Solución Examen 1

2017-2018 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 09.06.2018

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad en forma polar el siguiente número complejo: $z = \sqrt{3} - i$.

b) Hallad un número complejo, z, sabiendo que una de sus raíces octavas es $-1+i$. Proporcionad el resultado en forma binómica y polar.

Solución:

a) Partimos de un número complejo en forma binómica y queremos pasarlo a polar. Para ello seguiremos el proceso que se dice en la página 30, apartado 3.4.1, del material impreso sobre cómo pasar un número complejo a polar:

Primero calculamos el argumento y luego el módulo:

$$m = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\alpha = arctg\frac{-1}{\sqrt{3}} \underset{(*)}{=} arctg\frac{-\sqrt{3}}{3} = 330^{o}$$

$$(*)\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{(-1)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

(Observemos que, al ser la parte real positiva y la parte imaginaria negativa no hay que sumar ni restar ninguna cantidad).

Por tanto, la respuesta es:

$$\boxed{\sqrt{3} - i = 2_{330^{o}}}$$

b) Expresamos $-1+i$ en forma polar.

Para ello determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = arctg\frac{1}{-1} = arctg(-1) = 135^{o}$$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en 135º y en 315º. Como el afijo del punto buscado es (-1,1) el ángulo está en el segundo cuadrante, es decir, en 135º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número -1+i en el plano complejo. Este número está asociado al punto (-1,1), por lo tanto, es un número que se encuentra en el segundo cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $-1+i=\sqrt{2}_{135^\circ}$

Y ahora debemos hacer, tal como se dice en el apartado 3.5 de la página 38 del material impreso sobre el exponencial de un número complejo:

$$z=(-1+i)^8=\left(\sqrt{2}_{135^\circ}\right)^8=16_{8\cdot 135^\circ}=16_{1080^\circ}=16_{3\cdot 360^\circ+0}\underset{(*)}{=}16_{0^\circ}=16\cdot(\cos 0^\circ + i sen 0^\circ)=$$
$$=16\cdot(1+0i)=16$$

(*): Ver página 31 del material impreso en que se habla de que la representación en forma polar no es única.

Por tanto el número buscado es $\boxed{z=16_{0^\circ}=16}$

2. Sean $e_1=(1,1,4), e_2=(0,1,-1), e_3=(1,2,3), e_4=(1,5,0)$ vectores de $\Re^3$.

   Sea $E=<e_1,e_2,e_3,e_4>$. Sea $v=(-2,3,-13)$.

   a. Calculad la dimensión de E y una base A. ¿Pertenece v a E? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

   b. Sean $w_1=(2,3,7), w_2=(1,1,4)$. $B=\{w_1,w_2\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de B a A y la de A a B.

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}=2$$

Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Así A={e_1, e_2}.

Para mirar si w pertenece a E resolvemos el sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix}$

Éste sistema tiene solución: x=-2, y=5. Así pues v pertenece a E, y sus coordenadas en la base A son (-2, 5).

b) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A.

Para el vector w_1=(2,3,7) resolvemos el sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Que tiene solución: x=2, y=1.
Para el segundo vector es directo, ya que es el primero de la base A.
De manera que la matriz de cambio de base de B a A será:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B podemos calcular directamente la inversa de la matriz anterior:

$$C_{A\to B} = C_{B\to A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay + t = 1 \\ 2x + (a+2)y + 2z + 3t = 5 \\ x + (a-1)y - z + (a+1)t = -a \\ x + (a+1)y + z + (a+3)t = 4 - a \end{cases}$$

con $a \in \Re$.

a. Discutid el sistema de ecuaciones para los diferentes valores del parámetro.

b. Resolved el sistema para a $a=0$.

Solución:

a) Tenemos un sistema de 4 ecuaciones y cuatro incógnitas. Para discutir-lo utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius. Calcularemos primero los valores de a que hacen que la matriz A tinga rango máximo, para estos valores el sistema será compatible determinado.
La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, A', asociadas al sistema son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & a-1 & -1 & a+1 & -a \\ 1 & a+1 & 1 & a+3 & 4-a \end{array}\right)$$

Simplificamos operando:

F4- F1, F3- F1 , F2-2F1 y en el siguiente paso F4 +F3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -a+2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & a+2 & 3-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -a+2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & a & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+2 & 2-2a \end{array}\right)$$

Estudiamos ara el rango de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -a+2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+2 \end{vmatrix} = (-a+2)(-2)(a+1) + 4\cdot(a+1)$$

$$= (a+1)(2a-4+4) = (2a)(a+1)$$

$$rango(A) = 4 \Leftrightarrow a \neq 0 \ y \ a \neq -1$$

- Caso I: Si $a \neq 0, -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 4 = rango(A') =$ número de incógnitas y por lo tanto el sistema es **Compatible Determinado**.
- Caso II: Si $a = 0$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ orlamos este menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Calculamos ahora el rango *A'*; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$=0

.

y por tanto tenemos $rango(A) = rango(A') = 3$ así que el sistema es **Compatible Indeterminado** con (4-3=1) **1 grado de libertad.**

- Caso III: Si $a = -1$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

La última fila evidencia que el sistema será **Incompatible**.

En resumen:

Si $a \neq 0, -1$, el sistema es Compatible Determinado. Si $a = 0$ el sistema es Compatible Indeterminado con 1 grado de libertad. Si $a = -1$el sistema es Incompatible.

b) Tenemos que hallar la solución para $a = 0$

Podemos resolver directamente el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Hemos simplificado con las siguientes operaciones: 2F3+ F2

$$\begin{cases} x + t = 1 \\ 2y + 2z + t = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 - z \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones serán todos los puntos que cumplan:

$(0,1 - z, z, 1)$

4. Sea f la aplicación lineal de $\Re^3$ en $\Re^3$ definida por:

   $f(1,1,1) = (0,3,0), f(0,-1,0) = (0,2,0), f(1,1,0) = (4,4,0)$

   a. Demostrad que $(1,1,1),(0,-1,0),(1,1,0)$ es una base de $\Re^3$.

   b. Calculad una base del subespacio Imagen de f. ¿Es f exhaustiva?

   c. Calculad una base del subespacio Ker (f), el núcleo de f. ¿Es f inyectiva?

   d. Hallad la matriz de f en la base $(1,1,1),(0,-1,0),(1,1,0)$. ¿Diagonaliza f ?

Solución:

a) Denominamos u=(1,1,1), v=(0,-1,0), w=(1,1,0). El determinante de u, v y w es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Puesto que es diferente de cero, u,v y w son linealmente independientes. Puesto que son tres vectores linealmente independientes de R^3, forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

b) Para calcular el subespacio imagen es suficiente calcular la imagen de una base de R^3. Sabemos que la imagen de la base u,v,w de R^3 es: f(u)=(0,3,0), f(v)=(0,2,0) y f(w)=(4,4,0). Por lo tanto, Im(f)=<(0,3,0),(0,2,0),(4,4,0)>. Es decir, (0,3,0), (0,2,0), (4,4,0) generan el subespacio imagen. Observemos que el determinante de estos tres vectores es cero.

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

De hecho, es claro que f(u) y f(v) son linealmente dependientes. En cambio, f(u)=(0,3,0) y f(w)=(4,4,0) son linealmente independientes. Por lo tanto, f(u),f(w) son una base de la imagen. Así, f NO es exhaustiva ya que la imagen de f tiene dimensión 2 y en cambio el espacio de llegada tiene dimensión 3. (Ver Módulo 4, Sección 4.)

c) Recordemos que la fórmula de la dimensión dice que dim E=dim Im(f)+dim Nuc(f). Puesto que E=R^3 y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del núcleo es 1. Puesto que 2f(u)=3f(v), tenemos que f(2u-3v)=0. Es decir, el vector 2(1,1,1)-3(0,-1,0)=(2,5,2) es una base del núcleo. En particular, f NO es inyectiva. (Ver Módulo 4, Sección 5.)

d) Tenemos f(u)=(-3)v, f(v)=(-2)v y f(w)=4w. En particular, v es vector propio de f de valor propio -2 y w es vector propio de f de valor propio 4. La matriz de f en la base u,v,w es:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es:

$$Q(t) = det(B - tI) = det\begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ -3 & -2-t & 0 \\ 0 & 0 & 4-t \end{pmatrix} = (0-t)(-2-t)(4-t).$$

Por lo tanto, f tiene tres valores propios distintos que son el 0, el -2 y el 4. De aquí se deduce que f diagonaliza. Un vector propio de f de valor propio 0 es el (2,5,2), el vector que genera el núcleo de f. Un vector propio de f de valor propio -2 es el v=(0,-1,0). Un vector propio de f de valor propio 4 es el w=(1,1,0). (Ver Módulo 4, Sección 8.)

NOTA: En la realización del ejercicio puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0º	30º	45º	60º	75º	90º	135º	180º	270º	300º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$