Integración 2 (solución)

Solución

En primer lugar, debemos analizar la gráfica. Observamos que el área de la función entre a y b es de 10 unidades cuadradas y que la distancia entre a y b es de 3 unidades, esto nos dice que

$$\int_a^b x^2 = 10.$$

y que $b - a = 3$. Ahora vamos a calcular la integrales utilizando las propiedades que sabemos:

1. $\displaystyle\int_a^b 4x^2dx = 4 \cdot \int_a^b x^2dx = 4 \cdot 10 = 40.$
2. $\displaystyle\int_a^b (x^2 + 5)dx = \int_a^b x^2dx + \int_a^b 5dx = 10 + 5 \cdot \underbrace{(b - a)}_{=3} = 10 + 15 = 25.$
3. $\displaystyle\int_a^b \left(-\frac{1}{7}x^2\right) dx = -\frac{1}{7} \cdot \int_a^b x^2dx = -\frac{1}{7} \cdot 10 = \frac{-10}{7}$
4. En este caso nos conviene hacer un cambio de variable $u = x - 1$, $du = dx$ (recordemos que también debemos cambiar los límites de integración sustituyendo en el cambio propuesto) entonces

$$\int_{a+1}^{b+1} (x - 1)^2dx = \int_a^b u^2du = 10$$

Ahora vamos a calcular los valores de a y b. Recordemos que $b - a = 3$ y por lo tanto $b = 3 + a$

$$\int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{3}((3 + a)^3 - a^3) = 10$$

Si operamos obtenemos una ecuación de segundo grado $\frac{1}{3}(9a^2 + 27a + 27) = 10 \Leftrightarrow 3a^2 + 9a - 1 = 0$. Al resolverla obtenemos dos soluciones: $a_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{93}}{6}$ y $a_2 = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{93}}{6}$. Descartamos la segunda porque es negativa y según el gráfico a y b son valores positivos, por lo tanto $\boxed{a = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{93}}{6}}$. Finalmente, pasamos a calcular $\boxed{b = 3 + a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{93}}{6}}$.