

## **Examen 2020/21-2**

| Assignatura | Codi   | Data     | Hora inici |
|-------------|--------|----------|------------|
| Àlgebra     | 05.557 | 9/6/2021 | 16:00      |

**Aquest enunciat també correspon a les assignatures següents:**

- 11.506 - Matemàtiques I

## Fitxa tècnica de l'examen

- Comprova que el codi i el nom de l'assignatura corresponen a l'assignatura de què t'has matriculat.
  - Temps total: **2 hores** Valor de cada pregunta: **25%**
  - Es pot consultar cap material durant l'examen? **SÍ** Quins materials estan permesos? **TOTS**
  - Es pot fer servir calculadora? **SÍ** De quin tipus? **PROGRAMABLE**
  - Si hi ha preguntes tipus test, descompten les respostes errònies? **NO** Quant?
  - Indicacions específiques per a la realització d'aquest examen: **Pots utilitzar qualsevol material i calculadora (incloent-hi la Calcme) per comprovar els càlculs, però has d'assegurar-te que detalles i justifiques tots els passos seguits per arribar a la solució.**
  - No és necessari que t'identifiquis amb el nom o el número del carnet d'estudiant. L'autoria de la prova és detectada pel propi sistema.
  - Has de resoldre l'examen de forma manuscrita: en una tablet on puguis escriure directament o en paper. NO s'acceptaran respostes realitzades amb un processador de textos.
  - No cal imprimir l'enunciat, pots resoldre les preguntes en un full en blanc. Utilitza un bolígraf de tinta blava o negra. Digitalitza les teves respostes en un únic fitxer en format PDF (pots fer-ho amb un escàner o amb un dispositiu mòbil). Disposes de 10 minuts extres per a la digitalització i lliurament de la prova.

## Examen 2020/21-2

| Assignatura | Codi   | Data     | Hora inici |
|-------------|--------|----------|------------|
| Àlgebra     | 05.557 | 9/6/2021 | 16:00      |

### Enunciats

1. Demostreu per inducció que per a tot nombre natural  $n \geq 1$  es compleix que  $n^3 - n$  és múltiple de 6.

2. Considereu el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + y + 3z = k \\ 3x + y + k^2z = 2 \\ (2a + 2)x + (a + 1)z = 0 \end{cases}$$

on el paràmetre  $a$  és la primera xifra de la dreta del vostre identificador IDP del campus UOC.

Es demana:

- Utilitzant el teorema de Rouché-Fröbenius, discutiu el sistema en funció del paràmetre  $k \in \mathbb{R}$ .
- Determineu les solucions del sistema pel valor de  $k$  que fa que el sistema sigui compatible indeterminat.

3. Sigui  $E$  un subespai vectorial de dimensió 3 de  $\mathbb{R}^4$  definit de la següent forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1 + a_4 = 0\}$$

I sigui  $v = (1, 2, 3, -1)$ .

- Comproveu que  $A = \{(1, 1, 1, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\}$  és una base de  $E$ . Demostreu si el vector  $v$  pertany al subespai  $E$ . En cas afirmatiu calculeu-nes les coordenades en la base  $A$ .
- Siguin

$$M = \begin{pmatrix} (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ 0 & (a-5)(a-7) & (a-5)(a-7) \\ (a-4)(a-2)a & 0 & (a-9) \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} a(a-2) & (a-9)(a-3) & 0 \\ 0 & a(a-6) & 0 \\ (a-8)(a-1) & 0 & (a-8)(a-4) \end{pmatrix}$$

on  $a$  és la primera xifra de la dreta del teu IDP.

Poden  $M$  o  $N$  ser matrius de canvi de base d'una base  $B$  a la base  $A$ ? Quines són les coordenades de la base  $B$  en la base canònica de  $\mathbb{R}^4$ , en els casos en què  $M$  o  $N$  ho siguin?

4. Siguin  $A = (a+1, 1), B = (0, 0), C = (2a+2, 0)$ . Considereu el triangle  $ABC$  format per aquests tres punts. Sigui la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2a-2 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I sigui  $f$  la transformació afí definida per la matriu  $M$ .

Substituïu  $a$  per la primera xifra de la dreta del vostre IDP del Campus UOC.

Es demana:

(Continua a la pàgina següent)

## Examen 2020/21-2

| Assignatura | Codi   | Data     | Hora inici |
|-------------|--------|----------|------------|
| Àlgebra     | 05.557 | 9/6/2021 | 16:00      |

- a) Calculeu les imatges per  $f$  dels vèrtexs del triangle  $ABC$ .
- b) Demostreu que la transformació  $f$  és equivalent a un escalat de raons 2 a l'eix  $x$  i  $\alpha$  a l'eix  $y$  respecte al punt  $A$  seguit d'una translació. Determineu el vector de la translació.
- c) Calculeu quins punts del pla queden fixos a l'aplicar aquesta transformació  $f$ .