Álgebra

EXAMEN 1

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Expresad el siguiente número complejo en forma polar: $\dfrac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i}$.

b) Calculad todas las raíces resultantes de la ecuación: $x^4+10=0$. Proporcionad el resultado en forma binómica.

Solución

a) Primero operamos la fracción para encontrar la forma binómica. Para eso, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i}\cdot\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}-i}=\frac{(1+i\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-i)}{\sqrt{2}^2-i^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{i}{3}$$

Ahora podemos calcular el módulo y el ángulo del número, utilizando la relación que establece que $r=\sqrt{a^2+b^2}$ y $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ (ver apartado 3.4.1, página 30, Módulo 1):

$$\text{Módulo: } r=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}+\frac{1}{9}}=1$$

$$\text{Argumento: } \tan\theta=\frac{1/3}{2\sqrt{2}/3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\rightarrow\theta=\arctan\frac{1}{2\sqrt{2}}\simeq 19{,}5^\circ$$

Por tanto, tenemos:

$$\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i}\simeq 1_{19{,}5^\circ}$$

b) Este ejercicio es equivalente a pedir las raíces cuartas de -10. Así pues, primero calculamos el módulo y el argumento del número complejo -10:

$$\text{Módulo: } r=\sqrt{(-10)^2+0^2}=10$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\left(\frac{0}{-10}\right) = \arctan 0 = 180°$$

NOTA ACLARATORIA: sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0° y en 180°. Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando pasamos un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos, hacer un dibujo. Por tanto, si dibujamos el número -10 en el plano complejo, veremos que está asociado al punto $(-10, 0)$, que se encuentra entre el segundo y el tercer cuadrante, es decir, en 180°. Utilizaremos este ángulo para obtener todas las raíces cuartas.

Tenemos entonces que $x = \sqrt[4]{-10} = \sqrt[4]{10_{180°}}$. Ahora aplicamos la raíz cuarta (ver apartado 3.6.1, página 43, Módulo 1):

$$x = \sqrt[4]{10}_{\frac{180°+360°k}{4}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3$$

El módulo de las raíces es: $r = \sqrt[4]{10}$
Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \frac{180°+360°k}{4}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

- Si $k = 0$, tenemos $\beta_0 = 45°$ y se obtiene la raíz $(\sqrt[4]{10})_{45°}$.
- Si $k = 1$, tenemos $\beta_1 = 135°$ y se obtiene la raíz $(\sqrt[4]{10})_{135°}$.
- Si $k = 2$, tenemos $\beta_2 = 225°$ y se obtiene la raíz $(\sqrt[4]{10})_{225°}$.
- Si $k = 3$, tenemos $\beta_3 = 315°$ y se obtiene la raíz $(\sqrt[4]{10})_{315°}$.

Finalmente, debemos transformar los valores anteriores a forma binómica, utilizando la relación que establece que $a + bi = (r\cos\theta) + (r\sin\theta)i$ (ver apartado 3.4.2, página 33, Módulo 1):

- Si $k = 0$, tenemos la raíz $\frac{\sqrt[4]{10}\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{10}\sqrt{2}}{2}i$.
- Si $k = 1$, tenemos la raíz $-\frac{\sqrt[4]{10}\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{10}\sqrt{2}}{2}i$.
- Si $k = 2$, tenemos la raíz $-\frac{\sqrt[4]{10}\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt[4]{10}\sqrt{2}}{2}i$.
- Si $k = 3$, tenemos la raíz $\frac{\sqrt[4]{10}\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt[4]{10}\sqrt{2}}{2}i$.

2. Considerad la recta $r : \left.\begin{array}{r} x + y + z = \; 2 \\ x - ky + 2z = 5 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi : -kx + y + z = 1$

Se pide:

a) Determinad, razonadamente, para qué valores del parámetro k la recta r no tiene ningún punto en común con el plano π.

b) Determinad, en caso de existir, el valor del parámetro k para el cuál la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(\frac{1}{11}, \frac{-1}{11}, 2\right)$.

c) Considerad la recta r y el plano π que se obtienen sustituyendo el parámetro k por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC y calculad el punto de corte de la recta r con el plano π.

Solución

a) Recordemos que el estudio de la posición relativa de una recta r (dada por dos ecuaciones) y un plano π se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas [ver apuntes módulo 3, página 32]

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x-ky+2z=5 \\ -kx+y+z=1 \end{array}\right\}$$

Cuando este sistema sea incompatible tendremos que la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común.

Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 13].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 2 \\ -k & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -k & 2 & 5 \\ -k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, puesto que si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 2 \\ -k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 - 3k - 2 = -(k+1)(k+2)$$

- Si $k \neq -1$ y $k \neq -2$ $\rightarrow$ rango$(A) = 3 =$rango$(M) =$ n^o incógnitas $\rightarrow$ $\boxed{\text{Sistema compatible determinado}}$.
- Si $k = -1$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.
Calculamos, para $k = -1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ rang}\,(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{Sistema incompatible}}.$$

- Si $k = -2$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.
Calculamos, para $k = -2$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se

obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \ \text{rang}\,(M) = 2 \rightarrow \ \boxed{\text{Sistema compatible indeterminado}}.$$

Así pues, podemos afirmar que:

$$\boxed{\text{Si } k = -1\text{, entonces la recta } r \text{ no tiene ningún punto en común con el plano } \pi}$$

b) Para que la recta r y el plano π se corten en el punto $\left(\frac{1}{11}, \frac{-1}{11}, 2\right)$ deberemos imponer que el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z = 2 \\ x - ky + 2z = 5 \\ -kx + y + z = 1 \end{aligned}\right\}$$

tenga como solución $\left(x = \frac{1}{11}, y = \frac{-1}{11}, z = 2\right)$. Así pues, sustituyendo dichos valores en el sistema se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{11} + (\tfrac{-1}{11}) + 2 = 2 \\ \tfrac{1}{11} - k(\tfrac{-1}{11}) + 2(2) = 5 \\ -k(\tfrac{1}{11}) + (\tfrac{-1}{11}) + 2 = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 2 = 2 \\ \tfrac{k}{11} + \tfrac{45}{11} = 5 \\ \tfrac{-k}{11} + \tfrac{21}{11} = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 2 = 2 \\ k + 45 = 55 \\ -k + 21 = 11 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow k = 10$$

Por tanto, la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(\frac{1}{11}, \frac{-1}{11}, 2\right)$ para $\boxed{k = 10}$.

c) Resolvemos este apartado del ejercicio de forma paramétrica, en función de k, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro k por tu valor asignado.

Consideramos:

$$r: \left.\begin{aligned} x + y + z = 2 \\ x - ky + 2z = 5 \end{aligned}\right\} \qquad \pi : -kx + y + z = 1$$

Sabemos por el apartado anterior que si $k \neq -1$ y $k \neq -2$ la recta r corta al plano π en un único punto, es decir recta y plano tienen un único punto en común que es el que se obtiene al resolver el sistema compatible determinado formado por las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z = 2 \\ x - ky + 2z = 5 \\ -kx + y + z = 1 \end{aligned}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [ver apuntes módulo 3, apartado 6, pàginas de la 19 a la 22] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -k & 2 & 5 \\ -k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -k-1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+k & 1+k & 1+2k \end{array}\right) \underset{(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -k-1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2+k & 4+2k \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2 - F1 \to F2$, $F3 + k{\cdot}F1 \to F3$, (2): $F3 + F2 \to F3$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ (-k-1)y+z=3 \\ (2+k)z=4+2k \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Solución: } \left(x=\frac{1}{k+1}, y=\frac{-1}{k+1}, z=2\right)$$

Así pues, la recta r corta al plano π, en función de los diferentes valores del parámetro k, en el punto siguiente:

	$\left(x=\frac{1}{k+1}, y=\frac{-1}{k+1}, z=2\right)$
Si $k=0$	$(x=1, y=-1, z=2)$
Si $k=1$	$\left(x=\frac{1}{2}, y=\frac{-1}{2}, z=2\right)$
Si $k=2$	$\left(x=\frac{1}{3}, y=\frac{-1}{3}, z=2\right)$
Si $k=3$	$\left(x=\frac{1}{4}, y=\frac{-1}{4}, z=2\right)$
Si $k=4$	$\left(x=\frac{1}{5}, y=\frac{-1}{5}, z=2\right)$
Si $k=5$	$\left(x=\frac{1}{6}, y=\frac{-1}{6}, z=2\right)$
Si $k=6$	$\left(x=\frac{1}{7}, y=\frac{-1}{7}, z=2\right)$
Si $k=7$	$\left(x=\frac{1}{8}, y=\frac{-1}{8}, z=2\right)$
Si $k=8$	$\left(x=\frac{1}{9}, y=\frac{-1}{9}, z=2\right)$
Si $k=9$	$\left(x=\frac{1}{10}, y=\frac{-1}{10}, z=2\right)$

3. Sean $v_1 = (-1,-3,0,1,2)$, $v_2 = (2,1,1,-2,0)$, $v_3 = (1,-2,1,-1,2)$, $v_4 = (-2,-6,0,2,4)$, $v_5 = (1,1,-1,-1,0)$ vectores de $\mathbb{R}^5$.

Se pide:

a) Escoged 3 vectores, entre los v_i anteriores, de forma que formen una base A de un subespacio vectorial F de dimensión 3 de $\mathbb{R}^5$.

b) Sea $w = (a, a-2, -a-1, -a, 2)$ donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP. ¿Pertenece w a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A que habéis encontrado en el apartado anterior.

c) Sea $B = \{w, v_1, v_3\}$ una base de F. Calculad la matriz $C_{B\to A}$ de cambio de base de la base B a la base A que habéis encontrado en el primer apartado.

Solución

a) Como los vectores v_i son de $\mathbb{R}^5$, sólo es necesario escoger 3 que sean linealmente independientes. v_1 y v_2 vemos que son linealmente independientes ya que contienen el menor:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Orlando, sólo debemos encontrar un tercer vector que sea linealmente independiente con estos dos. Vemos que $rango(v_1, v_2, v_3) = 2$, $rango(v_1, v_2, v_4) = 2$ pero $rango(v_1, v_2, v_5) = 3$ ya que contiene el menor:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Así $A = \{v_1, v_2, v_5\}$

b) Para ver si w pertenece a F y a la vez calcular sus coordenadas en caso afirmativo, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ -a-1 \\ -a \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 1$, $y = 0$, $z = a + 1$. Así obtenemos que $w \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(1, 0, a + 1)$.

c) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A. Tenemos que $A = \{v_1, v_2, v_5\}$ y $B = \{w, v_1, v_3\}$, de forma que ya tenemos esta expresión para w (apartado anterior) y para v_1 porqué es común a las dos bases y sólo nos queda encontrarla para v_3. Para esto resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.
Así la matriz de cambio de base de B a A és:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Sustituid el parámetro a por la segunda cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz (b es un parámetro real):

$$M(f|C, C) = \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 \\ 0 & 6a+2 & 0 \\ a+1 & 2b(a+1) & 1 \end{pmatrix}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal y $M(f|C, C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$. Se pide:

a) Calculad la dimensión y una base del núcleo de la aplicación f.

b) Calculad el valor que tiene que tener b para que $v = (-\frac{1}{(a+1)}, \frac{1}{(a+1)}, 1)$ sea un vector propio de f, hallad su valor propio asociado y calculad el polinomio característico de f en este caso.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

a) El rango de la matriz no puede ser 3, porque la primera y tercera columna son proporcionales. Vemos que el rango es 2 ya que, al ser $a \geq 0$, el siguiente determinante 2x2 es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 6a+2 & 0 \\ 2b(a+1) & 1 \end{vmatrix} = 6a+2$$

A partir de la proposición de la página 18 del módulo “Aplicaciones lineales”, sabemos que el rango de la matriz coincide con la dimensión de la imagen de la aplicación lineal asociada a ella. Tenemos entonces $dim Im(f) = 2$ y por el teorema de la dimensión (página 19) sabemos que $dim\, Ker(f) = dim\, \mathbb{R}^3 - dim\, Im(f) = 3 - 2 = 1$. Por tanto, el núcleo tiene dimensión 1 y la aplicación no es inyectiva. Para calcular una base del núcleo resolvemos el siguiente sistema, como en los ejemplos del punto “4. Núcleo e imagen de una aplicación lineal”:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 \\ 0 & 6a+2 & 0 \\ a+1 & 2b(a+1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación encontramos que $y = 0$ y de la tercera que $(a+1)x+z = 0$. Por tanto, las soluciones están generadas por el vector $(1, 0, -a-1)$ y éste forma una base del $Ker(f)$.

El resultado en función del valor de vuestro IDP será:

$$\begin{array}{ll} a=0 & Ker(f) =< (1,0,-1) > \\ a=1 & Ker(f) =< (1,0,-2) > \\ a=2 & Ker(f) =< (1,0,-3) > \\ a=3 & Ker(f) =< (1,0,-4) > \\ a=4 & Ker(f) =< (1,0,-5) > \\ a=5 & Ker(f) =< (1,0,-6) > \\ a=6 & Ker(f) =< (1,0,-7) > \\ a=7 & Ker(f) =< (1,0,-8) > \\ a=8 & Ker(f) =< (1,0,-9) > \\ a=9 & Ker(f) =< (1,0,-10) > \end{array}$$

b) Para que $v = (-1/(a+1), 1/(a+1), 1) \in \mathbb{R}^3$ sea un vector propio de f, el producto de la matriz $M(f|C,C)$ por el vector v ha de ser un múltiplo de v. Tal como se define en el punto “7. Vectores y valores propios” tiene que existir un número

$\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \lambda \cdot v$. Haciendo el cálculo de la imagen utilizando la matriz asociada a f, la condición se traduce a $M(f|C,C) \cdot v = \lambda \cdot v$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 \\ 0 & 6a+2 & 0 \\ a+1 & 2b(a+1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/(a+1) \\ 1/(a+1) \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1/(a+1) \\ 1/(a+1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2b/(a+1) \\ (6a+2)/(a+1) \\ -1+2b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda/(a+1) \\ \lambda/(a+1) \\ \lambda \end{pmatrix}$$

De esta expresión obtenemos tres ecuaciones:

$$\begin{gathered} -2b/(a+1) = -\lambda/(a+1) \\ (6a+2)/(a+1) = \lambda/(a+1) \\ -1+2b+1 = \lambda \end{gathered}$$

De la segunda obtenemos el valor propio $\lambda = 6a+2$. A continuación aislamos la incógnita b en la primera o la tercera ecuación (son equivalentes: $2b = \lambda$) y encontramos que $b = \lambda/2 = (6a+2)/2 = 3a+1$.

El polinomio característico de f es $p(\lambda) = |M - \lambda \mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7. Vectores y valores propios". Desarrollando el determinante por la tercera columna obtenemos:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -6a-2 & 0 \\ 0 & 6a+2-\lambda & 0 \\ a+1 & 2(3a+1)(a+1) & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(6a+2-\lambda)$$

Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$: 0, 1 y $(6a+2)$.

El resultado en función del valor de vuestro IDP será:

$$\begin{array}{llll} a=0 & \lambda=2 & b=1 & p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) \\ a=1 & \lambda=8 & b=4 & p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)(8-\lambda) \\ a=2 & \lambda=14 & b=7 & p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)(14-\lambda) \\ a=3 & \lambda=20 & b=10 & p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)(20-\lambda) \\ a=4 & \lambda=26 & b=13 & p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)(26-\lambda) \\ a=5 & \lambda=32 & b=16 & p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)(32-\lambda) \\ a=6 & \lambda=38 & b=19 & p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)(38-\lambda) \\ a=7 & \lambda=44 & b=22 & p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)(44-\lambda) \\ a=8 & \lambda=50 & b=25 & p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)(50-\lambda) \\ a=9 & \lambda=56 & b=28 & p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)(56-\lambda) \end{array}$$