SOLUCION EXAMEN 16 ENERO 2016

Problema 1: Responded a los siguientes apartados:

a) (1,25 puntos) Realizad la operación siguiente y simplificad el resultado: $\dfrac{\overline{3+i}}{2+5i}$.

Proporcionad el resultado en forma binómica.

NOTA: Recordad que $\overline{3+i}$ representa el conjugado de $3+i$

b) (1,25 puntos) Hallad la raíz siguiente: $\sqrt[3]{-27}$. Proporcionad el resultado en forma binómica y polar.

Solución:

a) Primero hallamos $\overline{3+i}$; esto es, el conjugado de $3+i$ que es $3-i$. Por tanto, lo que se pide hallar es: $\dfrac{3-i}{2+5i}$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador para eliminarlo:

$$\frac{3-i}{2+5i}=\frac{(3-i)\cdot(2-5i)}{(2+5i)\cdot(2-5i)}=\frac{6-15i-2i-5}{2^2-(5i)^2}=\frac{1-17i}{4+25}=\frac{1-17i}{29}=\frac{1}{29}-\frac{17}{29}i$$

Por tanto:

$$\boxed{\frac{\overline{3+i}}{2+5i}=\frac{1}{29}-\frac{17}{29}i}$$

b) Escribimos el complejo -27 en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

$$m=\sqrt{27^2+0^2}=27$$

$$\alpha=arctg\left(\frac{0}{-27}\right)+180^{\circ}=arctg 0+180^{\circ}=180^{\circ}$$

Observemos que sumamos 180º dado que la parte real del complejo es negativa y la parte imaginaria es nula (apartado 3.4.1 de la página 30 del material impreso).

Tenemos, por tanto, que $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180^{\circ}}}$

Como nos piden las raíces terceras debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$$\sqrt[3]{27_{180^{\circ}}}=3_{\frac{180^{\circ}+360^{\circ}k}{3}} \qquad \text{para k=0, 1, 2}$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=3$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \dfrac{180^o + 360^o k}{3}$ para k=0, 1, 2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 60^o$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 60^o + 120^o = 180^o$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 60^o + 240^o = 300^o$

Por tanto, las tres raíces terceras del complejo -27 son:

$$\boxed{3_{60^o} = 3\cdot(\cos 60^o + i sen 60^o) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\boxed{3_{180^o} = 3\cdot(\cos 180^o + i sen 180^o) = 3\cdot(-1+0i) = -3}$$

$$\boxed{3_{300^o} = 3\cdot(\cos 300^o + i sen 300^o) = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

Problema 2: Sean A y B los subespacios de R^4 siguientes:

A=$<(0,0,0,a),(a-1,0,0,0),(-1,a-1,0,0),(-1,-1,a-1,0)>$, $a \in R$

B=$<(a,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)>$, $a \in R$

a) (1,25 puntos) Calculad la dimensión de A y de B en función de *a*. Encontrad una base para cada subespacio.

b) (1,25 puntos) Si a=2 encontrad las coordenadas del vector v=(2,0,2,2) en cada uno de los subespacios. ¿Para qué valores de *a* son A y B el mismo espacio vectorial?

Solución:

a) Calculemos el rango de la matriz de vectores del espacio A:

$$\begin{vmatrix} 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a\cdot(a-1)^3$$

Así para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el rango de la matriz es 4 y por tanto la dimensión de A también es 4 y $\{(0,0,0,a),(a-1,0,0,0),(-1,a-1,0,0),(-1,-1,a-1,0)\}$ son base de A.

Si $a=0$ elrango de la matriz es 3 y por tanto la dimensión de A también. Una base la pueden formar los tres vectores no nulos linealmenteindependientes: $\{(-1,0,0,0),(-1,-1,0,0),(-1,-1,-1,0)\}$.

Si $a=1$ elrango de la matriz es también 3 y por tanto la dimensión de A también. Una base la pueden formar los tres vectores no nulos linealmenteindependientes: $\{(0,0,0,1),(-1,0,0,0),(-1,-1,0,0)\}$.

Para B procedemos de forma análoga:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a$$

Así para $a \neq 0$ el rango de la matriz es 4 y por tanto la dimensión de B también es 4 y $\{(a,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$ son base de B.

Si $a=0$ elrango de la matriz es 3 y per tanto la dimensión de B también. Una base la pueden formar los tres vectores no nulos linealmente independientes: $\{(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$.

b) Per a calcular les coordenadas de v en A cuando $a=2$ resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=1, y=2, z=2, t=2. Por tanto las coordenadas de v en A cuando $a=2$ son (1,2,2,2).

Para calcular las coordenadas de v en B cuando $a=2$ resolvemos de forma análoga el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=1, y=2, z=0, t=0. Por tanto las coordenadas de v en B cuando $a=2$ son (1,2,0,0).

Hemos visto en el apartado anterior que cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$ entonces los espacios A y B tienen dimensión 4. Al ser subespacios de R^4 de dimensión 4 los dos son R^4, es decir, el mismo espacio.

Si $a = 1$ hemos visto que A tiene dimensión 3 y B tiene dimensión 4 por tanto no son el mismo espacio vectorial.

Si $a = 0$ hemos visto que tanto A como B tiene dimensión 3.Vamos a ver si son el mismo subespacio. Como la dimensión es igual, podemos ver si uno está dentro del otro y esto es suficiente verlo con los elementos de la base. Recordemos las bases encontradas:

Base de A cuando $a = 0$: $\{ (-1,0,0,0), (-1,-1,0,0), (-1,-1,-1,0) \}$.

Base de B cuando $a = 0$: $\{ (0,0,1,1), (0,1,0,1), (0,0,0,1) \}$.

Vemos directamente que $(0,0,0,1)$ de la base B no se puede expresar como combinación lineal de elementos de la base A. Por tanto A y B no son el mismo espacio vectorial cuando $a = 0$.

Problema 3:

a) (1,25 puntos) Discutid el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (k-1)y + (k^2-1)z = 0 \\ (4k+1)x - y - 7z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

en función de los valores de *k*.

b) (1,25 puntos) Resolved el sistema para $k = 1$.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes, *A*, y ampliada, *A'*, del sistema son

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & k-1 & k^2-1 & 0 \\ 4k+1 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

y se trata de estudiar el rang(A) y el rang(A').

Para determinar los valores de discusión del parámetro *k* miremos cuando el rang(A) es máximo, es decir 3, que será cuando su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k-1 & k^2-1 \\ 4k+1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & k+1 \\ 4k+1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (k-1)\left((4k+1)(k+1) - 7 + (k+1) - (4k+1)\right) = (k-1)\left(4k^2 + 2k - 6\right).$$

Cuando igualamos a cero y resolvemos la ecuación de segundo grado obtenemos $k=1$ y $k=\frac{-3}{2}$.

Nota: Si el cálculo del determinante se realiza sin sacar factor común, entonces hay que aplicar la regla de Ruffini al polinomio $2k^3 - k^2 - 4k + 3$ y ver que tiene una raíz doble en $k=1$ y que puede factorizar como

$$(k-1)^2(2k+3) = 2k^3 - k^2 - 4k + 3$$

con lo que se obtienen las mismas soluciones $k=1$ y $k=\frac{-3}{2}$.

Así pues:

- Si $k \neq 1$ y $k \neq \frac{-3}{2}$, entonces $|A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ que es el número de incógnitas y por lo tanto el sistema será Compatible Determinado.
- Si $k=1$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Dado que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$, y como que la primera fila es nula la matriz ampliada también tendrá rango 2 y el sistema será Compatible Indeterminado con (3-2=1) 1 grado de libertad, es decir una incógnita indeterminada.

- Si $k=\frac{-3}{2}$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{4} & 0 \\ -5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Dado que el menor $\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

Para calcular el rango de la matriz ampliada podemos orlar el menor anterior con la primera fila y la columna de los términos independientes.

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-5}{2} & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-5}{2} \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 \neq 2 = rang(A)$$

y por lo tanto el sistema es Incompatible.

En resumen:

- Si $k \neq 1$ y $k \neq \frac{-3}{2}$, el sistema es Compatible Determinado.
- Si $k = 1$, el sistema es Compatible Indeterminado con 1 grado de libertad.
- Si $k = \frac{-3}{2}$ el sistema es Incompatible.

b) El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ y podemos prescindir de la primera ecuación. Pasamos la tercera ecuación a la primera y si aplicamos el método de Gauss (a la segunda ecuación le restamos 5 veces la primera) tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -z \\ 0 & -6 & 1+12z \end{array}\right),$$

y por lo tanto $y = \frac{1+12z}{-6} = \frac{-1}{6} - 2z$

y substituyendo a la primera ecuación $x = -y - z = \frac{1}{6} + 2z - z = \frac{1}{6} + z$.

Así pues los puntos solución del sistema de ecuaciones son los de la forma $\left(\frac{1}{6} + z, -\frac{1}{6} - 2z, z\right)$, con z indeterminada.

Problema 4: Consideremos A=(2,0), B=(1,1), C=(0,1).

a) (1,25 puntos) Sea g el giro de 30º en sentido antihorario. Calculad g(A), g(B) y g(C).

b) (1,25 puntos) Sea f el escalage de razón 2 desde el punto (-1,-1). Calculad f(A), f(B) y f(C).

Solución:

a) La matriz del giro de ángulo 30º es:

$$\begin{pmatrix} \cos(30^o) & -\operatorname{sen}(30^o) & 0 \\ \operatorname{sen}(30^o) & \cos(30^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A, B, C, multiplicamos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$g(A) = (\sqrt{3},1), g(B) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right), g(C) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

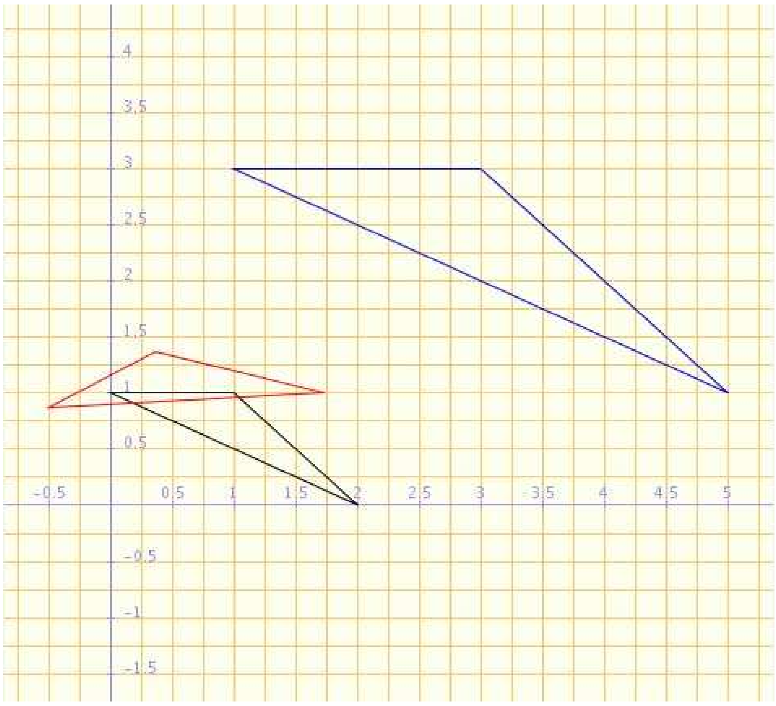
b) Para encontrar la matriz del escalage de razón 2, de izquierda a derecha, hacemos la traslación desde el punto (-1,-1), después el escalage de razón 2, y después deshacemos la traslación desde el punto (-1,-1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A,B,C, multiplicamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f(A)=(5,1), f(B)=(3,3) y f(C)=(1,3).



NOTA: En la realización del examen puede ser que necesites utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	225º	270º	300º	315º	345º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	1	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$