1$, $y = 3$, $z = -a$. Por tanto, $w \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(-1, 3, -a)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN:

Apartado a

- Calcular la dimensión: 1 punto.
- Calcular y justificar una base: 0,5 puntos.

Apartado b

- Ver que el vector es del espacio: 0,5 puntos.
- Obtener las coordenadas: 0,5 puntos.

4. Sustituid el parámetro a por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz asociada a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$:

$$A = M(f|C,C) = \begin{pmatrix} a+2 & (a+2+b)b & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ -(a+1)(a+3) & -(a+1)(a+3)b & 1 \end{pmatrix}$$

donde b es un parámetro real.

Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Encontrad, para los diferentes valores del parámetro b, los vectores propios de la aplicación f asociados al valor propio $-b$.

b) Encontrad el valor propio de f correspondiente al vector propio $v = (-1, 0, a+3)$.

c) Decid para qué valores del parámetro b la matriz A es diagonalizable.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen.

a) Para calcular los VEP de VAP $-b$ hay que buscar una base del $Ker(f + b\mathrm{I})$. Es decir, resolver el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} a+2+b & (a+2+b)b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(a+1)(a+3) & -(a+1)(a+3)b & 1+b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La primera ecuación es $(a+2+b)x = -b(a+2+b)y$, donde encontramos el caso $b = -(a+2)$ que hace la ecuación nula y el caso $b \neq -(a+2)$.

- En el caso $b = -(a+2)$, la última ecuación se convierte en $-(a+1)(a+3)x + (a+1)(a+2)(a+3)y - (a+1)z = 0$. Como $a+1 \neq 0$ (ya que $a \geq 0$ por ser el valor del IPD), esa tercera ecuación se puede simplificar dividiendo por $(a+1)$ y se llega a la relación $z = -(a+3)x + (a+2)(a+3)y$ y así se obtienen dos vectores propios $(1, 0, -(a+3))$ y $(0, 1, (a+2)(a+3))$.

- En el caso en que $b \neq -(a+2)$, la primera ecuación se puede simplificar dividiendo por $(a+2+b)$ de donde $x = -by$. Entonces, sustituyendo x por $-by$ en la tercera ecuación $(a+1)(a+3)by - (a+1)(a+3)by + (1+b)z = 0$, se cancelan los dos primeros términos y se obtiene qué $(1+b)z = 0$. También obtenemos dos casos aquí:
  - siempre que $b \neq -1$ será $z = 0$ y se obtendrá el vector propio $(-b, 1, 0)$ para el valor propio $-b$.
  - En cambio, si $b = -1$ la tercera ecuación se anula y, como solo queda la relación $x = y$, se obtienen dos vectores propios: $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ para el valor propio 1.

En resumen, los vectores propios de valor propio $-b$ son, para los diferentes valores de b:

- $b = -(a+2)$: $(1, 0, -(a+3))$ y $(0, 1, (a+2)(a+3))$ son VEPs de VAP $-b$=a+2.
- $b = -1$: $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ son VEPs de VAP $-b$=1.
- $b \neq -(a+2)$ y $b \neq -1$: $(-b, 1, 0)$ es VEP de VAP $-b$.

b) Para que $v = (-1, 0, a+3) \in \mathbb{R}^3$ sea un vector propio de f, la imagen del vector v por la aplicación f ha de ser un múltiplo de v. Tal como se define en el punto "7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales", tiene que existir un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \lambda \cdot v$, de forma que $Av = \lambda v$:

$$\begin{pmatrix} a+2 & (a+2+b)b & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ -(a+1)(a+3) & -(a+1)(a+3)b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-2 \\ 0 \\ (a+2)(a+3) \end{pmatrix}$$

Vemos que el vector obtenido es proporcional al vector propio:

$$\begin{pmatrix} -a-2 \\ 0 \\ (a+2)(a+3) \end{pmatrix} = (a+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a+3 \end{pmatrix}$$

De aquí se puede deducir que el valor propio que le corresponde a v es $a+2$.

c) Se tiene que ver para qué valores de b se puede obtener una base de vectores propios de f. En los dos apartados anteriores se han diferenciado los casos siguientes:

- $b = -(a+2)$: $(1, 0, -(a+3))$ y $(0, 1, (a+2)(a+3))$ son VEPs de VAP $-b$=a+2.
- $b = -1$: $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ son VEPs de VAP 1 y $v = (-1, 0, a+3)$ es VEP de VAP $a+2$.
- $b \neq -(a+2)$ y $b \neq -1$: $(-b, 1, 0)$ es VEP de VAP $-b$ y $v = (-1, 0, a+3)$ es VEP de VAP $a+2$.

En el segundo caso, se conoce ya una base completa de VEPs porque hay 3 y se puede comprobar que son linealmente independientes. En el primer y tercer caso solo hay dos VEPs, por lo que es necesario encontrar un tercero. Este se puede deducir directamente a partir de la matriz A, pues el tercer vector de la base canónica $(0, 0, 1)$ se tiene a sí mismo como imagen y, por tanto, es vector propio de valor propio 1.

Si no se ve directamente, se pueden buscar las soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$ donde $p(\lambda) = |M(f|C, C) - \lambda\mathrm{I}|$ es el polinomio característico de f, tal como se define en el punto "7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales".
Desarrollando el determinante por la tercera columna se obtiene el polinomio característico $p(\lambda) = (a + 2 - \lambda)(-b - \lambda)(1 - \lambda)$, las soluciones de $p(\lambda) = 0$ son $a + 2$, $-b$ y 1. El tercer valor 1 es diferente a los que ya se tenían en el primer y tercer caso. Para calcular el VEP que le corresponde hay que buscar una base del $Ker(f - \mathrm{I})$ y se obtiene el vector propio $(0, 0, 1)$ como ya se había indicado.

Así se ve que $(-b, 1, 0), (-1, 0, a + 3), (0, 0, 1)$ es una base de VEPs. Se observa que el caso $b = -1$ ya queda representado, pues los vectores propios $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ son los que se habían obtenido en el primer apartado. Y el caso $b = -(a + 2)$ también está representado porque el primer vector que se convierte en $(a+2, 1, 0)$ es una combinación lineal de los que se habían obtenido en el primer apartado $(a + 2)(1, 0, -(a + 3)) + (0, 1, (a + 2)(a + 3))$.

Por tanto, la matriz A diagonaliza para cualquier valor de b.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a)

- Plantear el sistema para encontrar los vectores propios de VAP $-b$: 0,25 puntos.
- Calcular los VEP de VAP $-b$: 0,75 puntos.

Apartado b)

- Escribir la condición de VEP para el vector v, resolver la ecuación y encontrar el valor propio: 0,5 puntos.

Apartado c)

- Encontrar el tercer valor y vector propio en los casos en los que se requiere: 0,5 puntos
- Justificar que la matriz es siempre diagonalizable. 0,5 puntos.