EXAMEN 1 15/01/2013

1.

a) Efectúa la siguiente operación con números complejos, expresando el resultado en forma binómica.

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}$$

b) Calcula las raíces quintas del complejo siguiente: $z=\sqrt[5]{10+10i}$ (proporciona los resultados en forma polar y binómica)

Solución:

a) Operamos con la expresión, recordando, tal como se explica en el recuadro gris de la página 17, que $i^2=-1$:

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}=\frac{2-3i-3-2i}{3+2i-2-i}=\frac{-1-5i}{1+i}=\frac{(-1-5i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{-1-5i+i+5i^2}{2}=$$

$$=\frac{-6-4i}{2}=-3-2i$$

Por tanto:

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}=-3-2i$$

b) Escribimos el complejo $z'=10+10i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

$$m=\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$

$$\alpha=arctg\left(\frac{10}{10}\right)=arctg1=45^{\circ}$$

Observemos que ni sumamos ni restamos ningún ángulo dado que la parte real y la parte imaginaria del complejo son positivas (apartado 3.4.1 de la página 30 del material impreso).

Tenemos, por tanto, que $z=\sqrt[5]{10+10i}=\sqrt[5]{(10\sqrt{2})_{45^{\circ}}}$

Como nos piden las raíces quintas debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$$\sqrt[5]{z'} = \sqrt[5]{10\sqrt{2}_{45}} = \left(\sqrt[10]{200}\right)_{\frac{45^{\circ}+360^{\circ}k}{5}} \qquad \text{para k=0, 1, 2, 3, 4}$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[10]{200}$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \dfrac{45^{\circ}+360^{\circ}k}{5}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 9^{\circ}$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 9^{\circ}+72^{\circ} = 81^{\circ}$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 81^{\circ}+72^{\circ} = 153^{\circ}$
- Si k=3, tenemos que $\beta_3 = 153^{\circ}+72^{\circ} = 225^{\circ}$
- Si k=4, tenemos que $\beta_4 = 225^{\circ}+72^{\circ} = 297^{\circ}$

Por tanto, las cinco raíces quintas del complejo $z = \sqrt[5]{10+10i}$ son:

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{9^{\circ}} = 1{,}6777 + 0{,}26573i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{81^{\circ}} = 0{,}26573 + 1{,}6777i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{153^{\circ}} = -1{,}5135 + 0{,}77117i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{225^{\circ}} = -1{,}2011 - 1{,}2011i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{297^{\circ}} = 0{,}77117 - 1{,}5135i}$$

2. Sea E un subespacio de R^3 generado por los siguientes vectores: E=< $(a+1,0,-8)$, $(7,a-1,a)$, $(0,0,a-1)$ >.

a) Determina, en función de *a*, la dimensión del subespacio E.
b) Para el caso $a=0$ halla una base de E. ¿Pertenece v=(1,0,1) a E? ¿Cuáles son sus coordenadas en la base que has encontrado?

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 7 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ -8 & a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} a+1 & 7 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-1)(a+1) = (a-1)^2(a+1)$$

Así para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ tenemos que el determinante que forman los vectores será no nulo y por tanto tendremos el máximo número de vectores linealmente independientes. En este caso la dimensión es 3.

Caso $a = -1$ Podemos encontrar un menor de orden 2 diferente de 0:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto tenemos 2 vectores linealmente independientes y esto implica que el espacio generado por E es de dimensión 2.

Caso $a = 1$ Podemos encontrar un menor de orden 2 diferente de 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto tenemos 2 vectores linealmente independientes y esto implica que el espacio generado por E es de dimensión 2.

b) En el apartado anterior ya hemos visto que para $a = 0$ los tres vectores son linealmente independientes. Por tanto podemos usar como a base los tres vectores con los cuales E está definido: Base={(1,0,-8),(7,-1,0),(0,0,-1)}

Para ver si v pertenece a E y a la vez encontrar sus coordenadas en el cas que pertenezca, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=1, y=0, z=-9. Por tanto las coordenadas de v en la base encontrada son (1,0,-9)

3. Sea la matriz *A* definida por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k+3 & k+1 \\ 1 & 1 & k+2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

donde $k \in \mathbb{R}$

a) Calcula el rango de la matriz *A* en función del parámetro real *k*.
b) Discute y soluciona el sistema homogéneo

$$A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolución:

a)

Para estudiar el rang(A) podemos hacerlo bien por transformaciones elementales sucesivas que simplifiquen la matriz (método de Gauss) o bien por cálculo de determinantes buscando el mayor menor no nulo (en función del parámetro real k). Dada la dimensión de la matriz empezaremos primero por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k+3 & k+1 \\ 1 & 1 & k+2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \underset{(1)}{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & k+1 \\ 0 & 2 & k+1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{(2)}{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & -2\mathrm{k} & -2\mathrm{k} \end{pmatrix}$$

(1) Restando a la seguda fila 2 veces la primera
Restando a la tercera fila la primera

Restando a la cuarta fila 3 veces la primera

(2) Restando a la tercera fila la segunda
Restando a la cuarta fila 2 veces la segunda

De aquí deducimos que el rang(A) será como mínimo 2 ya que tenemos dos filas no nulas (las dos primeras). Para estudiar como, en función de los valores del parámetro k, puede aumentar o no el rango, miramos cuando se anula el menor formado por las dos últimas filas y las dos últimas columnas.

$$\begin{vmatrix} 0 & -k \\ -2\mathrm{k} & -2\mathrm{k} \end{vmatrix}=-2k^2.$$

Por lo tanto este menor se anulará si y sólo si k = 0.

Por lo tanto, si $k \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 4$ ya que las dos últimas filas serán independientes y ampliarán el rango 2 de las dos primeras.

Y si $k = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ ya que las dos últimas filas se anulan.

En resumen:

- Si $k \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 4$.
- Si $k = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

b) Al tratarse de un sistema homogéneo será siempre compatible. Debemos ver si la solución es la trivial (0,0,0,0) o bien se trata de un sistema compatible indeterminado.

- Si $k \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 4$ que coincide con el número de incógnitas y por lo tanto el sistema es SCD y la solución será (0,0,0,0).

- Si $k = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ y por lo tanto dado que es menor que el número de incógnitas (4) obtenemos que el sistema será Compatible Indeterminado con (4-2=2) 2 grados de libertad.

Del apartado anterior, de la matriz reducida tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ es el menor que asegura el rango 2 y por lo tanto podemos eliminar las ecuaciones tercera y cuarta (por ser combinación lineal de las dos primeras) y traspasando los términos en z y t al término independiente obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - y & = & -z \\ 2y & = & -z - t \end{cases}$$.

Utilizando z y t como incógnitas indeterminadas, podemos expresar y y x en términos de z y t, y obtenemos

y = (-z-t)/2

x = y-z = (-z-t)/2 -z= (-3z-t)/2.

En resumen:

- Si $k \neq 0$ el sistema es SCD y la solución es (0,0,0,0).
- Si $k = 0$ el sistema es SCI con 2 g.l. y la solución es de la forma $\left(\frac{-3z-t}{2}, \frac{-z-t}{2}, z, t\right)$.

4. Sea P el triángulo de vértices (1,0), (0,1), (-1,0).
   a) Sea G el giro de ángulo α radianes en sentido antihorario desde (1,1). Denotamos $c = \cos(\alpha)$ y $s = \sin(\alpha)$. Sea Q la imagen de P por G. Calcular Q en función de c y s.
   b) ¿Hay algun ángulo α tal que Q tenga a la vez dos vértices en la recta $x = y$? Si es que sí, encontrarlo.

Resolución:

Para hacer un giro de ángulo α desde (1,1), primero hacemos la translación que lleva el (1,1) al origen *(ver apuntes M6, Notación matricial eficiente)*: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Después hacemos el giro de ángulo α en sentido antihorario:

$$giro = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Después deshacemos la translación: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Componiendo las tres transformaciones, obtenemos G, el giro de ángulo α en sentido antihorario desde (1,1):

$$G = T^{-1} \cdot giro \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & -c+s+1 \\ s & c & -s-c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos Q, la imagen del triángulo P por el giro G:

$$\begin{pmatrix} c & -s & -c+s+1 \\ s & c & -s-c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & -c+1 & -2c+s+1 \\ -c+1 & -s+1 & -2s-c+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El triángulo Q es el de vértices: $(s+1,-c+1),(-c+1,-s+1),(-2c+s+1,-2s-c+1)$.

b) Hemos de imponer las igualdades $s+1=-c+1$, $-c+1=-s+1$ i $-2c+s+1=-2s-c+1$. Es decir, $s=-c$, $s=c$ i $3s=c$. Sin embargo, dos de estas igualdades a la vez implican que el seno y el coseno del ángulo α son ambos cero. Puesto que no hay ningún ángulo cumpliendo esta propiedad, podemos deducir que no es posible encontrar ningún ángulo α que lleve dos puntos del triángulo P a la diagonal $x=y$.