EXAMEN 3 - 22 gener 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:

a) Determineu el nombre complex, z, el seu oposat, $-z$, i el seu conjugat, $\bar{z}$, sabent que $\frac{1}{z} = i$.

z	$-z$	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$
			i

b) Calculeu totes les arrels cinquenes del següent nombre complex: $-i$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Solució

a) Per resoldre aquest exercici utilitzarem la definició d ´oposat d ´un nombre complex que apareix a la pàgina 22, de conjugat de la pàgina 24 del material i el quocient de nombres complexos.

Partim de què:

$\frac{1}{z} = i \rightarrow \frac{1}{i} = z$

$z = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$

Per tant.

z	$-z$	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$
$-i$	i	i	i

b) Escrivim el complex $-i$ en forma polar tal com s'explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$m = \sqrt{0 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\alpha = \arctan\left(\frac{--1}{0}\right) = \arctan(-\infty) = 270°$

NOTA ACLARATÒRIA: Sabem que la tangent d'un angle val ∞ en 90^o i en 270^o. Com que l'afix del punt buscat és $(0, -1)$ l´angle està entre el tercer i quart quadrant, és a dir, en 270^o. Com es diu a l'exercici 19 d´autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per la qual cosa, el primer que fem és dibuixar el nombre $-i$ al pla complex. Aquest nombre està associat al punt $(0, -1)$, per tant, és un nombre que es troba entre el tercer i el quart quadrant.

Tenim, per tant, que $-i = 1_{270^\circ}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[5]{-i} = \sqrt[5]{1_{270^\circ}} = 1_{\frac{270^\circ+360^\circ k}{5}}$ per a $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 1$

Els arguments de les arrels cúbiques són $\beta = \frac{270^\circ+360^\circ k}{5}$ per a $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Si $k = 0$, tenim que $\beta_0 = 54^\circ$

Si $k = 1$, tenim que $\beta_1 = 54^\circ + 72^\circ = 126^\circ$

Si $k = 2$, tenim que $\beta_2 = 54^\circ + 144^\circ = 198^\circ$

Si $k = 3$, tenim que $\beta_3 = 54^\circ + 216^\circ = 270^\circ$

Si $k = 4$, tenim que $\beta_4 = 54^\circ + 288^\circ = 342^\circ$

Per tant, les cinc arrels cinquenes del complex $-i$ són:

$1_{54^\circ}, 1_{126^\circ}, 1_{198^\circ}, 1_{270^\circ}, 1_{342^\circ}$

2. Sigui E un subespai vectorial de dimensió 2 de $\mathbb{R}^4$ definit de la següent forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \mathrm{a}_1 + a_3 + a_4 = 0, a_2 = 0\}.$$

I sigui $v = (-4, 0, 1, 3)$.
a) Comproveu que $A = \{(1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ és una base de E. $v \in E$? En cas afirmatiu calculeu-ne les coordenades en la base A.
b) Sigui $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matriu de canvi de base duna base B a la base A. Quina és la base B?

Solució
a) Com que sabem que la dimensió de E és 2, només cal mirar que els vectors de A pertanyen a E i que són linealment independents. Primer de tot comprovem que els vectors de A pertanyen a E comprovant que es compleixen les condicions $a_1+a_3+a_4 = 0$ i $a_2 = 0$ per als dos vectors, cosa que és certa. Seguidament comprovem que són linealment independents ja que contenen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs A és una base de E.
Per veure si $v \in E$ mirem si té solució el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Que té solució $x = -1$ i $y = -3$. Per tant $v \in E$ i les seves coordenades en la base A són $(-1, -3)$.
b) La matriu de canvi de base de B a A expressa els vectors de la base de B en funció

dels vectors de A. Així doncs, si agafem les columnes de la matriu $C_{B\to A}$ ja tenim que els dos vectors de la base B seran:

$$\begin{aligned} 0\cdot(1,0,-1,0)+3\cdot(1,0,0,-1)&=(3,0,0,-3)\\ 1\cdot(1,0,-1,0)+(-1)\cdot(1,0,0,-1)&=(0,0,-1,1)\end{aligned}$$

Per tant, $B=\{(3,0,0,-3),(0,0,-1,1)\}$.

3. Considereu el sistema d'equacions lineals homogeni:

$$\left.\begin{aligned} -x+2y+(k+1)z&=0\\ 2x+(k-1)y-3z&=0\\ 3x+(k+2)y-3z&=0\end{aligned}\right\}$$

Es demana:
a) Discutiu el sistema pels diferents valors del paràmetre $k\in\mathbb{R}$.
b) Resoleu el sistema per $k=2$. En aquest cas, raoneu si hi ha alguna solució d'aquest sistema en què $x=9$.

Solució
a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & k+1\\ 2 & k-1 & -3\\ 3 & k+2 & -3\end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & k+1 & 0\\ 2 & k-1 & -3 & 0\\ 3 & k+2 & -3 & 0\end{array}\right)$$

Com que el sistema és homogeni (tots els elements de la última columna de la matriu ampliada són zeros), és clar que $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(M)$ i, per tant, el sistema sempre serà compatible.

Notem que $\operatorname{rang}(A)\geq 2$, ja que $\begin{vmatrix} 2 & -3\\ 3 & -3\end{vmatrix}\neq 0$

A continuació, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A pels diferents valors del paràmetre k,

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & k+1\\ 2 & k-1 & -3\\ 3 & k+2 & -3\end{vmatrix}=-k^2+6k-8=-(k-4)(k-2)$$

- Si $k\neq 4$ i $k\neq 2$, aleshores $\operatorname{rang}(A)=3=\operatorname{rang}(M)=$ n^o incògnites, per tant el sistema és $\boxed{\text{compatible determinat}}$.
- Si $k=4$, $\operatorname{rang}(A)=2=\operatorname{rang}(M)\neq$ n^o incògnites $\to$ $\boxed{\text{compatible indeterminat}}$.
- Si $k=2$, $\operatorname{rang}(A)=2=\operatorname{rang}(M)\neq$ n^o incògnites $\to$ $\boxed{\text{compatible indeterminat}}$.

b) Per $k=2$, el sistema homogeni que s'ha de resoldre és:

$$\left.\begin{aligned} -x+2y+3z&=0\\ 2x+y-3z&=0\\ 3x+4y-3z&=0\end{aligned}\right\}$$

Per l'apartat anterior, sabem que per $k = 2$ aquest sistema és compatible indeterminat.

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22] per determinar les solucions d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operacions: (1) $F2 + 2{\cdot}F1 \to F2$ i $F3 + 3{\cdot}F1 \to F3$

(2) $F3 - 2{\cdot}F2 \to F3$

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y + 3z = 0 \\ 5y + 3z = 0 \end{array}\right\}$$

De la segona equació s'obté la relació $z = -\frac{5}{3}y$. Si fem aquesta substitució en la primera equació i aïllem la x obtenim que $x = -3y$. Així doncs, les solucions d'aquest sistema són de la forma:

$$\boxed{\left(x = -3y,\ y = y,\ z = -\tfrac{5}{3}y\right)}$$

Finalment, ens demanen raonar si hi ha alguna solució en què $x = 9$. Doncs, observem que totes les solucions verifiquen que $x = -3y$, per tant si $x = 9$ tindrem que $y = -3$ i en conseqüència tindrem que $z = -\frac{5}{3} \cdot (-3) = 5$. Així doncs, podem concloure, afirmativament, dient que sí que hi ha una solució en què $x = 9$, concretament la solució $(x = 9,\ y = -3,\ z = 5)$.

4. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 2y + 2z, 3x + 2y + z).$$

a) Trobeu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.
b) Diagonalitza l'aplicació f?
c) Trobeu una base del subespai $\ker(f)$, el nucli de f.
d) Calculeu el polinomi característic de f.
e) Calculeu una base de $\mathbb{R}^3$ que contingui el nombre màxim de vectors propis de f.

Solució

a) Per a trobar A, la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$, calculem les imatges dels tres vectors de la base canònica i els posem per columnes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Com que la matriu A de f és simètrica, aleshores f diagonalitza.

c) Per a calcular una base del $\ker(f)$ resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fem Gauss, o transformacions per files. En la primera transformació fem $f_2' = f_2 - 2f_1$ i $f_3' = f_3 - 3f_1$. En la segona transformació traiem factor comú -2 a la segona fila i -4 en la tercera fila. A la tercera transformació, $f_3' = f_3 - f_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ens queda: $x+2y+3z = 0$ i $y+2z = 0$. O sigui, $y = -2z$ i $x = -2y-3z = 4z-3z = z$. Per tant, les solucions són de la forma: $(x, y, z) = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1)$. Una base del $\ker(f)$, és doncs, $\{(1, -2, 1)\}$.

d) Per a calcular el polinomi característic de f, calculem:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 2 & 2-t & 2 \\ 3 & 2 & 1-t \end{vmatrix} =$$
$$-t^3 + 4t^2 + 12t = (0-t)(t^2 - 4t - 12) = (0-t)(6-t)(-2-t).$$

e) Els vectors propis de f de valor propi 0 són els del $\ker(f - 0\mathrm{I})$. O sigui, els del $\ker(f)$. Abans ja hem vist que $\ker(f)$ està generat pel vector $(1, -2, 1)$.

Per a trobar un vector propi de valor propi 6 busquem una base del $\ker(f - 6\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 2 & 3 \\ 2 & 2-6 & 2 \\ 3 & 2 & 1-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com abans, fem Gauss i veiem que una solució és el vector $(1, 1, 1)$.

Per a trobar un vector propi de valor propi -2 busquem una base del $\ker(f - (-2)\mathrm{I}) = \ker(f + 2\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 2 & 3 \\ 2 & 2+2 & 2 \\ 3 & 2 & 1+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com abans, fem Gauss i veiem que una solució és el vector $(1, 0, -1)$.

Per tant, una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis de f és $\{(1, -2, 1), (1, 1, 1), (1, 0, -1)\}$.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$