EXAMEN 1 - 10 juny 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:

(a) Expresseu en forma binòmica el següent complex: $(-4i)^{-1}$

(b) Resoleu l´equació: $(1+i)z = \frac{1-i}{z}$. Proporcioneu la solució o les solucions en forma binòmica.

Solució

(a) Hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s´explica a l´apartat 3.3.4, pàgina 26, del material sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica), recordant que $i^2 = -1$, i agrupem part real i part imaginària.
$(-4i)^{-1} = \frac{1}{-4i} = \frac{4i}{(-4i)4i} = \frac{4i}{-16i^2} = \frac{4i}{16} = \frac{i}{4}$
Per tant, la resposta és: $\frac{1}{4}i$

(b) Seguirem l´exemple de la pàgina 16 així com els exercicis 6 i 7 de la pàgina 49 del material. Tal com faríem amb una equació amb coeficients reals, intentarem aïllar la z d´aquesta equació.
$(1+i)z = \frac{1-i}{z} \Longleftrightarrow (1+i)z^2 = 1-i \Longleftrightarrow z^2 = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$
Per tant, hem de resoldre l ´equació: $z^2 = -i$
És a dir, les solucions són: $z = \sqrt{-i}$
La solució de l´equació és, doncs, les dues arrels quadrades de $-i$. Per trobar-les, primer, passem $-i$ a forma polar.
Escrivim el complex $-i$ en forma polar tal com s ´explica a l ´apartat 3.4, pàgina 27 del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:
$m = \sqrt{(-1)^2} = 1$
$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{0}\right) = \arctan(-\infty) = 270^o$
Tenim, per tant, que $-i = 1_{270^o}$
Com ens demanen les arrels quadrades hem de fer el següent (observem que a l ´apartat 3.6.1 de la pàgina 43 del material es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):
$\sqrt{z} = \sqrt{1_{270^o}} = 1_{\frac{270^o+360^o k}{2}}$ per a $k = 0, 1$
Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 1$
Els arguments de les arrels són: $\beta_k = \frac{270^o+360^o k}{2}$ per a $k = 0, 1$

- Si $k = 0$, tenim que $\beta_0 = 135^o$
- Si $k = 1$, tenim que $\beta_1 = 135^o + 180^o = 315^o$

Per tant, les dues arrels quadrades del complex $-i$, que són les solucions de l ´equació donada, són: 1_{135^o}, 1_{315^o}
Per passar aquestes solucions a forma binòmica només hem de mirar els valors de la taula i tindrem:

- $1_{135^o} = \cos 135^o + i \sin 135^o = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- $1_{315^o} = \cos 315^o + i \sin 315^o = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

2. Sigui F el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ definit per:

$$F =< (\lambda, \lambda, \lambda), (0, \lambda^2, \lambda^2), (\lambda^3, 0, \lambda^3), (\lambda^4, \lambda^4, 0) >, \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) Calculeu la dimensió de F segons λ i una base A en cada cas.
(b) Sigui $v = (-2, 2, 1)$. En el cas $\lambda = 1$, $v \in F$? En cas afirmatiu, calculeu-ne les coordenades en la base A que heu trobat en l'apartat anterior.
(c) Sigui $B = \{(-2, 2, 1), (0, -1, -1), (-1, 0, -1)\}$ una base de F per al cas $\lambda = 1$. Calculeu la matriu $C_{B\to A}$ de canvi de base de la base B a la base A que heu trobat en el primer apartat per a $\lambda = 1$.

Solució

(a) Calculem el rang dels vectors amb què està definit F. Comencem amb el determinant:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda^3 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda^2 \cdot \lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^6$$

Així doncs, si $\lambda \neq 0$ llavors la dimensió de F és 3. És a dir, F és $\mathbb{R}^3$. En aquest cas una base pot ser la formada pels tres primers vectors amb què està definit F amb un valor qualsevol de λ diferent de 0. Per exemple, $\lambda = 1$: $A = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.
Si $\lambda = 0$ tots els vectors de F són 0, de forma que la dimensió de F és 0.

(b) Com que en el cas $\lambda = 1$ la dimensió de F és 3, sabem directament que $v \in F$. Per a calcular-ne les coordenades resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x = -1$, $y = 3$, $z = -1$. Per tant, les coordenades de v en la base A són $(-1, 3, -1)$.

(c) Per a trobar la matriu de canvi de base de B a A hem dexpressar els vectors de B en funció dels de A. Per al primer vector de B hem trobat les seves coordenades en A a l'apartat anterior. El segon i tercer vectors de B veiem que són directament el segon i tercer de A en negatiu (també podríem resoldre els sistemes lineals anàlegs als de l'apartat anterior). Així doncs la matriu de canvi de base de B a A és:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Donat el sistema d'equacions amb paràmetres reals a, b, c i incògnites x, y, z

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z = a \\ -x + 2y - z = b \\ x - y + z = c \end{aligned}\right\}$$

Es demana:

(a) Demostreu que és un sistema compatible determinat per qualsevol valor d'a, b i c.

(b) Resoleu per Cramer el sistema deixant les solucions en funció d'a, b i c.

(c) Determineu raonadament què han de complir a, b i c per a que la solució verifiqui $x = y = z$.

Solució

(a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ -1 & 2 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right)$$

Recordeu que pel Teorema de Rouché-Fröbenius [veure apunts mòdul 3, apartat 4, pàgina 13] un sistema d'equacions lineals és compatible determinat si:

$$\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(M) = \text{n. incògnites.}$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, independentment del valors d'a, b i c, aleshores també ho serà el rang de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 2 - 4 + 1 - 1 = -1$$

Així doncs, com que $|A| \neq 0$ per qualsevol valor de a, b i c, podem afirmar que:

$$\boxed{\text{el sistema sempre és compatible determinat}}.$$

(b) Per calcular la solució del sistema podem utilitzar la regla de Cramer [veure apunts mòdul 3, apartat 7, pàgines 23 a 26]:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & -1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a-3b-5c}{-1} = -a+3b+5c$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-b-c}{-1} = b+c$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a+2b+3c}{-1} = a-2b-3c$$

Així doncs, la solució del sistema en funció dels paràmetres a, b i c és:

$$\boxed{x = -a+3b+5c \qquad y = b+c \qquad z = a-2b-3c}.$$

(c) Per determinar què han de complir a, b i c per a que la solució verifiqui $x = y = z$, es pot procedir de diverses maneres. Per exemple, podem agafar el sistema i imposar que $x = y = z$ obtenint:

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z &= a \\ -x+2y-z &= b \\ x-y+z &= c \end{aligned}\right\} \underset{x=y=z}{\Longrightarrow} \left.\begin{aligned} x+x+2x &= a \\ -x+2x-x &= b \\ x-x+x &= c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 4x &= a \\ 0 &= b \\ x &= c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 4c &= a \\ 0 &= b \end{aligned}\right\}$$

Per tant, si volem que la solució verifiqui $x = y = z$, aleshores els paràmetres han de complir que $\boxed{a = 4c \text{ i } b = 0}$.

Una altra manera de resoldre aquest apartat, és a partir de la solució trobada en l'apartat anterior.

Per l'apartat (b) sabem que la solució del sistema és:

$$x = -a+3b+5c \qquad y = b+c \qquad z = a-2b-3c.$$

Així doncs, si s'ha de verificar que $x = y = z$ (és a dir $x = y$, $x = z$ i $y = z$) s'obté el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -a+3b+5c &= b+c \\ -a+3b+5c &= a-2b-3c \\ b+c &= a-2b-3c \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} -a+2b+4c &= 0 \\ -2a+5b+8c &= 0 \\ -a+3b+4c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22] per determinar la solució d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F2-2\cdot F1 \to F2 \\ F3-F1 \to F3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F3-F2\to F3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{aligned} -a+2b+4c=0 \\ b=0 \end{aligned}\right\} \implies \boxed{a=4c \ \text{ i } \ b=0}.$$

4. Sigui $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació definida en les bases canòniques per

$$f(x,y,z,t)=(x+2z-t,-\lambda y+2\lambda t,-2x-3y).$$

Considerem $\lambda=1$ per als dos primers apartats.

(a) Demostreu que f és una aplicació lineal.

(b) Calculeu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^4$ i de $\mathbb{R}^3$.

(c) Per als diferents valors de λ, calculeu una base B de $\mathbb{R}^4$ formada pels vectors de la base del nucli de f i els vectors necessaris de la base canònica fins a completar-la. Escriviu la matriu de f si fem servir la base B a $\mathbb{R}^4$ i la base canònica a $\mathbb{R}^3$.

Solució

(a) f sí que és una aplicació lineal. Per a demostrar-ho cal comprovar (com a l'exemple 1 del punt 2.2 del Mòdul 4) que la imatge de la suma de vectors és sempre la suma de les seves imatges:

$$f(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2,t_1+t_2)$$

$$=((x_1+x_2)+2(z_1+z_2)-(t_1+t_2),-(y_1+y_2)+2(t_1+t_2),-2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2))$$

$$=(x_1+2z_1-t_1+x_2+2z_2-t_2,-y_1+2t_1-y_2+2t_2,-2x_1-3y_1-2x_2-3y_2)$$

$$=(x_1+2z_1-t_1,-y_1+2t_1,-2x_1-3y_1)+(x_2+2z_2-t_2,-y_2+2t_2,-2x_2-3y_2)$$

$$=f(x_1,y_1,z_1,t_1)+f(x_2,y_2,z_2,t_2)$$

Comprovem també que la imatge del producte d'un vector per un escalar sempre és el producte de la imatge per l'escalar:

$$f(kx,ky,kz,kt)=(kx+2kz-kt,-ky+2kt,-2kx-3ky)$$

$$=(k(x+2z-t),k(-y+2t),k(-2x-3y))$$

$$=k(x+2z-t,-y+2t,-2x-3y)=k\cdot f(x,y,z,t)$$

(b) Per a trobar A, la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^4$, calculem les imatges dels quatre vectors de la base canònica i els posem per columnes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Per a calcular una base del $\ker(f)$ resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 2\lambda \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La segona equació és $-\lambda y + 2\lambda t = 0$. Veiem que apareixen dos casos a tractar: Si $\lambda \neq 0$, podem dividir i obtenir $y = 2t$. Substituïnt a la tercera equació ens diu $-2x - 6t = 0$. Per tant, $x = -3t$. Substituïnt a la primera equació $-3t + 2z - t = 0$ d'on $z = 2t$. O sigui, $(x, y, z, t) = (-3t, 2t, 2t, t)$. Traient factor comú: $(x, y, z, t) = t(-3, 2, 2, 1)$. Per tant, una base del nucli és $\{(-3, 2, 2, 1)\}$.
Per a completar una base de $\mathbb{R}^4$ podem afegir els vectors $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ i $(0, 0, 0, 1)$. Aquests quatre vectors són linealment independents i per tant formen una base B de $\mathbb{R}^4$. Per a obtenir la matriu en aquesta base B de sortida podem multiplicar la matriu A per la matriu dels vectors de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 0$ els vectors del nucli compleixen $x + 2z - t = 0$ i $-2x - 3y = 0$. Sumant-li a aquesta segona equació el doble de la primera, i aïllant la x i la y obtenim dues expressions $x = -2z + t$ i $-3y = -4z + 2t$. Per tant una base del nucli és $\{(-2, \frac{4}{3}, 1, 0), (1, -\frac{2}{3}, 0, 1)\}$. Per a completar aquesta base del nucli a una base de $\mathbb{R}^4$ podem afegir els vectors $(1, 0, 0, 0)$ i $(0, 1, 0, 0)$. Es pot comprovar que el determinant d'aquests vectors no és nul. Per a obtenir la matriu en aquesta base B de sortida podem multiplicar la matriu A per la matriu dels vectors de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$