

## Presentación

Esta PEC profundiza en los conceptos básicos de la teoría de grafos que cubren los contenidos estudiados en los módulos 4 y 5 de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre grafos, como una de las clases más importantes de grafos, los árboles, así como dos de los problemas más notables de recorridos de grafos, los grafos eulerianos y los grafos hamiltonianos.

## Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuado en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlo.

## Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Saber caracterizar los árboles y, específicamente, los árboles con raíz.
- Saber aplicar los algoritmos de determinación de un árbol generador minimal.
- Identificar los grafos eulerianos y hamiltonianos y caracterizarlos.
- Entender el problema del viajante de comercio (TSP). Conocer y saber aplicar el algoritmo de resolución aproximada de este problema.

## Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un  $25\% = 5\% + 5\% + 5\% + 5\% + (1\% + 2\% + 2\%)$ ).

Una empresa multinacional diseña su red informática con una estructura jerárquica en forma de árbol. Cada servidor principal puede tener hasta tres servidores secundarios conectados directamente. El servidor raíz corresponde al **centro de datos central** (nivel 1) y los niveles inferiores representan delegaciones conectadas jerárquicamente.

### Datos:

- Cada servidor puede tener como máximo 3 conexiones descendentes (**árbol 3-ario**).
  - La red tiene un total de **6 niveles**.
  - El coste de cada enlace entre servidores es de **150 €**.
- a) Calcula el número total máximo de servidores (nodos) que puede tener la red si todos los niveles están completamente ocupados.
  - b) Determina cuántos servidores serían hojas (sin conexiones descendentes) si todos los niveles están completamente ocupados.
  - c) Cada enlace entre servidores cuesta 150 €. Calcula el coste total de conexiones si la red se instala con todos los enlaces necesarios si todos los niveles están completamente ocupados..
  - d) Si un servidor del nivel 3 deja de funcionar, ¿cuántos servidores quedarían inaccesibles? Asumimos que en la red inicial todos los niveles están completamente ocupados.
  - e) Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica brevemente tu respuesta:
    - (I) Todo grafo con  $n$  vértices y  $n - 1$  aristas es necesariamente un árbol.
    - (II) En un árbol con dos o más vértices, siempre hay al menos dos vértices de grado 1
    - (III) Si un grafo es acíclico y tiene una única componente conexa, es un árbol.

---

### Solución:

- a) Árbol 3-ario con  $n = 6$  niveles en el que todos los niveles están completamente ocupados, tiene un número total máximo de nodos de:

$$N = \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{2} = 364$$

b)

$$L = m^{n-1} = 3^5 = 243$$

**Resultado:**  $L = 243$  servidores hoja.

c) Un árbol con  $N$  nodos tiene  $E = N - 1$  aristas.

$$E = 364 - 1 = 363 \Rightarrow \text{Coste} = 363 \times 150 = 54\,450 \text{ €}$$

**Resultado:** 54 450 €.

d) Si un nodo de nivel 3 falla, toda su subárbol queda aislado. Cada subárbol de profundidad 3 contiene:

$$\frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 13 \text{ nodos}$$

**Resultado:** 13 servidores quedarían inaccesibles. Ese nodo actúa como un **vértice de articulación**. También es válido como resultado 14: los 13 descendientes más el que ha caído.

- e) (i) **Falso.** Un grafo con  $n$  vértices y  $n - 1$  aristas puede no ser conexo. Un ejemplo es el grafo formado por  $C_3$  y un vértice aislado.  
(ii) **Verdadero.** Todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos hojas (proposición demostrada en el módulo *Árboles*).  
(iii) **Verdadero.** Es precisamente una de las definiciones equivalentes de árbol: grafo acíclico y conexo.

2. (Valoración de un 25% = 10% + 10% + 5%) La base marciana *Prometeo* está formada por varios módulos habitables (A–F) conectados mediante túneles presurizados. El coste energético de mantener activo uno de los túneles depende de las condiciones ambientales, representadas por el parámetro real  $r \geq 0$ ; mientras que otros mantienen un valor fijo. Todos los costes se muestran en la tabla siguiente:

	A	B	C	D	E	F
A	0	4	-	-	10	12
B	4	0	6	11	-	7
C	-	6	0	5	-	-
D	-	11	5	0	3	-
E	10	-	-	3	0	$1 + r$
F	12	7	-	-	$1 + r$	0

Un – indica que no existe conexión directa.

- a) Determina la forma más económica, así como el coste asociado, de conectar todos los módulos en función de  $r$ .
- b) Cada mañana, antes del inicio de operaciones, el sistema central de control reinicia la red de túneles. Todas las compuertas permanecen cerradas y el protocolo ordena reactivar la red comenzando desde el módulo A. En cada paso, el sistema selecciona el túnel de menor coste que conecta con alguno de los módulos ya activos, asegurándose de no formar bucles en la red.

¿Cuál crees que es el algoritmo que describe estas instrucciones? Realiza la apertura de los túneles siguiendo este procedimiento, indicando el orden de activación y el coste total del sistema un día en que  $r = 8$ .

- c) Con la red ya operativa para el caso  $r = 8$ , el sistema debe inspeccionar todas las compuertas.

Representa la red de túneles abiertos obtenida en el apartado anterior como un árbol con raíz en el módulo A. En caso de que un módulo tenga un único hijo, se considerará como hijo izquierdo. Si tiene varios, ordénalos alfabéticamente de izquierda a derecha.

Si el árbol obtenido es binario, indica el orden en que el sistema visitaría los módulos si la inspección se realiza en **preorden**, **inorden** o **postorden**.

En los apartados en los que sea necesario utilizar algoritmos, estos deben corresponder a los presentados en los módulos de la asignatura y deben incorporarse siguiendo el mismo formato y nomenclatura utilizados en ellos.

### Solución:

- a) Se pide determinar el árbol generador minimal. Para ello seguimos Kruskal y ordenamos las aristas por coste y seleccionamos las 5 más económicas sin formar ciclos hasta conectar todos los puntos. Será necesario considerar varios casos.

Sin considerar las aristas de peso variable se tiene la siguiente ordenación:

Arista	Costo
$\{D, E\}$	3
$\{A, B\}$	4
$\{C, D\}$	5
$\{B, C\}$	6
$\{B, F\}$	7
$\{A, E\}$	10
$\{B, D\}$	11
$\{A, F\}$	12

Observamos de la ordenación anterior que si  $r < 6$  entonces la arista  $\{E, F\}$  es la mejor opción para conectar  $F$  al árbol generador. Separamos en dos casos

Caso 1:  $r < 6$

Arista	Costo
$\{D, E\}^*$	3
$\{A, B\}^*$	4
$\{C, D\}^*$	5
$\{B, C\}^*$	6
$\{E, F\}^*$	$1+r$
$\{B, F\}$	7
$\{A, E\}$	10
$\{B, D\}$	11
$\{A, F\}$	12

Por comodidad, se ha escrito la arista  $\{E, F\}$  en quinta posición, aunque esta varia realmente en función del valor concreto de  $r$ .

El árbol generador minimal es  $\{\{D, E\}, \{A, B\}, \{C, D\}, \{B, C\}, \{E, F\}\}$  de coste  $19 + r$ .

Caso 2:  $6 \leq r$

Arista	Costo
$\{D, E\}^*$	3
$\{A, B\}^*$	4
$\{C, D\}^*$	5
$\{B, C\}^*$	6
$\{B, F\}^*$	7
$\{E, F\}$	$1+r$
$\{A, E\}$	10
$\{B, D\}$	11
$\{A, F\}$	12

Como antes, la posición concreta de la arista  $\{E, F\}$  varía en función de  $r$ , pero es irrelevante pues queda descartada en todo caso.

El árbol generador minimal es  $\{\{D, E\}, \{A, B\}, \{C, D\}, \{B, C\}, \{B, F\}\}$  de coste 25.

- b) Se trata del algoritmo de Prim empezando en el vértice A. La tabla de aplicación del algoritmo que se obtiene es la siguiente:

A	B	C	D	E	F
$(0, A)^*$	$(\infty, A)$				
$(0, A)$	$(4, A)^*$	$(\infty, A)$	$(\infty, A)$	$(10, A)$	$(12, A)$
$(0, A)$	$(4, A)$	$(6, B)^*$	$(11, B)$	$(10, A)$	$(7, B)$
$(0, A)$	$(4, A)$	$(6, B)$	$(5, C)^*$	$(10, A)$	$(7, B)$
$(0, A)$	$(4, A)$	$(6, B)$	$(5, C)$	$(3, D)^*$	$(7, B)$
$(0, A)$	$(4, A)$	$(6, B)$	$(5, C)$	$(3, D)$	$(7, B)^*$

El coste que se obtiene es de 25.

- c) El árbol obtenido para  $r = 8$  con raíz el vértice A es

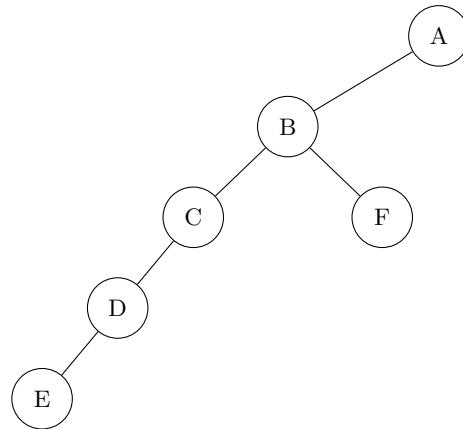


Figura 1: Árbol de expansión mínima (raíz A,  $r = 8$ )

Y se obtienen los siguientes recorridos:

- Preorden: A, B, C, D, E, F
- Inorden: E, D, C, B, F, A
- Postorden: E, D, C, F, B, A

3. (Valoración de un  $25\% = 5\% + (2\% + 2\% + 5\%) + 5\% + (2\% + 2\% + 2\%)$ )

- a) Explica con tus palabras qué diferencia existe entre un *grafo euleriano* y un *grafo hamiltoniano*.

- b) Indica las condiciones necesarias y suficientes (o señala que no existen/se desconocen) para que un grafo conexo sea:
- 1) euleriano,
  - 2) semieuleriano (tenga recorrido euleriano),
  - 3) hamiltoniano.
- c) Explica porqué es más sencillo determinar si un grafo es euleriano que saber si es hamiltoniano.
- d) Considera el siguiente grafo  $G = (V, A)$  con vértices

$$V = \{ A, B, C, D, E, F \}$$

y aristas

$$A-B, A-C, B-C, B-D, C-E, D-E, D-F, E-F.$$

- 1) Calcula el grado de cada vértice.
- 2) Determina si  $G$  es euleriano o semieuleriano.
- 3) Determina si  $G$  es hamiltoniano. Si lo es, escribe un posible ciclo hamiltoniano. En caso contrario, justifica por qué.

### Solución:

- a) Un **grafo euleriano** contiene un *ciclo* que recorre **todas las aristas** exactamente una vez (los vértices pueden repetirse). Un **grafo hamiltoniano** contiene un *ciclo* que recorre **todos los vértices** exactamente una vez (sin repetirlos, salvo el inicial y final).
- b) Condiciones:
- i) **Euleriano:** el grafo es conexo y todos los vértices tienen **grado par**.
  - ii) **Semieuleriano:** el grafo es conexo y exactamente **dos vértices tienen grado impar**.
  - iii) **Hamiltoniano:** no se conoce una condición simple. De hecho, se trata de un problema NP-completo (se verá en los módulos 6 i 7). Hay criterios suficientes (por ejemplo, *Dirac*: si todos los vértices tienen  $g(v) \geq n/2$  en un grafo de  $n$  vértices, entonces es hamiltoniano), pero no necesarios. Decidir si un grafo es hamiltoniano es un problema **NP-completo**.
- c) Determinar si el grafo es euleriano es sencillo porque existe una condición necesaria y suficiente que es clara y fácil de comprobar: el grafo tiene que ser conexo y todos los vértices tiene que tener grado par. En cambio para los grafos hamiltonianos no existe esta condición, requiere explorar posibles recorridos hasta encontrar uno que visite todos los vértices o demostrar que no existe.

d)

$$A-B, A-C, B-C, B-D, C-E, D-E, D-F, E-F$$

**Grados:**

$$g(A) = 2, \quad g(B) = 3, \quad g(C) = 3, \quad g(D) = 3, \quad g(E) = 3, \quad g(F) = 2$$

- 1) Vértices con grado impar:  $B, C, D, E$  (cuatro vértices impares).  $\Rightarrow G$  no es euleriano ni semieuleriano.
- 2) No es semieuleriano porque tiene más de dos vértices con grado impar.
- 3) Para la hamiltonianidad: El grafo es conexo y suficientemente denso (8 aristas, 6 vértices). Existe un ciclo que recorre todos los vértices exactamente una vez:

$$A - B - D - F - E - C - A$$

 $\Rightarrow G$  es hamiltoniano.

Es hamiltoniano, pero no euleriano.

---

**4. (Valoración de un 25 %) Cuestionario de evaluación Canvas**

Dentro del aula de la asignatura, en el Campus Virtual, encontraréis un cuestionario con diversas preguntas que debéis resolver como último ejercicio de esta PEC.

Leed atentamente las siguientes instrucciones **antes de abrir el cuestionario**:

- Los contenidos que se evalúan en este cuestionario corresponden al módulo “Árboles” y “Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos”. Es importante que hayáis asimilado estos conocimientos **antes de abrir el cuestionario**.

- El cuestionario estará abierto durante el plazo de la PEC y lo podéis resolver cuando queráis. De todas formas, una vez lo abráis tendréis un **tiempo limitado** para resolverlo (1 hora).

**Importante:** El cuestionario quedará cerrado a las 23:59 de la fecha límite de entrega. Si empezáis a hacerlo después de las 22:59 del último día, ¡tendréis menos de una hora para hacerlo!

- Las respuestas a las preguntas se tienen que introducir directamente en el cuestionario Canvas. No es necesario que las entreguéis junto con el resto de respuestas de la PEC.

- Las preguntas del cuestionario son aleatorias: cada estudiante recibirá un enunciado diferente.

- En algunas preguntas tendréis que introducir la respuesta en un formato específico (p. ej. con los valores ordenados de una determinada forma y sin espacios). Es muy importante **seguir fielmente el formato indicado** a la hora de introducir vuestra respuesta.

- Disponéis de **2 intentos** para resolver el cuestionario. El objetivo de tener dos intentos es poder solventar posibles problemas que hayáis tenido en la realización del cuestionario, ya sean problemas técnicos o bien que hayáis abierto el cuestionario por error. Por tanto, debéis tener en cuenta que:
  - La nota que obtendréis en el cuestionario será la de vuestro último intento.
  - Después del 1<sup>er</sup> intento, no recibréis la calificación obtenida ni recibréis feedback sobre vuestra propuesta de solución. Por lo tanto, no recomendamos usar el 2º intento para intentar mejorar nota, ya que puede ser que obtengáis una nota inferior.
  - Si usáis el 2º intento, el enunciado que encontraréis será diferente del 1<sup>er</sup> intento.
  - Podéis realizar los dos intentos en días diferentes, siempre que sea dentro del plazo de la PEC. Dispondréis de 1 hora para cada intento.
  - Cada vez que iniciéis el cuestionario contará como un intento, aunque no enviéis la respuesta. Por ejemplo, **si habéis hecho el 1<sup>er</sup> intento y volvéis a abrir el cuestionario, invalidaréis vuestro 1<sup>er</sup> intento y os quedaréis con la nota del 2º**.

## Recursos

### Recursos Básicos

- Módulo didáctico 4. árboles.
- Módulo didáctico 5. Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos.
- Colección de problemas.

### Recursos Complementarios

- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

### Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**. En caso de que hayáis consultado recursos externos, es necesario referenciarlos.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

### Formato y fecha de entrega

Hay que entregar un **único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. **La extensión máxima del documento es de 10 páginas.** El nombre del fichero tiene que ser: **PEC2\_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar **antes de las 23:59 del día 24/11/2025**. **No se aceptarán entregas fuera de plazo.**