EXAMEN 3

1. Responeu raonadament als següents apartats:

   a) Resoleu l'equació $\overline{z} - 4_{\frac{\pi}{3}} = 2i$, on $\overline{z}$ significa el conjugat de z. Proporcioneu z en forma binòmica.

   b) Calculeu totes les arrels cinquenes del següent nombre complex: $3\sqrt{3} - 2i$. Proporcioneu el resultat en forma polar i els angles en graus en l'interval $[0°, 360°)$.

Solució

a) Primer passem $4_{\frac{\pi}{3}}$ a forma binòmica, utilitzant la relació que estableix que $a = r \cdot \cos\theta$ i $b = r \cdot \sin\theta$ (veure apartat 3.4.2, Mòdul 1):

- $r = 4$
- $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Així, s'obté:

$$4_{\frac{\pi}{3}} = 2 + 2\sqrt{3}i$$

Ara aïllem $\overline{z}$ de l'equació:

$$\overline{z} = 2i + 4_{\frac{\pi}{3}} = 2i + y = 2i + 2 + 2\sqrt{3}i = 2 + 2(1+\sqrt{3})i$$

Finalment, apliquem el conjugat per a obtenir el resultat final:

$$\boxed{z = 2 - 2(1+\sqrt{3})i}$$

b) Primer escrivim el nombre complex $3\sqrt{3} - 2i$ en forma polar (veure apartat 3.4.1, Mòdul 1):

$$\text{Mòdul: } r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{31}$$
$$\text{Argument: } \theta = \arctan\left(\frac{-2}{3\sqrt{3}}\right) = 338.95°$$

NOTA: la tangent d'un angle val $\frac{-2}{3\sqrt{3}}$ en $158.95°$ i en $338.95°$. Ara bé, el nombre complex que estem analitzant té la part real positiva i la part imaginària negativa, de manera que es troba al quart quadrant, és a dir, $338.95°$.

Tenim doncs que $3\sqrt{3} - 2i = \sqrt{31}_{338.95°}$. Ara podem aplicar l'arrel cinquena (veure apartat 3.6.1, Mòdul 1):

$$\sqrt[5]{\sqrt{31}_{338.95^\circ}} = \sqrt[5]{\sqrt{31}}_{\frac{338.95^\circ+360^\circ k}{5}} \qquad \text{per a } k=0,1,2,3,4$$

El mòdul de les arrels és: $\sqrt[5]{\sqrt{31}} = \sqrt[10]{31}$
Els arguments de les arrels són: $\beta_k = \frac{338.95^\circ+360^\circ k}{5}$ per a $k=0,1,2,3,4$

- Per a $k=0$, tenim $\beta_0 = 67.79^\circ$.
- Per a $k=1$, tenim $\beta_1 = 139.79^\circ$.
- Per a $k=2$, tenim $\beta_2 = 211.79^\circ$.
- Per a $k=3$, tenim $\beta_3 = 283.79^\circ$.
- Per a $k=4$, tenim $\beta_4 = 355.79^\circ$.

En resum, les arrels cinquenes de $3\sqrt{3}-2i$ són:

$$\boxed{\sqrt[10]{31}_{67.79^\circ},\ \sqrt[10]{31}_{139.79^\circ},\ \sqrt[10]{31}_{211.79^\circ},\ \sqrt[10]{31}_{283.79^\circ} \text{ i } \sqrt[10]{31}_{355.79^\circ}}$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Passar $4_{\frac{\pi}{3}}$ a forma binòmica: 0.5 punts.
- Calcular $\overline{z}$: 0.5 punts.
- Calcular z: 0.25 punts.

Apartat b

- Passar el nombre complex a forma polar: 0.5 punts.
- Calcular el mòdul de les arrels: 0.25 punts.
- Calcular els arguments de les arrels: 0.5 punts.

2. Considereu els següents tres plans π_1, π_2 i π_3:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ 50x + y + kz = 50 \\ \pi_2 &: \ (k-a)\,y = 0 \\ \pi_3 &: \ 2kx + y + 4z = 20 \end{aligned}$$

Substituïu el paràmetre "a"per la **primera xifra de la dreta** del vostre identificador IDP del campus UOC i amb els tres plans obtinguts:

a) Determineu, de manera raonada, la posició relativa dels tres plans π_1, π_2 i π_3 en funció dels diferents valors del paràmetre $k \in \mathbb{R}$.

b) Per a $k = a + 11$, calculeu, en cas d'existir, el punt de tall dels tres plans π_1, π_2 i π_3.

Solució Resolem aquest exercici de forma paramètrica, en funció de a, d'aquesta manera, si vols veure la resolució concreta que correspon al valor del teu IDP, només has de substituir el paràmetre a pel teu valor.

a) Recordem que l'estudi de la posició relativa de tres plans es pot fer a partir de la discussió del consegüent sistema format per les equacions que defineixen aquests tres plans [Veure apartat 8 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"]

$$\left.\begin{aligned} 50x + y + kz &= 50 \\ (k-a)\,y &= 0 \\ 2kx + y + 4z &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Per a discutir-lo utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Veure apartat 4 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"].

La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 1 & k \\ 0 & k-a & 0 \\ 2k & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & k & 50 \\ 0 & k-a & 0 & 0 \\ 2k & 1 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat.

$$|A| = \begin{vmatrix} 50 & 1 & k \\ 0 & k-a & 0 \\ 2k & 1 & 4 \end{vmatrix} = (k-a)\left(200 - 2k^2\right) = -2\,(k-a)\,(k-10)\,(k+10)$$

- Si $k \neq a$, $k \neq 10$ i $k \neq -10$ $\rightarrow$ rg$(A) = 3 =$ rg$(M) =$ n^o incògnites i el sistema és compatible determinat. Per tant, podem afirmar que els tres plans $\boxed{\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3 \text{ intersequen en un únic punt}}$.

- Si $k = a$, aleshores rg$(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = 50 - 2a \neq 0$, ja que a només pot prendre valors enters entre 0 i 9.
  Calculem, per a $k = a$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents $\begin{vmatrix} 50 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 20 \end{vmatrix} = 0$. Així doncs, tenim que rg(M) =rg$(A) = 2 \neq$ n^o incògnites i el sistema és compatible indeterminat amb grau d'indeterminació igual a 1. En conseqüència, $\boxed{\text{els tres plans } \pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3 \text{ intersequen en una recta}}$.

- Si $k = 10$, aleshores rg$(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 0 & 10-a \end{vmatrix} = 50(10-a) \neq 0$, ja que a només pot prendre valors enters entre 0 i 9.
  Calculem, per a $k = 10$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents $\begin{vmatrix} 50 & 1 & 50 \\ 0 & 10-a & 0 \\ 20 & 1 & 20 \end{vmatrix} = 0$. Així doncs, tenim que rg$(M) =$ rg$(A) = 2 \neq$ n^o incògnites i el sistema és compatible indeterminat amb grau d'indeterminació igual a 1. En conseqüència, $\boxed{\text{els tres plans } \pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3 \text{ intersequen en una recta}}$.

– Si $k=-10$, aleshores $\text{rg}(A)=2$, ja que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 0 & -10-a \end{vmatrix} = -50(10+a) \neq 0$.

Calculem, per a $k=-10$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents $\begin{vmatrix} 50 & 1 & 50 \\ 0 & -10-a & 0 \\ -20 & 1 & 20 \end{vmatrix} = -2000\,(10+a) \neq 0$. Així doncs, tenim que $\text{rg}(M) = 3 > \text{rg}(A)$ i, per tant, s'obté que el sistema és incompatible. En conseqüència, $\boxed{\text{els tres plans } \pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3 \text{ no s'intersequen}}$.

b) Per l'apartat anterior sabem que per a $k=a+11$ els tres plans π_1, π_2, π_3 intersequen en un únic punt. Així doncs, el sistema que ens demanen resoldre és:

$$\left.\begin{aligned} 50x + y + (a+11)\,z = 50 \\ 11y = 0 \\ (2a+22)\,x + y + 4z = 20 \end{aligned}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apartat 6 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"] per a determinar les solucions d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & a+11 & 50 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 2a+22 & 1 & 4 & 20 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & a+11 & 50 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a+14}{25} & \frac{-a^2-22a-21}{25} & -2a-2 \end{array}\right)$$
$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & a+11 & 50 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-a^2-22a-21}{25} & -2a-2 \end{array}\right)$$

Operacions: (1): $F3 - \left(\frac{a+11}{25}\right)\cdot F1 \to F3$.
(2): $F3 - \left(\frac{-a+14}{275}\right) F2 \to F3$.

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{aligned} 50x + y + (a+11)\,z = 50 \\ 11y = 0 \\ -\left(\frac{a^2+22a+21}{25}\right) z = -2a-2 \end{aligned}\right\}$$

De la tercera equació s'obté $z = \frac{50a+50}{a^2+22a+21} = \frac{50}{a+21}$. De la segona equació obtenim $y=0$. Si substituïm en la primera equació aquests valors de y i de z que hem obtingut tenim $x = \frac{10}{a+21}$.

Així doncs, per a $k=a+11$ el punt de tall dels tres plans, en funció dels diferents valors del paràmetre a, és:

	$x = \frac{10}{a+21}$,	$y = 0$,	$z = \frac{50}{a+21}$
Si $a = 0$	$x = 10/21$	$y = 0$	$z = 50/21$
Si $a = 1$	$x = 5/11$	$y = 0$	$z = 25/11$
Si $a = 2$	$x = 10/23$	$y = 0$	$z = 50/23$
Si $a = 3$	$x = 5/12$	$y = 0$	$z = 25/12$
Si $a = 4$	$x = 2/5$	$y = 0$	$z = 2$
Si $a = 5$	$x = 5/13$	$y = 0$	$z = 25/13$
Si $a = 6$	$x = 10/27$	$y = 0$	$z = 50/27$
Si $a = 7$	$x = 5/14$	$y = 0$	$z = 25/14$
Si $a = 8$	$x = 10/29$	$y = 0$	$z = 50/29$
Si $a = 9$	$x = 1/3$	$y = 0$	$z = 5/3$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Calcular correctament el determinant de la matriu A en funció de k: 0.25 punts.
- Justificar que per a k diferent de a, de 10 i de -10 els tres plans intersequen en un únic punt: 0.25 punts.
- Justificar que per a $k = a$ els tres plans intersequen en una recta: 0.5 punts.
- Justificar que per a $k = 10$ els tres plans intersequen en una recta: 0.5 punts.
- Justificar que per a $k = -10$ els tres plans no s'intersequen: 0.5 punts.

Apartat b

- Obtenir el punt de tall dels tres plans en el cas $k = a + 11$: 0.5 punts.

3. Sigui E un subespai vectorial de dimensió 3 de $\mathbb{R}^4$ definit de la següent forma:

$$E = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 | b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = 0\}.$$

I sigui $v = (a + 1, a + 3, a + 4, a + 2)$ on a és la **tercera xifra de la dreta** del vostre IDP.
Digueu si són vertaderes o falses les següents afirmacions i **justifiqueu la vostra resposta**:

a) $A = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ és una base de E.

b) $v \in E$ i les seves coordenades en la base A són $(a + 1, a + 2, 1)$.

c) $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & k & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ és la matriu de canvi de base de la base $B = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (0, 0, k, k), (0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$ a la base A.

d) El valor $k = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ fa que B sigui una base ortonormal.

Solució

a) **VERTADER**. Com que sabem que la dimensió de E és 3, només cal mirar que els vectors de A pertanyen a E i que són linealment independents. Primer de tot comprovem que els vectors de A pertanyen a E comprovant que es compleix la condició $b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = 0$ per als tres vectors, cosa que és certa. Seguidament comprovem que són linealment independents, ja que contenen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs A és una base de E.

b) **FALS**. Efectivament $v \in E$ ja que compleix la condició $b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = 0$, però les seves coordenades en la base A no són les indicades, ja que:

$$(a+1)\cdot(1,1,0,0) + (a+2)\cdot(0,0,1,1) + (1,0,0,1) \neq v$$

c) **VERTADER**. Només ens cal comprovar que multiplicant els vectors de la base A per la matriu de canvi de base obtenim la base B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_{B\to A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & k & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & k & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

d) **FALS**. Per a que la base B sigui ortonormal cal que els vectors tinguin mòdul 1 i siguin ortogonals dos a dos. Comencem calculant els mòduls dels vectors de la base fent $k = \frac{-\sqrt{2}}{2}$:

$\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 0 + 0} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 0 + 0} = 1$

$\sqrt{0 + 0 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{0 + 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

$\sqrt{0 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 2} \neq 1$

Així doncs el tercer vector de la base B no té mòdul 1 i per tant la base B no és ortonormal.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.

- Justificació: 0.625 punts.

Apartat b

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat c

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat d

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

4. Sigui a la **segona xifra de la dreta** del vostre IDP del campus UOC i b un paràmetre real.

    a) Escriviu la matriu del gir d'angle $90°$ centrat en el punt $(1, a+b)$ i calculeu la imatge del punt (a, b) en aplicar-li aquest gir.

    b) Escriviu la matriu de l'escalat de raó b centrat en el punt $(-1, a-b)$ i calculeu la imatge del punt (a, b) en aplicar-li aquest escalat.

    c) Calculeu la imatge del punt (a, b) en aplicar-li dues composicions de les transformacions anteriors en diferent ordre: la del gir seguit de l'escalat i la de l'escalat seguit del gir.

Solución
Resolem el problema per a un valor de a genèric. Per a obtenir la solució particular corresponent al vostre dígit només heu de substituir a pel seu valor en els resultats següents.

a) La matriu del gir d'angle $90°$ i centre $(1, a+b)$ s'obté multiplicant tres matrius que, començant de dreta a esquerra, són: la matriu de la translació de vector $(-1, -a-b)$, la del gir d'angle $90°$ centrat en l'origen i la de la translació de vector $(1, a+b)$. Corresponen a les aplicacions que hem de compondre segons s'explica en el punt 3.4 "Rotació al voltant d'un punt genèric" del mòdul "Transformacions geomètriques". Calculem la composició:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) & 0 \\ \sin(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a+b+1 \\ 1 & 0 & a+b-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La imatge del punt (a, b) es pot calcular mitjançant la multiplicació:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a+b+1 \\ 1 & 0 & a+b-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a+b-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultat és el punt $(a+1, 2a+b-1)$.

b) La matriu de l'escalat de raó b i centre $(-1, a-b)$ s'obté multiplicant tres matrius que, començant de dreta a esquerra, són: la matriu de la translació de vector $(1, b-a)$, la de l'escalat de raó b centrat en l'origen i la de la translació de vector $(-1, a-b)$. Corresponen a les aplicacions que hem de compondre segons s'explica en el punt 4.3 "Escalat a partir d'un punt genèric"del mòdul "Transformacions geomètriques".

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -1 \\ 0 & b & a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b-1 \\ 0 & b & b(b-a)+a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La imatge del punt (a, b) es pot calcular mitjançant la multiplicació:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b-1 \\ 0 & b & b(b-a)+a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+b-1 \\ b^2+b^2-ab+a-b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1)b-1 \\ 2b^2-(a+1)b+a \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultat és el punt $((a+1)b-1, 2b^2-(a+1)b+a)$.

c) La imatge del punt (a, b) en aplicar-li la composició del gir seguit de l'escalat es pot calcular mitjançant la multiplicació de la matriu de l'escalat pel punt resultant de l'apartat a):

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b-1 \\ 0 & b & b(b-a)+a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a+b-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+b+b-1 \\ 2ab+b^2-b+b^2-ab+a-b \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultat és el punt $(ab+2b-1, 2b^2+ab-2b+a)$.

La imatge del punt (a, b) en aplicar-li la composició de l'escalat seguit del gir es pot calcular mitjançant la multiplicació de la matriu del gir pel punt resultant de l'apartat b):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a+b+1 \\ 1 & 0 & a+b-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (a+1)b-1 \\ 2b^2-(a+1)b+a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b^2+(a+1)b-a+a+b+1 \\ ab+b-1+a+b-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultat és el punt $(-2b^2+ab+2b+1, ab+2b+a-2)$.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Calcular la matriu de la composició: 0.5 punts.
- Calcular la imatge del punt: 0.25 punts.

Apartat b

- Calcular la matriu de la composició: 0.5 punts.
- Calcular la imatge del punt: 0.25 punts.

Apartat c

- Calcular la imatge de la composició del gir més l'escalat: 0.5 punts.
- Calcular la imatge de la composició de l'escalat més el gir: 0.5 punts.