

## Álgebra

## EXAMEN 2

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

- a) Dados los números complejos  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = -3 + i$  y  $z_3 = 2i$ . Realizad la operación  $(\overline{z_1 \cdot z_2}) \cdot z_3^3$ . Proporcionad el resultado en forma binómica. Nota:  $\overline{z_1}$  representa el conjugado de  $z_1$  y  $\overline{z_1 \cdot z_2}$  representa el conjugado de  $(z_1 \cdot z_2)$ .
- b) Se sabe que la primera raíz cuarta del número complejo  $m - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$  es  $\sqrt[4]{3}_{60^\circ}$  (es decir, para  $k = 0$ , el ángulo es  $60^\circ$ ). Determinad el parámetro  $m \in \mathbb{R}$ , así como el resto de raíces del número complejo, en forma polar. Nota: hace falta trabajar con todos los ángulos en grados y en el intervalo  $[0^\circ, 360^\circ)$ .

## Solución

- a) Primero calculamos el conjugado de  $z_1$ :

$$\overline{z_1} = \overline{1 - 2i} = 1 + 2i$$

Ahora podemos calcular la primera multiplicación:

$$\overline{z_1} \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (-3 + i) = -3 + i - 6i + 2i^2 = -5 - 5i$$

El conjugado del número anterior es:

$$\overline{\overline{z_1} \cdot z_2} = \overline{-5 - 5i} = -5 + 5i$$

En paralelo calculamos el cubo de  $z_3$ :

$$z_3^3 = (2i)^3 = -8i$$

Finalmente, pasamos a resolver la multiplicación global:

$$(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}) \cdot z_3^3 = (-5 + 5i) \cdot (-8i)$$

Por tanto:

$$\boxed{(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}) \cdot z_3^3 = 40 + 40i}$$

- b) Sabemos que el módulo de la raíz cuarta que nos da el enunciado es  $\sqrt[4]{3}$ , de forma que el módulo del número complejo es 3. Este valor lo podemos equiparar al módulo del número complejo de la siguiente manera:

$$r = \sqrt{m^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3 \text{ y, por tanto, } m = \pm \frac{3}{2}$$

De esta forma, tenemos ahora dos opciones para el argumento:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = 300^\circ \text{ o bien } \theta = \arctan\left(\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}}\right) = 240^\circ$$

Nota: sabemos que la parte imaginaria del número complejo es negativa, de modo que nos encontramos en el tercer o cuarto cuadrante. Así, los ángulos son  $300^\circ$  (para  $m = \frac{3}{2}$ ) y  $240^\circ$  (para  $m = -\frac{3}{2}$ ).

Conociendo el argumento de la raíz del enunciado, podemos deducir lo siguiente:

$$\frac{\theta + 360^\circ k}{4} = 60^\circ \quad \text{para } k = 0$$

Esta ecuación sólo se cumple para  $\theta = 240^\circ$  y  $m = -\frac{3}{2}$ . Así, el número complejo es:

$$\boxed{-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

El resto de raíces se encuentran con la ecuación anterior para los diferentes valores de  $k$ :

- Para  $k = 0$ , tenemos  $\alpha_0 = 60^\circ$ .
- Para  $k = 1$ , tenemos  $\alpha_1 = 150^\circ$ .
- Para  $k = 2$ , tenemos  $\alpha_2 = 240^\circ$ .
- Para  $k = 3$ , tenemos  $\alpha_3 = 330^\circ$ .

En resumen, las raíces son:

$$\boxed{(\sqrt[4]{3})_{60^\circ}, (\sqrt[4]{3})_{150^\circ}, (\sqrt[4]{3})_{240^\circ} \text{ y } (\sqrt[4]{3})_{330^\circ}}$$

## PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular  $\overline{z_1}$ : 0,25 puntos.
- Calcular  $\overline{z_1} \cdot z_2$ : 0,25 puntos.
- Calcular  $\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}$ : 0,25 puntos.
- Calcular  $z_3^3$ : 0,25 puntos.
- Calcular  $(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}) \cdot z_3^3$ : 0,25 puntos.

Apartado b

- Hallar los 2 valores posibles de  $m$  igualando módulos: 0,5 puntos.

- Determinar el valor de  $m$  correcto con el argumento: 0,5 puntos.
- Determinar el resto de raíces: 0,25 puntos.

2. Dada la matriz  $M = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & -k+2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k+2a+2 \end{pmatrix}$

Substituid el parámetro “ $a$ ” de la matriz  $M$  por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con la matriz obtenida:

- Estudiad el rango de la matriz  $M$  en función de los diferentes valores del parámetro  $k \in \mathbb{R}$ .
- Considerad el sistema de ecuaciones lineales que tiene la matriz  $M$  como matriz ampliada, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} x + ky = 1 \\ (-k + 2)y + 2z = 1 \\ -y - z = k \\ y + z = k + 2a + 2 \end{array} \right\}$$

Discutid este sistema en función de los diferentes valores del parámetro  $k \in \mathbb{R}$ .

### Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de  $a$ , de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro  $a$  por tu valor.

- Dado que la matriz  $M$  es cuadrada de orden 4, estudiaremos su rango utilizando que el rango es 4, solo si el determinante de la matriz es diferente a cero [ver apartado 4.5 del módulo “Elementos de álgebra lineal y geometría”]:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & -k+2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k+2a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k+2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & k+2a+2 \end{vmatrix} = 2k(k + (a+1))$$

En consecuencia,

- Si  $k \neq 0$  y  $k \neq -a-1$ , entonces  $\text{rg}(M) = 4$ .

- Si  $k = 0$ , entonces  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$  y podemos afirmar que

$$\text{rg}(M) = 3, \text{ puesto que } |M| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

- Si  $k = -a - 1$ , entonces  $M = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 & 1 \\ 0 & -a+1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & a+1 \\ 0 & 1 & 1 & 3a+3 \end{pmatrix}$  y podemos

afirmar que  $\text{rg}(M) = 3$ , puesto que  $|M| = 0$  y  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a+3 \neq 0$ ,

puesto que  $a$  solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9.

- b) El sistema de ecuaciones que tiene como matriz ampliada la matriz  $M$  es:

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ (-k+2)y + 2z = 1 \\ -y - z = k \\ y + z = k + 2a + 2 \end{cases}$$

Para discutir el sistema utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apartado 4 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”].

La matriz de coeficientes,  $A$ , y la matriz ampliada,  $M$ , asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & -k+2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & -k+2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k+2a+2 \end{pmatrix}$$

Notemos que, dado que en  $A$  la tercera y cuarta fila son proporcionales, el estudio del  $\text{rg}(A)$  se puede reducir al estudio del menor formado con las tres primeras filas y columnas.

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & -k+2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = k$$

Así pues, a partir de este menor de orden 3 y de lo que hemos deducido en el apartado anterior, podemos afirmar:

- Si  $k \neq 0$  y  $k \neq -a - 1$ ,  $\text{rg}(A) = 3 \neq \text{rg}(M) = 4$  y, por lo tanto, se obtiene que el sistema es incompatible.
- Si  $k = 0$ ,  $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(M) = 3$  y, por lo tanto, se obtiene que el sistema es incompatible.
- Si  $k = -a - 1$ ,  $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 3 = \text{n}^\circ$  incógnitas, se obtiene que el sistema es compatible determinado.

## PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz  $M$  en función de  $k$ : 0,25 puntos.
- Obtener los valores  $k = 0$  y  $k = -a - 1$ : 0,25 puntos.

- Justificar que para  $k$  diferente de 0 y  $-a - 1$  el  $\text{rg}(M) = 4$ : 0,25 puntos.
- Justificar que para  $k = 0$  el  $\text{rg}(M) = 3$ : 0,25 puntos.
- Justificar que para  $k = -a - 1$  el  $\text{rg}(M) = 3$ : 0,25 puntos.

Apartado b

- Determinar que para  $k$  diferente a 0  $\text{rg}(A) = 3$ : 0,25 puntos.
- Determinar que para  $k = 0$  el  $\text{rg}(A) = 2$ : 0,25 puntos.
- Justificar que para  $k$  diferente a 0 y  $-a - 1$  el sistema es incompatible: 0,25 puntos.
- Justificar que para  $k = 0$  el sistema es incompatible: 0,25 puntos.
- Justificar que para  $k = -a - 1$  el sistema es compatible determinado: 0,25 puntos.

3. Sea  $F$  el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  definido por:

$$F = \langle (1, 0, 3), (3\lambda, -2\lambda, \lambda), (0, 2, -3), (-1, 2, 0) \rangle, \lambda \in \mathbb{R}$$

- Calculad la dimensión de  $F$  según  $\lambda$  y una base  $A$  en cada caso.
- Sean  $v_1 = (a - 1, 8, 3a - 3)$ ,  $v_2 = (0, 2a + 6, 3 - 3a)$ ,  $v_3 = (1 - a, 2a + 6, 0)$  **donde  $a$  es la tercera cifra de la derecha del vuestro IDP**. ¿Cuáles pertenecen a  $F$ ? Para los que pertenezcan, calculad sus coordenadas en la base  $A$  que habéis encontrado en el apartado anterior.
- Sea  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  el conjunto formado por los vectores del apartado anterior.  $B$  es una base de  $F$ . Calculad la matriz  $C_{B \rightarrow A}$  de cambio de base de la base  $B$  a las bases  $A$  que habéis encontrado en el primer apartado.

## Solución

- Calculamos el rango de los vectores con los que está definido  $F$ . Si calculemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

Vemos directamente que la dimensión de  $F$  es 3 independientemente del parámetro  $\lambda$ . Una base puede ser la formada por los tres vectores que conforman el determinante anterior:

$$A = \{(1, 0, 3), (0, 2, -3), (-1, 2, 0)\}.$$

- Como la dimensión de  $F$  es 3, ya sabemos directamente que todos los vectores  $v_i$  serán de  $F$ . Para calcular las coordenadas de  $v_1$  resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 1 \\ 8 \\ 3a - 3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución  $x = a + 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 2$ . Por tanto, las coordenadas de  $v_1$  en la base  $A$  son  $(a + 1, 2, 2)$ .

Para calcular las coordenadas de  $v_2$  procedemos de forma análoga resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a + 6 \\ 3 - 3a \end{pmatrix}$$

Que tiene solución  $x = 2$ ,  $y = a + 1$ ,  $z = 2$ . Por tanto, las coordenadas de  $v_2$  en la base  $A$  son  $(2, a + 1, 2)$ .

Una vez más, para a calcular las coordenadas de  $v_3$  procedemos de forma análoga resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a \\ 2a + 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $z = a + 1$ . Por tanto, las coordenadas de  $v_3$  en la base  $A$  son  $(2, 2, a + 1)$ .

- c) Para calcular la matriz de cambio de base de  $B$  a  $A$  debemos expresar los vectores de  $B$  en función de los de  $A$ , y esto es justamente lo que hemos realizado en el apartado anterior. Así, la matriz de cambio de base de  $B$  a  $A$  es:

$$C_{B \rightarrow A} = \begin{pmatrix} a + 1 & 2 & 2 \\ 2 & a + 1 & 2 \\ 2 & 2 & a + 1 \end{pmatrix}$$

## PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular la dimensión de  $F$ : 0,5 puntos.
- Dar una base justificada: 0,5 puntos.

Apartado b

- Ver que el vector  $v_1$  pertenece a  $F$  y calcular sus coordenadas: 0,25 puntos.
- Ver que el vector  $v_2$  pertenece a  $F$  y calcular sus coordenadas: 0,25 puntos.
- Ver que el vector  $v_3$  pertenece a  $F$  y calcular sus coordenadas: 0,25 puntos.

Apartado c

- Calcular la matriz de cambio de base: 0,75 puntos.
4. Sustituid, antes de hacer cálculos, el parámetro  $c$  por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC en los siguientes puntos de  $\mathbb{R}^2$ :

$$A = (c, 0) \quad B = (c + 1, 0) \quad C = (c + 1, \frac{1}{2}) \quad D = (c + 1, -\frac{1}{2})$$

Se calculará paso a paso la matriz de la transformación geométrica que transforma los segmentos  $AB$  y  $CD$  en los segmentos  $A'B'$  y  $C'D'$  formados por los puntos:

$$A' = (0, 0) \quad B' = (0, 2) \quad C' = (-1, 2) \quad D' = (1, 2)$$

Responded razonadamente los siguientes apartados para construirla:

- Escribid la matriz  $3 \times 3$  del escalado de razón 2 centrado en el punto  $B = (c+1, 0)$ .
- Escribid la matriz  $3 \times 3$  de la traslación que lleva el punto  $B = (c+1, 0)$  en su punto  $B' = (0, 2)$ .
- Escribid la matriz  $3 \times 3$  de un giro de ángulo  $90^\circ$  centrado en el punto  $B' = (0, 2)$ .
- Construid la matriz composición de las tres anteriores. Comprobad que transforma los segmentos  $AB$ ,  $CD$  en los segmentos  $A'B'$  y  $C'D'$  respectivamente, tal como se quería.

### Solución

Resolvemos el problema para un valor de  $c$  genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir  $c$  por su valor en los resultados siguientes.

- La matriz del escalado de razón 2 y centro  $(c+1, 0)$  se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector  $(-c-1, 0)$ , la del escalado de razón 2 centrado en el origen y la de la traslación de vector  $(c+1, 0)$ . Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 4.3 “Escalado a partir de un punto genérico” del módulo “Transformaciones geométricas”.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & c+1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2c-2+c+1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -c-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Para escribir la matriz de la traslación se necesita el vector que lleva el punto  $B = (c+1, 0)$  al punto  $B' = (0, 2)$ . Basta con calcular la diferencia  $B' - B = (0, 2) - (c+1, 0) = (-c-1, 2)$ . La matriz se escribe entonces simplemente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) La matriz del giro de ángulo  $90^\circ$  y centro  $(0, 2)$  se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector  $(0, -2)$ , la del giro de ángulo  $90^\circ$  centrado en el origen y la de la traslación de vector  $(0, 2)$ . Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 3.4 “Rotación alrededor de un punto genérico” del módulo “Transformaciones geométricas”. Calculamos la composición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) & 0 \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- d) Calculamos la composición:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -c-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -c-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las imágenes de los puntos  $A = (c, 0)$ ,  $B = (c+1, 0)$ ,  $C = (c+1, \frac{1}{2})$  y  $D = (c+1, -\frac{1}{2})$  se pueden calcular mediante una sola multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & c+1 & c+1 & c+1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2) \cdot \frac{1}{2} & (-2) \cdot (-\frac{1}{2}) \\ 2c-2c & 2c+2-2c & 2c+2-2c & 2c+2-2c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado son los puntos  $A' = (0, 0)$  y  $B' = (0, 2)$ , y  $C' = (-1, 2)$  y  $D' = (1, 2)$ .

## PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Escribir la composición de tres matrices: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,50 puntos.

Apartado b

- Calcular el vector de traslación y escribir la matriz: 0,25 puntos.

Apartado c

- Escribir la composición de tres matrices: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,50 puntos.

Apartado d

- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,25 puntos.
- Comprobar las imágenes de los puntos: 0,50 puntos.