

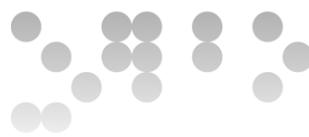
Solución Examen 1

2017-2018 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 09.06.2018



1. Responded a los siguientes apartados:

- Expresad en forma polar el siguiente número complejo: $z = \sqrt{3} - i$.
- Hallad un número complejo, z , sabiendo que una de sus raíces octavas es $-1 + i$. Proporcionad el resultado en forma binómica y polar.

Solución:

- Partimos de un número complejo en forma binómica y queremos pasarlo a polar. Para ello seguiremos el proceso que se dice en la página 30, apartado 3.4.1, del material impreso sobre cómo pasar un número complejo a polar:

Primero calculamos el argumento y luego el módulo:

$$m = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\alpha = \arctg \frac{-1}{\sqrt{3}} = \arctg \frac{-\sqrt{3}}{3} = 330^\circ$$

$$(*) \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{(-1) \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

(Observemos que, al ser la parte real positiva y la parte imaginaria negativa no hay que sumar ni restar ninguna cantidad).

Por tanto, la respuesta es:

$\sqrt{3} - i = 2_{330^\circ}$

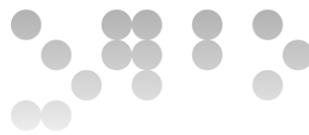
- Expresamos $-1 + i$ en forma polar.

Para ello determinaremos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{1}{-1} = \arctg(-1) = 135^\circ$$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en 135° y en 315° . Como el afijo del punto buscado es $(-1,1)$ el ángulo está en el segundo cuadrante, es decir, en 135° .



Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $-1+i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(-1,1)$, por lo tanto, es un número que se encuentra en el segundo cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $-1+i = \sqrt{2} \text{cis } 135^\circ$

Y ahora debemos hacer, tal como se dice en el apartado 3.5 de la página 38 del material impreso sobre el exponencial de un número complejo:

$$\begin{aligned} z &= (-1+i)^8 = (\sqrt{2} \text{cis } 135^\circ)^8 = 16 \text{cis } 8 \cdot 135^\circ = 16 \text{cis } 1080^\circ = 16 \text{cis } 3 \cdot 360^\circ + 0^\circ = 16 \text{cis } 0^\circ = 16 \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = \\ &= 16 \cdot (1+0i) = 16 \end{aligned}$$

(*): Ver página 31 del material impreso en que se habla de que la representación en forma polar no es única.

Por tanto el número buscado es $\boxed{z = 16 \text{cis } 0^\circ = 16}$

2. Sean $e_1 = (1,1,4), e_2 = (0,1,-1), e_3 = (1,2,3), e_4 = (1,5,0)$ vectores de \mathbb{R}^3 .

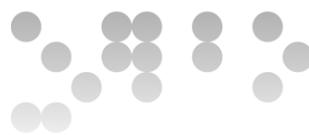
Sea $E = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$. Sea $v = (-2,3,-13)$.

- Calculad la dimensión de E y una base A . ¿Pertenece v a E ? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A .
- Sean $w_1 = (2,3,7), w_2 = (1,1,4)$. $B = \{w_1, w_2\}$ es una base de E . Calculad la matriz de cambio de base de B a A y la de A a B .

Solución:

- a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2$$



Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Así $A = \{e_1, e_2\}$.

Para mirar si w pertenece a E resolvemos el sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix}$

Este sistema tiene solución: $x=-2$, $y=5$. Así pues v pertenece a E, y sus coordenadas en la base A son $(-2, 5)$.

b) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A.

Para el vector $w_1=(2,3,7)$ resolvemos el sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Que tiene solución: $x=2$, $y=1$.

Para el segundo vector es directo, ya que es el primero de la base A.

De manera que la matriz de cambio de base de B a A será:

$$C_{B \rightarrow A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

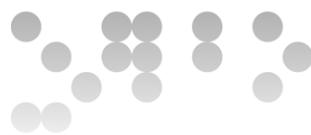
Para calcular la matriz de cambio de base de A a B podemos calcular directamente la inversa de la matriz anterior:

$$C_{A \rightarrow B} = C_{B \rightarrow A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay + t = 1 \\ 2x + (a+2)y + 2z + 3t = 5 \\ x + (a-1)y - z + (a+1)t = -a \\ x + (a+1)y + z + (a+3)t = 4 - a \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$.



- Discutid el sistema de ecuaciones para los diferentes valores del parámetro.
- Resolved el sistema para $a = 0$.

Solución:

- a) Tenemos un sistema de 4 ecuaciones y cuatro incógnitas. Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius. Calcularemos primero los valores de a que hacen que la matriz A tenga rango máximo, para estos valores el sistema será compatible determinado.

La matriz de coeficientes, A , y la matriz ampliada, A' , asociadas al sistema son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & a-1 & -1 & a+1 & -a \\ 1 & a+1 & 1 & a+3 & 4-a \end{array} \right)$$

Simplificamos operando:

$F4 - F1$, $F3 - F1$, $F2 - 2F1$ y en el siguiente paso $F4 + F3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -a+2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & a+2 & 3-a \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -a+2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & a & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+2 & 2-2a \end{array} \right)$$

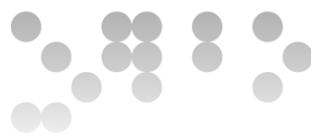
Estudiamos ara el rango de la matriz A .

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -a+2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+2 \end{array} \right| = (-a+2)(-2)(a+1) + 4 \cdot (a+1)$$

$$= (a+1)(2a-4+4) = (2a)(a+1)$$

$$rango(A) = 4 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ y } a \neq -1$$

- Caso I: Si $a \neq 0, -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 4 = rango(A') =$ número de incógnitas y por lo tanto el sistema es **Compatible Determinado**.
- Caso II: Si $a = 0$, la representación matricial es



$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ orlamos este menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Calculamos ahora el rango A' ; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

y por tanto tenemos $rango(A) = rango(A') = 3$ así que el sistema es **Compatible Indeterminado** con $(4-3=1)$ **1 grado de libertad**.

- Caso III: Si $a = -1$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

La última fila evidencia que el sistema será **Incompatible**.

En resumen:

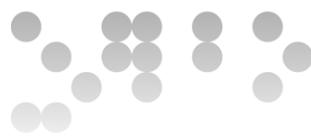
Si $a \neq 0, -1$, el sistema es Compatible Determinado.

Si $a = 0$ el sistema es Compatible Indeterminado con 1 grado de libertad.

Si $a = -1$ el sistema es Incompatible.

- b) Tenemos que hallar la solución para $a = 0$

Podemos resolver directamente el sistema por el método de Gauss.



$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Hemos simplificado con las siguientes operaciones: 2F3+ F2

$$\begin{cases} x + t = 1 \\ 2y + 2z + t = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 - z \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones serán todos los puntos que cumplan:

$$(0, 1-z, z, 1)$$

4. Sea f la aplicación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 definida por:

$$f(1,1,1) = (0,3,0), f(0,-1,0) = (0,2,0), f(1,1,0) = (4,4,0)$$

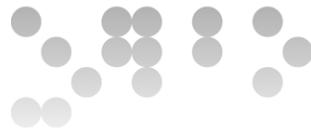
- Demostrad que $(1,1,1), (0,-1,0), (1,1,0)$ es una base de \mathbb{R}^3 .
- Calculad una base del subespacio Imagen de f . ¿Es f exhaustiva?
- Calculad una base del subespacio Ker (f), el núcleo de f . ¿Es f inyectiva?
- Hallad la matriz de f en la base $(1,1,1), (0,-1,0), (1,1,0)$. ¿Diagonaliza f ?

Solución:

- a) Denominamos $u=(1,1,1)$, $v=(0,-1,0)$, $w=(1,1,0)$. El determinante de u , v y w es:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Puesto que es diferente de cero, u, v y w son linealmente independientes. Puesto que son tres vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^3 , forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).



b) Para calcular el subespacio imagen es suficiente calcular la imagen de una base de \mathbb{R}^3 . Sabemos que la imagen de la base u, v, w de \mathbb{R}^3 es: $f(u)=(0,3,0)$, $f(v)=(0,2,0)$ y $f(w)=(4,4,0)$. Por lo tanto, $\text{Im}(f)=\langle(0,3,0), (0,2,0), (4,4,0)\rangle$. Es decir, $(0,3,0)$, $(0,2,0)$, $(4,4,0)$ generan el subespacio imagen. Observemos que el determinante de estos tres vectores es cero.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

De hecho, es claro que $f(u)$ y $f(v)$ son linealmente dependientes. En cambio, $f(u)=(0,3,0)$ y $f(w)=(4,4,0)$ son linealmente independientes. Por lo tanto, $f(u), f(w)$ son una base de la imagen. Así, f NO es exhaustiva ya que la imagen de f tiene dimensión 2 y en cambio el espacio de llegada tiene dimensión 3. (Ver Módulo 4, Sección 4.)

c) Recordemos que la fórmula de la dimensión dice que $\dim E = \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Nuc}(f)$. Puesto que $E=\mathbb{R}^3$ y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del núcleo es 1. Puesto que $2f(u)=3f(v)$, tenemos que $f(2u-3v)=0$. Es decir, el vector $2(1,1,1)-3(0,-1,0)=(2,5,2)$ es una base del núcleo. En particular, f NO es inyectiva. (Ver Módulo 4, Sección 5.)

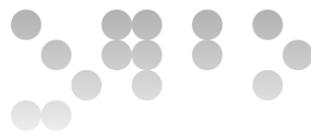
d) Tenemos $f(u)=(-3)v$, $f(v)=(-2)v$ y $f(w)=4w$. En particular, v es vector propio de f de valor propio -2 y w es vector propio de f de valor propio 4. La matriz de f en la base u, v, w es:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es:

$$Q(t) = \det(B - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ -3 & -2-t & 0 \\ 0 & 0 & 4-t \end{pmatrix} = (0-t)(-2-t)(4-t).$$

Por lo tanto, f tiene tres valores propios distintos que son el 0, el -2 y el 4. De aquí se deduce que f diagonaliza. Un vector propio de f de valor propio 0 es el $(2,5,2)$, el vector



que genera el núcleo de f . Un vector propio de f de valor propio -2 es el $v=(0,-1,0)$. Un vector propio de f de valor propio 4 es el $w=(1,1,0)$. (Ver Módulo 4, Sección 8.)

NOTA: En la realización del ejercicio puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0°	30°	45°	60°	75°	90°	135°	180°	270°	300°	315°	330°
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}$	∞	-1	0	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$