Solució examen 20-06-2015

Problema 1

a) Trobeu els valors d´x i y per a què es verifiqui la següent igualtat:

$$\frac{x-1+9\cdot(y-x)i}{1-i}=5y-2xi$$

b) Trobeu les arrels quadrades de $-2i$ (proporcioneu els resultats en forma polar i binòmica).

NOTA:
En la realització dels problemes pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0º	33,5º	45º	67º	90º	135º	213,5º	270º	315º
Sin(α)	0	0,552	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,92	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,552	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
Cos(α)	1	0,834	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,39	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,834	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tag(α)	0	0,67	1	2,4	∞	-1	0,67	$-\infty$	-1

<u>Resolució:</u>

a) Eliminant els denominadors de la igualtat, es té que:
$x-1+9\cdot(y-x)i=(5y-2xi)\cdot(1-i)$
Operem:
$x-1+9yi-9xi=5y-2xi-5yi-2x$
Agrupem part imaginària i part real:
$x-1+(9y-9x)i=5y-2x+(-5y-2x)i$
Apliquem el principi d´igualtat dels nombres complexos i obtenim el següent sistema d´equacions:

$$\begin{cases} x-1=5y-2x \\ 9(y-x)=-5y-2x \end{cases}$$

D´on obtenim:
De la primera equació: $x=\frac{1+5y}{3}$ que substituïm en la segona equació i es té que $-7+7y=0$.
Això és, y=1, x=2

Per tant:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

b) Escrivim el complex $-2i$ en forma polar tal com s'explica a l'apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$m = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\alpha = arctg\left(\frac{-2}{0}\right) = -90º = 270º$

Observem que ni sumem ni restem cap angle donat que la part real del complex és positiva (tercer exemple de la pàgina 29 i apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt{-2i} = \sqrt{2_{270º}}$

Com que ens demanen les arrels quadrades hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt{2_{270º}} = \sqrt{2}_{\frac{270º+360º k}{2}}$ per a k=0, 1

Així doncs, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt{2}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{270º + 360º k}{2}$ per a k=0, 1

Si k=0, tenim que $\beta_0 = 135º$

Si k=1, tenim que $\beta_1 = 135º + 180º = 315º$

Per tant, les dues arrels quadrades del complex $-2i$ són:

$$\sqrt{2}_{135º} = \sqrt{2}\cdot(\cos 135º + i\cdot \sin 135º) = \sqrt{2}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + i$$

$$\sqrt{2}_{315º} = \sqrt{2}\cdot(\cos 315º + i\cdot \sin 315º) = \sqrt{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 1 - i$$

<u>Una altra forma de resoldre l´exercici</u>:

El resultat de l´arrel serà un complex de la forma $x + iy$, amb x i y reals. Per tant:

$\sqrt{-2i} = x + iy \rightarrow -2i = (x+iy)^2 \rightarrow -2i = x^2 - y^2 + 2xyi$

Aplicant a aquesta última expressió el principi d´igualtat dels nombres complexos, es té que:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \rightarrow x = \dfrac{-1}{y} \end{cases}$$

$$\left(\frac{-1}{y}\right)^2 - y^2 = 0 \rightarrow 1 - y^4 = 0 \rightarrow y^4 - 1 = 0 \rightarrow y^2 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$

$y^2 = -1 \rightarrow y = \pm i$

Aquesta última solució d´y no serveix ja que, independentment de que x i y siguin la part real i imaginària del compex buscat, x i y han de ser nombres reals.

Per tant,

Per a $y = 1 \rightarrow x = -1 \rightarrow -1 + i$

Per a $y = -1 \rightarrow x = 1 \rightarrow 1 - i$

Ara ja tenim les solucions en forma binòmica, falta pasar-les a forma polar:

- Per a -1+i

$$m=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{1}{-1}\right) = arctg(-1) = 135^{\circ}$$

Tenim, per tant, que $-1+i=\sqrt{2}_{135^{\circ}}$

- Per a 1-i

$$m=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{-1}{1}\right) + 180^{\circ} = arctg(-1) + 180^{\circ} = 315^{\circ}$$

Tenim, per tant, que $1-i=\sqrt{2}_{315^{\circ}}$

Problema 2

Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 2 de R^5 definits de la següent forma:

$A=\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1+a_2=a_4,\ a_3=0,\ a_5=0\}$
$B=\{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid b_1= b_3-b_5,\ b_2=0,\ b_4=0\}$
I sigui v=(3,-2,0,1,0)

a) Comproveu que W={(1, 0, 0, 1, 0,), (0, 1, 0, 1, 0)} és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calculeu-ne les coordenades en la base anterior.
b) Trobeu una base de B. Pertany v a B? En cas afirmatiu calculeu-ne les coordenades en la base que heu trobat. Generen A i B el mateix subespai vectorial de R^5? Justifiqueu la resposta.

<u>Resolució</u>

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 2, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.
Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions $a_1+a_2=a_4$, $a_3=0$ i $a_5=0$ per a tots tres vectors, cosa que és certa.
Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=2$$

Així doncs W és una base d'A.
Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=3 y=-2. Per tant v pertany a A i les seves coordenades en la base anterior són (3,-2).

b) Podem proposar com a base de B:

T={(1, 0, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)}. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base.
Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que es compleixen les condicions $b_1= b_3-b_5$, $b_2=0$ i $b_4=0$ per a tots tres vectors, cosa que és certa.
Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs T és una base de B.
Podem veure directament que v no pertany a B ja que no compleix $b_2=0$
A i B no generen el mateix subespai vectorial de R^5 ja que hi ha vectors (com per exemple el v), que pertanyen a l'un i no a l'altre.

Problema 3

Considerem el sistema d'equacions $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=0 \\ -mx+3y+z=0 \\ x+y=4 \end{array}\right\}$ on m és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema pels diferents valors del paràmetre m .
b) Resoleu el sistema per a $m = 1$.

Resolució:

a) Tenim el sistema en la forma $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=0 \\ -mx+3y+z=0 \\ x+y=4 \end{array}\right\}$ i calculem el determinant de la matriu dels coeficients: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m$

Discussió:

1. Si $m \neq 0$ rang(A) = 3 i per tant rang(A') = 3 i aleshores $\boxed{\text{Sistema Compatible Determinat.}}$

2. Si m=0 rang(A) = 2 ja que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$ però rang(A') =3 , ja que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

Per tant el sistema és $\boxed{\text{Incompatible}}$.

b) Per a **m= 1** els sistema és compatible determinat.
Resolent per Cràmer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{4}{1} = 4 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{0}{1} = 0 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

La solució del sistema és **x=4, y=0, z= 4**

Problema 4
Sigui f l'aplicació de R^3 en R^3 definida per f(x,y,z)=(0,x,y+3z).
a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.
b) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.
c) Estudieu si f diagonalitza.
d) Trobeu una base de R^3 amb el nombre màxim de vectors propis de f.
Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) El polinomi característic de f és:

$$Q(t) = det(A - tI) = det\begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 3-t \end{pmatrix} = (-t)^2 (3-t).$$

Observem que el polinomi característic descomposa totalment en factors reals de grau 1, tot i que n'hi ha un que està repetit. A més a més, els valors propis de f són el 0, amb multiplicitat algebraica 2, i el 3, amb multiplicitat algebraica 1 (veure Apunts, mòdul 5, pàgina 28).

c) Per estudiar si f diagonalitza cal veure que la dimensió de l'espai de vectors propis associat al 0 és 2 i la dimensió de l'espai de vectors propis associat al 3 és 1 (veure Apunts mòdul 5, pàgina 28). En general, l'espai de vectors propis associat a un valor propi λ és el nucli de A-λI. Per tant, l'espai de vectors propis associat al 0 és el nucli de A-0I, o sigui, el nucli de A. I tenim que, pel Teorema de la dimensió, la

dim(Nucli(A)) = 3-dim Im(f) =3-rang(A)=3-2=1.

Per tant, la dimensió de l'espai de vectors propis associat al 0 és 1 i no 2. Això vol dir que f no diagonalitza.

d) Trobem vectors propis de f de valor propi 0. És a dir, busquem el nucli de A-0I. O sigui, resolem el sistema AX=0:

$$(A-0\cdot I)X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

La solució d'aquest sistema x=0, y+3z=0, és (x,y,z)=(0,-3z,z)=z(0,-3,1).
Ara, trobem vectors propis de f de valor propi 3. És a dir, busquem el nucli de A-3I. O sigui, resolem el sistema (A-3I)X=0:

$$(A-3\cdot I)X=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

La solució d'aquest sistema -3x=0, x-3y=0, y=0 és (x,y,z)=(0,0,z)=z(0,0,1).
A part del (0,-3,1), vector propi de f de valor propi 0, i del (0,0,1), vector propi de f de valor propi 3, ja no podem trobar més vectors propis de f linealment independents. Així, una base de R^3 amb el nombre màxim de vector propis de f ha de contenir aquests dos i un tercer. Per exemple: (0,-3,1),(0,0,1) i el (1,0,0).