EXAMEN 1

1. Responeu raonadament als següents apartats:

   a) Determineu el resultat de la divisió de $1+i$ entre el conjugat de 2_{45°. Expresseu el resultat en forma binòmica.

   b) Calculeu totes les arrels de la següent arrel: $\sqrt[3]{-1-3i}$. Proporcioneu el resultat en forma polar i els angles en graus en l'interval $[0^\circ, 360^\circ)$.

Solució

a) Primer passem 2_{45° a forma binòmica, utilitzant la relació que estableix que $a = r\cdot\cos\theta$ i $b = r\cdot\sin\theta$ (veure apartat 3.4.2, Mòdul 1):

- $r = 2$
- $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Així, obtenim:

$$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Ara calculem el conjugat:

$$\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Finalment, podem procedir amb la divisió:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i^2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-(i\sqrt{2})^2} = \frac{2i\sqrt{2}}{4}$$

En resum:

$$\boxed{\frac{i+1}{\overline{2_{45^\circ}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

b) Primer escrivim el nombre complex $-1-3i$ en forma polar (veure apartat 3.4.1, Mòdul 1):

$$\text{Mòdul: } r = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Argument: } \theta = \arctan\left(\frac{-3}{-1}\right) = 251.57^\circ$$

NOTA: la tangent d'un angle val $\dfrac{-3}{-1}$ en 71.57° i en 251.57°. Ara bé, el nombre complex que estem analitzant té la part real i la imaginària negatives, de manera que es troba al tercer quadrant, és a dir, 251.57°.

Tenim aleshores que $-1-3i = \sqrt{10}_{251.57^\circ}$. Ara podem aplicar l'arrel cúbica (veure apartat 3.6.1, Mòdul 1):

$$\sqrt[3]{\sqrt{10}_{251.57^\circ}} = \sqrt[3]{\sqrt{10}}_{\frac{251.57^\circ+360^\circ k}{3}} \qquad \text{per a } k = 0, 1, 2$$

El mòdul de les arrels és: $\sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}$

Els arguments de les arrels són: $\beta_k = \frac{251.57^\circ+360^\circ k}{3}$ per a $k = 0, 1, 2$

- Per a $k = 0$, tenim $\beta_0 = 83.86^\circ$.
- Per a $k = 1$, tenim $\beta_1 = 203.86^\circ$.
- Per a $k = 2$, tenim $\beta_2 = 323.86^\circ$.

En resum, les arrels cúbiques de $-1-3i$ són:

$$\boxed{\sqrt[6]{10}_{83.86^\circ},\ \sqrt[6]{10}_{203.86^\circ} \text{ i } \sqrt[6]{10}_{323.86^\circ}}$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Passar el denominador a forma binòmica: 0.5 punts.
- Fer el conjugat del denominador: 0.25 punts.
- Calcular la divisió: 0.5 punts.

Apartat b

- Escriure el complex en forma polar: 0.5 punts.
- Calcular el mòdul de les arrels: 0.25 punts.
- Calcular els arguments de les arrels: 0.5 punts.

2. Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} k & a+2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$

Substituïu el paràmetre "a"de la matriu M per la **primera xifra de la dreta** del vostre identificador IDP del campus UOC i amb la matriu obtinguda:

a) Determineu, de manera raonada, el rang de la matriu M en funció dels diferents valors del paràmetre $k \in \mathbb{R}$.

b) Considereu el sistema d'equacions lineals que té la matriu M com a matriu ampliada, és a dir:

$$\left.\begin{aligned} kx + (a+2)\,y &= 0 \\ ky &= 1 \\ (2a+1)\,x + (3a+3)\,y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Raoneu per a quins valors de k el sistema és compatible indeterminat i calculeu les solucions del sistema per a $k = a + 2$.

Solució Resolem aquest exercici de forma paramètrica, en funció de a, d'aquesta manera, si vols veure la resolució concreta que correspon al valor del teu IDP, només has de substituir el paràmetre a pel teu valor.

a) Com que la matriu M és quadrada d'ordre 3, estudiarem el seu rang utilitzant que el rang és 3, només si el determinant de la matriu és diferent de zero [Veure apartat 4.5 del mòdul "Elements d'àlgebra lineal i geometria"]:

$$\begin{vmatrix} k & a+2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{vmatrix} = k^2-(3a+3)\,k+(a+2)\,(2a+1) = (k-(a+2))\,(k-(2a+1))$$

En conseqüència,

- Si $k \neq 2a+1$ i $k \neq a+2 \to \ \mathrm{rg}(M) = 3$.
- Si $k = 2a+1$, aleshores $M = \begin{pmatrix} 2a+1 & a+2 & 0 \\ 0 & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$ i podem afirmar que $\mathrm{rg}(M) = 2$, ja que $|M| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2a+1 & a+2 \\ 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = (2a+1)^2 \neq 0$.
- Si $k = a+2$, aleshores $M = \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$ i podem afirmar que $\mathrm{rg}(M) = 2$, ja que $|M| = 0$ i $\begin{vmatrix} a+2 & a+2 \\ 0 & a+2 \end{vmatrix} = (a+2)^2 \neq 0$.

b) El sistema que té per matriu ampliada la matriu M és:

$$\left.\begin{array}{r} kx + (a+2)\,y = 0 \\ ky = 1 \\ (2a+1)\,x + (3a+3)\,y = 1 \end{array}\right\}$$

Per a discutir el sistema utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius [veure apartat 4 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"].
La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} k & a+2 \\ 0 & k \\ 2a+1 & 3a+3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} k & a+2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir del que hem deduït en l'apartat anterior, podem afirmar,

- Si $k \neq 2a+1$ i $k \neq a+2$, $\mathrm{rg}(M) = 3 > \mathrm{rg}(A)$ i, per tant, s'obté que el $\boxed{\text{sistema és incompatible}}$.
- Si $k = 2a+1$, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{n}^o$ incògnites i, per tant, el $\boxed{\text{sistema és compatible determinat}}$.

- Si $k = a+2$, $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) = 2 = \text{n}^o$ incògnites i, per tant, podem afirmar que el $\boxed{\text{sistema és compatible determinat}}$.

Així doncs, podem afirmar que no existeix cap valor del paràmetre k tal que el sistema sigui compatible indeterminat.

Calculem, a continuació, la solució del sistema compatible determinat que s'obté si $k = a + 2$.

$$\left.\begin{array}{r} (a+2)\,x + (a+2)\,y = 0 \\ (a+2)\,y = 1 \\ (2a+1)\,x + (3a+3)\,y = 1 \end{array}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apartat 6 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"] per a determinar les solucions d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & (a+2)^2 & a+2 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operacions: (1): $(a+2)\cdot F3 - (2a+1)\cdot F1 \to F3$.

Operacions: (2): $F3 - (a+2)\cdot F2 \to F3$.

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} (a+2)\,x + (a+2)\,y = 0 \\ (a+2)\,y = 1 \end{array}\right\}$$

De la segona equació s'obté $y = \frac{1}{a+2}$. Si substituïm en la primera equació aquest valor de y obtenim $x = -\frac{1}{a+2}$.

Així, la solució d'aquest sistema, en funció dels diferents valors del paràmetre a, són:

	$x = -\frac{1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$
Si $a = 0$	$x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$
Si $a = 1$	$x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$
Si $a = 2$	$x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}$
Si $a = 3$	$x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{5}$
Si $a = 4$	$x = -\frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{6}$
Si $a = 5$	$x = -\frac{1}{7}$, $y = \frac{1}{7}$
Si $a = 6$	$x = -\frac{1}{8}$, $y = \frac{1}{8}$
Si $a = 7$	$x = -\frac{1}{9}$, $y = \frac{1}{9}$
Si $a = 8$	$x = -\frac{1}{10}$, $y = \frac{1}{10}$
Si $a = 9$	$x = -\frac{1}{11}$, $y = \frac{1}{11}$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Calcular correctament el determinant de la matriu M en funció de k: 0.25 punts.
- Obtenir els valors $k = 2a + 1$ i $k = a + 2$: 0.25 punts.
- Justificar que per a k diferent de $2a + 1$ i $a + 2$ el $\text{rg}(A) = 3$: 0.25 punts.
- Justificar que per a $k = 2a + 1$ i per a $k = a + 2$ el $\text{rg}(A) = 2$: 0.5 punts.

Apartat b

- Justificar que per a k diferent de $2a + 1$ i $a + 2$ el sistema és SI: 0.25 punts.
- Justificar que per a $k = 2a + 1$ i per a $k = a + 2$ el sistema és SCD: 0.25 punts.
- Comentar que no existeix cap valor de k que fa el sistema sigui SCI: 0.25 punts.
- Calcular les solucions del sistema per a $k = a + 2$: 0.5 punts.

3. Siguin $v_1 = (1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (2, -2, -2)$, $v_4 = (-1, 2, 0)$ i $v_5 = (4, 2, -10)$ vectors de $\mathbb{R}^3$. Sigui $E =< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 >$. Sigui $w = (a+2, -2, -2a-2)$ on a és la **tercera xifra de la dreta** del vostre IDP.
Digueu si són vertaderes o falses les següents afirmacions i **justifiqueu la vostra resposta**:

a) La dimensió de E és 2.

b) $A = \{(2, -2, -2), (-1, 2, 0)\}$ és una base de E i les coordenades de w en aquesta base són $(a + 1, a + 2)$.

c) Siguin $e_1 = v_3 + v_4$ i $e_2 = v_3 + 5v_4$. $B = \{e_1, e_2\}$ és una base de E.

d) La matriu de canvi de base de la base A a la base B és:

$$C_{A\to B} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució

a) **VERTADER**. Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -10 \end{pmatrix} = 2$$

Ja que podem trobar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ i tots els menors 3×3 resultants d'orlar-lo tenen determinant nul.
La dimensió de E és 2.

b) **FALS**. A és base, ja que els seus dos vectors són de E (són v_3 i v_4), són linealment independents (contenen el menor no nul $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$) i en tenim tants com la dimensió.

Però si calculem les coordenades de $w \in E$ resolent el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ -2 \\ -2a-2 \end{pmatrix}$$

Trobem que la solució és $x = a+1$ i $y = a$. Per tant, les coordenades de w en la base A són $(a+1, a)$.

c) **VERTADER**. Tenim que $e_1 = (1, 0, -2)$ i $e_2 = (-3, 8, -2)$. Són base perquè són de E (són combinació lineal de vectors de E), són linealment independents (contenen el menor no nul $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$) i en tenim tants com la dimensió.

d) **VERTADER**. Per trobar la matriu de canvi de base de la base B a la base A cal expressar els vectors de la base B en funció dels de la base A. I aquesta és justament la definició d'aquests vectors!

Així, tenim que la matriu de canvi de base de B a A és:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Per a calcular la matriu de canvi de base en la direcció contrària calculem la inversa de la matriu anterior:

$$C_{A\to B} = C_{B\to A}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat b

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat c

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat d

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.

- Justificació: 0.625 punts.

4. Substituïu el paràmetre a per la **segona xifra de la dreta** del vostre identificador IDP del campus UOC en la següent matriu:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix}$$

on $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és una aplicació lineal, $M(f|C,C)$ és la seva matriu associada en la base canònica C de $\mathbb{R}^3$ i b és un paràmetre real diferent de $a+1$.

Responeu raonadament als següents apartats:

a) Calculeu, en funció del valor del paràmetre b, una base del nucli de l'aplicació f, digueu quina és la seva dimensió i determineu la dimensió de la imatge de f.

b) Calculeu el polinomi característic de f i un vector propi que sigui linealment independent amb $(0,0,1)$ i $(1,0,-1)$.

Solució Resolem els apartats per a un valor de a genèric. Per a obtenir la solució particular corresponent al vostre dígit només heu de substituir a pel seu valor en els desenvolupaments que segueixen.

a) El nucli de f s'obté resolent el sistema $M(f|C,C) \cdot w = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'aquesta expressió s'obtenen tres equacions:

$$\begin{gathered} x + (a+1)(a+3)y = 0 \\ (a+4)y = 0 \\ (a-b+1)x - (a+1)(a-b+1)y + (a-b+2)z = 0 \end{gathered}$$

La solució immediata de la segona equació, $(a+4)y = 0$, a l'ésser a una xifra ($a \geq 0$ i, per tant, $a+4 > 0$) és $y = 0$. Substituint aquest valor en la primera equació s'obté $x = 0$. Amb aquests dos valors la tercera equació es transforma en $(a-b+2)z = 0$. Aquí apareixen dues possibilitats. Si $b \neq a+2$ s'obté $z = 0$ i, per tant, el nucli de l'aplicació es redueix al vector nul i té dimensió 0 i aleshores, pel Teorema de la dimensió del punt 4. "Nucli i imatge d'una aplicació lineal", la imatge tindrà dimensió 3. En canvi, si $b = a+2$, la tercera equació no restringeix el valor de z, els vectors del nucli tenen la forma $(0,0,z)$ i una base del nucli de f és el vector $w = (0,0,1)$, aquest té dimensió 1 i la imatge tindrà dimensió 2.

b) El polinomi característic de f és $p(\lambda) = |M(f|C,C) - \lambda \mathrm{I}|$, tal com es defineix en el punt "7. Vectors i valors propis" del mòdul "Aplicacions lineals". Desenvolupant el determinant per la tercera columna, i després el menor que queda per la primera, obtenim:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4-\lambda & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2-\lambda \end{vmatrix} = (a-b+2-\lambda)(1-\lambda)(a+4-\lambda)$$

Els VAPs de f són les solucions de l'equació característica $p(\lambda)=0$, en aquest cas els valors: $a-b+2$, 1 i $a+4$.

Per a calcular el vector propi que demana l'enunciat hem de saber a quin valor propi correspon d'aquests tres. Com que dos vectors propis són coneguts, és senzill veure a quin VAP corresponen. Per a calcular el VAP corresponent al VEP w=$(0,0,1)$ n'hi ha prou amb calcular la imatge d'aquest vector en aplicar-li f i determinar per quin factor és múltiple d'aquest. Es multiplica la matriu de l'aplicació f pel vector w:

$$\begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-b+2 \end{pmatrix}$$

Es veu així que la imatge de w és $(a-b+2)(0,0,1)=(a-b+2)w$, per la qual cosa el valor propi corresponent a w és $a-b+2$.

Per a calcular el VAP corresponent al VEP u=$(1,0,-1)$ es multiplica de la mateixa manera la matriu de l'aplicació f pel vector u:

$$\begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es veu així que la imatge de u és u, per la qual cosa el valor propi corresponent a u és 1.

Descartats els VAPs $a-b+2$ i 1 per estar associats als VEPS w i u, queda el VAP $a+4$. Si els tres VAPs són diferents (cosa que ocorrerà sempre que $b \neq -2$, doncs que $b \neq a+1$ ens ho diu l'enunciat), el VEP corresponent a $a+4$ serà linealment independent dels anteriors, per les proposicions del punt 8.1 "Diagonalització d'endomorfismes". Per a calcular el VEP v de VAP $a+4$ cal buscar una base del $Ker(f-(a+4)\mathrm{I})$. És a dir, resoldre el sistema següent:

$$\begin{pmatrix} 1-a-4 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4-a-4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2-a-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La segona fila és nul·la. De l'equació corresponent a la primera fila, que és $-(a+3)x+(a+1)(a+3)y=0$, s'obté que $x=(a+1)y$ doncs $a\neq -3$. De la tercera equació $(a-b+1)x-(a+1)(a-b+1)y+(-b-2)z=0$, substituint x per $(a+1)y$, s'obté $(a-b+1)(a+1)y-(a+1)(a-b+1)y+(-b-2)z=0$. S'anul·len els dos primers termes i queda $(-b-2)z=0$ i llavors, sempre que $b\neq -2$, $z=0$. Per tant, les solucions són de la forma $((a+1)y,y,0)$ i un vector propi de valor propi $a+4$ pot ser v=$(a+1,1,0)$. Si fos $b=-2$ la variable z quedaria lliure i tindríem 2 VEPs de VAP $a+4$: $(a+1,1,0)$ i $(0,0,1)$, aquest segon vector coherent amb el resultat obtingut prèviament.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Plantejar el sistema per a trobar el nucli: 0.25 punts.
- Calcular la base del nucli en el cas $b = a + 2$: 0.25 punts.
- Calcular la base del nucli en el cas $b \neq a + 2$: 0.25 punts.
- Calcular les dimensions en el cas $b = a + 2$: 0.25 punts.
- Calcular les dimensions en el cas $b \neq a + 2$: 0.25 punts.

Apartat b

- Calcular el polinomi característic: 0.5 punts.
- Comprovar que els VEPs de l'enunciat corresponen als VAPs 1 i $a - b + 2$: 0.25 punts.
- Calcular el VEP de VAP $a + 4$: 0.5 punts.

EXAMEN 2

1. Responeu raonadament als següents apartats:

   a) Expresseu el següent nombre complex en forma polar: $\dfrac{2-5i}{(2+i)^2}$.

   b) Calculeu totes les arrels complexes resultants de l'equació: $z^4 i + 5 = 0$. Proporcioneu el resultat en forma polar i els angles en graus en l'interval $[0°, 360°)$.

Solució

a) Primer calculem el quadrat del denominador:

$$(2+i)^2 = 2^2 + 2\cdot 2i + i^2 = 3 + 4i$$

Ara operem amb la divisió per a trobar la forma binòmica. Per a això, multipliquem i dividim pel conjugat del denominador:

$$\frac{2-5i}{(2+i)^2} = \frac{2-5i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-15i+20i^2}{3^2-(4i)^2} = \frac{-14-23i}{25} = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$$

Ara calculem el mòdul i l'argument del nombre complex anterior, utilitzant la relació que estableix que $r = \sqrt{a^2+b^2}$ i $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ (veure apartat 3.4.1, Mòdul 1):

$$\text{Mòdul: } r = \sqrt{\left(-\frac{14}{25}\right)^2 + \left(-\frac{23}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{5} = 1.08$$

$$\text{Argument: } \theta = \arctan\left(\frac{-\frac{23}{25}}{-\frac{14}{25}}\right) = 238.67°$$

NOTA: la tangent d'un angle val $\dfrac{-23}{-14}$ en $58.67°$ i en $238.67°$. Ara bé, el nombre complex que estem analitzant té la part real i la imaginària negatives, de manera que es troba al tercer quadrant, és a dir, $238.67°$.
En resum, tenim:

$$\boxed{\frac{2-5i}{(2+i)^2} = 1.08_{238.67°}}$$

b) El primer és aïllar z a l'equació:

$$z = \sqrt[4]{\frac{-5}{i}} = \sqrt[4]{\frac{-5}{i}\cdot\frac{-i}{-i}} = \sqrt[4]{5i}$$

Ara calculem el nombre complex $5i$ en forma polar (veure apartat 3.4.1, Mòdul 1):

Mòdul: $r = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

Argument: $\theta = \arctan\left(\frac{5}{0}\right) = 90°$

NOTA: donat que es tracta d'un nombre complex amb part real nul·la i part imaginària positiva, l'angle val 90°.

Tenim doncs que $z = \sqrt[4]{5i} = \sqrt[4]{5_{90°}}$. Ara calculem les arrels quartes (veure apartat 3.6.1, Mòdul 1):

$$z = \sqrt[4]{5_{90°}} = \sqrt[4]{5}_{\frac{90°+360°k}{4}} \qquad \text{per a } k = 0, 1, 2, 3$$

El mòdul de les arrels és: $\sqrt[4]{5}$

Els arguments de les arrels són: $\beta_k = \frac{90°+360°k}{4}$ per a $k = 0, 1, 2, 3$

- Per a $k = 0$, tenim $\beta_0 = 22.5°$.
- Per a $k = 1$, tenim $\beta_1 = 112.5°$.
- Per a $k = 2$, tenim $\beta_2 = 202.5°$.
- Per a $k = 3$, tenim $\beta_3 = 292.5°$.

En resum, les arrels resultants de l'equació són:

$$\boxed{\sqrt[4]{5}_{22.5°},\ \sqrt[4]{5}_{112.5°},\ \sqrt[4]{5}_{202.5°} \text{ y } \sqrt[4]{5}_{292.5°}}$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Calcular el quadrat del denominador: 0.25 punts.
- Expressar la divisió en forma binòmica: 0.5 punts.
- Calcular el mòdul de la divisió: 0.25 punts.
- Calcular l'argument de la divisió: 0.25 punts.

Apartat b

- Aïllar z: 0.25 punts.
- Expressar z en forma polar: 0.25 punts.
- Calcular el mòdul de les arrels: 0.25 punts.
- Calcular els arguments de les arrels: 0.5 punts.

2. Considereu el següent sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites:

$$\left.\begin{array}{r} kx + (k+1)\,z \; = \; k \\ ky + (a+1)\,z = \; k \\ (a+1)\,y + kz = \; k \end{array}\right\}$$

Substituïu el paràmetre "a" per la **primera xifra de la dreta** del vostre identificador IDP del campus UOC i amb el sistema obtingut:

a) Discutiu el sistema en funció dels diferents valors del paràmetre $k \in \mathbb{R}$.

b) Resoleu el sistema per a $k = a + 2$.

Solució Resolem aquest exercici de forma paramètrica, en funció de a, d'aquesta manera, si vols veure la resolució concreta que correspon al valor del teu IDP, només has de substituir el paràmetre a pel teu valor.

a) Per a discutir el sistema utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius [veure apartat 4 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"].

La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k+1 \\ 0 & k & a+1 \\ 0 & a+1 & k \end{pmatrix} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & k+1 & k \\ 0 & k & a+1 & k \\ 0 & a+1 & k & k \end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat.

$$\begin{vmatrix} k & 0 & k+1 \\ 0 & k & a+1 \\ 0 & a+1 & k \end{vmatrix} = k^3 - (a+1)^2 k = k\left(k^2 - (a+1)^2\right) = k\,(k-(a+1))\,(k+(a+1))$$

– Si $k \neq 0$ i $k \neq \pm(a+1) \rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) = \text{n}^o$ incògnites i, per tant, s'obté que el $\boxed{\text{sistema és compatible determinat}}$.

– Si $k = 0$, aleshores $\text{rg}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a+1 & 0 \end{vmatrix} = -(a+1) \neq 0$ (aquest menor s'obté considerant primera i tercera fila i la segona i tercera columna).

Calculem, per a $k = 0$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Així doncs, tenim que $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = 2 \neq$ n^oincògnites i, per tant, el $\boxed{\text{sistema és compatible indeterminat}}$.

– Si $k = a + 1$, aleshores $\text{rg}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 \neq 0$ (aquest menor s'obté considerant primera i segona fila i la primera i segona columna).

Calculem, per a $k = a + 1$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents $\begin{vmatrix} a+1 & 0 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 0$. Així doncs, tenim que $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = 2 \neq \text{n}^o$incògnites i, per tant, el $\boxed{\text{sistema és compatible indeterminat}}$.

– Si $k=-(a+1)$, aleshores $\text{rg}(A)=2$, ja que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix} -(a+1) & 0 \\ 0 & -(a+1) \end{vmatrix} = (a+1)^2 \neq 0$ (aquest menor s'obté considerant primera i segona fila i la primera i segona columna).

Calculem, per a $k=-(a+1)$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents $\begin{vmatrix} -(a+1) & 0 & -(a+1) \\ 0 & -(a+1) & -(a+1) \\ 0 & a+1 & -(a+1) \end{vmatrix} = -2(a+1)^3 \neq 0$. Així doncs, tenim que $\text{rg}(A)=2 \neq \text{rg}(M)=3$, per tant, el $\boxed{\text{sistema és incompatible}}$.

b) Per l'apartat anterior sabem que per a $k=a+2$ el sistema és compatible determinat. Així doncs, el sistema que ens demanen resoldre és:

$$\left.\begin{array}{r} (a+2)\,x+(a+3)\,z \;=\; a+2 \\ (a+2)\,y+(a+1)\,z = \; a+2 \\ (a+1)\,y+(a+2)\,z = \; a+2 \end{array}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apartat 6 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"] per a determinar les solucions d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 0 & a+3 & a+2 \\ 0 & a+2 & a+1 & a+2 \\ 0 & a+1 & a+2 & a+2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 0 & a+3 & a+2 \\ 0 & a+2 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & 2a+3 & a+2 \end{array}\right)$$

Operacions: (1): $\quad (a+2)\cdot F3-(a+1)\cdot F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} (a+2)\,x+(a+3)\,z \;=\; a+2 \\ (a+2)\,y+(a+1)\,z = \; a+2 \\ (2a+3)\,z = \; a+2 \end{array}\right\}$$

De la tercera equació s'obté $z=\frac{a+2}{2a+3}$. Si fem la substitució d'aquest valor de z en la segona equació i aïllem la y obtenim $y=\frac{a+2}{2a+3}$. Si substituïm en la primera equació el valor de z s'obté $x=\frac{a}{2a+3}$

Així, la solució d'aquest sistema, en funció dels diferents valors del paràmetre a, és:

	$x = \frac{a}{2a+3}$,	$y = \frac{a+2}{2a+3}$,	$z = \frac{a+2}{2a+3}$
Si $a = 0$	$x = 0$	$y = 2/3$	$z = 2/3$
Si $a = 1$	$x = 1/5$	$y = 3/5$	$z = 3/5$
Si $a = 2$	$x = 2/7$	$y = 4/7$	$z = 4/7$
Si $a = 3$	$x = 3/9$	$y = 5/9$	$z = 5/9$
Si $a = 4$	$x = 4/11$	$y = 6/11$	$z = 6/11$
Si $a = 5$	$x = 5/13$	$y = 7/13$	$z = 7/13$
Si $a = 6$	$x = 6/15$	$y = 8/15$	$z = 8/15$
Si $a = 7$	$x = 7/17$	$y = 9/17$	$z = 9/17$
Si $a = 8$	$x = 8/19$	$y = 10/19$	$z = 10/19$
Si $a = 9$	$x = 9/21$	$y = 11/21$	$z = 11/21$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Calcular correctament el determinant de la matriu A en funció de k: 0.25 punts.
- Justificar que per a k diferent de 0 i $\pm(a+1)$ el sistema és SCD: 0.25 punts.
- Justificar que per a $k = 0$ el sistema és SCI: 0.5 punts.
- Justificar que per a $k = a+1$ el sistema és SCI: 0.5 punts.
- Justificar que per a $k = -(a+1)$ el sistema és SI: 0.5 punts.

Apartat b

- Obtenir la solució: 0.5 punts.

3. Siguin $e_1 = (-1, 1, 0, -1)$, $e_2 = (0, 2, 2, 2)$, $e_3 = (0, 0, 0, a+1)$, $e_4 = (-1, 3, 2, 2a+3)$ i $v = (7, 3, 10, 10-7a)$ vectors de $\mathbb{R}^4$ on a és la **tercera xifra de la dreta** del vostre IDP. I sigui $F = < e_1, e_2, e_3, e_4 >$.
Digueu si són vertaderes o falses les següents afirmacions i **justifiqueu la vostra resposta**:

   a) La dimensió de F és 4.
   b) $A = \{(-1, 1, 0, -1), (0, 2, 2, 2), (0, 0, 0, a+1)\}$ és una base de F.
   c) $v \in F$ i les seves coordenades en la base A són (3,1,3).
   d) $C_{A\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ és la matriu de canvi de base de la base A anterior a la base $B = \{(1, -1, 0, 1), (1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, a+4)\}$

Solució

a) **FALS**. Si calculem el rang de la matriu formada pels vectors:

$$rang\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & a+1 & 2a+3 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que tenim que $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, per tant $dim(F) \geq 2$. Orlant aquest menor trobem $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & a+1 \end{vmatrix} = -2a-2 \neq 0$, per tant $dim(F) \geq 3$. I per veure que la dimensió no és 4 podem calcular el determinant de tots els vectors junts i veure que és 0, o podem veure directament que $e_1+e_2+2e_3 = e_4$ (és a dir, són linealment dependents). Així tenim que la dimensió de F és 3.

b) **VERTADER**. Els vectors de la base A proposada contenen el menor 3×3 anterior amb determinant no nul, per tant són linealment independents. A més són de l'espai F i en tenim tants com la dimensió. Així doncs, són base.

c) **FALS**. Mirem si $v \in F$ i calculem les seves coordenades en tal cas resolent el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 10 \\ 10-7a \end{pmatrix}$$

Trobem que la solució és $x=-7$, $y=5$ i $z=-7$. Per tant, $v \in F$ però les seves coordenades en la base A són $(-7,5,-7)$.

d) **FALS**. Podem veure que, com el primer vector de cada base és el mateix amb signe contrari, la primera columna de la matriu de canvi de base hauria de ser $(-1,0,0)$, i això no és així.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat b

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat c

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.

- Justificació: 0.625 punts.

Apartat d

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

4. Substituïu el paràmetre a per la **segona xifra de la dreta** del vostre identificador IDP del campus UOC en els següents vectors de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 1, a + 1)$, $v = (0, 1, a + 1)$ i $w = (1, 0, a + 1)$ escrits en la base canònica C.

   Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal que compleix que $f(u) = u$, $f(v) = -v$ i $f(w) = bw$ i b un paràmetre real.

   Responeu raonadament als següents apartats:

   a) Comproveu que $B = \{u, v, w\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la matriu $M(f|B, B)$ que correspon a l'aplicació lineal f en la base B i la matriu $M(f|C, C)$ que correspon a l'aplicació lineal f en la base canònica $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

   b) Calculeu la potència 10 de la matriu $M(f|C, C)$ utilitzant la matriu $M(f|B, B)$.

Solució

Resolem els apartats per a un valor de a genèric. Per a obtenir la solució particular corresponent al vostre dígit només heu de substituir a pel seu valor en els desenvolupaments que segueixen.

a) Per a demostrar que B és una base de $\mathbb{R}^3$ n'hi ha prou amb veure que el determinant format pels tres vectors és diferent de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1) + (a+1) - (a+1) = (a+1)$$

A l'ésser a una xifra ($a \geq 0$ i, per tant, $a + 1 > 0$), el determinant no és nul i els tres vectors són linealment independents i formen base de $\mathbb{R}^3$.

Per a construir la matriu de l'aplicació f en la base B hem de posar en columnes les coordenades de les imatges dels vectors de la base B expressades en la base B. Els vectors de la base B són u, v i w i les seves imatges s'escriuen en la pròpia base B com: $f(u) = u$ s'escriu com $(1, 0, 0)$ $f(v) = -v$ s'escriu com $(0, -1, 0)$ $f(w) = bw$ s'escriu com $(0, 0, b)$. Per tant, la matriu de f en base B és:

$$M(f|B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Per a construir la matriu de f en la base canònica C hem d'usar la matriu de canvi de base que podem construir (com es veu a l'apartat 6 del mòdul "Aplicacions lineals") a partir de les coordenades dels vectors de B en la base canònica que són les que proporciona l'enunciat.

$$M(Id|C,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Multiplicant per aquesta matriu i per la seva inversa segons la següent fórmula obtindrem la matriu que demana l'enunciat.

$$M(f|C,C) = M(Id|C,B) \cdot M(f|B,B) \cdot M(Id|C,B)^{-1}$$

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{a+1} \\ -1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

El resultat és:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & -b+1 & \frac{b-1}{a+1} \\ 2 & 1 & \frac{-2}{a+1} \\ 2a+2 & (a+1)(1-b) & b-2 \end{pmatrix}$$

b) Per a calcular la potència n-èsima d'una matriu resulta útil conèixer la seva matriu diagonal i la base de vectors propis perquè, com es veu a l'apartat 8.2 del mòdul "Aplicacions lineals", es compleix la següent igualtat:

$$M(f|C,C)^n = M(Id|C,B)M(f|B,B)^n M(Id|C,B)^{-1}$$

I la potència de la matriu diagonal es calcula molt fàcilment elevant els elements diagonals a la potència corresponent. En aquest cas:

$$M(f|B,B)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & b^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{10} \end{pmatrix}$$

$$M(f|C,C)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{a+1} \\ -1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

$$M(f|C,C)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b^{10} \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & (a+1)b^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{a+1} \\ -1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

El resultat és:

$$M(f|C,C)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1-b^{10} & \frac{b^{10}-1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (a+1)(1-b^{10}) & b^{10} \end{pmatrix}$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Comprovar que B és base: 0.25 punts.
- Calcular la matriu de f en base B: 0.25 punts.
- Calcular la matriu de canvi de base B a base C: 0.25 punts.
- Calcular la matriu de canvi de base C a base B: 0.25 punts.
- Calcular la matriu de f en base C: 0.25 punts.

Apartat b

- Escriure la fórmula de càlcul a partir de la matriu diagonal en el cas plantejat: 0.5 punts.
- Calcular la potència de la matriu diagonal: 0.25 punts.
- Calcular el producte de les tres matrius: 0.5 punts.

EXAMEN 3

1. Responeu raonadament als següents apartats:

   a) Resoleu l'equació $\overline{z} - 4_{\frac{\pi}{3}} = 2i$, on $\overline{z}$ significa el conjugat de z. Proporcioneu z en forma binòmica.

   b) Calculeu totes les arrels cinquenes del següent nombre complex: $3\sqrt{3} - 2i$. Proporcioneu el resultat en forma polar i els angles en graus en l'interval $[0°, 360°)$.

Solució

a) Primer passem $4_{\frac{\pi}{3}}$ a forma binòmica, utilitzant la relació que estableix que $a = r \cdot \cos\theta$ i $b = r \cdot \sin\theta$ (veure apartat 3.4.2, Mòdul 1):

- $r = 4$
- $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$
- $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Així, s'obté:

$$4_{\frac{\pi}{3}} = 2 + 2\sqrt{3}i$$

Ara aïllem $\overline{z}$ de l'equació:

$$\overline{z} = 2i + 4_{\frac{\pi}{3}} = 2i + y = 2i + 2 + 2\sqrt{3}i = 2 + 2(1+\sqrt{3})i$$

Finalment, apliquem el conjugat per a obtenir el resultat final:

$$\boxed{z = 2 - 2(1+\sqrt{3})i}$$

b) Primer escrivim el nombre complex $3\sqrt{3} - 2i$ en forma polar (veure apartat 3.4.1, Mòdul 1):

$$\text{Mòdul: } r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{31}$$

$$\text{Argument: } \theta = \arctan\left(\frac{-2}{3\sqrt{3}}\right) = 338.95°$$

NOTA: la tangent d'un angle val $\dfrac{-2}{3\sqrt{3}}$ en 158.95° i en 338.95°. Ara bé, el nombre complex que estem analitzant té la part real positiva i la part imaginària negativa, de manera que es troba al quart quadrant, és a dir, 338.95°.

Tenim doncs que $3\sqrt{3} - 2i = \sqrt{31}_{338.95°}$. Ara podem aplicar l'arrel cinquena (veure apartat 3.6.1, Mòdul 1):

$$\sqrt[5]{\sqrt{31}_{338.95^\circ}} = \sqrt[5]{\sqrt{31}}_{\frac{338.95^\circ+360^\circ k}{5}} \qquad \text{per a } k = 0,1,2,3,4$$

El mòdul de les arrels és: $\sqrt[5]{\sqrt{31}} = \sqrt[10]{31}$
Els arguments de les arrels són: $\beta_k = \frac{338.95^\circ+360^\circ k}{5}$ per a $k = 0,1,2,3,4$

- Per a $k = 0$, tenim $\beta_0 = 67.79^\circ$.
- Per a $k = 1$, tenim $\beta_1 = 139.79^\circ$.
- Per a $k = 2$, tenim $\beta_2 = 211.79^\circ$.
- Per a $k = 3$, tenim $\beta_3 = 283.79^\circ$.
- Per a $k = 4$, tenim $\beta_4 = 355.79^\circ$.

En resum, les arrels cinquenes de $3\sqrt{3} - 2i$ són:

$$\boxed{\sqrt[10]{31}_{67.79^\circ},\ \sqrt[10]{31}_{139.79^\circ},\ \sqrt[10]{31}_{211.79^\circ},\ \sqrt[10]{31}_{283.79^\circ} \text{ i } \sqrt[10]{31}_{355.79^\circ}}$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Passar $4_{\frac{\pi}{3}}$ a forma binòmica: 0.5 punts.
- Calcular $\overline{z}$: 0.5 punts.
- Calcular z: 0.25 punts.

Apartat b

- Passar el nombre complex a forma polar: 0.5 punts.
- Calcular el mòdul de les arrels: 0.25 punts.
- Calcular els arguments de les arrels: 0.5 punts.

2. Considereu els següents tres plans π_1, π_2 i π_3:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad 50x + y + kz = 50 \\ \pi_2 &: \quad (k-a)\,y = 0 \\ \pi_3 &: \quad 2kx + y + 4z = 20 \end{aligned}$$

Substituïu el paràmetre "a"per la **primera xifra de la dreta** del vostre identificador IDP del campus UOC i amb els tres plans obtinguts:

a) Determineu, de manera raonada, la posició relativa dels tres plans π_1, π_2 i π_3 en funció dels diferents valors del paràmetre $k \in \mathbb{R}$.

b) Per a $k = a + 11$, calculeu, en cas d'existir, el punt de tall dels tres plans π_1, π_2 i π_3.

Solució Resolem aquest exercici de forma paramètrica, en funció de a, d'aquesta manera, si vols veure la resolució concreta que correspon al valor del teu IDP, només has de substituir el paràmetre a pel teu valor.

a) Recordem que l'estudi de la posició relativa de tres plans es pot fer a partir de la discussió del consegüent sistema format per les equacions que defineixen aquests tres plans [Veure apartat 8 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"]

$$\left.\begin{aligned} 50x + y + kz &= 50 \\ (k-a)\,y &= 0 \\ 2kx + y + 4z &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Per a discutir-lo utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Veure apartat 4 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"].

La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 1 & k \\ 0 & k-a & 0 \\ 2k & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & k & 50 \\ 0 & k-a & 0 & 0 \\ 2k & 1 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat.

$$|A| = \begin{vmatrix} 50 & 1 & k \\ 0 & k-a & 0 \\ 2k & 1 & 4 \end{vmatrix} = (k-a)\left(200 - 2k^2\right) = -2\,(k-a)\,(k-10)\,(k+10)$$

- Si $k \neq a$, $k \neq 10$ i $k \neq -10$ $\rightarrow$ rg$(A) = 3 =$ rg$(M) =$ n^o incògnites i el sistema és compatible determinat. Per tant, podem afirmar que els tres plans $\boxed{\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3 \text{ intersequen en un únic punt}}$.
- Si $k = a$, aleshores rg$(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = 50 - 2a \neq 0$, ja que a només pot prendre valors enters entre 0 i 9.
  Calculem, per a $k = a$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents $\begin{vmatrix} 50 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 20 \end{vmatrix} = 0$. Així doncs, tenim que rg$(M) =$rg$(A) = 2 \neq$ n^o incògnites i el sistema és compatible indeterminat amb grau d'indeterminació igual a 1. En conseqüència, $\boxed{\text{els tres plans } \pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3 \text{ intersequen en una recta}}$.
- Si $k = 10$, aleshores rg$(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 0 & 10-a \end{vmatrix} = 50(10-a) \neq 0$, ja que a només pot prendre valors enters entre 0 i 9.
  Calculem, per a $k = 10$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents $\begin{vmatrix} 50 & 1 & 50 \\ 0 & 10-a & 0 \\ 20 & 1 & 20 \end{vmatrix} = 0$. Així doncs, tenim que rg$(M) =$ rg$(A) = 2 \neq$ n^o incògnites i el sistema és compatible indeterminat amb grau d'indeterminació igual a 1. En conseqüència, $\boxed{\text{els tres plans } \pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3 \text{ intersequen en una recta}}$.

– Si $k=-10$, aleshores $\mathrm{rg}(A)=2$, ja que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 0 & -10-a \end{vmatrix} = -50(10+a) \neq 0$.

Calculem, per a $k=-10$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents $\begin{vmatrix} 50 & 1 & 50 \\ 0 & -10-a & 0 \\ -20 & 1 & 20 \end{vmatrix} = -2000\,(10+a) \neq 0$. Així doncs, tenim que $\mathrm{rg}(M)=3>\mathrm{rg}(A)$ i, per tant, s'obté que el sistema és incompatible. En conseqüència, $\boxed{\text{els tres plans } \pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3 \text{ no s'intersequen}}$.

b) Per l'apartat anterior sabem que per a $k=a+11$ els tres plans π_1, π_2, π_3 intersequen en un únic punt. Així doncs, el sistema que ens demanen resoldre és:

$$\left.\begin{aligned} 50x+y+(a+11)\,z &= 50 \\ 11y &= 0 \\ (2a+22)\,x+y+4z &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apartat 6 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"] per a determinar les solucions d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & a+11 & 50 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 2a+22 & 1 & 4 & 20 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & a+11 & 50 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a+14}{25} & \frac{-a^2-22a-21}{25} & -2a-2 \end{array}\right)$$
$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & a+11 & 50 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-a^2-22a-21}{25} & -2a-2 \end{array}\right)$$

Operacions: (1): $F3-\left(\frac{a+11}{25}\right)\cdot F1 \rightarrow F3$.
(2): $F3-\left(\frac{-a+14}{275}\right)F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{aligned} 50x+y+(a+11)\,z &= 50 \\ 11y &= 0 \\ -\left(\frac{a^2+22a+21}{25}\right)z &= -2a-2 \end{aligned}\right\}$$

De la tercera equació s'obté $z=\frac{50a+50}{a^2+22a+21}=\frac{50}{a+21}$. De la segona equació obtenim $y=0$. Si substituïm en la primera equació aquests valors de y i de z que hem obtingut tenim $x=\frac{10}{a+21}$.

Així doncs, per a $k=a+11$ el punt de tall dels tres plans, en funció dels diferents valors del paràmetre a, és:

	$x = \frac{10}{a+21}$,	$y = 0$,	$z = \frac{50}{a+21}$
Si $a = 0$	$x = 10/21$	$y = 0$	$z = 50/21$
Si $a = 1$	$x = 5/11$	$y = 0$	$z = 25/11$
Si $a = 2$	$x = 10/23$	$y = 0$	$z = 50/23$
Si $a = 3$	$x = 5/12$	$y = 0$	$z = 25/12$
Si $a = 4$	$x = 2/5$	$y = 0$	$z = 2$
Si $a = 5$	$x = 5/13$	$y = 0$	$z = 25/13$
Si $a = 6$	$x = 10/27$	$y = 0$	$z = 50/27$
Si $a = 7$	$x = 5/14$	$y = 0$	$z = 25/14$
Si $a = 8$	$x = 10/29$	$y = 0$	$z = 50/29$
Si $a = 9$	$x = 1/3$	$y = 0$	$z = 5/3$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Calcular correctament el determinant de la matriu A en funció de k: 0.25 punts.
- Justificar que per a k diferent de a, de 10 i de -10 els tres plans intersequen en un únic punt: 0.25 punts.
- Justificar que per a $k = a$ els tres plans intersequen en una recta: 0.5 punts.
- Justificar que per a $k = 10$ els tres plans intersequen en una recta: 0.5 punts.
- Justificar que per a $k = -10$ els tres plans no s'intersequen: 0.5 punts.

Apartat b

- Obtenir el punt de tall dels tres plans en el cas $k = a + 11$: 0.5 punts.

3. Sigui E un subespai vectorial de dimensió 3 de $\mathbb{R}^4$ definit de la següent forma:

$$E = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 | b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = 0\}.$$

I sigui $v = (a + 1, a + 3, a + 4, a + 2)$ on a és la **tercera xifra de la dreta** del vostre IDP.
Digueu si són vertaderes o falses les següents afirmacions i **justifiqueu la vostra resposta**:

a) $A = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ és una base de E.

b) $v \in E$ i les seves coordenades en la base A són $(a + 1, a + 2, 1)$.

c) $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & k & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ és la matriu de canvi de base de la base $B = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (0, 0, k, k), (0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$ a la base A.

d) El valor $k = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ fa que B sigui una base ortonormal.

Solució

a) **VERTADER**. Com que sabem que la dimensió de E és 3, només cal mirar que els vectors de A pertanyen a E i que són linealment independents. Primer de tot comprovem que els vectors de A pertanyen a E comprovant que es compleix la condició $b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = 0$ per als tres vectors, cosa que és certa. Seguidament comprovem que són linealment independents, ja que contenen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs A és una base de E.

b) **FALS**. Efectivament $v \in E$ ja que compleix la condició $b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = 0$, però les seves coordenades en la base A no són les indicades, ja que:

$$(a+1) \cdot (1,1,0,0) + (a+2) \cdot (0,0,1,1) + (1,0,0,1) \neq v$$

c) **VERTADER**. Només ens cal comprovar que multiplicant els vectors de la base A per la matriu de canvi de base obtenim la base B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_{B\to A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & k & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & k & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

d) **FALS**. Per a que la base B sigui ortonormal cal que els vectors tinguin mòdul 1 i siguin ortogonals dos a dos. Comencem calculant els mòduls dels vectors de la base fent $k = \frac{-\sqrt{2}}{2}$:

$\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 0 + 0} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 0 + 0} = 1$

$\sqrt{0 + 0 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{0 + 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

$\sqrt{0 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 2} \neq 1$

Així doncs el tercer vector de la base B no té mòdul 1 i per tant la base B no és ortonormal.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.

- Justificació: 0.625 punts.

Apartat b

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat c

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat d

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

4. Sigui a la **segona xifra de la dreta** del vostre IDP del campus UOC i b un paràmetre real.

   a) Escriviu la matriu del gir d'angle 90° centrat en el punt $(1, a+b)$ i calculeu la imatge del punt (a, b) en aplicar-li aquest gir.

   b) Escriviu la matriu de l'escalat de raó b centrat en el punt $(-1, a-b)$ i calculeu la imatge del punt (a, b) en aplicar-li aquest escalat.

   c) Calculeu la imatge del punt (a, b) en aplicar-li dues composicions de les transformacions anteriors en diferent ordre: la del gir seguit de l'escalat i la de l'escalat seguit del gir.

Solución
Resolem el problema per a un valor de a genèric. Per a obtenir la solució particular corresponent al vostre dígit només heu de substituir a pel seu valor en els resultats següents.

a) La matriu del gir d'angle 90° i centre $(1, a+b)$ s'obté multiplicant tres matrius que, començant de dreta a esquerra, són: la matriu de la translació de vector $(-1, -a-b)$, la del gir d'angle 90° centrat en l'origen i la de la translació de vector $(1, a+b)$. Corresponen a les aplicacions que hem de compondre segons s'explica en el punt 3.4 "Rotació al voltant d'un punt genèric" del mòdul "Transformacions geomètriques". Calculem la composició:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) & 0 \\ \sin(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a+b+1 \\ 1 & 0 & a+b-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La imatge del punt (a, b) es pot calcular mitjançant la multiplicació:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a+b+1 \\ 1 & 0 & a+b-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a+b-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultat és el punt $(a+1, 2a+b-1)$.

b) La matriu de l'escalat de raó b i centre $(-1, a-b)$ s'obté multiplicant tres matrius que, començant de dreta a esquerra, són: la matriu de la translació de vector $(1, b-a)$, la de l'escalat de raó b centrat en l'origen i la de la translació de vector $(-1, a-b)$. Corresponen a les aplicacions que hem de compondre segons s'explica en el punt 4.3 "Escalat a partir d'un punt genèric"del mòdul "Transformacions geomètriques".

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -1 \\ 0 & b & a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b-1 \\ 0 & b & b(b-a)+a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La imatge del punt (a, b) es pot calcular mitjançant la multiplicació:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b-1 \\ 0 & b & b(b-a)+a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+b-1 \\ b^2+b^2-ab+a-b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1)b-1 \\ 2b^2-(a+1)b+a \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultat és el punt $((a+1)b-1, 2b^2-(a+1)b+a)$.

c) La imatge del punt (a, b) en aplicar-li la composició del gir seguit de l'escalat es pot calcular mitjançant la multiplicació de la matriu de l'escalat pel punt resultant de l'apartat a):

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b-1 \\ 0 & b & b(b-a)+a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a+b-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+b+b-1 \\ 2ab+b^2-b+b^2-ab+a-b \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultat és el punt $(ab+2b-1, 2b^2+ab-2b+a)$.

La imatge del punt (a, b) en aplicar-li la composició de l'escalat seguit del gir es pot calcular mitjançant la multiplicació de la matriu del gir pel punt resultant de l'apartat b):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a+b+1 \\ 1 & 0 & a+b-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (a+1)b-1 \\ 2b^2-(a+1)b+a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b^2+(a+1)b-a+a+b+1 \\ ab+b-1+a+b-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultat és el punt $(-2b^2+ab+2b+1, ab+2b+a-2)$.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Calcular la matriu de la composició: 0.5 punts.
- Calcular la imatge del punt: 0.25 punts.

Apartat b

- Calcular la matriu de la composició: 0.5 punts.
- Calcular la imatge del punt: 0.25 punts.

Apartat c

- Calcular la imatge de la composició del gir més l'escalat: 0.5 punts.
- Calcular la imatge de la composició de l'escalat més el gir: 0.5 punts.