

Álgebra

EXAMEN 3

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

- Resolved la ecuación $\bar{z} - 4\frac{\pi}{3} = 2i$, donde \bar{z} significa el conjugado de z . Proporcionad z en forma binómica.
- Calculad todas las raíces quintas del siguiente número complejo: $3\sqrt{3} - 2i$. Proporcionad el resultado en forma polar y los ángulos en grados en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

Solución

- Primero pasamos $4\frac{\pi}{3}$ a forma binómica, utilizando la relación que establece que $a = r \cdot \cos \theta$ y $b = r \cdot \sin \theta$ (ver apartado 3.4.2, Módulo 1):

- $r = 4$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Así, se obtiene:

$$4\frac{\pi}{3} = 2 + 2\sqrt{3}i$$

Ahora aislamos \bar{z} de la ecuación:

$$\bar{z} = 2i + 4\frac{\pi}{3} = 2i + y = 2i + 2 + 2\sqrt{3}i = 2 + 2(1 + \sqrt{3})i$$

Finalmente, aplicamos el conjugado para obtener el resultado final:

$$z = 2 - 2(1 + \sqrt{3})i$$

- Primero escribimos el número complejo $3\sqrt{3} - 2i$ en forma polar (ver apartado 3.4.1, Módulo 1):

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{31}$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\left(\frac{-2}{3\sqrt{3}}\right) = 338,95^\circ$$

NOTA: la tangente de un ángulo vale $\frac{-2}{3\sqrt{3}}$ en $158,95^\circ$ y en $338,95^\circ$. Ahora bien, el número complejo que estamos analizando tiene la parte real positiva y la parte

imaginaria negativa, por lo que se encuentra en el cuarto cuadrante, es decir, $338,95^\circ$.

Tenemos entonces que $3\sqrt{3} - 2i = \sqrt{31}_{338,95^\circ}$. Ahora podemos aplicar la raíz quinta (ver apartado 3.6.1, Módulo 1):

$$\sqrt[5]{\sqrt{31}_{338,95^\circ}} = \sqrt[5]{\sqrt{31}_{\frac{338,95^\circ + 360^\circ k}{5}}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

El módulo de las raíces es: $\sqrt[5]{\sqrt{31}} = \sqrt[10]{31}$

Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \frac{338,95^\circ + 360^\circ k}{5}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

- Para $k = 0$, tenemos $\beta_0 = 67,79^\circ$.
- Para $k = 1$, tenemos $\beta_1 = 139,79^\circ$.
- Para $k = 2$, tenemos $\beta_2 = 211,79^\circ$.
- Para $k = 3$, tenemos $\beta_3 = 283,79^\circ$.
- Para $k = 4$, tenemos $\beta_4 = 355,79^\circ$.

En resumen, las raíces quintas de $3\sqrt{3} - 2i$ son:

$\sqrt[10]{31}_{67,79^\circ}, \sqrt[10]{31}_{139,79^\circ}, \sqrt[10]{31}_{211,79^\circ}, \sqrt[10]{31}_{283,79^\circ} \text{ y } \sqrt[10]{31}_{355,79^\circ}$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Pasar $4\frac{\pi}{3}$ a forma binómica: 0,5 puntos.
- Calcular \bar{z} : 0,5 puntos.
- Calcular z : 0,25 puntos.

Apartado b

- Pasar el número complejo a forma polar: 0,5 puntos.
- Calcular el módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Calcular los argumentos de las raíces: 0,5 puntos.

2. Considerad los siguientes tres planos π_1 , π_2 y π_3 :

$$\begin{aligned} \pi_1 &: 50x + y + kz = 50 \\ \pi_2 &: (k - a)y = 0 \\ \pi_3 &: 2kx + y + 4z = 20 \end{aligned}$$

Sustituid el parámetro "a" por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con los tres planos obtenidos:

- a) Determinad, de manera razonada, la posición relativa de los tres planos π_1 , π_2 y π_3 en función de los diferentes valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.
- b) Para $k = a + 11$, calculad, en caso de existir, el punto de corte de los tres planos π_1 , π_2 y π_3 .

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a , de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

- a) Recordemos que el estudio de la posición relativa de tres planos se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema formado por las ecuaciones que definen estos tres planos [Ver apartado 8 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”]

$$\left. \begin{aligned} 50x + y + kz &= 50 \\ (k - a)y &= 0 \\ 2kx + y + 4z &= 20 \end{aligned} \right\}$$

Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver apartado 4 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”].

La matriz de coeficientes, A , y la matriz ampliada, M , asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 1 & k \\ 0 & k - a & 0 \\ 2k & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & k & 50 \\ 0 & k - a & 0 & 0 \\ 2k & 1 & 4 & 20 \end{array} \right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A , porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 50 & 1 & k \\ 0 & k - a & 0 \\ 2k & 1 & 4 \end{vmatrix} = (k - a)(200 - 2k^2) = -2(k - a)(k - 10)(k + 10)$$

- Si $k \neq a$, $k \neq 10$ y $k \neq -10 \rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) = \text{n}^\circ$ incógnitas y el sistema es compatible determinado. Por lo tanto, podemos afirmar que los tres planos π_1, π_2, π_3 se cortan en un único punto.

- Si $k = a$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = 50 - 2a \neq 0$, puesto que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9.

Calculamos, para $k = a$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de

términos independientes $\begin{vmatrix} 50 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 20 \end{vmatrix} = 0$. Así pues, tenemos que $\text{rg}(M) =$

$\text{rg}(A) = 2 \neq \text{n}^\circ$ incógnitas y, por tanto, se tiene que el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación igual a 1. En consecuencia, obtenemos que los tres planos π_1, π_2, π_3 se cortan en una recta.

- Si $k = 10$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 0 & 10 - a \end{vmatrix} = 50(10 - a) \neq 0$, puesto que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9.

Calculamos, para $k = 10$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de térmi-

nos independientes $\begin{vmatrix} 50 & 1 & 50 \\ 0 & 10 - a & 0 \\ 20 & 1 & 20 \end{vmatrix} = 0$. Así pues, tenemos que $\text{rg}(M) =$

$\text{rg}(A) = 2 \neq n^\circ$ incógnitas y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación igual a 1. En consecuencia, podemos afirmar que los tres planos π_1, π_2, π_3 se cortan en una recta.

- Si $k = -10$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 0 & -10 - a \end{vmatrix} = -50(10 + a) \neq 0$.

Calculamos, para $k = -10$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes

$$\begin{vmatrix} 50 & 1 & 50 \\ 0 & -10 - a & 0 \\ -20 & 1 & 20 \end{vmatrix} = -2000(10 + a) \neq 0. \text{ Así pues,}$$

tenemos que $\text{rg}(M) = 3 > \text{rg}(A)$ y, por lo tanto, se obtiene que el sistema es incompatible. En consecuencia, los tres planos π_1, π_2, π_3 no se cortan.

- b) Por el apartado anterior sabemos que para $k = a + 11$ los tres planos π_1, π_2, π_3 se cortan en un único punto. Así pues, el sistema que nos piden resolver es:

$$\begin{cases} 50x + y + (a + 11)z = 50 \\ 11y = 0 \\ (2a + 22)x + y + 4z = 20 \end{cases}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apartado 6 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & a+11 & 50 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 2a+22 & 1 & 4 & 20 \end{array} \right) &\xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & a+11 & 50 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a+14}{25} & \frac{-a^2-22a-21}{25} & -2a-2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 50 & 1 & a+11 & 50 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-a^2-22a-21}{25} & -2a-2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Operaciones: (1): $F3 - \left(\frac{a+11}{25}\right) \cdot F1 \rightarrow F3$.

(2): $F3 - \left(\frac{-a+14}{275}\right) F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\begin{cases} 50x + y + (a + 11)z = 50 \\ 11y = 0 \\ -\left(\frac{a^2+22a+21}{25}\right)z = -2a - 2 \end{cases}$$

De la tercera ecuación se obtiene $z = \frac{50a+50}{a^2+22a+21} = \frac{50}{a+21}$. De la segunda ecuación obtenemos $y = 0$. Si sustituimos en la primera ecuación estos valores de y y de z que hemos obtenido tenemos $x = \frac{10}{a+21}$.

Así pues, para $k = a + 11$ el punto de corte de los tres planos, en función de los

diferentes valores del parámetro a , es:

	$x = \frac{10}{a+21}, \quad y = 0, \quad z = \frac{50}{a+21}$
Si $a = 0$	$x = 10/21 \quad y = 0 \quad z = 50/21$
Si $a = 1$	$x = 5/11 \quad y = 0 \quad z = 25/11$
Si $a = 2$	$x = 10/23 \quad y = 0 \quad z = 50/23$
Si $a = 3$	$x = 5/12 \quad y = 0 \quad z = 25/12$
Si $a = 4$	$x = 2/5 \quad y = 0 \quad z = 2$
Si $a = 5$	$x = 5/13 \quad y = 0 \quad z = 25/13$
Si $a = 6$	$x = 10/27 \quad y = 0 \quad z = 50/27$
Si $a = 7$	$x = 5/14 \quad y = 0 \quad z = 25/14$
Si $a = 8$	$x = 10/29 \quad y = 0 \quad z = 50/29$
Si $a = 9$	$x = 1/3 \quad y = 0 \quad z = 5/3$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz A en función de k : 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente de a , de 10 y de -10 los tres planos se cortan en un único punto: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = a$ los tres planos se cortan en una recta: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k = 10$ los tres planos se cortan en una recta: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k = -10$ los tres planos no se cortan: 0,5 puntos.

Apartado b

- Obtener el punto de corte de los tres planos en el caso $k = a + 11$: 0,5 puntos.

3. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de \mathbb{R}^4 definido de la siguiente forma:

$$E = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 \mid b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = 0\}.$$

Y sea $v = (a + 1, a + 3, a + 4, a + 2)$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP.

Decid si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y **justificad vuestra respuesta**:

a) $A = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ es una base de E .

b) $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a+1, a+2, 1)$.

c) $C_{B \rightarrow A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & k & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de la base $B = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (0, 0, k, k), (0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$ a la base A .

d) El valor $k = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ hace que B sea una base ortonormal.

Solución

a) **VERDADERO.** Como sabemos que la dimensión de E es 3, sólo deberemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobamos que los vectores de A pertenecen a E verificando que se cumple la condición $b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = 0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes, ya que

contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así A es una base de E .

b) **FALSO.** Efectivamente $v \in E$ ya que cumple la condición $b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = 0$, pero sus coordenadas en la base A no son las indicadas, ya que:

$$(a+1) \cdot (1, 1, 0, 0) + (a+2) \cdot (0, 0, 1, 1) + (1, 0, 0, 1) \neq v$$

c) **VERDADERO.** Sólo necesitamos comprobar que multiplicando los vectores de la base A por la matriz de cambio de base obtenemos la base B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_{B \rightarrow A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & k & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & k & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

d) **FALSO.** Para que la base B sea ortonormal es necesario que los vectores tengan módulo 1 y sean ortogonales dos a dos. Comenzamos calculando los módulos de los vectores de la base con $k = \frac{-\sqrt{2}}{2}$:

$$\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 0 + 0} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 0 + 0} = 1$$

$$\sqrt{0 + 0 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{0 + 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

$$\sqrt{0 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 2} \neq 1$$

Así pues el tercer vector de la base B no tiene módulo 1 y por tanto la base B no es ortonormal.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado b

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado c

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado d

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

4. Sea a la **segunda cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC y b un parámetro real.
- Escribid la matriz del giro de ángulo 90° centrado en el punto $(1, a + b)$ y calculad la imagen del punto (a, b) al aplicarle ese giro.
 - Escribid la matriz del escalado de razón b centrado en el punto $(-1, a - b)$ y calculad la imagen del punto (a, b) al aplicarle ese escalado.
 - Calculad la imagen del punto (a, b) al aplicarle dos composiciones de transformaciones anteriores en distinto orden: la del giro seguido del escalado y la del escalado seguido del giro.

Solución

Resolvemos el problema para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los resultados siguientes.

- La matriz del giro de ángulo 90° y centro $(1, a + b)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(-1, -a - b)$, la del giro de ángulo 90° centrado en el origen y la de la traslación de vector $(1, a + b)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 3.4 “Rotación alrededor de un punto genérico” del módulo “Transformaciones geométricas”. Calculamos la composición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) & 0 \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a+b+1 \\ 1 & 0 & a+b-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La imagen del punto (a, b) se puede calcular mediante la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a+b+1 \\ 1 & 0 & a+b-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a+b-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el punto $(a+1, 2a+b-1)$.

- b) La matriz del escalado de razón b y centro $(-1, a-b)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(1, b-a)$, la del escalado de razón b centrado en el origen y la de la traslación de vector $(-1, a-b)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 4.3 “Escalado a partir de un punto genérico” del módulo “Transformaciones geométricas”.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -1 \\ 0 & b & a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b-1 \\ 0 & b & b(b-a)+a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La imagen del punto (a, b) se puede calcular mediante la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b-1 \\ 0 & b & b(b-a)+a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+b-1 \\ b^2+b^2-ab+a-b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1)b-1 \\ 2b^2-(a+1)b+a \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el punto $((a+1)b-1, 2b^2-(a+1)b+a)$.

- c) La imagen del punto (a, b) al aplicarle la composición del giro seguido del escalado se puede calcular mediante la multiplicación de la matriz del escalado por el punto resultante del apartado a):

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b-1 \\ 0 & b & b(b-a)+a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a+b-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+b+b-1 \\ 2ab+b^2-b+b^2-ab+a-b \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el punto $(ab+2b-1, 2b^2+ab-2b+a)$.

La imagen del punto (a, b) al aplicarle la composición del escalado seguido del giro se puede calcular mediante la multiplicación de la matriz del giro por el punto resultante del apartado b):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a+b+1 \\ 1 & 0 & a+b-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (a+1)b-1 \\ 2b^2-(a+1)b+a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b^2+(a+1)b-a+a+b+1 \\ ab+b-1+a+b-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el punto $(-2b^2+ab+2b+1, ab+2b+a-2)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular la matriz de la composición: 0,5 puntos.
- Calcular la imagen del punto: 0,25 puntos.

Apartado b

- Calcular la matriz de la composición: 0,5 puntos.
- Calcular la imagen del punto: 0,25 puntos.

Apartado c

- Calcular la imagen de la composición del giro más el escalado: 0,5 puntos.
- Calcular la imagen de la composición del escalado más el giro: 0,5 puntos.