EXAMEN 1

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Resolved, en los números complejos, la ecuación siguiente. Proporcionad la respuesta en forma polar y los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$.

$$z^4 = \frac{1+i}{2-i}$$

   b) Sabiendo que $z = 2 - 2i$, expresad el número complejo z y su conjugado en forma polar, con los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$.

Solución

a) Resolver la ecuación equivale a encontrar las raíces cuartas del número $\frac{1+i}{2-i}$. Para ello, expresamos el número en forma binómica:

$$\frac{1+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2+2i+i+i^2}{4+1} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Calculamos el módulo y el argumento:

$$m = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}63$$

$$\theta = \arctan(\frac{3}{1}) = 71{,}57°$$

Entonces, en forma polar:

$$\frac{1+i}{2-i} = 0{,}63_{71{,}57°}$$

Como se buscan las raíces cuartas:

$$\sqrt[4]{0{,}63}_{\frac{71{,}57° + 360°\cdot k}{4}} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

En resumen, los valores de z son:

$$\boxed{0{,}89_{17{,}89°}; 0{,}89_{107{,}89°}; 0{,}89_{197{,}89°}; 0{,}89_{287{,}89°}}$$

b) Calculamos el módulo y el argumento del número complejo z:

$$m = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$\theta = \arctan(\frac{-2}{2}) = 315°$$

Por tanto:

$$\boxed{z = 2\sqrt{2}_{315°}}$$

Para el conjugado tenemos:

$$\overline{z} = 2 + 2i$$
$$m = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$\theta = \arctan(\frac{2}{2}) = 45°$$

Por tanto:

$$\boxed{\overline{z} = 2\sqrt{2}_{45°}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Pasar el número complejo a forma binómica: 0,5 puntos.
- Calcular su módulo: 0,25 puntos.
- Calcular su argumento: 0,25 puntos.
- Encontrar los valores de z: 0,5 puntos.

Apartado b

- Expresar z en forma polar: 0,5 puntos.
- Expresar $\overline{z}$ en forma polar: 0,5 puntos.

2. Considerad las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ 1 & -k & -k \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -k \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Discutid, razonadamente, el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Considerad las matrices A y B que se obtienen sustituyendo el parámetro k por la **primera cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC. Con estas matrices, determinad si el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ es compatible o incompatible y en el caso de ser compatible calculad su solución.

Solución

a) Dado que la matriz A es cuadrada de orden 3, estudiamos su rango utilizando que el rango es tres, solo si el determinante de la matriz es diferente de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -k & -1 & -2 \\ 1 & -k & -k \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -k^2 - 3k - 2 \quad \rightarrow \quad -k^2 - 3k - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k = -2 \\ k = -1 \end{cases}$$

En consecuencia

- Si $k \neq -2$ y $k \neq -1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{rg}(A) = 3}$.
- Si $k = -2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{rg}(A) = 2}$.
- Si $k = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{rg}(A) = 2}$.

b) Resolvemos este apartado de forma paramétrica, en función de k, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro k por tu valor asignado.

Consideramos el sistema:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \rightarrow \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ 1 & -k & -k \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -k \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -kx - y - 2z = 1 \\ x - ky - kz = 1 \\ 3x + y = -k \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes de este sistema es la matriz A, y su matriz ampliada, M, es:

$$M = \left(\begin{array}{rrr|r} -k & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -k & -k & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -k \end{array}\right)$$

Por el apartado anterior sabemos que si $k \neq -1$ y $k \neq -2$ entonces el $\text{rg}(A) = 3$ y dado que el sistema tiene solo tres ecuaciones y tres incógnitas tenemos que el rango de la matriz ampliada también será tres. Por lo tanto, por el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apartado 4 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”] si $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas entonces el sistema es compatible determinado.

Utilizaremos el método de Gauss [ver apartado 6 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -k & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -k & -k & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -k \end{array}\right) \underset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -k & -k & 1 \\ -k & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -k \end{array}\right)$$

$$\underset{(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & -k & 1 \\ 0 & -k^2 - 1 & -k^2 - 2 & k + 1 \\ 0 & 3k + 1 & 3k & -k - 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{(3)}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & -k & 1 \\ 0 & -k^2-1 & -k^2-2 & k+1 \\ 0 & 0 & (k+1)(k+2) & (k-1)^2(k+2) \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): Intercambio $F1$ con $F2$,
(2): $F2 + k \cdot F1 \to F2$, $F3 - 3 \cdot F1 \to F3$,
(3): $(-k^2-1)F3 - (3k+1)F2 \to F3$,
El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x - ky - kz = 1 \\ -\left(k^2+1\right) y - \left(k^2+2\right) z = k+1 \\ (k+1)\,(k+2)\,z = (k-1)^2\,(2+k) \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $z = \frac{(k-1)^2}{k+1}$. Si hacemos la sustitución de este valor de z en la segunda ecuación y aislamos la y obtenemos $y = \frac{-k^2+2k-3}{k+1}$. Si sustituimos en la primera ecuación estos valores de y y z se obtiene $x = \frac{-k+1}{k+1}$
Así pues, la solución del sistema, en función de los diferentes valores del parámetro k, es:

	$\left(x = \frac{-k+1}{k+1},\ y = \frac{-k^2+2k-3}{k+1},\ z = \frac{(k-1)^2}{k+1}\right)$
Si $k = 0$	$(x = 1,\ y = -3,\ z = 1)$
Si $k = 1$	$(x = 0,\ y = -1,\ z = 0)$
Si $k = 2$	$\left(x = -\frac{1}{3},\ y = -1,\ z = \frac{1}{3}\right)$
Si $k = 3$	$\left(x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{3}{2},\ z = 1\right)$
Si $k = 4$	$\left(x = -\frac{3}{5},\ y = -\frac{11}{5},\ z = \frac{9}{5}\right)$
Si $k = 5$	$\left(x = -\frac{2}{3},\ y = -3,\ z = \frac{8}{3}\right)$
Si $k = 6$	$\left(x = -\frac{5}{7},\ y = -\frac{27}{7},\ z = \frac{25}{7}\right)$
Si $k = 7$	$\left(x = -\frac{3}{4},\ y = -\frac{19}{4},\ z = \frac{9}{2}\right)$
Si $k = 8$	$\left(x = -\frac{7}{9},\ y = -\frac{17}{3},\ z = \frac{49}{9}\right)$
Si $k = 9$	$\left(x = -\frac{4}{5},\ y = -\frac{33}{5},\ z = \frac{32}{5}\right)$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz A en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k = -2$ y $k = -1$: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente de -2 y -1 el $\operatorname{rg}(A) = 3$: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = -2$ el $\operatorname{rg}(M) = 2$: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = -1$ el $\operatorname{rg}(M) = 2$: 0,25 puntos.

Apartado b

- Justificar que $\text{rg}(M) = 3$ cuando k toma el valor del dígito del IDP : 0,25 puntos.
- Razonar que el sistema a resolver es compatible determinado: 0,5 puntos.
- Obtener la solución: 0,5 puntos.

3. Sean $v_1 = (2, 6, 0, -2, -4)$, $v_2 = (4, 2, 2, -4, 0)$, $v_3 = (-1, 2, -1, 1, -2)$, $v_4 = (-1, -1, 1, 1, 0)$ vectores de $\mathbb{R}^5$.

   (a) Escojed 3 vectores, entre los v_i anteriores, de forma que formen una base A de un subespacio vectorial F de dimensión 3 de $\mathbb{R}^5$.

   (b) Sea $w = (-a, 4 - a, a + 2, a, -4)$ donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP. ¿Pertenece w a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A del apartado anterior.

   (c) Sea $B = \{v_1, w, v_3\}$ una base de F. Calculad la matriz $C_{B \to A}$ de cambio de base de la base B a la base A que habéis calculado en el primer apartado.

   Solución

   (a) Como los vectores v_i son de $\mathbb{R}^5$, sólo es necesario escoger 3 que sean linealmente independientes. v_1 y v_2 vemos que son linealmente independientes ya que contienen el menor:

   $$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

   Orlando, sólo debemos encontrar un tercer vector que sea linealmente independiente con estos dos. Vemos que $rango(v_1, v_2, v_3) = 2$ pero $rango(v_1, v_2, v_4) = 3$ ya que contiene el menor:

   $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -28 \neq 0$$

   Así $A = \{v_1, v_2, v_4\}$

   (b) Para ver si w pertenece a F y a la vez calcular sus coordenadas en caso afirmativo, resolvemos el sistema:

   $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 4-a \\ a+2 \\ a \\ -4 \end{pmatrix}$$

   Que tiene solución $x = 1$, $y = 0$, $z = a + 2$. Así obtenemos que $w \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(1, 0, a + 2)$.

   (c) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A. Tenemos que $A = \{v_1, v_2, v_4\}$ y $B = \{v_1, w, v_3\}$, de forma que ya tenemos esta expresión para w (apartado anterior) y para v_1 porqué es común a las dos bases y sólo nos queda encontrarla para v_3. Para esto resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$.
Así la matriz de cambio de base de B a A és:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a+2 & 0 \end{pmatrix}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Escoger vectores y justificar que son base: 0,75 puntos.

Apartado b

- Ver que $w \in E$: 0,25 puntos.
- Calcular las coordenadas: 0,5 puntos.

Apartado c

- Calcular $C_{B\to A}$: 1 punto.

4. Sustituid, antes de hacer cálculos, el parámetro c por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC en los siguientes puntos de $\mathbb{R}^2$:

$$A = (1, 0) \qquad B = (1, c+1) \qquad C = (c+2, 0)$$

Se calculará paso a paso la matriz de la transformación geométrica que transforma el triángulo ABC en el triángulo $A'B'C'$ formado por los puntos:

$$A' = (1, 1) \qquad B' = (1, 0) \qquad C' = (0, 1)$$

Responded razonadamente los siguientes apartados para construirla:

a) Escribid la matriz 3×3 del escalado de razón $\frac{1}{c+1}$ centrado en el punto $B = (1, c+1)$.

b) Escribid la matriz 3×3 de la traslación que lleva el punto $P = (1, c)$ al punto $A' = (1, 1)$.

c) Escribid la matriz 3×3 de un giro de ángulo $180°$ centrado en el punto $A' = (1, 1)$.

d) Construid la matriz composición de las tres anteriores. Comprobad que transforma los puntos A, B y C en los puntos A', B' y C' respectivamente, tal como se quería.

Solución
Resolvemos el problema para un valor de c genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir c por su valor en los resultados siguientes.

a) La matriz del escalado de razón $\frac{1}{c+1}$ y centro $(1, c+1)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(-1, -c-1)$, la del escalado de razón $\frac{1}{c+1}$ centrado en el origen y la de la traslación de vector $(1, c+1)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 4.3 "Escalado a partir de un punto genérico" del módulo "Transformaciones geométricas".

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{c+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -c-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c+1} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{c+1} & c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -c-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c+1} & 0 & 1-\frac{1}{c+1} \\ 0 & \frac{1}{c+1} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para escribir la matriz de la traslación se necesita el vector que lleva el punto $P = (1, c)$ al punto $A' = (1, 1)$. Basta con calcular la diferencia $A' - P = (1, 1) - (1, c) = (0, 1-c)$. La matriz se escribe entonces simplemente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) La matriz del giro de ángulo 180° y centro $A' = (1, 1)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(-1, -1)$, la del giro de ángulo 180° centrado en el origen y la de la traslación de vector $(1, 1)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 3.4 "Rotación alrededor de un punto genérico" del módulo "Transformaciones geométricas". Calculamos la composición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(180°) & -\sin(180°) & 0 \\ \sin(180°) & \cos(180°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Calculamos la composición:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{c+1} & 0 & 1-\frac{1}{c+1} \\ 0 & \frac{1}{c+1} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{c+1} & 0 & 1-\frac{1}{c+1} \\ 0 & \frac{1}{c+1} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c+1} & 0 & 1+\frac{1}{c+1} \\ 0 & -\frac{1}{c+1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las imágenes de los puntos $A = (1, 0)$, $B = (1, c + 1)$ y $C = (c + 2, 0)$ se pueden calcular mediante una sola multiplicación:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{c+1} & 0 & 1+\frac{1}{c+1} \\ 0 & -\frac{1}{c+1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & c+2 \\ 0 & c+1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado son los puntos $A' = (1, 1)$, $B' = (1, 0)$, y $C' = (0, 1)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Escribir la composición de tres matrices: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular el vector de traslación y escribir la matriz: 0,25 puntos.

Apartado c

- Escribir la composición de tres matrices: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,5 puntos.

Apartado d

- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,25 puntos.
- Comprobar las imágenes de los puntos: 0,5 puntos.