Examen Álgebra / 17 de enero de 2026 / José Carlos López Henestrosa / IDP: 1817998

① a) $z_1 = 3 - 5i \qquad z_2 = 1 + 2i$

$\boxed{\text{Producto } z_1 \cdot z_2}$

Aplicamos la propiedad distributiva y recordamos que $i^2 = -1$.

$$\boxed{z_1 \cdot z_2} = (3-5i)(1+2i)$$
$$= 3(1) + 3(2i) - 5i(1) - 5i(2i)$$
$$= 3 + 6i - 5i - 10i^2$$

Sustituimos i^2 por -1:

$$= 3 + 6i - 5i - 10(-1)$$
$$= 3 + 6i - 5i + 10$$

Agrupamos partes reales e imaginarias:

$$= (3+10) + (6i - 5i)$$
$$= \boxed{13 + 1i}$$

$\boxed{\text{Cociente } \frac{z_1}{z_2}}$

Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-5i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i}$$

Desglose de operaciones:

– Numerador: $(3-5i)(1-2i) = 3(1) + 3(2i) - 5i(1) - 5i(-2i) =$
$$= 3 - 6i - 5i + 10i^2$$
$$= 3 - 11i + 10(-1)$$
$$= 3 - 10 - 11i$$
$$= -7 - 11i$$

– Denominador: $(1+2i)(1-2i) = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

Ahora unimos el numerador y el denominador:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-7-11i}{5}$$

Para expresarlo en forma binómica, separamos la fracción:

$$\boxed{\frac{z_2}{z_1} = -\frac{7}{5} - \frac{11}{5}i}$$

1 b) Dado $z = -4+4\sqrt{3}i$, transformamos z a forma polar para calcular sus raíces:

Primero, calculamos el módulo (r)

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\boxed{r = \sqrt{(-4)^2+(4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+16(3)} = 8}$$

Ahora, calculamos el ángulo usando la tangente:

$$\tan\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{-4} = -\sqrt{3}$$

La tangente de 60° es $\sqrt{3}$. Como la parte real es negativa y la imaginaria positiva, el número se encuentra en el segundo cuadrante. Por tanto, el ángulo es $180° - 60° = 120°$

El número en forma polar es $\boxed{z = 8_{120°}}$.

A continuación, aplicamos la fórmula de De Moivre para raíces:

$$\sqrt[n]{r_\theta} = \sqrt[n]{r}_{\frac{\theta+360°k}{n}} \qquad \text{Donde } k = 0, 1, 2 \text{ (hasta } n-1).$$

Sustituimos nuestros datos ($n=3, r=8, \theta=120°$). El nuevo módulo es $\sqrt[3]{8} = 2$ y la fórmula del ángulo $\alpha_k = \frac{120° + 360° k}{3}$

Simplificando la expresión del ángulo: $\alpha_k = 40° + 120° k$

Ahora sustituimos k para encontrar los tres ángulos dentro de $[0°, 360°)$

- Para $\boxed{k=0}$: $\alpha_0 = 40° + 120°(0) = 40°$

Resultado: $\boxed{2_{40°}}$

- Para $\boxed{k=1}$: $\alpha_1 = 40° + 120°(1) = 160°$

Resultado $\boxed{2_{160°}}$

- Para $\boxed{k=2}$ $\alpha_2 = 40° + 120°(2) = 40° + 240° = 280°$

Resultado: $\boxed{2_{280°}}$

Los resultados para cada valor de k son las tres raíces cúbicas de z en forma polar.

2 a) El primer número por la derecha de mi IDP es 8, por lo que $\boxed{a=8}$.

En base a esto, sustituimos su valor en el sistema:

$$\begin{cases} kx - (k-(8+1))z = k \\ kx + (k+1)y = k \\ 2kx + (k-(8+1))z = 2k^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Simplificamos}} \begin{cases} kx - (k-9)z = k \\ kx + (k+1)y = k \\ 2kx + (k-9)z = 2k^2 \end{cases}$$

Definimos la matriz de coeficientes (A) y la matriz ampliada (A^*):

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & -(k-9) \\ k & k+1 & 0 \\ 2k & 0 & k-9 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} k & 0 & -(k-9) & k \\ k & k+1 & 0 & k \\ 2k & 0 & k-9 & 2k^2 \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos el determinante de A:

$$|A| = (k+1)\begin{vmatrix} k & -(k-9) \\ 2k & k-9 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{|A| = (k+1)[k(k-9) - (-(k-9)2k)]} = (k+1)[k(k-9) + 2k(k-9)]$$

$$= \boxed{(k+1)3k(k-9)}$$

Para saber cuándo el rango no es máximo, igualamos a cero:

$$3k(k+1)(k-9)=0$$

Los valores críticos son $\boxed{k=0}$ $\boxed{k=-1}$ y $\boxed{k=9}$

En base a estos valores, analizamos el sistema:

Caso general cuando $k \neq 0, k \neq -1, k \neq 9$:

- El determinante $|A| \neq 0$
- Rango $(A) = 3$
- Rango $(A^*) = 3$ (coincide con el número de filas que A)
- Número de incógnitas $= 3$

Por lo tanto, el sistemas es $\boxed{\text{Sistema Compatible Determinado}}$ (solución única).

Caso $k=0$

Sustituimos $k=0$ en A^*: $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

La columna 1 es nula, por lo que tomamos el menor formado por las columnas 2 y 3 para calcular el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$. El rango es 2.

Ahora calculamos el rango de A^*. Para ello, vemos que la columna de términos independientes es nula, por lo que el rango no se puede aumentar. Por tanto, Rango $(A^*) = 2$.

Vemos que Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ nº de incógnitas (3).

Como conclusión, el sistema es $\boxed{\text{Sistema Compatible Indeterminado}}$ (infinitas soluciones con 1 grado de libertad).

$\boxed{\text{Caso } k=-1}$

Sustituimos $k=-1$ en A^* haciendo estos cálculos previos: $k-9=-10$

$-(k-9)=10$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 10 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de A se calcula desde la premisa que la columna 2 es nula. Por tanto, calculamos un menor con las columnas 1 y 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$ El rango es 2.

Ahora, calculamos el rango de A^*:

$$\begin{vmatrix} -1 & 10 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

Desglose cálculos: $-1(0-10)-10(-2-2)-1(10-0)=10+40-10=$

$=40 \neq 0$. El rango es 3.

Sabemos que $\text{Rango}(A)=2 \neq \text{Rango}(A^*)=3$. Por lo tanto, el sistema es un $\boxed{\text{Sistema Incompatible}}$ (no tiene solución).

$\boxed{\text{Caso } k=9}$

Sustituimos $k=9$ en A^* haciendo $k-9=0$ previamente.

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 9 \\ 9 & 10 & 0 & 9 \\ 18 & 0 & 0 & 162 \end{pmatrix}$$

Como la columna 3 es nula, tomamos ~~de orden~~ el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 90 \neq 0$$ El rango es 2.

Para el rango de A^*, observamos las ecuaciones equivalentes a la fila 1 y fila 3.

- Fila 1: $9x = 9 \Rightarrow x = 1$
- Fila 3: $18x = 162 \Rightarrow x = 9$

Esto es una contradicción $(1 \neq 9)$, por lo que sabemos que el rango de A^* sube a 3.

Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$. Por tanto, el sistema es un Sistema Incompatible (no tiene solución).

② b) Para calcular las soluciones con $k=1$, primero sustituimos este valor en el sistema original y luego resolvemos las ecuaciones resultantes.

Sustitución de $k=1$:

$$\begin{cases} 1x - (1-9)z = 1 \\ 1x + (1+1)y = 1 \\ 2(1)x + (1-9)z = 2(1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 8z = 1 & (1) \\ x + 2y = 1 & (2) \\ 2x - 8z = 2 & (3) \end{cases}$$

Como vimos en el apartado anterior, al ser $k=1$, el sistema es Compatible Determinado, por lo que esperamos una única solución.

Ahora, resolvemos el sistema usando el método de reducción entre la primera y tercera ecuación, ya que tienen la z con el mismo coeficiente pero signo contrario:

$$\cancel{\begin{cases} x + 8z = 1 \\ 2x - 8z = 2 \end{cases}} \quad \cancel{3x = 3}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 8z & = & 1 \\ 2x - 8z & = & 2 \quad (+) \\ \hline 3x & = & 3 \end{array}$$

Despejamos x: $x = \frac{3}{3} \Rightarrow \boxed{x = 1}$

Sustituimos $x=1$ en la ecuación (1) para hallar z:

$$1 + 8z = 1$$
$$8z = 1 - 1$$
$$8z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$$

Por últimos, sustituimos $x=1$ en la ecuación (2) para hallar y:

$$1+2y=1 \Rightarrow 2y=1-1 \Rightarrow 2y=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

Por tanto, la solución de sistema para $k=1$ es:

$$\boxed{x=1} \quad \boxed{y=0} \quad \boxed{z=0}$$

3 a) Para determinar la dimensión y encontrar una base del subespacio F, tenemos que estudiar la independencia lineal de los vectores generadores. Para ello, aplicamos el método de Gauss (reducción por filas).

Colocamos los vectores como filas de una matriz y buscamos el rango de dicha matriz. El rango nos indicará el número de vectores linealmente independientes (dimensión).

Dados los vectores:

- $v_1=(1,0,1,0)$
- $v_2=(0,1,1,1)$
- $v_3=(1,1,2,1)$
- $v_4=(2,-1,1,-1)$

Construimos la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Hacemos ceros debajo de la primera entrada de la columna 1:

- $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$
- $F_4 \leftarrow F_4 - 2F_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A continuación, hacemos ceros debajo de la segunda entrada de la columna 2:

$-F_3 \leftarrow F_3 - F_2$

$-F_4 \leftarrow F_4 + F_2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos apreciar, hemos obtenido 2 filas no nulas, lo cual implica que el rango de la matriz es 2. A su vez, esto significa que solo hay 2 vectores linealmente dependientes. De hecho, si observamos los vectores originales, podemos ver que:

- $V_3 = V_1 + V_2$
- $V_4 = 2V_2 - V_2$

Por tanto, la dimensión del subespacio es igual al rango de la matriz generada por sus vectores: $\boxed{\dim(F) = 2}$

Para la base, escogemos los vectores linealmente independients que hemos utilizado para pivotar. La opción más sencilla son los dos primeros vectores del enunciado:

$$\boxed{\text{Base } A = \{(1,0,1,0),(0,1,1,1)\}}$$

3 b) La tercera cifra empezando por la derecha de mi DNI es 9, por lo que $a = 9$. Por tanto, el vector w queda tal que así:

$$w = (9, 2(9)+2, 3(9)+2, 2(9)+2)$$

$$\boxed{w = (9, 20, 29, 20)}$$

Para hallar las coordenadas del vector w en la base A, debemos ~~simp~~ expresarlo como una combinación lineal de los vectores de la base obtenidos en el apartado anterior: $V_1 = (1,0,1,0)$, $V_2 = (0,1,1,1)$.

Buscamos dos escalares (coordenada), llamémoslos α y β, tales que:

$$\boxed{w = \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2}$$

Sustituimos los valores:

$$(9, 10, 19, 10) = \alpha (1, 0, 1, 0) + \beta (0, 1, 1, 1)$$

Esto genera el siguiente sistema de ecuaciones (igualando componente a componente):

- $9 = 1\alpha + 0\beta \Rightarrow \alpha = 9$
- $10 = 0\alpha + 1\beta \Rightarrow \beta = 10$
- $19 = 1\alpha + 1\beta$ (ecuación de comprobación)
- $10 = 0\alpha + 1\beta$ (ecuación de comprobación).

Comprobamos si $\alpha = 9$ y $\beta = 10$ satisfacen la tercera ecuación para verificar que el vector realmente pertenece al subespacio:

$$\alpha + \beta = 9 + 10 = 19$$

Esto coincide con la tercera componente del vector w (19). Por tanto, el cálculo es correcto.

Como resultado, obtenemos que las coordenadas del vector w en la base A son $\boxed{w_A = (9, 10)}$

3 c) Vamos a plantear este ejercicio en dos pasos. Primero, construiremos la matriz de cambio de base y luego ~~+~~ la utilizaremos para transformar las coordenadas del vector w.

Recordamos que la base A es $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 1)$ y que el vector w en base A es $w_A = (9, 10)$.

La matriz de cambio de base de B a A se construye colocando en sus columnas las coordenadas de los vectore de la nueva base (B) expresados en función de la antigua base (A).

Los vectores de la base B son:

- $v_1 = (2, 2, 4, 2)$
- $v_2 = (4, -2, 2, -2)$

Primero expresamos U_1 en función de V_1 y V_2. Para ello, buscamos a, b, tal que $U_1 = a \cdot V_1 + b \cdot V_2$:

$$(2, 2, 4, 2) = a(1, 0, 1, 0) + b(0, 1, 1, 1)$$

- Observando $2 = a(1) \Rightarrow \boxed{a = 2}$ (primera componente)
- Observando la segunda componente: $2 = b(1) \Rightarrow \boxed{b = 2}$

Coordenadas de $\boxed{U_1}$ en A: $\boxed{(2, 2)}$

Ahora, expresamos U_2 en función de V_1 y V_2. Para ello, buscamos c, d, tal que $V_2 = c \cdot V_1 + d \cdot V_2$:

$$(4, -2, 2, -2) = c(1, 0, 1, 0) + d(0, 1, 1, 1)$$

- Observando la primera componente: $4 = c(1) \Rightarrow \boxed{c = 4}$
- " " segunda " : $-2 = d(1) \Rightarrow \boxed{d = -2}$

Coordenadas de $\boxed{U_2}$ en A: $\boxed{(4, -2)}$

Ahora podemos construir la matriz P colocando las coordenadas halladas como columnas:

$$P_{B \to A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Procedemos a calcular las coordenadas de w en la base B.
La relación entre coordenadas viene dada por la siguiente fórmula:

$$w_A = P_{B \to A} \cdot w_B$$

Donde sabemos que $w_A = (9, 20)$ y desconocemos $w_B = (x, y)$.
Sustituimos los valores: $\begin{pmatrix} 9 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Lo cual equivale a resolver este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 9 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases}$$

Aplicamos el método de reducción restando la segunda ecuación a la primera:

$$(2x - 2x) + (4y - (-2y)) = 9 - 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6y = -11 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{11}{6}}$$

Sustituimos y en la segunda ecuación para obtener x:

$$2x - 2\left(-\frac{11}{6}\right) = 20 \Rightarrow 2x + \frac{11}{3} = 20 \Rightarrow 2x = 20 - \frac{11}{3}$$
$$\Rightarrow 2x = \frac{60 - 11}{3} = \frac{49}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{49}{6}}$$

Como resultado, obtenemos que las coordenadas del vector w en la nueva base B son $w_B = \left(\frac{49}{6}, \frac{11}{6}\right)$

4 a) La segunda cifra empezando por la derecha de mi IDP es 9, por lo que $\boxed{c=9}$. Por tanto, los puntos de $\mathbb{R}^2$ quedan así:

$$A=(-1, 9+1) \Rightarrow A=(-1,10)$$
$$B=(-3, 2(9)+2) \Rightarrow B=(-3,20)$$
$$A'=(9+1, 5) \Rightarrow A'=(10,5)$$

Para encontrar la matriz de traslación, primero debemos determinar el vector de desplazamiento que lleva el punto A al punto A'. Dado que estamos trabajando en el plano 2D pero se pide una matriz 3x3, utilizaremos coordenadas homogéneas.

Calculamos el vector de traslación $v=(t_x, t_y)$, el cual es la diferencia entre el punto final y el inicial:

$$v = A' - A$$

- $\boxed{t_x} = 10-(-1) = 11$
- $\boxed{t_y} = 5-10 = -5$

Obtenemos $v=(11,-5)$

En coordenadas homogéneas, la matriz de traslación T tiene la siguiente estructura, donde la última columna contiene el vector de desplazamiento: $\boxed{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4 b) Para encontrar la imagen de B', aplicaremos la traslación calculada en a) al punto B. Para ello, convertimos el punto B a coordenadas homogéneas añadiendo un 1 como tercera componente y multiplicamos por la matriz T:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Desglosamos el producto por coordenadas:

- $\boxed{x' = 1(-3) + 0(20) + 11(1) = -3 + 11 = 8}$
- $\boxed{y' = 0(-3) + 1(20) - 5(1) = 20 - 5 = 15}$
- $\boxed{\text{Componente homogénea} = 0(-3) + (0)(20) + 1(1) = 1}$

Por tanto, el punto imagen es: $\boxed{B' = (8, 15)}$

4 c) Debemos seguir una composición de tres movimientos:

1. Trasladar el centro de rotación C al origen $(0,0)$.
2. Rotar el ángulo deseado alrededor del origen.
3. Deshacer la traslación.

Sabemos que el punto de rotación es $\boxed{C = (0, -2(9) - 2) = (0, -20)}$

También sabemos que $\alpha = 270°$, por lo que calculamos el seno y coseno para la matriz de rotación estándar:

- $\cos(270°) = 0$ • $\sin(270°) = -1$

Ahora, construimos la matriz final M multiplicando $\boxed{M = T_{+c} \cdot R_{270} \cdot T_{-c}}$

Primero, construimos la matriz de traslación al origen (T_{-c}) llevando el punto $(0, -20)$ al $(0, 0)$. Para ello, debemos sumar 20 a la y.

$$T_{-c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, calculamos la matriz de ~~traslación al origen (T_{+c})~~ rotación básica (R_{270}):

$$\boxed{R_{270}} = \begin{pmatrix} \cos 270° & -\sin 270° & 0 \\ \sin 270° & \cos 270° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Hecho esto, devolvemos el centro a su posición original $(0, -20)$ (T_{+c}):

$$T_{+c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, calculamos la matriz compuesta multiplicando en orden:

$\boxed{R_{270} \cdot T_{-c}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 20 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{T_{+c} \cdot (\text{resultado anterior})}$

$$\boxed{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 20 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 20 \\ -1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

M es la matriz de giro de 270° con centro en $C(0,-20)$

4 d) Multiplicamos sus coordenadas homogéneas por la matriz de rotación M.

Para calcular la imagen del punto A', expresamos A' en coordenadas homogéneas $(10, 5, 1)$ y multiplicamos:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 20 \\ -1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Desglose operaciones:

- $\boxed{\text{Coordenada } x}$: $0(10) + 1(5) + 20(1) = 5 + 20 = \boxed{25}$
- $\boxed{\text{Coordenada } y}$: $-1(10) + 0(5) - 20(1) = -10 - 20 = \boxed{-30}$

La imagen de A' que llamaremos A'' es $\boxed{A'' = (25, -30)}$

Ahora, expresamos B' en coordenadas homogéneas $(8, 15, 1)$ y multiplicamos para obtener la imagen del punto B':

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 20 \\ -1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Desglose:

- Coordenadas x: $0(8) + 1(15) + 20(1) = 15 + 20 = \boxed{35}$
- $\boxed{\text{Coordenadas } y}$: $-1(8) + 0(15) - 20(1) = -8 - 20 = \boxed{-28}$

Como conclusión, obtenemos que la imagen de B', que llamamos B'', es $\boxed{B'' = (35, -28)}$

(4) e) Tenemos que multiplicar las matrices de las transformaciones tratadas individuales. Como la transformación se aplica al punto primero y después el resultado se gira, la matriz de giro debe multiplicar a la de traslación por la izquierda.

$$\boxed{M_{total} = M_{giro} \cdot M_{traslación}}$$

$$M_{total} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 20 \\ -1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desglose de operaciones:

- Fila 1:
  - Col 1: $(0)(1) + 1(0) + 20(0) = 0$
  - Col 2: $0(0) + 1(1) + 20(0) = 1$
  - Col 3: $0(11) + (1)(-5) + 20(1) = -5 + 20 = 15$
- Fila 2:
  - Col 1: $(-1)(1) + 0(0) + (-20)0 = -1$
  - Col 2: $(-1)0 + 0(1) + (-20)0 = 0$
  - Col 3: $(-1)11 + 0(-5) + (-20)1 = -11 - 20 = -31$
- Fila 3: 0, 0, 1

$$\boxed{M_{total} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \\ -1 & 0 & -31 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Verificamos con los puntos originales, aplicando esta matriz directamente a los puntos originales A y B para ver si obtenemos A'' y B'' (los resultados del apartado d).

Verificación para el punto A

$A = (-1, 10)$ Resultado esperado $A'' = (25, -30)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \\ -1 & 0 & -31 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(-1) + 1(10) + 15 \\ -1(-1) + 0(10) - 31 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -30 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver, coincide, ya que el resultado es $(25, -30)$

Verificación para el punto B

$B = (-3, 20)$ Resultado esperado $B'' = (35, -28)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \\ -1 & 0 & -31 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(-3) + 1(20) + 15 \\ -1(-3) + 0(20) - 31 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -28 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver, coincide, ya que el resultado es $(35, -28)$.

Conclusión

Hemos confirmado que la matriz compuesta funciona correctamente.