Análisis Matemático / 21 de junio de 2025 / José Carlos López Menestrosa

Actividad 1

$$f(x) = \frac{51}{(x-4)^2} + \frac{(x-4)^2}{30} - 81 \quad \text{definida para } x \neq 4$$

a) Primera derivada $f(x)$ para $x \neq 4$

Desglose por términos:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{51}{(x-4)^2}\right] = 51 \cdot \left[-2(x-4)^{-3}\right] = \boxed{-\frac{102}{(x-4)^3}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-4)^2}{30}\right] = \frac{1}{30} \cdot 2(x-4) = \frac{2(x-4)}{30} = \boxed{\frac{x-4}{30}}$$

$$\frac{d}{dx}[-81] = \boxed{0}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{102}{(x-4)^3} + \frac{x-4}{15}}$$

b) Dos puntos críticos de $f(x)$ (resolver $f'(0)$)

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{102}{(x-4)^3} + \frac{(x-4)}{15} = 0$$

Multiplicamos la ecuación por $(x-4)^3$ para eliminar denominadores. Esto es válido porque $x \neq 4$:

$$-102 + \frac{(x-4)^4}{15} = 0 \Rightarrow \frac{(x-4)^4}{15} = 102$$

Multiplicamos ambos lados por 15 para eliminar el denominador de la izquierda:

$$(x-4)^4 = 1530 \Rightarrow$$

Análisis Matemático / 21 de junio de 2025 / José Carlos López Henestrosa

Actividad 1 (continuación)

$$\Rightarrow \boxed{x-4 = \pm\sqrt[4]{1530}}$$

Los dos puntos críticos son:

$$\boxed{x_1 = 4+\sqrt[4]{1530}} \qquad \boxed{x_2 = 4-\sqrt[4]{1530}}$$

c) Desglose de términos para $f''(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{102}{(x-4)^3}\right] = -102\cdot\frac{d}{dx}\left[(x-4)^3\right] = -102(-3)(x-4)^{-4} =$$

$$= \boxed{\frac{306}{(x-4)^4}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-4)}{15}\right] = \boxed{\frac{1}{15}}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{306}{(x-4)^4}+\frac{1}{15}}$$

Evaluamos $f''(x)$ en los puntos críticos, teniendo en cuenta que $(x-4)^4$ es siempre positivo cuando $x\neq 4$. Por ello, sabemos que algo positivo $+\frac{1}{15}$ es siempre positivo, por lo que si $f''(x)>0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en ese punto. Por lo tanto, $x_1 = 4+\sqrt[4]{1530}$ y $x_2 = 4-\sqrt[4]{1530}$ son $\boxed{\text{mínimos locales}}$ de $f(x)$

Análisis Matemático / 21 de junio de 2025 / José Carlos López Henestrosa

Actividad 1 (contin.)

Valor mínimo de la función $y = f(x)$. Sabemos que ocurren en $x = 4 \pm \sqrt[4]{1530}$.

Podemos realizar un cambio de variable para simplificar el cálculo de dicho valor. En este caso, $v = (x-4)^2 \Rightarrow v > 0$.

Entonces:

$$g(v) = \frac{51}{v} + \frac{v}{30} - 81 \quad , v > 0$$

Derivamos $g(v)$ respecto a v:

$$g'(v) = -\frac{51}{v^2} + \frac{1}{30} = 0 \Rightarrow \frac{1}{30} = \frac{51}{v^2} \Rightarrow v^2 = 51 \cdot 30 = 1530 \Rightarrow t = \sqrt{1530}$$

En ese valor:

$$\frac{51}{v} = \frac{51}{\sqrt{1530}} = \frac{17}{\sqrt{170}} = \frac{\sqrt{170}}{10} \quad , \quad \frac{v}{30} = \frac{\sqrt{1530}}{30} = \frac{3\sqrt{170}}{30} = \frac{\sqrt{170}}{10}$$

por lo que

$$\boxed{f_{min} = \frac{\sqrt{170}}{10} + \frac{\sqrt{170}}{10} - 81 = \frac{\sqrt{170}}{5} - 81}$$

Ocurre para $x = 4 \pm \sqrt[4]{1530}$

Análisis Matemático / 21 de junio de 2025 / José Carlos López Henestrosa

Actividad 2

$$f(x) = (x+6)^2 \ln(x+6) \qquad f: (-6, +\infty) \to \mathbb{R}$$

a) Primera derivada y su valor en $x = -5$

Desglose regla del producto:

- $u(x) = (x+6)^2$
- $v(x) = \ln(x+6)$

Fórmula: $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Cálculo del desglose:

- $u'(x) = 2(x+6)$
- $v(x) = \ln(x+6)$
- $v'(x) = \dfrac{1}{x+6}$

Entonces:

$$f'(x) = 2(x+6)\ln(x+6) + (x+6)^2 \cdot \frac{1}{x+6}$$

Simplificamos el segundo término:

$$(x+6)^2 \cdot \frac{1}{x+6} = (x+6)$$

Por lo que queda:

$$f'(x) = 2(x+6)\ln(x+6) + (x+6)$$

A partir de la derivada, la evaluamos en $x=-5$:

$$\boxed{f'(-5)} = 2(-5+6)\ln(-5+6) + (-5+6) = 2(1)(0) + 1 = 0 + 1 = \boxed{1}$$

Análisis Matemático / 22 de junio de 2025 / José Carlos López Henestrosa

Actividad 2 (cont.)

b) Segunda derivada y su valor en $x=-5$

Derivamos cada término por separado de:

$$f'(x)=2(x+6)\ln(x+6)+(x+6)$$

- $\frac{d}{dx}\left[2(x+6)\ln(x+6)\right]=2\left[\ln(x+6)+\frac{x+6}{x+6}\right]=\boxed{2\left[\ln(x+6)+1\right]}$

Donde:

- $u(x)=2(x+6)$
- $v(x)=\ln(x+6)$

- $\frac{d}{dx}\left[x+6\right]=\boxed{1}$

Entonces, la segunda derivada es:

$$\boxed{f''(x)}=2\left[\ln(x+6)+1\right]+1=2\ln(x+6)+2+1=\boxed{2\ln(x+6)+3}$$

Ahora, la evaluamos en $x=-5$:

$$\boxed{f''(-5)=2\cdot 0+3=3}$$

c) Calcular el polinomio de Taylor de grado 5 de $f(x)$ alrededor de $x=-5$

El polinomio de Taylor de grado 5 centrado en $x=-5$ es:

$$P_5(x)=f(-5)+f'(-5)(x+5)+\frac{f''(-5)}{2!}(x+5)^2+\frac{f'''(-5)}{3!}(x+5)^3$$
$$+\frac{f''''(-5)}{4!}(x+5)^4+\frac{f'''''(-5)}{5!}(x+5)^5$$

Análisis Matemático / 21 de junio de 2025 / José Carlos López Henestrosa

Tenemos los siguientes datos:

- $f(-5) = (1)^2 \cdot \ln(1) = 0$
- $f'(-5) = 1$
- $f''(-5) = 3$
- $f'''(-5) = 2$
- $f''''(-5) = -2$
- $f'''''(-5) = 4$

Por lo tanto, sustituimos dichos valores en la fórmula:

$$P_5(x) = 0 + 1(x+5) + \frac{3}{2}(x+5)^2 + \frac{2}{6}(x+5)^3 - \frac{2}{24}(x+5)^4 + \frac{4}{120}(x+5)^5$$

Simplificamos los coeficientes:

- $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $-\frac{2}{24} = -\frac{1}{12}$
- $\frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

Por lo que el polinomio final simplificado es:

$$\boxed{P_5(x) = (x+5) + \frac{3}{2}(x+5)^2 + \frac{1}{3}(x+5)^3 - \frac{1}{12}(x+5)^4 + \frac{1}{30}(x+5)^5}$$

c) Término a añadir para obtener el polinomio de Taylor de grado 6 en $x=-5$

La fórmula del término de grado 6 es:

$$\frac{f^{(6)}(-5)}{6!}(x+5)^6$$

Sabemos que $f^{(6)}(-5) = -12$ y que $6! = 720$. Por lo tanto, el término a añadir es:

$$-\frac{12}{720}(x+5)^6 = \boxed{-\frac{1}{60}(x+5)^6}$$

Análisis Matemático / 21 de julio de 2025 / José Carlos López Henestrosa

Actividad 3

$f(x) = 9\left(\frac{x+5}{16}\right)^2$ para $x \in [-5,5]$

a) Calcular $F(x) = \int f(x)dx$ que satisface que $F(-5) = 144$

Reescribo la función para facilitar la integración:

$$f(x) = 9\left(\frac{x+5}{16}\right)^2 = 9 \cdot \frac{(x+5)^2}{16^2} = \boxed{\frac{9}{256}(x+5)^2}$$

Calculamos la integral definida usando esta fórmula:

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C$$

La aplicamos:

$$F(x) = \int \frac{9}{256}(x+5)^2 dx = \frac{9}{256}\int (x+5)^2 dx = \frac{9}{256} \cdot \frac{(x+5)^3}{3} + C =$$

$$= \boxed{\frac{3}{256}(x+5)^3 + C}$$

Usamos la condición del enunciado $F(-5) = 144$

$$F(-5) = \frac{3}{256}(-5+5)^3 + C = \frac{3}{256}(0)^3 + C = C$$

Entonces:

$$C = 144$$

Por lo que el resultado final es:

$$\boxed{F(x) = \frac{3}{256}(x+5)^3 + 144}$$

Actividad 3 (cont.)

b) Calcular $Área = \int_{-5}^{5} f(x)\,dx$

Aplicamos el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = F(5) - F(-5)$$

Sabemos que $F(-5) = 144$, por lo que calculamos $F(5)$:

$$\boxed{F(5) = \frac{3}{256}(5+5)^3 + 144 = \frac{3}{256}(10)^3 + 144 = \frac{3}{256}\cdot 1000 + 144 = \frac{3000}{256} + 144 = \frac{375}{32} + 144}$$

Aplicamos el teorema:

$$\boxed{Área = F(5) - F(-5) = \left(\frac{375}{32} + 144\right) - 144 = \frac{375}{32}}$$

Este resultado es el área entre la gráfica de la función, el eje de abscisas OX y la recta $x=5$.

Actividad 4

$f(x) = p + \frac{1040}{(x+2)^3}$ para $x \geq 0$, donde $p \geq 0$ es un parámetro real.

a) Calcular $F(x)$

$$F(x) = \int \left(p + \frac{1040}{(x+2)^3}\right) dx$$

Dividimos la integral en dos partes:

$$F(x) = \int p\,dx + \int \frac{1040}{(x+2)^3}\,dx$$

Para integrar $\int \frac{1040}{(x+2)^3}\,dx$, podemos hacer lo siguiente

$$\int \frac{1}{(x+2)^3}\,dx = \int (x+2)^{-3}\,dx = \frac{(x+2)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(x+2)^2}$$

Actividad 4 (cont.)

Por lo tanto:

$$\boxed{\int \frac{1040}{(x+2)^3}dx = 1040\left(-\frac{1}{2(x+2)^2}\right) = -\frac{520}{(x+2)^2}}$$

Combinamos los resultados de las dos partes:

$$\boxed{F(x) = px - \frac{520}{(x+2)^2}}$$

b) $\text{Int} = \int_1^{+\infty}\left(p + \frac{1040}{(x+2)^3}\right)dx$

Separamos la integral en dos partes:

$$\int_1^{+\infty}\left(p + \frac{1040}{(x+2)^3}\right)dx = \int_1^{+\infty} p\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{1040}{(x+2)^3}dx$$

Estudiamos la convergencia de cada parte:

- $\int_1^{+\infty} p\,dx = p\int_1^{+\infty} dx$

Diverge si $p > 0$, ya que $\int_1^{+\infty} dx = \infty$. No obstante, si $p = 0$, entonces la integral es 0 y converge.

- $\int_1^{+\infty}\frac{1040}{(x+2)^3}dx$

Converge porque el exponente del denominador es mayor que 1. De hecho, se puede calcular:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1040}{(x+2)^3}dx$$

Aplicamos cambio de variable $u = x+2 \Rightarrow du = dx$

Cuando $x = 1$, entonces $u = 3$.

Cuando $x \to \infty$, $u \to \infty$

Actividad 4 (cont.)

Entonces:

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1040}{(x+2)^3}dx} = \int_3^{+\infty} \frac{1040}{u^3}du = 1040\int_3^{+\infty} u^{-3}du = 1040\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_3^{+\infty} =$$

$$= 1040\left(0 - \left(-\frac{1}{2\cdot 3^2}\right)\right) = 1040 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1040}{18} = \boxed{\frac{520}{9}}$$

La integral converge cuando $\boxed{p=0}$, en cuyo caso, su valor es $\boxed{\frac{520}{9}}$.

Actividad 5

$$a_n = 6 \cdot \frac{5^n}{4^n} + 5 \;,\; n \geq 0$$

a) Tres primeros términos de la sucesión

Simplificamos la fracción: $\frac{5^n}{4^n} = \left(\frac{5}{4}\right)^n$

Entonces:

$$a_n = 6\left(\frac{5}{4}\right)^n + 5$$

Ahora, calculamos los tres primeros términos:

- $n=0$

$$\boxed{a_0} = 6\left(\frac{5}{4}\right)^0 + 5 = 6 \cdot 1 + 5 = \boxed{11}$$

- $n=1$

$$\boxed{a_1} = 6\left(\frac{5}{4}\right)^1 + 5 = 6 \cdot \frac{5}{4} + 5 = \frac{30}{4} + 5 = \frac{30}{4} + \frac{20}{4} = \frac{50}{4} = \boxed{12,5}$$

- $n=2$

$$\boxed{a_2} = 6\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 5 = 6 \cdot \frac{25}{16} + 5 = \frac{150}{16} + 5 = \frac{150}{16} + \frac{80}{16} = \frac{230}{16} =$$

$$= \boxed{14,375}$$

Por tanto, los tres primeros términos son:

$$\boxed{a_0 = 11 \;,\; a_1 = 12,5 \;,\; a_2 = 14,375}$$

Actividad 5 (cont.)

b) Escribir S_n de la serie asociada a la sucesión anterior.

Serie asociada = sucesión de sumas parciales:

$S_n = a_0 + a_1 + a_n$

En el apartado a) ya calculamos los valores de a_0, a_1 y a_n, por lo que:

$\boxed{S_n = 11 + 12{,}5 + 14{,}375 = 37{,}875}$

c) Calcular el límite de la sucesión $\lim_{x \to +\infty} a_n$

Dado que $\frac{5}{4} > 1$, la sucesión $\left(\frac{5}{4}\right)^n$ diverge a $+\infty$ cuando $n \to +\infty$.

Por lo tanto:

$a_n = 6\left(\frac{5}{4}\right)^n + 5 \to 6(+\infty) + 5 = +\infty$

Entonces:

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} a_n = +\infty}$

La sucesión no tiene límite finito, ya que tiende a infinito.