Solución Examen 3

2016-2017 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 21.06.2017

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Hallad la condición que tienen que cumplir x e y para que el número complejo $\dfrac{(x-1)+yi}{(x+1)+yi}$ sea un número imaginario puro.

b) Hallad el módulo y el argumento de $-2+2i$.

Solución:

a) Tal como se dice en la página 20 del material impreso, para que sea un número imaginario puro es necesario que la parte real sea 0. Vamos a ver cuál es la parte real de este número complejo. Para ello efectuamos el cociente para obtener el número de la forma $a+bi$ (ver apartado 3.3., página 20, “Operaciones con números complejos”):

$$\frac{(x-1)+yi}{(x+1)+yi}=$$

$$=\frac{((x-1)+yi)\cdot((x+1)-yi)}{((x+1)+yi)\cdot((x+1)-yi)}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)-(x-1)\cdot yi+(x+1)\cdot yi+y^2}{(x+1)^2+y^2}=$$

$$=\frac{x^2-1-xyi+yi+xyi+yi+y^2}{(x+1)^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2-1)+2yi}{(x+1)^2+y^2}=$$

$$=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i$$

Una vez tenemos el número complejo expresado de la forma $a+bi$ imponemos que la parte real es 0 (para que el número sea imaginario puro):

$$\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

Por lo tanto, la condición es:

$$x^2+y^2=1$$

a) Buscamos el módulo y el argumento del complejo $-2+2i$. Para ello aplicamos las explicaciones del apartado 3.4, página 27, del material impreso.

$$m=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Ahora vamos a por el ángulo. El ángulo del complejo dado es:

$$\alpha = \arctan\frac{2}{-2} + 180^{\circ} = -45^{\circ} + 180^{\circ} = 135^{\circ}$$

Por lo tanto:

$$-2+2i = 2\sqrt{2}_{135^{\circ}}$$

2. Sean E, F y G los subespacios vectoriales de $\Re^3$ generados de la forma siguiente:

$$E = <(2,2,0),(2,4,4),(0,2,a),(b,4,2)>,\ a,b \in \Re$$

$$F = <(-1,-1,0),(0,1,2),(1,0,-2)>$$

$$G = <(2,2,0),(2,4,4)>$$

a) Hallad a y b para que la dimensión de E sea 2 y hallad una base en este caso. Hallad la dimensión de F y de G y hallad también una base.

b) ¿Son F y G el mismo subespacio vectorial? En caso afirmativo, hallad la matriz de cambio de base de la base de G a la base de F que habéis propuesto en el apartado anterior.

Solución:

a) Primero de todo vemos que los dos primeros vectores son linealmente independientes ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ así que ya generan un subespacio vectorial de dimensión 2.

Ahora imponemos que los otros dos vectores sean combinación lineal de estos dos primeros para que la dimensión de E sea 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & a \end{vmatrix} = 4a - 16$$

Por lo tanto, si imponemos que el determinante anterior sea 0 tenemos que a=4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & b \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8b - 24$$

Por lo tanto, si imponemos que el determinante anterior sea 0 tenemos que b=3.

Como base podremos usar los vectores que contienen el menor que hemos encontrado en primer lugar $A=\{(2,2,0),(2,4,4)\}$

En cuanto a F: Calculamos el rango de los vectores. Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Pero podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así la dimensión de F es 2 y como base podríamos usar los dos vectores que contienen el menor anterior y, por lo tanto, $B=\{(-1,-1,0),(0,1,2)\}$

Respecto G procedemos de manera análoga y encontramos que la dimensión es 2 ya que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ y una base puede ser C={(2,2,0),(2,4,4)}.

b) Para comprobar si son el mismo subespacio vectorial, como la dimensión de los dos espacios es igual, será suficiente con comprobar si una base de G pertenece a F.

Así para (2,2,0) de la base de G planteamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ que tiene solución x=-2, y=0 y, por lo tanto, $(2,2,0) \in F$

Para (2,4,4) de la base de G planteamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$ que tiene solución x=-2, y=2 y, por lo tanto, $(2,4,4) \in F$

Por lo tanto F y G son el mismo subespacio vectorial.

Para calcular la matriz de cambio de base de C a B, pondremos los vectores de la base C como combinación lineal de los de la base B. Esto lo acabamos de resolver, por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales siguiente que depende del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) Estudiad para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible.
b) Resolved el sistema para el caso $\lambda = 1$.

Solución:

a) Estudiamos para qué valores de λ el sistema es incompatible.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(5\lambda+5) = 5\lambda(\lambda+1)$$

CASO I – Si $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -1$

$$Rang\, M = Rang\, \overline{M} = núm.incòg = 3$$

En virtud del teorema de Rouché-Frobënius, en este caso el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

CASO II – Si $\lambda = 0$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad Rang\, M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Rang\, \overline{M} = 3$$

$$Rang\, M \neq Rang\, \overline{M}$$

En virtud del teorema de Rouché-Frobënius el sistema es INCOMPATIBLE

CASO III – $\lambda = -1$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Rang\, M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -5 & 30 \end{vmatrix} = 120 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad Rang\, \overline{M} = 3$$

$Rang\, M = 2 \qquad Rang\, \overline{M} = 3$

$Rang\, M \neq Rang\, \overline{M}$

En virtud del teorema de Rouché-Frobënius el sistema es INCOMPATIBLE

El sistema es incompatible para dos valores del parámetro λ: $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

b) Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2x - y + 5z = 30 \end{cases}$$

En este caso el sistema es compatible determinado, tiene una única solución, y el sistema se puede resolver por cualquier método conocido, por ejemplo por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación tenemos 10 z = 60, por lo tanto, $z = 6$
De la segunda ecuación tenemos y + z = 10, por lo tanto, $y = 4$
De la primera ecuación tenemos x + y – z = 0, por lo tanto, $x = 2$

Solución: $\boxed{(x = 2 \;,\quad y = 4 \;,\quad z = 6)}$

4. Consideremos $A=(2,0)$, $B=(2,3)$, $C=(1,3)$.

a) Sea g el giro de ángulo a en sentido antihorario desde el origen de coordenadas. Calculad $g(A), g(B)$ y $g(C)$. Hallad el ángulo a de manera que el segmento $g(B), g(C)$ sea perpendicular al eje x.

b) Sea f el escalado de razón 2 desde el punto $(0,-2)$. Calculad $f(A), f(B)$ y $f(C)$.

<u>Solución:</u>

a) Recordemos el Módulo 5, Sección 3.1. La matriz del giro de ángulo a en sentido antihorario desde el origen es:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\operatorname{sen}(a) & 0 \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar las imágenes de los puntos A,B,C, tenemos que hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\operatorname{sen}(a) & 0 \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(a) & 2\cos(a)-3\operatorname{sen}(a) & \cos(a)-3\operatorname{sen}(a) \\ 2\operatorname{sen}(a) & 2\operatorname{sen}(a)+3\cos(a) & \operatorname{sen}(a)+3\cos(a) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$g(A)=(2\cos(a),2\operatorname{sen}(a)),$$
$$g(B)=(2\cos(a)-3\operatorname{sen}(a),2\operatorname{sen}(a)+3\cos(a))$$
$$g(C)=(\cos(a)-3\operatorname{sen}(a),\operatorname{sen}(a)+3\cos(a))$$

Así, $g(B)-g(C)=(\cos(a),\operatorname{sen}(a))$ y este vector es perpendicular al eje x si al multiplicarlo por el vector (1,0) da 0. Es decir, si $\cos(a)=0$. Es decir, cuando el ángulo es de 90º. Entonces los tres puntos son g(A)=(0,2), g(B)=(-3,2) y g(C)=(-3,1).

b) Recordemos ahora el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 2 desde el punto (0, -2), de derecha a izquierda, primero hacemos la traslación de vector (0, 2), luego hacemos el escalado de razón 2, y luego hacemos la traslación de vector (0, -2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar las imágenes de los puntos A,B,C, tenemos que hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, f(A)=(4,2), f(B)=(4,8) y f(C)=(2,8).

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar alguno/s de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	300º	315º	360º
sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	$-\sqrt{3}$	-1	0