EXAMEN 3 - 20 juny 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:

(a) Expresseu en forma binòmica el següent complex: $(3+2i)^{-1}$

(b) Quin valor, o valors, haurà de prendre n, nombre real, per a què el nombre $\frac{10+10i}{5+ni}$ sigui un nombre complex real? Un cop hagueu trobat el valor, o valors, de n, expresseu el nombre complex $5+ni$ en forma polar.

Solució

(a) Hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s´explica a l´apartat 3.3.4, pàgina 26, del material sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica), recordant que $i^2=-1$, i agrupem part real i part imaginària.
$(3+2i)^{-1} = \frac{1}{3+21} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{3^2-2^2i^2} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
Per tant, la resposta és: $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

(b) Primer mirarem a quin nombre complex correspon la fracció donada. Per a això multiplicarem i dividirem pel conjugat del denominador. Posteriorment aplicarem la definició de nombre complex real que hi ha a la pàgina 20 del material:
$\frac{10+10i}{5+ni} = \frac{(10+10i)(5-ni)}{(5+ni)(5-ni)} = \frac{50-10ni+50i-10ni^2}{25-n^2i^2} = \frac{(50+10n)+(50-10n)i}{25+n^2} = \frac{50+10n}{25+n^2} + \frac{50-10n}{25+n^2}i$
La definició d´un nombre complex real és que la part imaginària ha de ser nul·la (veure pàgina 20 del material), per tant, imposem que la part imaginària sigui 0:
$\frac{50-10n}{25+n^2} = 0 \Longleftrightarrow 50-10n=0 \Longleftrightarrow 10n=50 \Longleftrightarrow n=5$
Per tant, el valor sol·licitat és $n=5$

Per expressar el nombre $5+5i$ en forma polar ho farem tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:
$m = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$\alpha = \arctan\left(\frac{5}{5}\right) = \arctan(1) = 45^o$
Tenim, per tant, que $5+5i = 5\sqrt{2}_{45^o}$
NOTA ACLARIDORA: Sabem que la tangent d´un angle val 1 a 45^o i a 225^o. Com l´afix del punt buscat és $(5,5)$ l´angle està al primer quadrant, és a dir, a 45^o.

Com es diu a l´exercici 19 d´autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, de cara a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre $5+5i$ al pla complex. Aquest nombre està associat al punt $(5,5)$, per tant, és un nombre que es troba al primer quadrant.

2. Sigui E un subespai vectorial de dimensió 3 de $\mathbb{R}^5$ definit de la següent forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5 \mid a_1 + a_2 = 0, a_2 + a_3 = 0\}.$$

I sigui $v = (-3, 3, -3, 3, -3)$.

(a) Comproveu que $A = \{(1, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ és una base de E. $v \in E$? En cas afirmatiu calculeu-ne les coordenades en la base A.

(b) Siguin $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ les matrius de canvi de base duna base B a la base A, i duna base D a la base B respectivament. Quina és la base D?

Solució

(a) Com que sabem que la dimensió de E és 3, només cal mirar que els vectors de A pertanyen a E i que són linealment independents. Primer de tot comprovem que els vectors de A pertanyen a E comprovant que es compleixen les condicions $a_1 + a_2 = 0$ i $a_2 + a_3 = 0$ per als tres vectors, cosa que és certa. Seguidament comprovem que són linealment independents ja que contenen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs A és una base de E.
Per veure si $v \in E$ mirem si té solució el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Que té solució $x = -3$, $y = 3$ i $z = -3$. Per tant $v \in E$ i les seves coordenades en la base A són $(-3, 3, -3)$.

(b) Sabem que:

$$C_{D\to A} = C_{B\to A} \cdot C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

També alternativament, podríem realitzar el procediment mostrat a continuació dues vegades (per trobar primer la base B i després la base D).
La matriu de canvi de base de D a A expressa els vectors de la base D en funció dels vectors de A. Així doncs, si agafem les columnes de la matriu $C_{D\to A}$ ja tenim que els tres vectors de la base D seran:

$$(-1) \cdot (1, -1, 1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 0, 0, 1) = (-1, 1, -1, 0, -1)$$
$$0 \cdot (1, -1, 1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, -1, 0)$$
$$0 \cdot (1, -1, 1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, -1, -1)$$

Per tant, $D = \{(-1, 1, -1, 0, -1), (0, 0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1, -1)\}$.

3. Donat el sistema d'equacions amb un paràmetre real m i incògnites x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=m \\ x+7y-2z=1 \\ 2x-11y+6z=2 \end{array}\right\}$$

Es demana:

(a) Determineu raonadament el valor de m per al qual el sistema és compatible.

(b) Per aquest valor de m, obtingut en l'apartat anterior, calculeu el conjunt de solucions del sistema.

(c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascuna de les equacions del sistema quan $m=0$.

Solució

(a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -11 & 6 \end{pmatrix} \qquad M=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & m \\ 1 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

Notem que $|A|=0$, però A té menors d'ordre 2 no nuls: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores podem afirmar que $\operatorname{rang}(A)=2$.
Per a què el sistema sigui compatible s'ha de verificar que $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(M)$. Per tant, hem de calcular el valor del paràmetre m que anul·la el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor, d'ordre dos no nul, amb la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & 7 & 1 \\ 2 & -11 & 2 \end{vmatrix} = 25-25m \implies 25-25m=0 \implies m=1.$$

Així doncs, podem afirmar:

$$\boxed{\text{Si } m=1 \;\rightarrow\; \operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(M) \;\rightarrow\; \text{Sistema Compatible}}.$$

(b) Per $m=1$, el sistema que s'ha de resoldre és:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=1 \\ x+7y-2z=1 \\ 2x-11y+6z=2 \end{array}\right\}$$

Sabem per l'apartat anterior que per $m=1$ aquest sistema és compatible indeterminat.

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22] per determinar les solucions d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & 6 & 2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operacions: (1) $F2 - F1 \to F2$ i $F3 - 2{\cdot}F1 \to F3$
(2) $2{\cdot}F3 + F2 \to F3$

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 1 \\ 10y - 4z = 0 \end{array}\right\}$$

De la segona equació s'obté la relació $z = \frac{5}{2}y$. Si fem aquesta substitució en la primera equació i aïllem la x obtenim que $x = 1 - 2y$. Així doncs, les solucions d'aquest sistema són de la forma:

$$\boxed{\left(x = 1 - 2y,\ y = y,\ z = \tfrac{5}{2}y\right)}.$$

(c) Per $m = 0$ el sistema a considerar és:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 0 \\ x + 7y - 2z = 1 \\ 2x - 11y + 6z = 2 \end{array}\right\}$$

Per tant, tenim que els tres plans definits per cadascuna de les equacions del sistema són:

$\pi_1 : x - 3y + 2z = 0$ $\quad\quad$ $\pi_2 : x + 7y - 2z = 1$ $\quad\quad$ $\pi_3 : 2x - 11y + 6z = 2$

A partir dels resultats obtinguts en l'apartat (a), [veure apunts mòdul 3, apartat 8, pàgina 32] podem afirmar que per $m = 0$ el rang$(A) = 2$ i el rang$(M) = 3$, per tant, el sistema és incompatible i això vol dir que

$$\boxed{\text{els tres plans no tenen cap punt en comú}}.$$

Comentari: Notem que es pot afinar una mica més la conclusió anterior. Si ens fixem que no hi ha plans coincidents (ja que, no hi ha cap fila proporcional en la matriu M) i a més no hi ha plans paral·lels (ja que, no hi ha files proporcionals en la matriu A), podem afirmar que els tres plans són secants dos a dos en tres rectes paral·leles.

4. Siguin $A = (1, -1)$, $B = (4, -1)$, $C = (1, -3)$ i $D = (4, -3)$. Considereu la figura formada pels segments AB, BC i CD.

(a) Sigui g un gir d'angle $\alpha \in (0, 2\pi)$ des de l'origen en sentit antihorari. Doneu la matriu de g.

(b) Fent servir la matriu anterior, trobeu l'angle α de manera que el segment que va de $g(A)$ a $g(B)$ sigui paral·lel a l'eix y i el punt $g(B)$ quedi al primer quadrant. Calculeu $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ i $g(D)$.

(c) Sigui f un escalatge de raó $\frac{1}{3}$ i des del punt $P = (a, b)$. Doneu la matriu de f i trobeu els valors que haurien de tenir a i b si volem que $f(A) = (0, 0)$.

Solució

(a) Per a simplificar notacions, denotem $c = \cos(\alpha)$ i $s = \sin(\alpha)$. La matriu del gir d'angle α en sentit antihorari i des del punt $(0, 0)$ és la següent (Veure Mòdul 5, Secció 3):

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Les imatges de A, B, C, D per g són:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c+s & 4c+s & c+3s & 4c+3s \\ s-c & 4s-c & s-3c & 4s-3c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem el vector $g(B) - g(A) = (4c + s, 4s - c) - (c + s, s - c) = (3c, 3s)$.
Imposant que sigui paral·lel a l'eix y, obtenim $3c = 0$. O sigui, $c = 0$.
Imposant que $g(B) = (s, 4s)$ sigui al primer quadrant obtenim que $s > 0$.
Per tant, $\alpha = 90^{\circ}$.
Llavors $s = 1$ i, substituint s i c pels seus valors a la matriu anterior, obtenim les imatges dels punts donats: $g(A) = (1, 1)$, $g(B) = (1, 4)$, $g(C) = (3, 1)$ i $g(D) = (3, 4)$.

(c) La matriu de l'escalatge des del punt $P = (a, b)$ i de raó $\frac{1}{3}$ s'obté en multiplicar les tres matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2a}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2b}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem la imatge de A utilitzant la matriu anterior

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2a}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2b}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2a}{3} \\ -\frac{1}{3} + \frac{2b}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si volem que $f(A) = (0, 0)$, cal igualar els punts. Obtenim dues equacions: $\frac{1}{3} + \frac{2a}{3} = 0$ i $-\frac{1}{3} + \frac{2b}{3} = 0$. D'elles podem deduir que cal que $a = -\frac{1}{2}$ i que $b = \frac{1}{2}$.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$--\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$