Solució examen 27-06-2015

Problema 1

a) Donats els complexos $z_1 = (2\sqrt{2})_{45^o}$ i $z_2 = (\sqrt{2})_{135^o}$, trobeu $z_1 + z_2$ i $z_1 - z_2$. Proporcioneu els resultats en forma binòmica.

b) Calcula: $\sqrt{-4}$ (proporcioneu els resultats en forma polar i binòmica)

NOTA:
En la realització dels problemes pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0º	33,5º	45º	67º	90º	135º	213,5º	270º	315º
Sin(α)	0	0,552	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,92	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,552	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
Cos(α)	1	0,834	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,39	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,834	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tag(α)	0	0,67	1	2,4	∞	-1	0,67	$-\infty$	-1

<u>Resolució:</u>

a) Els nombres complexos no és possible sumar-los o restar-los en forma polar però sí en forma binòmica. Per la qual cosa, prèviament haurem de transformar-los a forma binòmica.

$$z_1 = (2\sqrt{2})_{45^o} = 2\sqrt{2}\cdot(\cos 45^o + i\sin 45^o) = 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + 2i$$

$$z_2 = (\sqrt{2})_{135^o} = \sqrt{2}\cdot(\cos 135^o + i\sin 135^o) = \sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$$

Realitzem, doncs, les operacions demanades:

$z_1 + z_2 = 2 + 2i - 1 + i = 1 + 3i$

$z_1 - z_2 = 2 + 2i - (-1 + i) = 2 + 2i + 1 - i = 3 + i$

Per tant:

$z_1 + z_2 = 1 + 3i$

$z_1 - z_2 = 3 + i$

NOTA: Fixem-nos que, excepte la suma o la resta de nombres complexos –que només és possible realitzar-les en forma binòmica–, les restants operacions es poden manipular tant amb l'expressió binòmica com polar dels nombres complexos.

b) Escrivim el complex -4 en forma polar tal com s'explica a l'apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$m = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

$\alpha = arctg\left(\dfrac{0}{-4}\right) + 180^{o} = 180^{o}$

Observem que podem sumar o restar 180º donat que la part real del complex és negativa i la part imaginària es nul·la (segon exemple de la pàgina 29 i apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que

$\sqrt{-4} = \sqrt{4_{180^{o}}} = 2_{\frac{180^{o}+360^{o}k}{2}}$ per a k=0, 1

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 2$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{180^{o} + 360^{o}k}{2}$ per a k=0, 1

Si k=0, tenim que $\beta_0 = 90^{o}$

Si k=1, tenim que $\beta_1 = 90^{o} + 180^{o} = 270^{o}$

Per tant, les dues arrels quadrades del complex -4 són:

$$2_{90^{o}} = 2\cdot(\cos 90^{o} + i\cdot \sin 90^{o}) = 2\cdot(0 + i\cdot 1) = 2i$$

$$2_{270^{o}} = 2\cdot(\cos 270^{o} + i\cdot \sin 270^{o}) = 2\cdot(0 - 1\cdot i) = -2i$$

<u>Una altra forma de resoldre l´exercici</u>:

Com que ens demanen $\sqrt{-4}$ podem posar: $\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{4} = i\cdot(\pm 2) = \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases}$

Ara ja tenim les solucions en forma binòmica, falta passar-les a forma polar:

Per a 2i

$m = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$\alpha = arctg\left(\dfrac{2}{0}\right) = arctg(\infty) = 90^{o}$

Tenim, per tant, que $2i = 2_{90^{o}}$

Per a -2i

$m = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

$\alpha = arctg\left(\dfrac{-2}{0}\right) = arctg(\infty) + 180^{o} = 270^{o}$

Tenim, per tant, que $-2i = 2_{270^{o}}$

Problema 2

Siguin v_1=(1,1,3), v_2=(0,2,0), v_3=(1,3,3), v_4=(2,0,6), v_5=(0,-1,0) vectors de R^3.

Sigui V =$\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$.

Sigui w =(3,0,9)

a) Trobeu la dimensió de V i una base A. Pertany w a V? Si és que sí, trobeu-ne les coordenades en la base A.
b) Sigui $e_1 = 3v_1 - v_2$ i $e_2 = v_1 + \frac{2}{3}v_2$. B={$e_1$, e_2} és una base de V. Trobeu la matriu de canvi de base de B a A.

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així la dimensió de V és 2 i una base pot estar formada per els dos primers vectors ja que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ Així doncs A={v_1, v_2}.

Per mirar si w pertany a V resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=3, y=-3/2. Per tant les coordenades de w en la base A són (3, -3/2).

b) Per trobar la matriu de canvi de base de B a A cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la d'A. I en el nostre cas això és justament la definició de la base B. Així tenim que la matriu de canvi de base M és:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Problema 3

Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{r} -3x + 2y + 3z = 0 \\ (a-2)y - 3z = 0 \\ -x - y + (-a-3)z = 0 \end{array}\right\}.$$

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre *a* el sistema té més d'una solució.
b) Resoleu el sistema per als casos *a* = -3 i *a* = 0.

Resolució:

a) En tractar-se d'un sistema homogeni, sempre compatible, el sistema tindrà més d'una solució quan el rang de la matriu de coeficients sigui inferior al nombre d'incògnites, 3 en el nostre cas.

La matriu dels coeficients és $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 0 & a-2 & -3\\ -1 & -1 & -a-3\end{pmatrix}$

Com que $\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=5 \Rightarrow rang(A)\geq 2$ i per tal que el *rang(A)* es mantingui igual a 2 el que hem de calcular és el valor de *a* que anul·la el determinant de la matriu *A*.
Per tant

$$A=\begin{vmatrix}-3 & 2 & 3\\ 0 & a-2 & -3\\ -1 & -1 & -a-3\end{vmatrix}=3(a-2)(a+3)+6+3(a-2)+9=3a^2+6a-9=3(a^2+2a-3)$$

Igualant a 0, obtenim *a=1 i a= -3*

Així doncs el sistema tindrà més d'una solución quan ***a=1 i a= -3***
El problema també es pot resoldre triangulant per Gauss la matriu *A*.

b) Cas ***a= -3***
En aquest cas el sistema a resoldre és

$$\left.\begin{array}{r}-3x+2y+3z=0\\ -5y-3z=0\\ -x-y=0\end{array}\right\}$$

i sabem que *rang(A)*=2 i per tant que el sistema és compatible indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir amb una incògnita com a paràmetre.
Com que la primera equació és combinació lineal de la segona i la tercera, resoldrem el sistema directament a partir de les dues darreres equacions i obtenim

$x=-y$ i $z=\dfrac{-5y}{3}$

Per tant els punts solució del sistema són els de la forma $(-1,1,\dfrac{-5}{3})$

Cas ***a= 0***.
En aquest cas el sistema és compatible determinat i per tant l'única solució és x=y=z=0

Problema 4
Sigui f l'aplicació lineal de R^3 en R^3 definida per

f(1,2,0)=(0,0,0), f(0,1,0)=(0,1,1) i f(0,1,1)=(0,1,1).

a) Demostreu que (1,2,0),(0,1,0) i (0,1,1) són una base de R^3.

b) Digueu quina és la dimensió de la imatge de f. És exhaustiva?

c) Digueu quina és la dimensió del nucli de f. És injectiva?

d) Diagonalitza f? Justifiqueu la resposta.

Resolució:

a) Com que són tres vectors de R^3, per veure que són base és suficient provar que són linealment independents. Vegem que el determinant de la matriu que formen és no nul. El determinant de la matriu dels tres vectors (per columnes) és:

$$det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=1$$
.

Per tant, els tres vectors són una base de R^3.

b) Per calcular la dimensió de la imatge de f hem de calcular el rang de la imatge per f d'una base. Ens diuen que la imatge de la base (1,2,0), (0,1,0), (0,1,1) són els vectors (0,0,0), (0,1,1), (0,1,1). Aquests tres vectors, clarament tenen rang 1. Per tant, la dimensió de la imatge de f és 1. En particular, f no és exhaustiva perquè la dimensió de la imatge de f és 1 i en canvi l'espai d'arribada té dimensió 3.

c) Pel Teorema de la dimensió (o fórmula del rang) (veure Apunts Mòdul 5, pàgina 19) tenim que:

$$\dim E = \dim Nuc(f) + \dim Im(f).$$

Però ara $E=R^3$ i $\dim Im(f) =1$. Per tant, la dimensió del nucli de f és necessàriament 2. Com que el nucli no és zero, f no és injectiva.

d) Anomenem u=(1,2,0), v=(0,1,0) i w=(0,1,1), per simplificar. Tenim que f(u)=0. És a dir, u és vector propi de f de valor propi 0. A més f(w)=f(v). Per tant, f(w-v)=0. O sigui, el vector w-v=(0,1,1)-(0,1,0)=(0,0,1) també és vector propi de f de valor propi 0. Finalment, f(w)=w. O sigui, w és vector propi de f de valor propi 1. En conclusió tenim tres vectors, que són el u=(1,2,0), el w-v=(0,0,1) i el w=(0,1,1), que formen una base de R^3, i que són vectors propis de f. Per tant, hi ha una base de R^3 formada per vectors propis de f. Això vol dir que f diagonalitza.