Solución Examen 2

2017-2018 Semestre 1

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 13.01.2018

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad en forma binómica el siguiente número complejo: $\dfrac{5i^6(-2+i)}{-1+2i}$

b) Hallad la raíz siguiente: $\sqrt[4]{-81}$. Proporcionad el resultado en forma polar.

Solución:

a) Debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria:

$$\frac{5i^6(-2+i)}{-1+2i}=\frac{5(-1)(-2+i)}{-1+2i}=\frac{-5(-2+i)}{-1+2i}=\frac{(10-5i)\cdot(-1-2i)}{(-1+2i)\cdot(-1-2i)}=\frac{-10-20i+5i-10}{1+4}=\frac{-20-15i}{5}=$$
$$=-4-3i$$

Por tanto, la respuesta es:

$$\boxed{\frac{5i^6(-2+i)}{-1+2i}=-4-3i}$$

b) Escribimos el complejo $z=-81$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

$$m=\sqrt{(-81)^2}=81$$
$$\alpha=arctg\left(\frac{0}{-81}\right)+180^\circ=arctg(0)+180^\circ=180^\circ$$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0º y en 180º. Como el afijo del punto buscado es $(-81,0)$ el ángulo está entre el segundo y tercer cuadrante, es decir, en 180º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número -81 en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(-81,0)$, por lo tanto, es un número que se encuentra entre el segundo y el tercer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $\sqrt[4]{-81}=\sqrt[4]{81_{180^\circ}}$

Como nos piden las raíces cuartas debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = \sqrt[4]{81}_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{4}}$ para k=0, 1, 2, 3

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[4]{81} = 3$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \dfrac{180^\circ+360^\circ k}{4}$ para k=0, 1, 2, 3

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 45^\circ$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 45^\circ+90^\circ = 135^\circ$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 45^\circ+180^\circ = 225^\circ$
- Si k=3, tenemos que $\beta_3 = 45^\circ+270^\circ = 315^\circ$

Por tanto, las cuatro raíces cuartas del complejo $z = -8+8\sqrt{3}i$ son:

$\boxed{3_{45^\circ}}\boxed{3_{135^\circ}}\boxed{3_{225^\circ}}\boxed{3_{315^\circ}}$

2. Sean los conjuntos de vectores de R^3:

A=<$(a-3,0,0),(1,a-3,0),(a-1,1,1)$>. B=<$(a-3,1,a-2),(0,a-3,1),(0,0,1)$>.

a) Calculad el valor de *a* para que A y B sean base de R^3. Si $a=4$ calculad las coordenadas del vector v=(-3,-2,1) en cada una de las bases.
b) Calculad la matriz de cambio de base de A a B para $a=4$. Comprobad la coherencia del resultado del apartado anterior.

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores del espacio A:

$$\begin{vmatrix} a-3 & 1 & a-1 \\ 0 & a-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-3)^2$$

Así para $a \neq 3$ el rango de la matriz es 3 y por tanto son base de R^3.

Realizamos el mismo procedimiento para B: $\begin{vmatrix} a-3 & 0 & 0 \\ 1 & a-3 & 0 \\ a-2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-3)^2$

Así que para $a \neq 3$ el rango de la matriz es 3 y por tanto son base de R^3. Así pues, cuando $a \neq 3$tanto A como B forman una base de R^3.

Para calcular las coordenadas de v en A cuando $a=4$ resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Que tiene solución x=-3, y=-3, z=1.

Por tanto, las coordenadas de v en A cuando $a=4$ son (-3,-3,1).

Para calcular las coordenadas de v en B cuando $a=4$ resolvemos de forma análoga el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Que tiene solución x=-3, y=1, z=6.

Por tanto, las coordenadas de v en B cuando $a=4$ son (-3, 1, 6).

b) Para calcular la matriz de cambio de base C debemos calcular $C=B^{-1}\cdot A$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos los resultados del apartado anterior y vemos que efectivamente transforma las coordenadas de v en A a las coordenadas de v en B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculad el rango de la matriz A según los valores del parámetro real α.

b) ¿Para qué valores de α el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ no tiene solución única? Para estos casos, encontrad las soluciones del sistema.

Solución:

a) La matriz con la que trabajamos es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el su rango. Cogiendo el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1$$

De la ecuación $\alpha - 1 = 0$ obtenemos que si $\alpha \neq 1$, este menor de orden 3 es diferente de cero y por tanto, el rango de la matriz será 3, mientras que si $\alpha = 1$, la matriz A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 2, ya que, por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ es diferente de cero.

En resumen:

- Si $\alpha \neq 1 \Rightarrow rang(A) = 3$

- Si $\alpha = 1 \Rightarrow rang(A) = 2$

b) El sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es homogéneo y, por tanto, es siempre compatible. Su solución será diferente de $x=0,\ y=0,\ z=0$, cuando el rango de la matriz del sistema sea menor que el número de incógnitas, es decir, cuando $\alpha = 1$.

En este caso $\alpha = 1$, el sistema se convierte en

$$\left.\begin{aligned} x+\ y+\ z &= 0 \\ x+\ y \quad &= 0 \\ x+\ y+\ z &= 0 \\ 0x+0y+0z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

simplificando $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ x+y &= 0 \end{aligned}\right\}$. De la segunda ecuación resulta $y=-x$ y substituyendo en la primera ecuación obtenemos $x-x+z=0$, o sea, $z=0$.

Los puntos solución son de la forma $\boxed{(x,-x,0),\ x \in \mathbb{R}}$.

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (x+2y+3z\ ,3y+z, y+3z)$

a) Encontrad la matriz de f en las bases canónicas.

b) Calculad el polinomio característico de f y los valores propios de f.

c) Estudiad si f diagonaliza.

d) Encontrad una base de $\mathbb{R}^3$ con el número máximo de vectores propios de f.

Solución:

a) Observamos que f(1,0,0)=(1,0,0), f(0,1,0)=(2,3,1) y f(0,0,1)=(3,1,3). Estos vectores imagen ya están expresados en la base canónica. Por lo tanto, poniéndolos por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}.$$

b) Recordemos el Módulo 4, Sección 7, la definición de polinomio característico de f. Desarrollando el determinante por la tercera columna obtenemos:

$$Q(t)=det(A-tI)=det\begin{pmatrix}1-t&2&3\\0&3-t&1\\0&1&3-t\end{pmatrix}=(1-t)det\begin{pmatrix}3-t&1\\1&3-t\end{pmatrix}.$$

Operando, obtenemos:

$$Q(t)=(1-t)(t^2-6\text{t}+8)=(1-t)(t-2)(t-4)=(1-t)(2-t)(4-t).$$

Las raíces de este polinomio son 1, 2 y 4 con multiplicidad algebraica 1 (ver Módulo 4, Sección 8.1).

Los valores propios de f son el 1, el 2 y el 4, con multiplicidad algebraica 1.

c) Para ver si diagonaliza tenemos que comprobar que la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados (ver Módulo 4, Sección 8). Siempre que la multiplicidad algebraica es 1, entonces la dimensión del espacio vectorial generado por los correspondientes vectores propios asociados también es 1. Por lo tanto, para los tres valores propios, la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados. Eso significa que f diagonaliza (ver Módulo 4, Sección 8).

f diagonaliza porque la multiplicidad algebraica de los tres valores propios (1) coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores propios asociados.

d) Usemos ahora el Módulo 4, Sección 7, para encontrar los vectores propios de f. Encontremos vectores propios de f de valor propio 1. Es decir, busquemos el núcleo de la matriz A-I. O sea, resolvamos el sistema (A-I)X=0:

$$(A-I)X=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 2y+3z=0, 2y+z=0, y+2z=0. Se deduce que y=0 y z=0. Por lo tanto, los vectores solución son de la forma: (x,y,z)=(x,0,0)=x(1,0,0). En particular, (1,0,0) es vector propio de f de valor propio 1.

Ahora encontremos vectores propios de f de valor propio 2. Es decir, busquemos el núcleo de A-2I. O sea, resolvamos el sistema (A-2I)X=0:

$$(A-2\mathrm{I})X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema -x+2y+3z=0, y+z=0. De la segunda ecuación se deduce y=-z. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos: -x-2z+3z=0. Por lo tanto, x=z. Los vectores solución son de la forma: (x,y,z)=(z,-z,z)=z(1,-1,1). En particular, (1,-1,1) es vector propio de f de valor propio 2.

Encontremos ahora vectores propios de f de valor propio 4. Es decir, busquemos el núcleo de A-4I. O sea, resolvamos el sistema (A-4I)X=0:

$$(A-4\mathrm{I})X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema -3x+2y+3z=0, -y+z=0. De la segunda ecuación obtenemos y=z. Sustituyendo en la primera: -3x+2z+3z=0. O sea, 3x=5z y x=(5/3)z. Así, los vectores solución son de la forma: (x,y,z)=((5/3)z,z,z)=z((5/3),1,1). En particular, (5/3,1,1) es vector propio de f de valor propio 4.

(1,0,0), (1,-1,1), (5/3,1,1) es una base de R^3 formada por vectores propios de f.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	210º	270º	300º	330º	345º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$