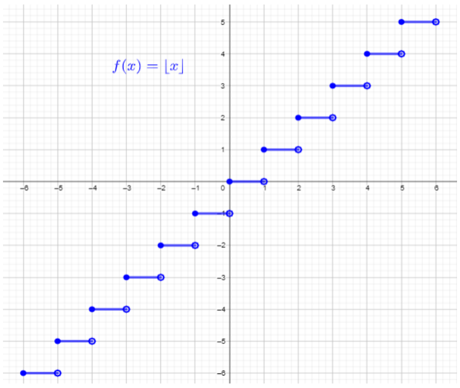
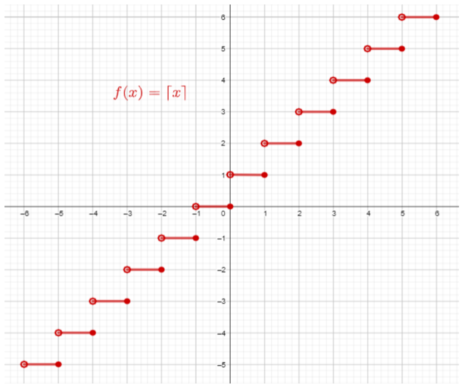
Continuidad (solución)

$\boxed{\textbf{Solución}}$ Si dibujamos las gráficas de las funciones, obtenemos





Como puede observarse, las gráficas tienen forma de escalera.

También, a simple vista, puede observarse que son gráficas continuas en toda la recta numérica, excepto en los valores enteros, en los que presentan puntos de discontinuidad de salto finito.

Fijaos que, aunque los valores en los enteros son distintos en una gráfica y en otra, siguen presentando una discontinuidad en todos estos valores. Así, por ejemplo, si consideramos la función *parte entera por defecto de* x en un valor entero determinado, k, tenemos que

$$\lim_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor = k - 1,$$

pero

$$\lim_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor = k,$$

por lo que

$$\lim_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor \neq \lim_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor$$

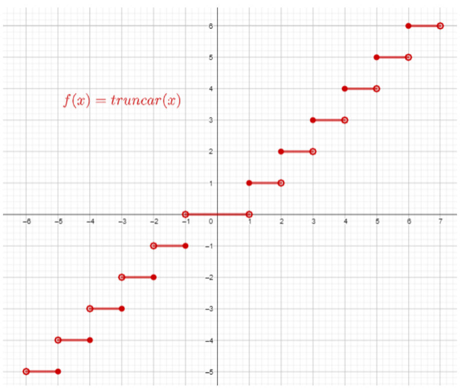
y en $x = k$ hay una discontinuidad de salto finito.

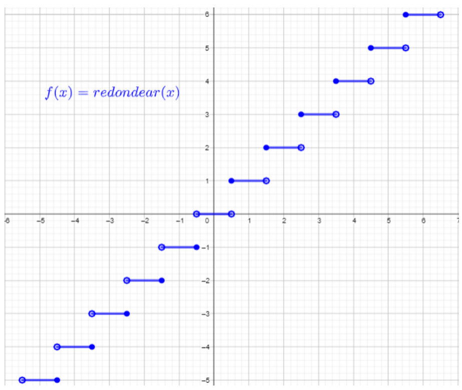
Extra:

La función *redondear*, la podemos definir como

$$[x] = \begin{cases} \left\lceil x - \dfrac{1}{2} \right\rceil & si \quad x < 0, \\[2ex] \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Si dibujamos ambas gráficas (*truncar* y *redondear*) tenemos:





Como puede observarse, los puntos de discontinuidad existentes también son de salto finito, igual que en las funciones *parte entera*. No obstante, la función *truncar* presenta discontinuidades en todos los valores enteros, excepto en $x = 0$, donde es continua. Por su parte, la función *redondear* presenta sus discontinuidades en los puntos de la forma $x = k - \frac{1}{2}$ para cualquier k entero, puesto que su límite por la izquierda es $k - 1$ y su límite por la derecha es k, siendo ambos finitos y distintos.