

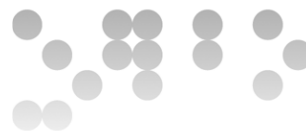
Solución Examen 1

2017-2018 Semestre 1

75.557 Àlgebra

81.506 Matemàtiques I

Fecha 10.01.2018



1. Responded a los siguientes apartados:

- a) Expresad en forma binómica el siguiente número complejo: $\frac{(4-2i)i^5}{1+i}$
- b) Calculad todas las raíces de la ecuación: $x^3 + 8 = 0$. Proporcionad las soluciones en forma polar y binómica.

Solució:

- a) Debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria:

$$\frac{(4-2i)i^5}{1+i} = \frac{(4-2i) \cdot i}{1+i} = \frac{4i+2}{1+i} = \frac{(2+4i) \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} = \frac{2-2i+4i+4}{1+1} = \frac{6+2i}{2} = 3+i$$

Por tanto, la respuesta es:

$$\boxed{\frac{(4-2i) \cdot i^5}{1+i} = 3+i}$$

- b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso. De hecho lo que se pide son las raíces terceras de -8. Para determinar las raíces terceras de -8 determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

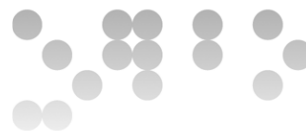
$$m = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$$

$$\alpha = \arctg \frac{0}{-8} + 180^\circ = \arctg 0 + 180^\circ = 180^\circ$$

(Observemos que, al ser la parte real negativa y la parte imaginaria nula hay que sumar la cantidad de 180°).

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0° y en 180° . Como el afijo del punto buscado es $(-8,0)$ el ángulo está entre el segundo y tercer cuadrante, es decir, en 180° .

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número -8 en el plano complejo. Este número está asociado al



punto $(-8,0)$, por lo tanto, es un número que se encuentra entre el segundo y el tercer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $x = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}}$

Como nos piden las raíces terceras, debemos hacer:

$$x = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{\frac{180^\circ+360^\circ k}{3}} = 2^{\frac{180^\circ+360^\circ k}{3}} \text{ para } k=0, 1, 2$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = 2$

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \frac{180^\circ+360^\circ k}{3}$ para $k=0, 1, 2$

- Si $k=0$, tenemos que $\beta_0 = 60^\circ$
- Si $k=1$, tenemos que $\beta_1 = 60^\circ+120^\circ=180^\circ$
- Si $k=2$, tenemos que $\beta_2 = 60^\circ+240^\circ=300^\circ$

Por tanto, las tres raíces de la ecuación, en forma polar, son:

$$\begin{matrix} 2_{60^\circ} \\ 2_{180^\circ} \\ 2_{300^\circ} \end{matrix}$$

Siguiendo las instrucciones del apartado 3.4.2 de la página 33, pasamos los números a forma binómica:

$$2_{60^\circ} = 2 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$2_{180^\circ} = 2 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 2 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -2$$

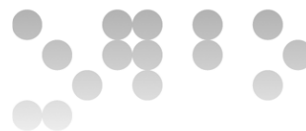
$$2_{300^\circ} = 2 \cdot (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

Y las soluciones, en forma binómica, son:

$$\boxed{-2}$$

$$\boxed{1 + \sqrt{3}i}$$

$$\boxed{1 - \sqrt{3}i}$$



2. Sean $e_1=(0,1,2)$, $e_2=(1,0,-1)$, $e_3=(1,1,1)$, $e_4=(2,-2,-6)$ vectores de \mathbb{R}^3 .

Sea $E=\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$. Sea $v=(-2,1,4)$.

- Calculad la dimensión de E y una base A . ¿Pertenece v a E ? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A .
- Sea $w_1=e_1+e_2$, $w_2=e_1$. $B=\{w_1, w_2\}$ es una base de E . Calculad la matriz de cambio de base de B a A y la de A a B .

Solución:

- Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} = 2$$

Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores ya que contiene el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ Así pues $A=\{e_1, e_2\}$.

Para ver si v pertenece a E resolvemos el sistema:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

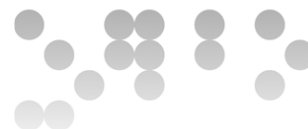
Este sistema tiene solución: $x=1$, $y=-2$. Por tanto, v pertenece a E , y sus coordenadas en la base A son $(1, -2)$.

- Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A . Así es justamente como tenemos definida la base B . De manera que la matriz de cambio de base de B a A será directamente:

$$C_{B \rightarrow A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B podemos calcular directamente la inversa de M :

$$C_{A \rightarrow B} = C_{B \rightarrow A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$



3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx - y = m \\ 3x + (m - 4)y = m + 2 \end{cases}$$

con $m \in \mathbb{R}$.

- Discutid el sistema de ecuaciones para los diferentes valores del parámetro m .
- Resolved el sistema en aquellos casos que el sistema sea compatible.

Solució:

a) La matriz de coeficientes, A , y la matriz ampliada, A' , asociadas al sistema son:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & m \\ 3 & m-4 & m+2 \end{array} \right)$$

$$\text{rango}(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3).$$

- Caso I: Si $m \neq 1, 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A') =$ nombre de incógnitas y por lo tanto el sistema es Compatible Determinado.
- Caso II: Si $m = 1$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

y tenemos $\text{rango}(A) = \text{rango}(A') = 1$ y el sistema es Compatible Indeterminado con $(2-1=1)$ 1 grados de libertad.

- Caso III: Si $m = 3$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

que corresponde claramente a un sistema incompatible ya que la primera ecuación es $3x - y = 3$, mientras que la segunda es $3x - y = 5$.

En resumen:

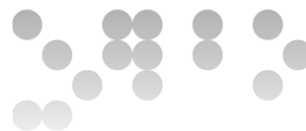
Si $m \neq 1, 3$, el sistema es Compatible Determinado

Si $m = 1$, el sistema es Compatible Indeterminado con 1 grado de libertad

Si $m = 3$, el sistema es Incompatible.

- Tenemos que encontrar la solución para los casos I: $m \neq 1, 3$ y II: $m = 1$.

Caso I: $m \neq 1, 3$



Como que la matriz de coeficientes es cuadrada y $|A| \neq 0$, podemos resolver directamente el sistema por el método de Crámer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ m+2 & m-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m-1 & m-3 \\ m-1 & m-3 \end{vmatrix}} = \frac{m^2 - 4m + m + 2}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - 3m + 2}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m-1)(m-3)} = \frac{m-2}{m-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m \\ 3 & m+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m-1 & m-3 \\ m-1 & m-3 \end{vmatrix}} = \frac{m^2 + 2m - 3m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - m}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m}{m-3}$$

Por tanto, para cada valor de $m \neq 1, 3$ el punto solución del sistema es $\left(\frac{m-2}{m-3}, \frac{m}{m-3} \right)$.

Caso II: $m = 1$

En este caso el sistema queda reducido a una única ecuación $x - y = 1$, ya que la segunda ecuación queda múltiple de la primera.

Los puntos solución del sistema son de la forma $(x, x - 1)$.

4. Sea f la aplicación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 definida por

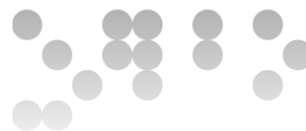
$$f(0,1,0) = (0,3,0), f(1,1,1) = (2,2,2), f(0,0,1) = (0,1,1).$$

- Demostrad que $(0,1,0), (1,1,1), (0,0,1)$ es una base de \mathbb{R}^3 .
- Calculad una base del subespacio Imagen de f . ¿Es f exhaustiva?
- Calculad una base del subespacio $\text{Ker}(f)$, el núcleo de f . ¿Es f inyectiva?
- Encontrad la matriz de f en la base $(0,1,0), (1,1,1), (0,0,1)$. ¿Diagonaliza f ?

Solució:

- Nombramos $u=(0,1,0)$, $v=(1,1,1)$, $w=(0,0,1)$. El determinante de u, v y w es:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$$



Puesto que es diferente de cero, los tres vectores u , v y w son linealmente independientes. Puesto que son tres vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^3 , forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

- b) Para calcular el subespacio imagen es suficiente calcular la imagen de una base, o sea, la imagen de la base u, v, w : $f(u)=(0,3,0)$, $f(v)=(2,2,2)$ y $f(w)=(0,1,1)$. Por lo tanto, $\text{Im}(f)=\langle(0,3,0),(2,2,2),(0,1,1)\rangle$. Es decir, $(0,3,0)$, $(2,2,2)$, $(0,1,1)$ generan el subespacio imagen. Observemos que el determinante de estos tres vectores es:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -6,$$

distinto de cero. Así, $f(u), f(v), f(w)$ son tres vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^3 . Como antes, son base de \mathbb{R}^3 . Así, $\text{Im}(f)=\mathbb{R}^3$. En particular, f es exhaustiva. (Ver Módulo 4, sección 4.)

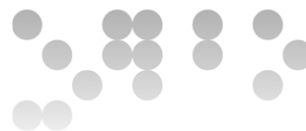
- c) Recordemos que la fórmula de la dimensión dice que $\dim E = \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Nuc}(f)$. Puesto que $E=\mathbb{R}^3$ y la dimensión de la imagen es 3, deducimos que la dimensión del núcleo es 0. Por lo tanto, el núcleo es nulo. En particular, f es inyectiva (ver Módulo 4, Sección 5).
- d) Tenemos que $f(u)=3u$. O sea, u es vector propio de f de valor propio 3. Análogamente, $f(v)=2v$ y v es vector propio de f de valor propio 2. Finalmente, nos dicen que $f(w)=f(0,0,1)=(0,1,1)=(0,1,0)+(0,0,1)=u+w$. O sea, $f(w)=u+w$. Por lo tanto, la matriz de f en la base u, v, w es:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es:

$$Q(t) = \det(B - tI) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (3-t)(2-t)(1-t).$$

Por lo tanto, f tiene tres valores propios distintos que son el 1, el 2 y el 3. De aquí se deduce que f diagonaliza. (Ver Módulo 4, sección 8.)



NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0°	30°	45°	60°	90°	105°	180°	210°	270°	300°	330°	345°
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$