EXAMEN 2

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Determinad, en forma binómica, el resultado de la resta entre el conjugado de $2 - 2i$ y el número $3_{120°}$.

b) Hallad todas las soluciones de la raíz siguiente: $\sqrt[5]{1024i}$. Proporcionad el resultado en forma polar.

Solución

a) El conjugado de $2 - 2i$ es $2 + 2i$. Ahora debemos poner todos los elementos de la resta en la misma forma. Por tanto, transformamos $3_{120°}$ a forma binómica, utilizando la relación que establece que $a = r\cos\theta$ y $b = r\sin\theta$ (ver apartado 3.4.2, página 33, Módulo 1):

$$r = 3 \qquad \cos 120° = -\frac{1}{2} \qquad \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, nos queda que:

$$3_{120°} = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Y ahora procedemos con la resta:

$$2 + 2i - (-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i) = 2 + \frac{3}{2} + (2 - \frac{3\sqrt{3}}{2})i = \frac{7}{2} + \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2}i$$

b) Escribimos el número complejo $1024i$ en forma polar (ver apartado 3.4.1, página 30, Módulo 1):

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{0^2 + 1024^2} = 1024$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\left(\frac{1024}{0}\right) = \arctan\infty = 90°$$

Así pues, tenemos que $1024i = 1024_{90°}$. Ahora podemos aplicar la raíz quinta que se pide en el enunciado (ver apartado 3.6.1, página 43, Módulo 1):

$$\sqrt[5]{1024_{90°}} = \sqrt[5]{1024}_{\frac{90°+360°k}{5}} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

El módulo de las raíces es: $r = \sqrt[5]{1024} = 4$

Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \frac{90°+360°k}{5}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

- Si $k = 0$, tenemos $\beta_0 = 18°$ y se obtiene la raíz $4_{18°}$.
- Si $k = 1$, tenemos $\beta_1 = 90°$ y se obtiene la raíz $4_{90°}$.
- Si $k = 2$, tenemos $\beta_2 = 162°$ y se obtiene la raíz $4_{162°}$.
- Si $k = 3$, tenemos $\beta_3 = 234°$ y se obtiene la raíz $4_{234°}$.
- Si $k = 4$, tenemos $\beta_4 = 306°$ y se obtiene la raíz $4_{306°}$.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -k \\ -k \\ -k \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Discutid, razonadamente, el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Considerad las matrices A y B que se obtienen sustituyendo el parámetro k por la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC. Con estas matrices, determinad si el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ es compatible o incompatible y, en caso de ser compatible, calculad su solución.

Solución

a) Dado que la matriz A es cuadrada de orden 3, estudiamos su rango utilizando que el rango es tres, solo si el determinante de la matriz es diferente de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -k & -k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k & 2 \end{vmatrix} = k^2 + 3k + 2 \quad \rightarrow \quad k^2 + 3k + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} k = -2 \\ k = -1 \end{array} \right.$$

En consecuencia

- Si $k \neq -2$ y $k \neq -1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{rango}(A) = 3}$.
- Si $k = -2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ con $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{rango}(A) = 2}$.
- Si $k = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ con $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{rango}(A) = 2}$.

b) Resolvemos este apartado del ejercicio de forma paramétrica, en función de k, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro k por tu valor asignado.

Consideramos el sistema:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ -k \\ -k \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{r} x - ky - kz = -k \\ x + y + z = -k \\ -ky + 2z = -k \end{array} \right\}$$

La matriz de coeficientes de este sistema es la matriz A, y su matriz ampliada, M, es:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & -k & -k \\ 1 & 1 & 1 & -k \\ 0 & -k & 2 & -k \end{array} \right)$$

Por el apartado anterior sabemos que si $k \neq -1$ y $k \neq -2$ entonces el rango$(A) = 3$ y dado que el sistema tiene solo tres ecuaciones y tres incógnitas tenemos que el rango de la matriz ampliada también será tres. Por lo tanto, por el Teorema de

Rouché-Fröbenius [ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 13] si rango(A) = 3 =rango(M) =n^o incógnitas entonces el sistema es compatible determinado.

Utilizaremos el método de Gauss [ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & -k & -k \\ 1 & 1 & 1 & -k \\ 0 & -k & 2 & -k \end{array}\right) \underset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & -k & -k \\ 0 & 1+k & 1+k & 0 \\ 0 & -k & 2 & -k \end{array}\right) \underset{(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & -k & -k \\ 0 & 1+k & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 2+k & -k \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2 - F1 \rightarrow F2$, (2): $F3 + \frac{k}{1+k}F2 \rightarrow F3$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x - ky - kz = -k \\ (1+k)\,y + (1+k)\,z = 0 \\ (2+k)\,z = -k \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Solución: } \left(x = -k,\ y = \frac{k}{k+2},\ z = \frac{-k}{k+2}\right)$$

Así pues, la solución del sistema, en función de los diferentes valores del parámetro k, es:

	$\left(x = -k,\ y = \frac{k}{k+2},\ z = \frac{-k}{k+2}\right)$
Si $k = 0$	$(x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$
Si $k = 1$	$\left(x = -1,\ y = \frac{1}{3},\ z = \frac{-1}{3}\right)$
Si $k = 2$	$\left(x = -2,\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{-1}{2}\right)$
Si $k = 3$	$\left(x = -3,\ y = \frac{3}{5},\ z = \frac{-3}{5}\right)$
Si $k = 4$	$\left(x = -4,\ y = \frac{2}{3},\ z = \frac{-2}{3}\right)$
Si $k = 5$	$\left(x = -5,\ y = \frac{5}{7},\ z = \frac{-5}{7}\right)$
Si $k = 6$	$\left(x = -6,\ y = \frac{3}{4},\ z = \frac{-3}{4}\right)$
Si $k = 7$	$\left(x = -7,\ y = \frac{7}{9},\ z = \frac{-7}{9}\right)$
Si $k = 8$	$\left(x = -8,\ y = \frac{4}{5},\ z = \frac{-4}{5}\right)$
Si $k = 9$	$\left(x = -9,\ y = \frac{9}{11},\ z = \frac{-9}{11}\right)$

3. Sean $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,2,0)$, $v_3 = (0,4,0)$, $v_4 = (-6,-6,0)$ y $v_5 = (-17,3,0)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sea $E =< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 >$. Sea $w = (a+1, 3a+1, 0)$ donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP. Se pide:

a) Calculad la dimensión de E y una base A. ¿Pertenece w a E? En caso afirmativo, calculad las coordenadas en la base A.

b) Sean $e_1 = v_1 + v_2$ y $e_2 = v_1 - \frac{1}{2} \cdot v_2$ de forma que $B = \{e_1, e_2\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de la base B a la base A, y de la base A a la base B.

Solución

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & -17 \\ 1 & 2 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ y todos los menores 3×3 resultado de orlar el menor anterior tienen determinante nulo.
Como base podemos escoger $A = \{v_1, v_2\}$, ya que contiene el menor 2×2 anterior.
Para ver si $w \in E$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 3a+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a + 1$ y $y = a$. Por tanto, $w \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a + 1, a)$.

b) Para calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A. Y esto es justo la definición de estos vectores!
Así pues, la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base en la dirección contraria calculamos la inversa de la matriz anterior:

$$C_{A\to B} = C_{B\to A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida en la base canónica por:

$$f(x, y, z) = (-y, y, -(b + a)(a + 1)x + (a + 1)y - (b + a)z).$$

Sustituid el parámetro a por la tercera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC (b es un parámetro real). Se pide:

a) Calculad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Decid para qué valor de b la imagen tiene dimensión 1 y proporcionad una base de la imagen de f en este caso. **Indicación:** El cálculo puede resultar más sencillo, si no desarrolláis el producto $(b + a)(a + 1)$.

b) Calculad el valor que tiene que tener b para que $(a + 2)$ sea un valor propio de f, hallad su vector propio asociado y escribid la forma diagonal de f en este caso.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los resultados siguientes. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

a) Para calcular $M(f|C,C)$, la matriz de f en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los ponemos en columnas, tal como se explica en el punto “3. Matriz asociada a una aplicación lineal” del módulo “Aplicaciones lineales”:
$f(1,0,0) = (0,0,-(b+a)(a+1))$
$f(0,1,0) = (-1,1,(a+1))$
$f(0,0,1) = (0,0,-(b+a))$

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(b+a)(a+1) & (a+1) & -(b+a) \end{pmatrix}$$

Si $b+a=0$ entonces $dim\ Im(f) = 1$ porque en este caso la primera y tercera columna son de ceros y por tanto el rango de la matriz $M(f|C,C)$ será 1. El valor de b que nos piden es $b=-a$. Una base de la imagen es el segundo vector-columna de la matriz M, el $(-1,1,(a+1))$.

La matriz, b, y una base de la imagen en función de vuestro IDP serán:

$$a=0 \quad M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 1 & -b \end{pmatrix} \quad b=0 \quad Im(f) = <(-1,1,1)>$$

$$a=1 \quad M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2b-2 & 2 & -b-1 \end{pmatrix} \quad b=-1 \quad Im(f) = <(-1,1,2)>$$

$$a=2 \quad M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3b-6 & 3 & -b-2 \end{pmatrix} \quad b=-2 \quad Im(f) = <(-1,1,3)>$$

$$a=3 \quad M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4b-12 & 4 & -b-3 \end{pmatrix} \quad b=-3 \quad Im(f) = <(-1,1,4)>$$

$$a=4 \quad M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5b-20 & 5 & -b-4 \end{pmatrix} \quad b=-4 \quad Im(f) = <(-1,1,5)>$$

$$a=5 \quad M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6b-30 & 6 & -b-5 \end{pmatrix} \quad b=-5 \quad Im(f)=<(-1,1,6)>$$
$$a=6 \quad M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7b-42 & 7 & -b-6 \end{pmatrix} \quad b=-6 \quad Im(f)=<(-1,1,7)>$$
$$a=7 \quad M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8b-56 & 8 & -b-7 \end{pmatrix} \quad b=-7 \quad Im(f)=<(-1,1,8)>$$
$$a=8 \quad M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9b-72 & 9 & -b-8 \end{pmatrix} \quad b=-8 \quad Im(f)=<(-1,1,9)>$$
$$a=9 \quad M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10b-90 & 10 & -b-9 \end{pmatrix} \quad b=-9 \quad Im(f)=<(-1,1,10)>$$

b) Para que $a+2$ sea un valor propio de f, $a+2$ tiene que ser una raíz del polinomio característico de f, que se define como $p(\lambda)=|M-\lambda \mathrm{I}|$ en el punto "7. Vectores y valores propios". Para calcularlo, desarrollamos este determinante por la tercera columna:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -(b+a)(a+1) & (a+1) & -(b+a)-\lambda \end{vmatrix} = (-(b+a)-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)$$

Vemos que los tres valores propios son 0, 1 y $-b-a$. Como $a+2$ no puede ser 0 ni puede ser 1 (dado que a es un dígito entre 0 y 9), tendrá que ser $a+2=-b-a$ y, por tanto, $b=-2a-2$.

Para calcular el VEP de VAP $a+2$ tenemos que buscar una base del $Ker(f-(a+2)\mathrm{I})$. Es decir, resolver el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} -(a+2) & -1 & 0 \\ 0 & 1-(a+2) & 0 \\ (a+2)(a+1) & (a+1) & (a+2)-(a+2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la segunda ecuación $(1-a-2)y=0$ deducimos que $y=0$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación $-(a+2)x-y=0$ obtenemos que también $x=0$, y la tercera ecuación $(a+2)(a+1)x+(a+1)y=0$ no pone restricciones sobre la variable z. Por tanto, obtenemos el vector propio $(0,0,1)$ para el valor propio $a+2$.

La forma diagonal de f será:

$$M(f|B,B)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

en la base B de vectores propios.

El resultado en función del valor de vuestro IDP será:

$$\begin{array}{llll}
a = 0 & \lambda = 2 & b = -2 & VEP = (0, 0, 1) \\
a = 1 & \lambda = 3 & b = -4 & VEP = (0, 0, 1) \\
a = 2 & \lambda = 4 & b = -6 & VEP = (0, 0, 1) \\
a = 3 & \lambda = 5 & b = -8 & VEP = (0, 0, 1) \\
a = 4 & \lambda = 6 & b = -10 & VEP = (0, 0, 1) \\
a = 5 & \lambda = 7 & b = -12 & VEP = (0, 0, 1) \\
a = 6 & \lambda = 8 & b = -14 & VEP = (0, 0, 1) \\
a = 7 & \lambda = 9 & b = -16 & VEP = (0, 0, 1) \\
a = 8 & \lambda = 10 & b = -18 & VEP = (0, 0, 1) \\
a = 9 & \lambda = 11 & b = -20 & VEP = (0, 0, 1)
\end{array}$$