Álgebra

EXAMEN 2

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Resolved la ecuación $3z - 2i = \overline{z} + 2$, donde z es un número complejo y $\overline{z}$ es el conjugado de z. Expresad el resultado en forma polar. Trabajad con los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$.

   b) Sean los números complejos $z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z_2 = -3i \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$. Calculad $z_1 \cdot z_2$ y expresad el resultado en forma exponencial. Trabajad con los ángulos en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución

a) Escribimos z en forma binómica como $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Así, tenemos:

$$3z - 2i = 3(a + bi) - 2i = 3a + (3b - 2)i$$
$$\overline{z} + 2 = \overline{a + bi} + 2 = (a - bi) + 2 = (a + 2) - bi$$

Igualando partes reales e imaginarias:

$$3a = a + 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$
$$3b - 2 = -b \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = \tfrac{1}{2}$$

Con esto, tenemos:

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}i$$

Para expresar z en forma polar (ver apartado 3.4.1, página 30, Módulo 1):

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{1^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = 1{,}12$$
$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right) = 26{,}57°$$

Nota: la tangente vale $\frac{1}{2}$ en $26{,}57°$ y en $206{,}57°$; pero al ser la parte real e imaginaria positivas, estamos en el primer cuadrante, es decir, $26{,}57°$. En resumen:

$$\boxed{z = 1{,}12_{26{,}57°}}$$

b) Pasamos z_1 y z_2 a forma exponencial. Es importante recordar que el número 5 ya se puede considerar como expresado como complejo; mientras que $-3i$ se expresa en forma exponencial como $3e^{i\frac{3\pi}{2}}$ (ver apartado 3.5, Módulo 1). Así:

$$z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = -3ie^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

Ahora calculamos la multiplicación (ver apartado 3.5, Módulo 1):

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 3e^{i\frac{11\pi}{6}} = 15e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{6}\right)} = 15e^{i\frac{25\pi}{12}} = 15e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Plantear el sistema igualando parte real y parte imaginaria: 0,5 puntos.
- Encontrar el valor de z: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo de z: 0,25 puntos.
- Calcular el argumento de z: 0,25 puntos.

Apartado b

- Pasar a forma exponencial z_1: 0,25 puntos.
- Pasar a forma exponencial z_2: 0,25 puntos.
- Calcular la multiplicación: 0,5 puntos.
- Dar el argumento en $[0, 2\pi)$: 0,25 puntos.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= a + 1 \\ -mx - (1+m)\,y + z &= 2a + 2 \\ (1-m)\,x - my + (1-m)\,z &= (2-m)\,(a+1) \end{aligned}\right\}$$

Sustituid el parámetro "a"por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con el sistema obtenido:

a) Discutid el sistema en función de los diferentes valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

b) Resolved el sistema para $m = 25$.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) Para discutir el sistema utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apartado 4 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -m & -1-m & 1 \\ 1-m & -m & 1-m \end{pmatrix}$$

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ -m & -1-m & 1 & 2a+2 \\ 1-m & -m & 1-m & (2-m)(a+1) \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, ya que si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -m & -1-m & 1 \\ 1-m & -m & 1-m \end{vmatrix}=m+1 \quad\rightarrow\quad m+1=0 \quad\rightarrow\quad m=-1$$

- Si $m\neq -1 \rightarrow \operatorname{rg}(A)=3=\operatorname{rg}(M)=$ nº incógnitas y por tanto, podemos afirmar que el $\boxed{\text{sistema es compatible determinado}}$.
- Si $m=-1$, entonces $\operatorname{rg}(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, (este menor se obtiene considerando primera y segunda fila y primera y segunda columna).
  Calculamos, para $m=-1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 0 & 2a+2 \\ 2 & 1 & 3a+3 \end{vmatrix}=0$. Así pues, tenemos que $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(M)=2\neq$ nº incógnitas y por tanto podemos afirmar que el $\boxed{\text{sistema es compatible indeterminado}}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que para $m=25$ el sistema que se obtiene es compatible determinado:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a+1 \\ -25x-26y+z&=2a+2 \\ -24x-25y-24z&=-23a-23 \end{aligned}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apartado 6 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ -25 & -26 & 1 & 2a+2 \\ -24 & -25 & -24 & -23a-23 \end{array}\right) \underset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & -1 & 26 & 27a+27 \\ 0 & -1 & 0 & a+1 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2+25\cdot F1\rightarrow F2, \quad F3+24\cdot F1\rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a+1 \\ -y+26z&=27a+27 \\ -y&=a+1 \end{aligned}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $y = -a-1$. Si hacemos la sustitución de este valor de y en la segunda ecuación y aislamos la z obtenemos $z = a+1$. Si sustituimos en la primera ecuación estos valores de y y z se obtiene $x = a+1$.
Así pues, para $m = 25$ la solución del sistema es:

$$\boxed{(x = a+1,\ y = -a-1,\ z = a+1)}.$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz A en función de m: 0,25 puntos.
- Obtener el valor $m = -1$: 0,25 puntos.
- Justificar que para m diferente a -1 el sistema es compatible determinado: 0,75 puntos.
- Justificar que para $m = -1$ el sistema es compatible indeterminado: 0,75 puntos.

Apartado b

- Obtener la solución: 0,5 puntos.

3. Sean $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,0,-2)$, $v_3 = (0,0,4)$ y $v_4 = (3,0,3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sea $E =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ el subespacio vectorial generado por estos cuatro vectores. Sea $w = (a+2, 0, -a)$ donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP.

(a) Calculad la dimensión de E y una base A. ¿Pertenece w a E? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sean $e_1 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2$ y $e_2 = \frac{2}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2$ de forma que $B = \{e_1, e_2\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de la base B a la base A y de la base A a la base B.

Solución

(a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ y todos los menores 3×3 resultado de orlar el menor anterior tienen determinante nulo.
Como base podemos escoger $A = \{v_1, v_2\}$, ya que contiene el menor 2×2 anterior.
Para ver si $w \in E$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a+2$ y $y = a+1$. Por tanto, $w \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a+2, a+1)$.

(b) Para calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A. Y esto es justo la definición de estos vectores!
Así pues, la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base en la dirección contraria calculamos la inversa de la matriz anterior:

$$C_{A\to B} = C_{B\to A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular dimensión: 0,5 puntos.
- Ver que $w \in E$: 0,25 puntos.
- Calcular las coordenadas: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular $C_{B\to A}$: 0,75 puntos.
- Calcular $C_{A\to B}$: 0,5 puntos.

4. Sustituid, antes de hacer cálculos, el parámetro c por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 3 & (c+1)(a-8) & 0 \\ 0 & a-5 & 0 \\ 2(c+1)(2-c) & 2(c+1)^2(c-2) & c+1 \end{pmatrix}$$

donde $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal y $M(f|C,C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$ y a es un parámetro real diferente de 8.

Responded razonadamente los siguientes apartados:

a) Calculad una base del núcleo de la aplicación f para todos los posibles valores del parámetro a, decid cuál es su dimensión y determinad la dimensión de la imagen de f.

b) Calculad el polinomio característico de f y un vector propio que no sea proporcional a $(0,0,1)$ y que corresponda a un valor propio diferente de $a-5$.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de c genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir c por su valor en los desarrollos que siguen.

a) El núcleo de f se obtiene resolviendo el sistema $M(f|C,C)\cdot w = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & (c+1)(a-8) & 0 \\ 0 & a-5 & 0 \\ 2(c+1)(2-c) & 2(c+1)^2(c-2) & c+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta expresión se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{gathered} 3x + (c+1)(a-8)y = 0 \\ (a-5)y = 0 \\ 2(c+1)(2-c)x + 2(c+1)^2(c-2)y + (c+1)z = 0 \end{gathered}$$

Si $a \neq 5$, la solución inmediata de la segunda ecuación, $(a-5)y = 0$, es $y = 0$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación $3x+(c+1)(a-8)y = 0$ se obtiene $3x = 0$ y, por tanto, $x = 0$. Y sustituyendo los dos valores en la tercera ecuación $2(c+1)(2-c)x+2(c+1)^2(c-2)y+(c+1)z = 0$ se obtiene $(c+1)z = 0$ y, al ser c una cifra ($c \geq 0$ y, por tanto, $c+1 > 0$), $z = 0$. Por tanto, el núcleo de f se limita al vector nulo y tiene dimensión 0. Por el Teorema de la dimensión del punto 4. "Núcleo e imagen de una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales", la imagen de f tendrá dimensión 3, ya que la suma de las dimensiones del núcleo y la imagen tiene que ser la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$.
Cuando $a = 5$, la segunda ecuación, $(a-5)y = 0$, se cumple siempre. La primera ecuación se convierte en $3x - 3(c+1)y = 0$ de donde se obtiene $x = (c+1)y$. Y sustituyendo ese valor en la tercera ecuación $2(c+1)(2-c)(c+1)y+2(c+1)^2(c-2)y + (c+1)z = 0$ se obtiene $(c+1)z = 0$ y, al ser c una cifra ($c \geq 0$ y, por tanto, $c+1 > 0$), $z = 0$. Por tanto, el núcleo de f está formado por vectores de la forma $((c+1)y, y, 0)$, tiene dimensión 1 y una base es $\{(c+1, 1, 0)\}$. Por el Teorema de la dimensión del punto 4. "Núcleo e imagen de una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales", la imagen de f tendrá dimensión 2, ya que la suma de las dimensiones del núcleo y la imagen tiene que ser la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$.

b) El polinomio característico de f es $p(\lambda) = |M(f|C,C) - \lambda \mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales". Desarrollando el determinante por Sarrus, obtenemos:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & (c+1)(a-8) & 0 \\ 0 & a-5-\lambda & 0 \\ 2(c+1)(2-c) & 2(c+1)^2(c-2) & c+1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(a-5-\lambda)(c+1-\lambda)$$

Los VAPs de f son las soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$, en este caso los valores: 3, $a-5$ y $c+1$.

Para calcular el vector propio que se pide, descartamos el de VAP $a-5$ porque así lo dice el enunciado y entonces solo queda saber a cuál de los otros dos valores propios corresponde. Para calcular el VAP correspondiente al VEP $(0,0,1)$ basta con calcular la imagen de este vector al aplicarle f y determinar por qué factor es múltiplo del mismo. Se multiplica la matriz de la aplicación por el vector:

$$\begin{pmatrix} 3 & (c+1)(a-8) & 0 \\ 0 & a-5 & 0 \\ 2(c+1)(2-c) & 2(c+1)^2(c-2) & c+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c+1 \end{pmatrix}$$

Se ve así que la imagen de $(0,0,1)$ es $(c+1)(0,0,1)$, por lo cual el valor propio que le corresponde es $c+1$.

Descartados los VAPs $a-5$ y $c+1$, queda el VAP 3. Para calcular un VEP de VAP 3 hay que buscar una base del $Ker(f-3\mathrm{I})$. Es decir, resolver el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3-3 & (c+1)(a-8) & 0 \\ 0 & a-5-3 & 0 \\ 2(c+1)(2-c) & 2(c+1)^2(c-2) & c+1-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la ecuación correspondiente a la segunda fila, que es $(a-8)y=0$, se obtiene que $y=0$ porque al ser $a \neq 8$ según el enunciado, se cumple $a-8 \neq 0$. La primera ecuación se cumple. De la tercera ecuación $2(c+1)(2-c)x+2(c+1)^2(c-2)y+(c-2)z=0$, sustituyendo y por 0, se obtiene $2(c+1)(2-c)x+(c-2)z=0$. Si $c \neq 2$, $2(c+1)x-z=0$ y $z=2(c+1)x$ y las soluciones son de la forma $(x,0,2(c+1)x)$ y el vector propio que se pide puede ser el $(1,0,2c+2)$. Si $c=2$, tenemos un VAP 3 repetido, la tercera ecuación es nula y no hay restricción sobre la x ni la z por lo que el espacio de VEPs está generado por $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$ y el vector que nos piden sería el $(1,0,0)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Plantear el sistema para encontrar el núcleo: 0,25 puntos.
- Identificar los dos casos posibles según el valor de a: 0,25 puntos.
- Calcular la base del núcleo en cada caso: 0,25 + 0,25 puntos.
- Calcular las dimensiones de núcleo e imagen: 0,25 puntos.

Apartado b

- Calcular el polinomio característico: 0,5 puntos.
- Descartar los VAPs $a-5$ y $c+1$: 0,25 puntos.
- Calcular el VEP de VAP 3: 0,5 puntos.