EXAMEN 2

1. Responeu raonadament als següents apartats:

   a) Expresseu el següent nombre complex en forma polar: $\dfrac{2-5i}{(2+i)^2}$.

   b) Calculeu totes les arrels complexes resultants de l'equació: $z^4 i + 5 = 0$. Proporcioneu el resultat en forma polar i els angles en graus en l'interval $[0°, 360°)$.

Solució

a) Primer calculem el quadrat del denominador:

$$(2+i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2i + i^2 = 3 + 4i$$

Ara operem amb la divisió per a trobar la forma binòmica. Per a això, multipliquem i dividim pel conjugat del denominador:

$$\frac{2-5i}{(2+i)^2} = \frac{2-5i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-15i+20i^2}{3^2-(4i)^2} = \frac{-14-23i}{25} = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$$

Ara calculem el mòdul i l'argument del nombre complex anterior, utilitzant la relació que estableix que $r = \sqrt{a^2+b^2}$ i $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ (veure apartat 3.4.1, Mòdul 1):

$$\text{Mòdul: } r = \sqrt{\left(-\frac{14}{25}\right)^2 + \left(-\frac{23}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{5} = 1.08$$

$$\text{Argument: } \theta = \arctan\left(\frac{-\frac{23}{25}}{-\frac{14}{25}}\right) = 238.67°$$

NOTA: la tangent d'un angle val $\dfrac{-23}{-14}$ en $58.67°$ i en $238.67°$. Ara bé, el nombre complex que estem analitzant té la part real i la imaginària negatives, de manera que es troba al tercer quadrant, és a dir, $238.67°$.

En resum, tenim:

$$\boxed{\frac{2-5i}{(2+i)^2} = 1.08_{238.67°}}$$

b) El primer és aïllar z a l'equació:

$$z = \sqrt[4]{\frac{-5}{i}} = \sqrt[4]{\frac{-5}{i} \cdot \frac{-i}{-i}} = \sqrt[4]{5i}$$

Ara calculem el nombre complex $5i$ en forma polar (veure apartat 3.4.1, Mòdul 1):

Mòdul: $r = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

Argument: $\theta = \arctan\left(\frac{5}{0}\right) = 90°$

NOTA: donat que es tracta d'un nombre complex amb part real nul·la i part imaginària positiva, l'angle val 90°.

Tenim doncs que $z = \sqrt[4]{5i} = \sqrt[4]{5_{90°}}$. Ara calculem les arrels quartes (veure apartat 3.6.1, Mòdul 1):

$$z = \sqrt[4]{5_{90°}} = \sqrt[4]{5}_{\frac{90°+360°k}{4}} \qquad \text{per a } k = 0, 1, 2, 3$$

El mòdul de les arrels és: $\sqrt[4]{5}$

Els arguments de les arrels són: $\beta_k = \frac{90°+360°k}{4}$ per a $k = 0, 1, 2, 3$

- Per a $k = 0$, tenim $\beta_0 = 22.5°$.
- Per a $k = 1$, tenim $\beta_1 = 112.5°$.
- Per a $k = 2$, tenim $\beta_2 = 202.5°$.
- Per a $k = 3$, tenim $\beta_3 = 292.5°$.

En resum, les arrels resultants de l'equació són:

$$\boxed{\sqrt[4]{5}_{22.5°},\ \sqrt[4]{5}_{112.5°},\ \sqrt[4]{5}_{202.5°} \text{ y } \sqrt[4]{5}_{292.5°}}$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Calcular el quadrat del denominador: 0.25 punts.
- Expressar la divisió en forma binòmica: 0.5 punts.
- Calcular el mòdul de la divisió: 0.25 punts.
- Calcular l'argument de la divisió: 0.25 punts.

Apartat b

- Aïllar z: 0.25 punts.
- Expressar z en forma polar: 0.25 punts.
- Calcular el mòdul de les arrels: 0.25 punts.
- Calcular els arguments de les arrels: 0.5 punts.

2. Considereu el següent sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites:

$$\left.\begin{array}{rl} kx + (k+1)\,z = & k \\ ky + (a+1)\,z = & k \\ (a+1)\,y + kz = & k \end{array}\right\}$$

Substituïu el paràmetre "a" per la **primera xifra de la dreta** del vostre identificador IDP del campus UOC i amb el sistema obtingut:

a) Discutiu el sistema en funció dels diferents valors del paràmetre $k \in \mathbb{R}$.

b) Resoleu el sistema per a $k = a + 2$.

Solució Resolem aquest exercici de forma paramètrica, en funció de a, d'aquesta manera, si vols veure la resolució concreta que correspon al valor del teu IDP, només has de substituir el paràmetre a pel teu valor.

a) Per a discutir el sistema utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius [veure apartat 4 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"].

La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k+1 \\ 0 & k & a+1 \\ 0 & a+1 & k \end{pmatrix} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & k+1 & k \\ 0 & k & a+1 & k \\ 0 & a+1 & k & k \end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat.

$$\begin{vmatrix} k & 0 & k+1 \\ 0 & k & a+1 \\ 0 & a+1 & k \end{vmatrix} = k^3 - (a+1)^2 k = k\left(k^2 - (a+1)^2\right) = k\,(k-(a+1))\,(k+(a+1))$$

- Si $k \neq 0$ i $k \neq \pm(a+1) \to \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) = \text{n}^o$ incògnites i, per tant, s'obté que el $\boxed{\text{sistema és compatible determinat}}$.
- Si $k = 0$, aleshores $\text{rg}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a+1 & 0 \end{vmatrix} = -(a+1) \neq 0$ (aquest menor s'obté considerant primera i tercera fila i la segona i tercera columna).
Calculem, per a $k = 0$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents:
$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Així doncs, tenim que $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = 2 \neq$ n^oincògnites i, per tant, el $\boxed{\text{sistema és compatible indeterminat}}$.
- Si $k = a + 1$, aleshores $\text{rg}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 \neq 0$ (aquest menor s'obté considerant primera i segona fila i la primera i segona columna).
Calculem, per a $k = a + 1$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents $\begin{vmatrix} a+1 & 0 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 0$. Així doncs, tenim que $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = 2 \neq \text{n}^o$incògnites i, per tant, el $\boxed{\text{sistema és compatible indeterminat}}$.

- Si $k = -(a+1)$, aleshores $\mathrm{rg}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} -(a+1) & 0 \\ 0 & -(a+1) \end{vmatrix} = (a+1)^2 \neq 0$ (aquest menor s'obté considerant primera i segona fila i la primera i segona columna).
  Calculem, per a $k = -(a+1)$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents $\begin{vmatrix} -(a+1) & 0 & -(a+1) \\ 0 & -(a+1) & -(a+1) \\ 0 & a+1 & -(a+1) \end{vmatrix} = -2(a+1)^3 \neq 0$. Així doncs, tenim que $\mathrm{rg}(A) = 2 \neq\ \mathrm{rg}(M) = 3$, per tant, el $\boxed{\text{sistema és incompatible}}$.

b) Per l'apartat anterior sabem que per a $k = a+2$ el sistema és compatible determinat. Així doncs, el sistema que ens demanen resoldre és:

$$\left.\begin{array}{rl} (a+2)\,x + (a+3)\,z &= \quad a+2 \\ (a+2)\,y + (a+1)\,z &= \quad a+2 \\ (a+1)\,y + (a+2)\,z &= \quad a+2 \end{array}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apartat 6 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"] per a determinar les solucions d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 0 & a+3 & a+2 \\ 0 & a+2 & a+1 & a+2 \\ 0 & a+1 & a+2 & a+2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 0 & a+3 & a+2 \\ 0 & a+2 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & 2a+3 & a+2 \end{array}\right)$$

Operacions: (1): $\quad (a+2)\cdot F3 - (a+1)\cdot F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{rl} (a+2)\,x + (a+3)\,z &= \quad a+2 \\ (a+2)\,y + (a+1)\,z &= \quad a+2 \\ (2a+3)\,z &= \quad a+2 \end{array}\right\}$$

De la tercera equació s'obté $z = \frac{a+2}{2a+3}$. Si fem la substitució d'aquest valor de z en la segona equació i aïllem la y obtenim $y = \frac{a+2}{2a+3}$. Si substituïm en la primera equació el valor de z s'obté $x = \frac{a}{2a+3}$

Així, la solució d'aquest sistema, en funció dels diferents valors del paràmetre a, és:

	$x=\frac{a}{2a+3}$,	$y=\frac{a+2}{2a+3}$,	$z=\frac{a+2}{2a+3}$
Si $a=0$	$x=0$	$y=2/3$	$z=2/3$
Si $a=1$	$x=1/5$	$y=3/5$	$z=3/5$
Si $a=2$	$x=2/7$	$y=4/7$	$z=4/7$
Si $a=3$	$x=3/9$	$y=5/9$	$z=5/9$
Si $a=4$	$x=4/11$	$y=6/11$	$z=6/11$
Si $a=5$	$x=5/13$	$y=7/13$	$z=7/13$
Si $a=6$	$x=6/15$	$y=8/15$	$z=8/15$
Si $a=7$	$x=7/17$	$y=9/17$	$z=9/17$
Si $a=8$	$x=8/19$	$y=10/19$	$z=10/19$
Si $a=9$	$x=9/21$	$y=11/21$	$z=11/21$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Calcular correctament el determinant de la matriu A en funció de k: 0.25 punts.
- Justificar que per a k diferent de 0 i $\pm(a+1)$ el sistema és SCD: 0.25 punts.
- Justificar que per a $k=0$ el sistema és SCI: 0.5 punts.
- Justificar que per a $k=a+1$ el sistema és SCI: 0.5 punts.
- Justificar que per a $k=-(a+1)$ el sistema és SI: 0.5 punts.

Apartat b

- Obtenir la solució: 0.5 punts.

3. Siguin $e_1=(-1,1,0,-1)$, $e_2=(0,2,2,2)$, $e_3=(0,0,0,a+1)$, $e_4=(-1,3,2,2a+3)$ i $v=(7,3,10,10-7a)$ vectors de $\mathbb{R}^4$ on a és la **tercera xifra de la dreta** del vostre IDP. I sigui $F=<e_1,e_2,e_3,e_4>$.
Digueu si són vertaderes o falses les següents afirmacions i **justifiqueu la vostra resposta**:

   a) La dimensió de F és 4.
   b) $A=\{(-1,1,0,-1),(0,2,2,2),(0,0,0,a+1)\}$ és una base de F.
   c) $v\in F$ i les seves coordenades en la base A són (3,1,3).
   d) $C_{A\to B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ és la matriu de canvi de base de la base A anterior a la base $B=\{(1,-1,0,1),(1,0,1,2),(0,1,1,a+4)\}$

Solució

a) **FALS**. Si calculem el rang de la matriu formada pels vectors:

$$rang\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & a+1 & 2a+3 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que tenim que $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, per tant $dim(F) \geq 2$. Orlant aquest menor trobem $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & a+1 \end{vmatrix} = -2a - 2 \neq 0$, per tant $dim(F) \geq 3$. I per veure que la dimensió no és 4 podem calcular el determinant de tots els vectors junts i veure que és 0, o podem veure directament que $e_1 + e_2 + 2e_3 = e_4$ (és a dir, són linealment dependents). Així tenim que la dimensió de F és 3.

b) **VERTADER**. Els vectors de la base A proposada contenen el menor 3×3 anterior amb determinant no nul, per tant són linealment independents. A més són de l'espai F i en tenim tants com la dimensió. Així doncs, són base.

c) **FALS**. Mirem si $v \in F$ i calculem les seves coordenades en tal cas resolent el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 10 \\ 10-7a \end{pmatrix}$$

Trobem que la solució és $x = -7$, $y = 5$ i $z = -7$. Per tant, $v \in F$ però les seves coordenades en la base A són $(-7, 5, -7)$.

d) **FALS**. Podem veure que, com el primer vector de cada base és el mateix amb signe contrari, la primera columna de la matriu de canvi de base hauria de ser $(-1, 0, 0)$, i això no és així.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat b

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat c

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.

- Justificació: 0.625 punts.

Apartat d

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

4. Substituïu el paràmetre a per la **segona xifra de la dreta** del vostre identificador IDP del campus UOC en els següents vectors de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 1, a + 1)$, $v = (0, 1, a + 1)$ i $w = (1, 0, a + 1)$ escrits en la base canònica C.

   Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal que compleix que $f(u) = u$, $f(v) = -v$ i $f(w) = bw$ i b un paràmetre real.

   Responeu raonadament als següents apartats:

   a) Comproveu que $B = \{u, v, w\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la matriu $M(f|B, B)$ que correspon a l'aplicació lineal f en la base B i la matriu $M(f|C, C)$ que correspon a l'aplicació lineal f en la base canònica $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

   b) Calculeu la potència 10 de la matriu $M(f|C, C)$ utilitzant la matriu $M(f|B, B)$.

Solució
Resolem els apartats per a un valor de a genèric. Per a obtenir la solució particular corresponent al vostre dígit només heu de substituir a pel seu valor en els desenvolupaments que segueixen.

a) Per a demostrar que B és una base de $\mathbb{R}^3$ n'hi ha prou amb veure que el determinant format pels tres vectors és diferent de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = (a + 1) + (a + 1) - (a + 1) = (a + 1)$$

A l'ésser a una xifra ($a \geq 0$ i, per tant, $a + 1 > 0$), el determinant no és nul i els tres vectors són linealment independents i formen base de $\mathbb{R}^3$.

Per a construir la matriu de l'aplicació f en la base B hem de posar en columnes les coordenades de les imatges dels vectors de la base B expressades en la base B. Els vectors de la base B són u, v i w i les seves imatges s'escriuen en la pròpia base B com: $f(u) = u$ s'escriu com $(1, 0, 0)$ $f(v) = -v$ s'escriu com $(0, -1, 0)$ $f(w) = bw$ s'escriu com $(0, 0, b)$. Per tant, la matriu de f en base B és:

$$M(f|B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Per a construir la matriu de f en la base canònica C hem d'usar la matriu de canvi de base que podem construir (com es veu a l'apartat 6 del mòdul "Aplicacions lineals") a partir de les coordenades dels vectors de B en la base canònica que són les que proporciona l'enunciat.

$$M(Id|C,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Multiplicant per aquesta matriu i per la seva inversa segons la següent fórmula obtindrem la matriu que demana l'enunciat.

$$M(f|C,C) = M(Id|C,B) \cdot M(f|B,B) \cdot M(Id|C,B)^{-1}$$

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{a+1} \\ -1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

El resultat és:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & -b+1 & \frac{b-1}{a+1} \\ 2 & 1 & \frac{-2}{a+1} \\ 2a+2 & (a+1)(1-b) & b-2 \end{pmatrix}$$

b) Per a calcular la potència n-èsima d'una matriu resulta útil conèixer la seva matriu diagonal i la base de vectors propis perquè, com es veu a l'apartat 8.2 del mòdul "Aplicacions lineals", es compleix la següent igualtat:

$$M(f|C,C)^n = M(Id|C,B)M(f|B,B)^n M(Id|C,B)^{-1}$$

I la potència de la matriu diagonal es calcula molt fàcilment elevant els elements diagonals a la potència corresponent. En aquest cas:

$$M(f|B,B)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & b^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{10} \end{pmatrix}$$

$$M(f|C,C)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{a+1} \\ -1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

$$M(f|C,C)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b^{10} \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & (a+1)b^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{a+1} \\ -1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

El resultat és:

$$M(f|C,C)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1-b^{10} & \frac{b^{10}-1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (a+1)(1-b^{10}) & b^{10} \end{pmatrix}$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Comprovar que B és base: 0.25 punts.
- Calcular la matriu de f en base B: 0.25 punts.
- Calcular la matriu de canvi de base B a base C: 0.25 punts.
- Calcular la matriu de canvi de base C a base B: 0.25 punts.
- Calcular la matriu de f en base C: 0.25 punts.

Apartat b

- Escriure la fórmula de càlcul a partir de la matriu diagonal en el cas plantejat: 0.5 punts.
- Calcular la potència de la matriu diagonal: 0.25 punts.
- Calcular el producte de les tres matrius: 0.5 punts.