EXAMEN 1

1. Responeu raonadament als següents apartats:

   a) Determineu el resultat de la divisió de $1+i$ entre el conjugat de 2_{45°. Expresseu el resultat en forma binòmica.

   b) Calculeu totes les arrels de la següent arrel: $\sqrt[3]{-1-3i}$. Proporcioneu el resultat en forma polar i els angles en graus en l'interval $[0^\circ, 360^\circ)$.

Solució

a) Primer passem 2_{45° a forma binòmica, utilitzant la relació que estableix que $a = r \cdot \cos\theta$ i $b = r \cdot \sin\theta$ (veure apartat 3.4.2, Mòdul 1):

- $r = 2$
- $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Així, obtenim:

$$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Ara calculem el conjugat:

$$\overline{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Finalment, podem procedir amb la divisió:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i^2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-(i\sqrt{2})^2} = \frac{2i\sqrt{2}}{4}$$

En resum:

$$\boxed{\frac{i+1}{\overline{2_{45^\circ}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

b) Primer escrivim el nombre complex $-1-3i$ en forma polar (veure apartat 3.4.1, Mòdul 1):

$$\text{Mòdul: } r = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Argument: } \theta = \arctan\left(\frac{-3}{-1}\right) = 251.57°$$

NOTA: la tangent d'un angle val $\dfrac{-3}{-1}$ en 71.57° i en 251.57°. Ara bé, el nombre complex que estem analitzant té la part real i la imaginària negatives, de manera que es troba al tercer quadrant, és a dir, 251.57°.
Tenim aleshores que $-1-3i = \sqrt{10}_{251.57°}$. Ara podem aplicar l'arrel cúbica (veure apartat 3.6.1, Mòdul 1):

$$\sqrt[3]{\sqrt{10}_{251.57°}} = \sqrt[3]{\sqrt{10}}_{\frac{251.57°+360°k}{3}} \qquad \text{per a } k = 0, 1, 2$$

El mòdul de les arrels és: $\sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}$
Els arguments de les arrels són: $\beta_k = \frac{251.57°+360°k}{3}$ per a $k = 0, 1, 2$

- Per a $k = 0$, tenim $\beta_0 = 83.86°$.
- Per a $k = 1$, tenim $\beta_1 = 203.86°$.
- Per a $k = 2$, tenim $\beta_2 = 323.86°$.

En resum, les arrels cúbiques de $-1-3i$ són:

$$\boxed{\sqrt[6]{10}_{83.86°},\ \sqrt[6]{10}_{203.86°} \text{ i } \sqrt[6]{10}_{323.86°}}$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Passar el denominador a forma binòmica: 0.5 punts.
- Fer el conjugat del denominador: 0.25 punts.
- Calcular la divisió: 0.5 punts.

Apartat b

- Escriure el complex en forma polar: 0.5 punts.
- Calcular el mòdul de les arrels: 0.25 punts.
- Calcular els arguments de les arrels: 0.5 punts.

2. Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} k & a+2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$

Substituïu el paràmetre "a" de la matriu M per la **primera xifra de la dreta** del vostre identificador IDP del campus UOC i amb la matriu obtinguda:

a) Determineu, de manera raonada, el rang de la matriu M en funció dels diferents valors del paràmetre $k \in \mathbb{R}$.

b) Considereu el sistema d'equacions lineals que té la matriu M com a matriu ampliada, és a dir:

$$\left.\begin{aligned} kx + (a+2)\,y &= 0 \\ ky &= 1 \\ (2a+1)\,x + (3a+3)\,y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Raoneu per a quins valors de k el sistema és compatible indeterminat i calculeu les solucions del sistema per a $k = a + 2$.

Solució Resolem aquest exercici de forma paramètrica, en funció de a, d'aquesta manera, si vols veure la resolució concreta que correspon al valor del teu IDP, només has de substituir el paràmetre a pel teu valor.

a) Com que la matriu M és quadrada d'ordre 3, estudiarem el seu rang utilitzant que el rang és 3, només si el determinant de la matriu és diferent de zero [Veure apartat 4.5 del mòdul "Elements d'àlgebra lineal i geometria"]:

$$\begin{vmatrix} k & a+2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - (3a+3)\,k + (a+2)\,(2a+1) = (k-(a+2))\,(k-(2a+1))$$

En conseqüència,

– Si $k \neq 2a+1$ i $k \neq a+2 \rightarrow \ \mathrm{rg}(M) = 3$.

– Si $k = 2a+1$, aleshores $M = \begin{pmatrix} 2a+1 & a+2 & 0 \\ 0 & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$ i podem afirmar que $\mathrm{rg}(M) = 2$, ja que $|M| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2a+1 & a+2 \\ 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = (2a+1)^2 \neq 0$.

– Si $k = a+2$, aleshores $M = \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$ i podem afirmar que $\mathrm{rg}(M) = 2$, ja que $|M| = 0$ i $\begin{vmatrix} a+2 & a+2 \\ 0 & a+2 \end{vmatrix} = (a+2)^2 \neq 0$.

b) El sistema que té per matriu ampliada la matriu M és:

$$\left.\begin{aligned} kx + (a+2)\,y &= 0 \\ ky &= 1 \\ (2a+1)\,x + (3a+3)\,y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Per a discutir el sistema utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius [veure apartat 4 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"].

La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} k & a+2 \\ 0 & k \\ 2a+1 & 3a+3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} k & a+2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir del que hem deduït en l'apartat anterior, podem afirmar,

– Si $k \neq 2a+1$ i $k \neq a+2$, $\mathrm{rg}(M) = 3 > \mathrm{rg}(A)$ i, per tant, s'obté que el $\boxed{\text{sistema és incompatible}}$.

– Si $k = 2a+1$, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{n}^o$ incògnites i, per tant, el $\boxed{\text{sistema és compatible determinat}}$.

- Si $k = a+2$, $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = 2 = \text{n}^o$ incògnites i, per tant, podem afirmar que el $\boxed{\text{sistema és compatible determinat}}$.

Així doncs, podem afirmar que no existeix cap valor del paràmetre k tal que el sistema sigui compatible indeterminat.

Calculem, a continuació, la solució del sistema compatible determinat que s'obté si $k = a+2$.

$$\left.\begin{array}{r} (a+2)\,x + (a+2)\,y = 0 \\ (a+2)\,y = 1 \\ (2a+1)\,x + (3a+3)\,y = 1 \end{array}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apartat 6 del mòdul "Sistemes d'equacions lineals"] per a determinar les solucions d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 2a+1 & 3a+3 & 1 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & (a+2)^2 & a+2 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operacions: (1): $(a+2) \cdot F3 - (2a+1) \cdot F1 \to F3$.

Operacions: (2): $F3 - (a+2) \cdot F2 \to F3$.

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} (a+2)\,x + (a+2)\,y = 0 \\ (a+2)\,y = 1 \end{array}\right\}$$

De la segona equació s'obté $y = \frac{1}{a+2}$. Si substituïm en la primera equació aquest valor de y obtenim $x = -\frac{1}{a+2}$.

Així, la solució d'aquest sistema, en funció dels diferents valors del paràmetre a, són:

	$x = -\frac{1}{a+2}$,	$y = \frac{1}{a+2}$
Si $a = 0$	$x = -\frac{1}{2}$,	$y = \frac{1}{2}$
Si $a = 1$	$x = -\frac{1}{3}$,	$y = \frac{1}{3}$
Si $a = 2$	$x = -\frac{1}{4}$,	$y = \frac{1}{4}$
Si $a = 3$	$x = -\frac{1}{5}$,	$y = \frac{1}{5}$
Si $a = 4$	$x = -\frac{1}{6}$,	$y = \frac{1}{6}$
Si $a = 5$	$x = -\frac{1}{7}$,	$y = \frac{1}{7}$
Si $a = 6$	$x = -\frac{1}{8}$,	$y = \frac{1}{8}$
Si $a = 7$	$x = -\frac{1}{9}$,	$y = \frac{1}{9}$
Si $a = 8$	$x = -\frac{1}{10}$,	$y = \frac{1}{10}$
Si $a = 9$	$x = -\frac{1}{11}$,	$y = \frac{1}{11}$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Calcular correctament el determinant de la matriu M en funció de k: 0.25 punts.
- Obtenir els valors $k = 2a + 1$ i $k = a + 2$: 0.25 punts.
- Justificar que per a k diferent de $2a + 1$ i $a + 2$ el $\text{rg}(A) = 3$: 0.25 punts.
- Justificar que per a $k = 2a + 1$ i per a $k = a + 2$ el $\text{rg}(A) = 2$: 0.5 punts.

Apartat b

- Justificar que per a k diferent de $2a + 1$ i $a + 2$ el sistema és SI: 0.25 punts.
- Justificar que per a $k = 2a + 1$ i per a $k = a + 2$ el sistema és SCD: 0.25 punts.
- Comentar que no existeix cap valor de k que fa el sistema sigui SCI: 0.25 punts.
- Calcular les solucions del sistema per a $k = a + 2$: 0.5 punts.

3. Siguin $v_1 = (1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (2, -2, -2)$, $v_4 = (-1, 2, 0)$ i $v_5 = (4, 2, -10)$ vectors de $\mathbb{R}^3$. Sigui $E =< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 >$. Sigui $w = (a+2, -2, -2a-2)$ on a és la **tercera xifra de la dreta** del vostre IDP.
Digueu si són vertaderes o falses les següents afirmacions i **justifiqueu la vostra resposta**:

   a) La dimensió de E és 2.

   b) $A = \{(2, -2, -2), (-1, 2, 0)\}$ és una base de E i les coordenades de w en aquesta base són $(a + 1, a + 2)$.

   c) Siguin $e_1 = v_3 + v_4$ i $e_2 = v_3 + 5v_4$. $B = \{e_1, e_2\}$ és una base de E.

   d) La matriu de canvi de base de la base A a la base B és:

$$C_{A\to B} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució

a) **VERTADER**. Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -10 \end{pmatrix} = 2$$

Ja que podem trobar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ i tots els menors 3×3 resultants d'orlar-lo tenen determinant nul.
La dimensió de E és 2.

b) **FALS**. A és base, ja que els seus dos vectors són de E (són v_3 i v_4), són linealment independents (contenen el menor no nul $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$) i en tenim tants com la dimensió.

Però si calculem les coordenades de $w \in E$ resolent el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ -2 \\ -2a-2 \end{pmatrix}$$

Trobem que la solució és $x = a+1$ i $y = a$. Per tant, les coordenades de w en la base A són $(a+1, a)$.

c) **VERTADER**. Tenim que $e_1 = (1, 0, -2)$ i $e_2 = (-3, 8, -2)$. Són base perquè són de E (són combinació lineal de vectors de E), són linealment independents (contenen el menor no nul $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$) i en tenim tants com la dimensió.

d) **VERTADER**. Per trobar la matriu de canvi de base de la base B a la base A cal expressar els vectors de la base B en funció dels de la base A. I aquesta és justament la definició d'aquests vectors!

Així, tenim que la matriu de canvi de base de B a A és:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Per a calcular la matriu de canvi de base en la direcció contrària calculem la inversa de la matriu anterior:

$$C_{A\to B} = C_{B\to A}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat b

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat c

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.
- Justificació: 0.625 punts.

Apartat d

- Resposta correcta (vertader/fals): 0 punts.

- Justificació: 0.625 punts.

4. Substituïu el paràmetre a per la **segona xifra de la dreta** del vostre identificador IDP del campus UOC en la següent matriu:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix}$$

on $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és una aplicació lineal, $M(f|C,C)$ és la seva matriu associada en la base canònica C de $\mathbb{R}^3$ i b és un paràmetre real diferent de $a+1$.

Responeu raonadament als següents apartats:

a) Calculeu, en funció del valor del paràmetre b, una base del nucli de l'aplicació f, digueu quina és la seva dimensió i determineu la dimensió de la imatge de f.

b) Calculeu el polinomi característic de f i un vector propi que sigui linealment independent amb $(0,0,1)$ i $(1,0,-1)$.

Solució Resolem els apartats per a un valor de a genèric. Per a obtenir la solució particular corresponent al vostre dígit només heu de substituir a pel seu valor en els desenvolupaments que segueixen.

a) El nucli de f s'obté resolent el sistema $M(f|C,C) \cdot w = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'aquesta expressió s'obtenen tres equacions:

$$\begin{gathered} x + (a+1)(a+3)y = 0 \\ (a+4)y = 0 \\ (a-b+1)x - (a+1)(a-b+1)y + (a-b+2)z = 0 \end{gathered}$$

La solució immediata de la segona equació, $(a+4)y = 0$, a l'ésser a una xifra ($a \geq 0$ i, per tant, $a+4 > 0$) és $y = 0$. Substituint aquest valor en la primera equació s'obté $x = 0$. Amb aquests dos valors la tercera equació es transforma en $(a-b+2)z = 0$. Aquí apareixen dues possibilitats. Si $b \neq a+2$ s'obté $z = 0$ i, per tant, el nucli de l'aplicació es redueix al vector nul i té dimensió 0 i aleshores, pel Teorema de la dimensió del punt 4. "Nucli i imatge d'una aplicació lineal", la imatge tindrà dimensió 3. En canvi, si $b = a+2$, la tercera equació no restringeix el valor de z, els vectors del nucli tenen la forma $(0,0,z)$ i una base del nucli de f és el vector $w = (0,0,1)$, aquest té dimensió 1 i la imatge tindrà dimensió 2.

b) El polinomi característic de f és $p(\lambda) = |M(f|C,C) - \lambda \mathrm{I}|$, tal com es defineix en el punt "7. Vectors i valors propis" del mòdul "Aplicacions lineals". Desenvolupant el determinant per la tercera columna, i després el menor que queda per la primera, obtenim:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4-\lambda & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2-\lambda \end{vmatrix} = (a-b+2-\lambda)(1-\lambda)(a+4-\lambda)$$

Els VAPs de f són les solucions de l'equació característica $p(\lambda) = 0$, en aquest cas els valors: $a-b+2$, 1 i $a+4$.

Per a calcular el vector propi que demana l'enunciat hem de saber a quin valor propi correspon d'aquests tres. Com que dos vectors propis són coneguts, és senzill veure a quin VAP corresponen. Per a calcular el VAP corresponent al VEP w=$(0,0,1)$ n'hi ha prou amb calcular la imatge d'aquest vector en aplicar-li f i determinar per quin factor és múltiple d'aquest. Es multiplica la matriu de l'aplicació f pel vector w:

$$\begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-b+2 \end{pmatrix}$$

Es veu així que la imatge de w és $(a-b+2)(0,0,1) = (a-b+2)w$, per la qual cosa el valor propi corresponent a w és $a-b+2$.

Per a calcular el VAP corresponent al VEP u=$(1,0,-1)$ es multiplica de la mateixa manera la matriu de l'aplicació f pel vector u:

$$\begin{pmatrix} 1 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es veu així que la imatge de u és u, per la qual cosa el valor propi corresponent a u és 1.

Descartats els VAPs $a-b+2$ i 1 per estar associats als VEPS w i u, queda el VAP $a+4$. Si els tres VAPs són diferents (cosa que ocorrerà sempre que $b \neq -2$, doncs que $b \neq a+1$ ens ho diu l'enunciat), el VEP corresponent a $a+4$ serà linealment independent dels anteriors, per les proposicions del punt 8.1 "Diagonalització d'endomorfismes". Per a calcular el VEP v de VAP $a+4$ cal buscar una base del $Ker(f-(a+4)\mathrm{I})$. És a dir, resoldre el sistema següent:

$$\begin{pmatrix} 1-a-4 & (a+1)(a+3) & 0 \\ 0 & a+4-a-4 & 0 \\ a-b+1 & -(a+1)(a-b+1) & a-b+2-a-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La segona fila és nul·la. De l'equació corresponent a la primera fila, que és $-(a+3)x + (a+1)(a+3)y = 0$, s'obté que $x = (a+1)y$ doncs $a \neq -3$. De la tercera equació $(a-b+1)x - (a+1)(a-b+1)y + (-b-2)z = 0$, substituint x per $(a+1)y$, s'obté $(a-b+1)(a+1)y - (a+1)(a-b+1)y + (-b-2)z = 0$. S'anul·len els dos primers termes i queda $(-b-2)z = 0$ i llavors, sempre que $b \neq -2$, $z = 0$. Per tant, les solucions són de la forma $((a+1)y, y, 0)$ i un vector propi de valor propi $a+4$ pot ser v=$(a+1,1,0)$. Si fos $b = -2$ la variable z quedaria lliure i tindríem 2 VEPs de VAP $a+4$: $(a+1,1,0)$ i $(0,0,1)$, aquest segon vector coherent amb el resultat obtingut prèviament.

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat a

- Plantejar el sistema per a trobar el nucli: 0.25 punts.
- Calcular la base del nucli en el cas $b = a + 2$: 0.25 punts.
- Calcular la base del nucli en el cas $b \neq a + 2$: 0.25 punts.
- Calcular les dimensions en el cas $b = a + 2$: 0.25 punts.
- Calcular les dimensions en el cas $b \neq a + 2$: 0.25 punts.

Apartat b

- Calcular el polinomi característic: 0.5 punts.
- Comprovar que els VEPs de l'enunciat corresponen als VAPs 1 i $a - b + 2$: 0.25 punts.
- Calcular el VEP de VAP $a + 4$: 0.5 punts.