ÀLGEBRA

SOLUCIÓ EXAMEN

15 de juny 2019

1. Responeu als apartats següents:

   a) Expresseu en forma polar el nombre complex següent: $-1+i$

   b) Calculeu totes les arrels terceres del nombre complex següent: $\frac{-27}{i}$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Resolució:

a) Per resoldre aquest apartat apliquem les explicacions del punt 3.4.1. del mòdul imprès, "De la forma binòmica a polar". Primer trobem el mòdul:

$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

A continuació trobem l'argument:

Com que $a=-1>0$ i $b=1$ tenim:

$\vartheta=arctg\frac{1}{-1}=arctg(-1)=135^{\circ}$

NOTA ACLARIDORA: Sabem que la tangent d'un angle val -1 a 135º i en 315º. Com l'afix del punt buscat és (-1, 1) l'angle està en el segon quadrant, és a dir, en 135 º.

Com es diu en l'exercici 19 d'autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre complex $-1+i$ en el pla complex. Aquest número està associat al punt (-1, 1), per tant, és un nombre que es troba en el segon quadrant.

Per tant, la resposta es: $-1+i=\sqrt{2}_{135^{\circ}}$

b) Mirem l'exercici d'autoavaluació 30 de la pàgina 50 del material imprès. Es demana determinar les arrels terceres de $\frac{-27}{i}$.

Primer de tot hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Per a això multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s'explica en l'apartat 3.3.4, pàgina 26, del material imprès sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica) i agrupem part real i part imaginària

$$\frac{-27}{i}=\frac{(-27)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{27i}{1}=27i$$

Per determinar les arrels terceres de $27i$ vam determinar primer el mòdul i l'argument d'aquest:

$$m=\sqrt{0^2+(27)^2}=27$$

$$\alpha=arctg\frac{27}{0}=arctg(\infty)=90^{\circ}$$

(Observem que, en ser la part real nul·la, no cal sumar ni restar cap quantitat, tal com es diu en l'apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del mòdul imprès).

Tenim, per tant, que $27i=27_{90^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels terceres, hem de fer:

$\left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{90^{\circ}+360^{\circ}k}{3}}$ per a k=0, 1,2

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=\sqrt[3]{27}=3$ (això és sobre els reals)

Els arguments de les arrels són $\beta_k=\dfrac{90^{\circ}+360^{\circ}k}{3}$ per a k=0, 1,2

- Si k=0, tenim que $\beta_0=30^{\circ}$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=30^{\circ}+120^{\circ}=150^{\circ}$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=30^{\circ}+240^{\circ}=270^{\circ}$

Per tant, les arrels terceres, en forma polar, són:

$$\boxed{3_{30^{\circ}}}$$

$$\boxed{3_{150^{\circ}}}$$

$$\boxed{3_{270^{\circ}}}$$

2. Sigui F un subespai vectorial de dimensió 2 de $\mathbb{R}^4$ definit de la forma següent:

$$F = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4) | a_1 = 2a_2, a_4 = -2\,a_3 \rangle$$

I sigui $v = (6, 3, -3, 6)$.

a) Comproveu que $A = \{(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -2)\}$ és una base de F. Pertany v a F? En cas afirmatiu, calculeu les seves coordenades en la base A.

b) Sigui $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriu de canvi de base d´una base B a la base A. Quina és la base B?

Resolució:

a) Com que sabem que la dimensió de F és 2, només cal mirar que els vectors d'A pertanyen a F i que siguin linealment independents.
Primer de tot comprovem que els vectors de A pertanyen a F comprovant que es compleixen les condicions $a_1=2a_2$, $a_4=-2a_3$ per als dos vectors, cosa que és certa.
Seguidament comprovem que són linealment independents calculant:

$$rang \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs A és una base de F.

Per veure si v pertany a F mirem si té solució el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=3, y=-3 i per tant v pertany a F i les seves coordenades en la base A són (3,-3).

b) La matriu de canvi de base de B a A expressa els vectors de la base de B en funció dels de la d'A. Així doncs, si agafem les columnes de la matriu C ja tenim que els dos vectors de la base B seran:
1·(2,1,0,0)+1·(0,0,1,-2) = (2,1,1,-2)
2·(2,1,0,0)+(-1)·(0,0,1,-2) = (4,2,-1,2)
Per tant B={(2,1,1,-2), (4,2,-1,2)}.

3. Considereu el sistema d´equacions lineals:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x + 4y + (a-1)z = 2a+1 \\ 2x + (a+2)y - z = a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema pels diferents valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculeu les solucions del sistema per $a = 0$.

Resolució:

a) Per discutir-lo utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Veure mòdul 3, apartat 4, pàg. 13]

La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & a-1 & 2a+1 \\ 2 & a+2 & -1 & a \end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - 3a + 4 = -(a-1)(a+4)$$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -4 \to \operatorname{rang}(A) = 3 = \operatorname{rang}(M) = \text{num. incògnites} \to$ $\boxed{\text{S. Comp. Determinat}}$.
- Si $a = 1 \to \operatorname{rang}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculem, per $a = 1$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \operatorname{rang}(M) = 2 \to \boxed{\text{S. Comp. Indeterminat}}.$$
- Si $a = -4 \to \operatorname{rang}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Per altra banda, per $a = -4$, la matriu ampliada té un menor d'ordre 3 no nul:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -7 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \to \operatorname{rang}(M) = 3 \to \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Considerem la matriu ampliada del sistema quan $a = 0$ i apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

(1) Operacions: F2=F2-3·F1 i F3=F3-2·F1.

(2) Operacions: F3=F3-F2.

D'on s'obté el sistema i la solució següent:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ -2y + 5z = 4 \\ -2z = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ -2y + 5z = 4 \\ z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases}}$$

4. Sigui f l´aplicació linial de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida per:

$$f(x,y,z,t) = (z+t, z+t, x+y, x+y)$$

a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.

b) Calculeu una base del subespai ker(f) (nucli de f).

c) Digueu si el vector $u = (1,1,1,1)$ és vector propi de f.

d) Trobeu vectors propis de f de valor propi -2.

e) Estudieu si f diagonalitza i trobeu una base de $\mathbb{R}^4$ amb el nombre màxim de vectors propis de f.

Resolució:

a) f(1,0,0,0)=(0,0,1,1), f(0,1,0,0)=(0,0,1,1), f(0,0,1,0)=(1,1,0,0) i f(0,0,0,1)=(1,1,0,0). Aquests vectors imatge estan expressats en la base canònica. Per tant, posant-los per columnes, obtenim la matriu de f en les bases canòniques (veure Mòdul 4, Secció 3).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Per a trobar una base del ker(f) hem de resoldre el sistema A·X=0:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ens queda el sistema z+t=0, z+t=0, x+y=0, x+y=0. És a dir, t=-z, y=-x. Les solucions d'aquest sistema són els vectors de la forma: (x,y,z,t)=(x,-x,z,-z)=x(1,-1,0,0)+z(0,0,1,-1). En particular, una base del ker(f) és la donada pels vectors a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1).

Una base del Ker(f) ve donada per a=(1,-1,0,0) i b=(0,0,1,-1).

c) Per a comprovar si el vector u és vector propi de f és suficient multiplicar la matriu A per u i veure si dóna un múltiple de u:

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Així, com que A·u=2u, tenim que el vector u és vector propi de f de valor propi 2.

u és vector propi de f de valor propi 2.

d) Usem el Mòdul 4, Secció 7, per a trobar els vectors propis de f de valor propi -2. Trobem una base del nucli de la matriu A-(-2)I=A+2I . O sigui, resolem el sistema (A+2I)X=0:

$$(A+2\cdot I)\cdot X=\begin{pmatrix}2&0&1&1\\0&2&1&1\\1&1&2&0\\1&1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ens queda el sistema 2x+z+t=0, 2y+z+t=0, x+y+2z=0, x+y+2t=0. Restant la segona equació a la primera queda: 2x-2y=0. O sigui, x=y. Restant la quarta equació a la tercera queda: 2z-2t=0. O sigui, z=t. Substituint z=t en la primera equació queda: 2x+t+t=0. O sigui 2x=-2t i x=-t. Les solucions d'aquest sistema són vectors de la forma: (x,y,z,t)=(-t,-t,t,t)=t(-1,-1,1,1). En particular, (-1,-1,1,1) és vector propi de f de valor propi -2.

e) L'aplicació lineal f diagonalitza perquè la seva matriu en les bases canòniques és simètrica (veure Mòdul 4, Secció 8).
Els vectors linealment independents a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1) generen el nucli. Per tant, a i b són dos vectors propis de f de valor propi 0. D'altra banda, u=(1,1,1,1) és vector propi de f de valor propi 2 i v=(-1,-1,1,1) és vector propi de f de valor propi -2. Així:

{a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1), u=(1,1,1,1), v=(-1,-1,1,1)} és una base de R^4 formada per vectors propis de f.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels valors següents:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$