Solución Examen 1

2016-2017 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 10.06.2017

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Hallad el valor, o valores, de m para que el número complejo $3-mi$ tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5}+\sqrt{5}i$.

b) Hallad el módulo y el argumento de $\sqrt{3}+i$

Solución:

a) Siguiendo las directrices del apartado 3.4.1 del módulo impreso, página 30, “De la forma binómica a la forma polar”, primero hallamos el módulo de los complejos:

$$módulo\,(3-mi)=\sqrt{9+m^2}$$

$$módulo\,(2\sqrt{5}+\sqrt{5}i)=\sqrt{4\cdot 5+5}=5$$

Ahora imponemos que sean iguales:

$$\sqrt{9+m^2}=5$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{9+m^2})^2=5^2$$

$$9+m^2=25\rightarrow m^2=16\rightarrow m=\pm 4$$

Por lo tanto, los valores de m son:

$$m=\pm 4$$

b) Buscamos el módulo y el argumento del complejo $\sqrt{3}+i$. Para ello aplicamos las explicaciones del apartado 3.4, página 27, del material impreso.

$$m=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$$

Ahora vamos a por el ángulo. Para esto utilizamos el ejemplo de la página 30 (“Ejemplo de cálculo de la arcotangente”) del módulo impreso. El ángulo del complejo dado es:

$$\alpha=arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=30^{o}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{3}+i=2_{30^{o}}$$

2. Sean A y B dos subespacios vectoriales de dimensión 2 de $\Re^3$ definidos de la siguiente forma:

$$A =< (a_1, a_2, a_3) \mid a_1 + a_2 = a_3 >$$

$$B =< (b_1, b_2, b_3) \mid b_1 - b_2 = b_3 >$$

Y sea $v = (-3,5,2)$

a) Comprobad que $W = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$ es una base de A. ¿Pertenece v a A? En caso afirmativo calculad las coordenadas en la base anterior.

b) Hallad una base de B. ¿Pertenece v a B? En caso afirmativo calculad las coordenadas en la base que habéis encontrado. ¿Son A y B el mismo subespacio vectorial de $\Re^3$? Justificad la respuesta.

Solución:

a) Como sabemos que la dimensión de A es 2, sólo es necesario mirar que los vectores de W pertenecen a A y que son linealmente independientes.

Primero de todo comprobamos que los vectores de W pertenecen a A comprobando que se cumple la condición $a_1+a_2=a_3$ para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues W es una base de A.

Para ver si v pertenece a A miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=-3, y=5 y, por lo tanto, v pertenece a A y sus coordenadas en la base W son (-3,5).

b) Podemos proponer como base de B:

T={(1, 0, 1), (0, 1, -1)}. De forma análoga a como hemos hecho en el apartado anterior podemos probar que es base:

Primero de todo comprobamos que los vectores de T pertenecen a B comprobando que se cumple la condición b_1-b_2=b_3 para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues T es una base de B.

Para ver si v pertenece a B miramos si tiene solución el siguiente sistema: (también podríamos comprobar si cumple las condiciones).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que no tiene solución, y, por lo tanto v no pertenece a B.

Hemos visto que el vector v pertenece a A pero no a B por lo tanto A y B no son el mismo subespacio vectorial.

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

donde k es un parámetro real.

a) Discutid el sistema según los valores de k.
b) Resolved el sistema para el caso $k = -2$.

Solución:

a) Hacemos Gauss tomando las variables en el orden dado x, y, z, obteniendo la matriz M y M' de los coeficientes y ampliada, respectivamente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{array}\right)$$

Substituimos la segunda fila (F2) por F2-2·F1 y la tercera fila (F3) por F3-F1, donde F1 denota la primera fila. Tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 & k^2-4 \end{array}\right)$$

Ahora es suficiente intercambiar las columnas 2 y 3 para tener la matriz diagonalizada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & k^2-4 \end{array}\right)$$

y podemos pasar a la discusión:

- Para $k \neq 2$ y $k \neq -2$ tenemos $rang\ M = rang\ MA = núm.incog. = 3$ y, por lo tanto, es un sistema compatible determinado.
- Para $k = 2$ tenemos $rang\ M = 2$ i $rang\ MA = núm.incog. = 3$ y, por lo tanto, se trata de un sistema incompatible.
- Para $k = -2$ tenemos $rang\ M = rang\ MA = 2$ y, por lo tanto, es un sistema compatible indeterminado con 3-2 = 1 grados de libertad.

Nota: Análogamente, se puede discutir el rango de *M* a partir del determinante de la matriz. $|M| = 4 - k^2$ o del menor una vez aplicado el primer paso de Gauss, con la igualdad $\begin{vmatrix} 2 & k-2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, que conduce igualmente a los valores $k = 2$ y $k = -2$, para organizar la discusión.

b) Ya hemos visto que para $k = -2$ tenemos un sistema compatible indeterminado y, usando los cálculos del apartado anterior, sabemos que el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Eligiendo z como parámetro se obtiene $y = 2z + \frac{1}{2}$ y $x = y - z = z + \frac{1}{2}$ de donde la solución es:

$$\boxed{(x, y, z) = (z + \frac{1}{2}, 2z + \frac{1}{2}, z)}$$

O alternativamente:

$$\boxed{(x, y, z) = \left(x, 2x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right)}$$

o

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{2y+1}{4}, y, \frac{2y-1}{4}\right)}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\Re^3$ en $\Re^3$ definida por

$$f(1,1,0)=(2,2,0),\ f(1,-1,1)=(2,-2,2),\ f(1,0,0)=(0,0,0).$$

a) Demostrad que $\{(1,1,0),(1,-1,1),(1,0,0)\}$ es una base de $\Re^3$.

b) Calculad una base del subespacio Imagen de f. ¿Es f exhaustiva?

c) Calculad una base del subespacio $Ker(f)$, el núcleo de f. ¿Es f inyectiva?

d) ¿Diagonaliza f? Hallad la matriz de f en la base $\{(1,1,0),(1,-1,1),(1,0,0)\}$.

Solución:

a) Llamamos u=(1,1,0), v=(1,-1,1), w=(1,0,0). El determinante de estos tres vectores es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=1$$

Como que es diferente de cero, los tres vectores u,v y w son linealmente independientes. Como que son tres vectores linealmente independientes de R^3, forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

b) Para calcular el subespacio imagen es suficiente calcular la imagen de una base, o sea, la imagen de la base u,v,w: f(u)=(2,2,0), f(v)=(2,-2,2) y f(w)=(0,0,0). Por lo tanto, Im(f)=<(2,2,0),(2,-2,2)>. Es decir, (2,2,0), (2,-2,2) generan el subespacio imagen. Además, como que son linealmente independientes, son una base del subespacio Im(f). La aplicación f no es exhaustiva, ya que la dimensión de la Im(f) es 2, mientras que el espacio de llegada (que es R^3) tiene dimensión 3 (ver Módulo 4, sección 4).

c) Recordemos que la fórmula de la dimensión dice que dim E=dim Im(f)+dim Nuc(f). Como que E=R^3 y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del núcleo es 1. Por lo tanto, el núcleo está generado por un solo vector no nulo. Por otro lado, f(w)=0. Esto quiere decir que w es vector del núcleo. Concluimos que Nuc(f)=<(1,0,0)>. En particular, f no es inyectiva, porque el núcleo es diferente de cero (ver Módulo 4, sección 5).

d) Tenemos que f(u)=2u. O sea, u es vector propio de f de valor propio 2. Análogamente, f(v)=2v y v es vector propio de f de valor propio 2. Finalmente, f(w)=0. O sea, w es vector propio de f de valor propio 0. Por lo tanto, u,v,w es una base de R^3 formada per VEPS de f. Esto quiere decir que f diagonaliza. De hecho, la matriz de f en esta base es:

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar alguno/s de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	300º	315º	360º
sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	$-\sqrt{3}$	-1	0