ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN

9 de enero 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad el cociente $\frac{(4i)^2 \cdot (6+2i)+7}{4+i}$ en forma binómica.

b) Calculad todas las raíces cuartas del siguiente número complejo:

$16 \cdot (cos180° + i \cdot sen180°)$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) Debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Pero primero operamos el numerador, recordando que $i^2 = -1$:

$$\frac{(4i)^2 \cdot (6+2i)+7}{4+i} = \frac{16i^2 \cdot (6+2i)+7}{4+i} = \frac{-16 \cdot (6+2i)+7}{4+i} = \frac{-96-32i+7}{4+i}$$
$$= \frac{-89-32i}{4+i}$$

A continuación multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria:

$$\frac{-89-32i}{4+i} = \frac{(-89-32i) \cdot (4-i)}{(4+i) \cdot (4-i)} = \frac{-356+89i-128i+32i^2}{16-i^2}$$
$$= \frac{-356-39i-32}{16+1} = \frac{-388-39i}{17} = \frac{-388}{17} - \frac{39}{17}i$$

Por tanto, la respuesta es: $\frac{-388}{17} - \frac{39}{17}i$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

Lo que nos piden es $\sqrt[4]{16 \cdot (cos\,180° + isen180°)}$ que equivale a $\sqrt[4]{16_{180°}}$

De hecho lo que se pide son las raíces cuartas de -16.

Como ya disponemos del número en forma polar ya disponemos del módulo y del argumento de éste.

Tenemos, por tanto, que hallar: $\sqrt[4]{16_{180^\circ}}$

Como nos piden las raíces cuartas, debemos hacer:

$\left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{4}} = 2_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{4}}$ para k = 0, 1, 2, 3

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = 2$

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \frac{180^\circ+360^\circ k}{4}$ para k = 0, 1, 2, 3

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 45^\circ$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$
- Si k=3, tenemos que $\beta_2 = 45^\circ + 270^\circ = 315^\circ$

Por tanto, las cuatro raíces de la ecuación, en forma polar, son:

$$2_{45^\circ}$$
$$2_{135^\circ}$$
$$2_{225^\circ}$$
$$2_{315^\circ}$$

2. Sea E un subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los siguientes vectores:

$$E = \langle (b+1,0,0,0), (b^7+1, b+1, 0, b^7+1), (b^3-1, b^5-1, b-1, b^3-1), (0,0,0,b+1) \rangle$$

a) Determinad, en función de b, la dimensión del subespacio E.

b) Para el caso $b = 1$ encontrad una base de E. ¿Pertenece $v = (-2,-1,0,-2)$ a E? ¿Cuáles son sus coordenadas en la base que habéis encontrado?

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores desarrollando primero por la primera columna y después por la última:

$$\begin{vmatrix} b+1 & b^7+1 & b^3-1 & 0 \\ 0 & b+1 & b^5-1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & b^7+1 & b^3-1 & b+1 \end{vmatrix} = (b+1)\begin{vmatrix} b+1 & b^5-1 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 \\ b^7+1 & b^3-1 & b+1 \end{vmatrix} = (b+1)^2\begin{vmatrix} b+1 & b^5-1 \\ 0 & b-1 \end{vmatrix} = (b+1)^3(b-1)$$

Así para $b \neq 1$ y $b \neq -1$ tenemos que el determinante que forman los vectores será no nulo y por tanto tendremos el máximo número de vectores linealmente independientes. En este caso la dimensión es 4.

Calculamos el rango de los vectores en el caso b=1.

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Por tanto la dimensión de E es 3 en el caso b=1.
Calculamos el rango de los vectores en el caso b=-1.

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Por tanto, la dimensión de E es 1 en el caso b=-1.

b) En el apartado anterior ya hemos visto que para b=1 E tiene dimensión 3. Podemos proponer los tres vectores (2,0,0,0), (2,2,0,2), (0,0,0,2) que hemos visto que tienen rango 3 (son linealmente independientes). Por tanto, una base de E puede ser A={(2,0,0,0), (2,2,0,2), (0,0,0,2)}.
Para ver si v pertenece a E y a la vez calcular sus coordenadas en el caso que pertenezca, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=-1/2, y=-1/2, z=-1/2. Por tanto, v pertenece a E y sus coordenadas en la base A son (-1/2,-1/2,-1/2)

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x - 5y + (a-2)z = -6a \\ 2x - (a+1)y + z = a-7 \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resolved el sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página.13].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & a-2\\ 2 & -(a+1) & 1\end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 3 & -5 & a-2 & -6a\\ 2 & -(a+1) & 1 & a-7\end{array}\right)$$

Cómo que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & a-2\\ 2 & -(a+1) & 1\end{vmatrix}=a^2-9a+14=(a-2)(a-7)$$

- Si $a\neq 2$ y $a\neq 7\rightarrow \text{rango}(A)=3=\text{rango}(M)=$ nº incógnitas $\rightarrow$ $\boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a=2\rightarrow \text{rango}(A)=2$, ya que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -5\end{vmatrix}\neq 0$. Calculamos, para $a=2$, el menor de orden 3 de la matriu ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & -12\\ 2 & -3 & -5\end{vmatrix}=0\rightarrow \text{rango}(M)=2\rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$

- Si $a=7\rightarrow \text{rango}(A)=2$, ya que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -5\end{vmatrix}\neq 0$. Por otro lado, para $a=7$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & -42\\ 2 & -8 & 0\end{vmatrix}=-280\neq 0\rightarrow \text{rang}(M)=3\rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a=0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 3 & -5 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1 & -7\end{array}\right)\underbrace{\approx}_{(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & -8 & -6\\ 0 & 1 & -3 & -11\end{array}\right)\underbrace{\approx}_{(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & -8 & -6\\ 0 & 0 & -14 & -28\end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-3·F1 y F3=F3-2·F1

(2) Operaciones: F3=2·F3+F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases}x-y+2z=2\\ -2y-8z=-6\\ -14z=-28\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x-y+2z=2\\ -2y-8z=-6\\ z=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x-y+2z=2\\ y=-5\\ z=2\end{cases}\rightarrow\boxed{\begin{cases}x=-7\\ y=-5\\ z=2\end{cases}}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(1,0,\sqrt{3})=(-1,0,-\sqrt{3}),f(1,\sqrt{2},0)=(1,0,\sqrt{3}),f(\sqrt{5},0,0)=(2,0,2\sqrt{3})$$

a) Demostrad que $(1,0,\sqrt{3}),(1,\sqrt{2},0),(\sqrt{5},0,0)$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculad una base del subespacio Imagen de f. ¿Es f exhaustiva?

c) Calculad una base del subespacio Ker(f), el núcleo de f. ¿Es f inyectiva?

d) Estudiad si f diagonaliza.

Resolución:

a) Denominamos $u = (1,0,\sqrt{3}), v = (1,\sqrt{2},0), w = (\sqrt{5},0,0)$. El determinante de u, v y w es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{30}.$$

(Se puede usar la regla de Sarrus, o bien desarrollando por la tercera columna). Puesto que es diferente de cero, u,v y w son linealmente independientes. Puesto que son tres vectores linealmente independientes de R³, forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

$(1,0,\sqrt{3}),(1,\sqrt{2},0),(\sqrt{5},0,0)$ **son una base de R³.**

b) Para calcular el subespacio imagen de f es suficiente calcular la imagen de una base de R³. La imagen de la base u,v,w de R³ es: $f(u) = (-1,0,-\sqrt{3}), f(v) = (1,0,\sqrt{3}), f(w) = (2,0,2\sqrt{3})$. Por lo tanto,

$Im(f) = [f(u), f(v), f(w)] = [(-1,0,-\sqrt{3}),(1,0,\sqrt{3}),(2,0,2\sqrt{3})] = [(1,0,\sqrt{3})]$.

Puesto que estos tres vectores son múltiplo el uno del otro, es suficiente tomar solo uno de ellos. Así el subespacio imagen de f está generado por el vector $(1,0,\sqrt{3})$. Por lo tanto, f(v) es una base de la imagen. Además, f no es exhaustiva ya que la imagen de f tiene dimensión 1; sin embargo, el espacio de llegada tiene dimensión 3. (Ver Módulo 4, sección 4.)

$(1,0,\sqrt{3})$ **es una base de la imagen y f no es exhaustiva.**

c) Recordemos que el Teorema de la dimensión dice que dim E=dim Im(f)+dim Ker(f). Puesto que E=R³ y la dimensión de la imagen es 1, deducimos que la dimensión del Ker (o núcleo) es 2. En particular, f no es inyectiva, porqué el núcleo es diferente de cero. (Ver Módulo 4, sección 5.) Puesto que f(u) + f(v)=0, entonces f(u+v)=f(u)+f(v)=0. Por lo tanto, el vector

$$u + v = (1,0,\sqrt{3}) + (1,\sqrt{2},0) = (2,\sqrt{2},\sqrt{3})$$

es del núcleo. Análogamente, puesto que 2f(u) + f(w)=0, entonces f(2u+w)=f(2u) + f(w)=0. Así,

$$2u + w = (2,0,2\sqrt{3}) + (\sqrt{5},0,0) = (2+\sqrt{5},0,2\sqrt{3})$$

es vector del núcleo. Los dos vectores son linealmente independientes porqué uno no es múltiplo del otro.

$(2,\sqrt{2},\sqrt{3}),(2+\sqrt{5},0,2\sqrt{3})$ **es una base del núcleo de f y f no es inyectiva.**

d) Tenemos f(u)=-u. En particular, u es vector propio de f de valor propio -1. Asimismo, f(u+v)=0. Por lo tanto, u+v es vector propio de f de valor propio 0. Análogamente, f(2u+w)=0. Por lo tanto, 2u+w es vector propio de f de valor propio 0. Los tres vectores u, u+v, 2u+w son linealmente independientes ya que el determinante de la matriz que forman es no nulo. En efecto, desarrollando por la segunda fila:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2+\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{5} \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = -\sqrt{30}.$$

Por lo tanto, hay una base de R^3 formada por vectores propios de f. Eso significa f diagonaliza. (Ver Módulo 4, sección 8.)

f diagonaliza porqué hay una base de R^3 formada por vectores propios de f.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	270º	285º	300º	330º	345º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	0	$-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	$-\infty$	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$