EXAMEN 1

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Sean $z_1 = 3 - 5i$ y $z_2 = 1 + 2i$. Calculad $z_1 \cdot z_2$ y $\dfrac{z_1}{z_2}$, y expresad ambos resultados en forma binómica.

   b) Sea $z = -4 + 4\sqrt{3}i$. Calculad todas las raíces cúbicas de z y expresadlas en forma polar, indicando los argumentos en grados en el intervalo $[0°, 360°)$.

Solución

a) Empezamos por calcular la multiplicación:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3-5i)(1+2i) \\ &= 3 + 6i - 5i - 10i^2 \\ &= 3 + (6i - 5i) - 10(-1) \quad (\text{porque } i^2 = -1) \\ &= 3 + i + 10 = 13 + i \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = 13 + i}$$

Seguimos ahora con la división:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-5i}{1+2i}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador $1-2i$:

$$\frac{3-5i}{1+2i} = \frac{(3-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

Calculemos numerador y denominador por separado. Numerador:

$$(3-5i)(1-2i) = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2i - 5i \cdot 1 + 10i^2 = -7 - 11i$$

Denominador:

$$(1+2i)(1-2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5$$

Por tanto:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{-7-11i}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{11}{5}i}$$

b) Empecemos por buscar el módulo y el argumento de z. El módulo es:

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+16\cdot 3} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$$

El argumento es tal que:

$$\tan\theta = \frac{4\sqrt{3}}{-4} = -\sqrt{3}$$

El valor $\arctan(-\sqrt{3})$ puede ser 120° o 300°. En este caso, la parte real es negativa y la imaginaria positiva, por lo que estamos en el segundo cuadrante, es decir $\theta = 120°$.

Ahora buscamos las raíces cúbicas. Dado que $x^3 = z$, entonces el módulo cumple que:

$$|x|^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad |x| = 8^{1/3} = 2$$

Y los argumentos son:

$$\arg(x_k) = \frac{\theta + 360°k}{3} \quad (k = 0, 1, 2)$$

Sustituyendo $\theta = 120°$ se obtiene:

$$\arg(x_k) = \frac{120° + 360°k}{3} = 40° + 120°k, \quad k = 0, 1, 2$$

Por tanto, las tres raíces (en forma polar) son:

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= 2_{40°} \\ x_1 &= 2_{160°} \\ x_2 &= 2_{280°} \end{aligned}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular la multiplicación: 0,5 puntos.
- Calcular la división: 0,75 puntos.

Apartado b

- Identificar el módulo y el argumento de z: 0,5 puntos.
- Calcular el módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Calcular el argumento de las raíces: 0,5 puntos.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} kx-(k-(a+1))z & = & k \\ kx+(k+1)y & = & k \\ 2kx+(k-(a+1))z & = & 2k^2 \end{array}\right\}$$

donde el parámetro a es **la primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Se pide:

a) Utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius, discutid el sistema en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Determinad las soluciones del sistema para $k = 1$.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

a) Para discutirlo utilizaremos el teorema de Rouché-Fröbenius [ver apartado 4 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & -k+(a+1) \\ k & k+1 & 0 \\ 2k & 0 & k-(a+1) \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & -k+(a+1) & k \\ k & k+1 & 0 & k \\ 2k & 0 & k-(a+1) & 2k^2 \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, ya que si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & -k+(a+1) \\ k & k+1 & 0 \\ 2k & 0 & k-(a+1) \end{vmatrix} = 3k \cdot (k+1) \cdot (k-(a+1))$$

- Si $k \neq 0$, $k \neq -1$ y $k \neq a+1 \rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) = \text{n}^\circ$ incógnitas y por tanto, podemos afirmar que el $\boxed{\text{sistema es compatible determinado}}$.

- Si $k = 0$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & a+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a-1 \neq 0$.
  Calculamos, para $k = 0$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} 0 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Así pues, $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = 2 \neq \text{n}^\circ$ incógnitas y, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es compatible indeterminado}}$.

- Si $k=-1$, entonces $\text{rg}(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -a-2 \end{vmatrix} = a+2 \neq 0$.
Calculamos, para $k=-1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} -1 & a+2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -a-2 & 2 \end{vmatrix} = 4(a+2) \neq 0$. Así pues, tenemos que se verifica $\text{rg}(A)=2 \neq \text{rg}(M)=3$, y, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.
- Si $k=a+1$, entonces $\text{rg}(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y existe el menor de orden dos $\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ a+1 & a+2 \end{vmatrix} = (a+1)(a+2) \neq 0$.
Calculamos, para $k=a+1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} a+1 & 0 & a+1 \\ a+1 & a+2 & a+1 \\ 2a+2 & 0 & 2(a+1)^2 \end{vmatrix} = 2a\cdot(a+2)\cdot(a+1)^2$. Dado que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9, tenemos que el único valor que anula dicho menor es $a=0$. Así pues, se verifica:
  - Si $a \neq 0$, $\text{rg}(A)=2 \neq \text{rg}(M)=3$, y, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.
  - Si $a=0$, $\text{rg}(M)=\text{rg}(A)=2 \neq$ número de incógnitas y, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es compatible indeterminado}}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que:

- Si $a=0$, para $k=1$ el sistema es compatible indeterminado. Así pues, el sistema que nos piden resolver es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ x+2y & = & 1 \\ 2x & = & 2 \end{array}\right\}$$

De la primera (tercera) ecuación se tiene $x=1$. Si hacemos la sustitución de este valor de $x=1$ en la segunda ecuación y aislamos la y obtenemos $y=0$. Así pues, las soluciones de este sistema son de la forma $\boxed{(x=1,\ y=0,\ z=z)}$.
- Si $a \neq 0$, para $k=1$ el sistema es compatible determinado. Así pues, el sistema que nos piden resolver es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+az & = & 1 \\ x+2y & = & 1 \\ 2x-az & = & 2 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [ver apartado 6 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -a & 2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 2 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -3a & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2 - F1 \to F2,\ \ F3 - 2 \cdot F1 \to F3$
El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + az &=& 1 \\ 2y - az &=& 0 \\ -3az &=& 0 \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $z = 0$. Si hacemos la sustitución de este valor de $z = 0$ en la segunda ecuación y aislamos la y obtenemos $y = 0$. Si sustituimos en la primera ecuación estos valores de $y = 0$ y $z = 0$ se obtiene $x = 1$.
Así pues, para $k = 1$ y $a \neq 0$ la solución del sistema es: $\boxed{(x = 1, y = 0, z = 0)}$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Obtener los valores $k = 0$, $k = -1$ y $k = a + 1$: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente de 0, -1 y $a + 1$ el sistema es compatible determinado: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = 0$ el sistema es compatible indeterminado: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k = -1$ el sistema es incompatible: 0,5 puntos.
- Justificar que tipo de sistema se obtiene para $k = a + 1$: 0,5 puntos.

Apartado b

- Obtener la solución: 0,5 puntos.

3. Consideramos el subespacio vectorial F de $\mathbb{R}^4$ generado por los siguientes vectores:

$$v_1 = (1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1, 1), \quad v_3 = (1, 1, 2, 1), \quad v_4 = (2, -1, 1, -1)$$

a) Determinad la dimensión del subespacio F y escoged una base, que llamaremos A.

b) Consideremos el vector $w = (a, 2a + 2, 3a + 2, 2a + 2)$, donde a es la tercera cifra de la derecha de tu IDP. Calculad las coordenadas de w en la base A.

c) Consideremos una nueva base de F dada por $B = \{u_1, u_2\}$, donde: $u_1 = (2, 2, 4, 2)$ y $u_2 = (4, -2, 2, -2)$. Calculad la matriz de cambio de base de la base B a la base A. Haciendo uso de la matriz anterior, calculad las coordenadas del vector w en la nueva base B.

Solución

a) Estudiemos la dependencia lineal de los generadores mediante el método de Gauss:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \leftarrow F_4 - 2F_1]{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \leftarrow F_4 + F_2]{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz es 2. Por tanto la dimensión de F es 2. Y podemos escoger las filas no nulas de la matriz escalonada (o los vectores originales correspondientes): $A = \{(1,0,1,0),(0,1,1,1)\}$.

b) Para ver si w pertenece a F y a la vez calcular sus coordenadas en tal caso, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+2 \\ 3a+2 \\ 2a+2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a$, $y = 2a+2$. Por tanto, $w \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(a, 2a+2)$.

c) Para calcular la matriz de cambio de base $C_{B\to A}$ de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A. Podemos resolver un sistema lineal para cada uno de ellos o ver directamente:
$u_1 = (2,2,4,2) = 2\cdot(1,0,1,0) + 2\cdot(0,1,1,1)$
$u_2 = (4,-2,2,-2) = 4\cdot(1,0,1,0) - 2\cdot(0,1,1,1)$
Así la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la inversa:

$$C_{A\to B} = C_{B\to A}^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -1/6 \end{pmatrix}$$

Finalmente multiplicamos por el vector de coordenadas obtenido en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5a+4}{6} \\ \frac{-a-2}{6} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las coordenadas de w en la base B son: $(\frac{5a+4}{6}, \frac{-a-2}{6})$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular dimensión: 0,5 puntos.
- Escoger vectores y justificar que son base: 0,25 puntos.

Apartado b

- Ver que $w \in F$: 0,25 puntos.
- Calcular las coordenadas: 0,5 puntos.

Apartado c

- Calcular $C_{B\to A}$: 0,75 puntos.
- Calcular coordenadas de w en la nueva base: 0,25 puntos.

4. Sustituid, antes de realizar ningún cálculo, el parámetro c por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC en los siguientes puntos de $\mathbb{R}^2$:

$$A = (-1, c+1) \qquad B = (-3, 2c+2) \qquad A' = (c+1, 5)$$

Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Escribid la matriz 3×3 de la traslación que lleva el punto A al punto A'.

b) Encontrad el punto B' que es la imagen de B por la traslación anterior.

c) Escribid la matriz 3×3 de un giro de ángulo $270°$ centrado en el punto $C = (0, -2c-2)$.

d) Encontrad la imagen de A' y B' por el giro anterior.

e) Construid la matriz composición de la traslación y el giro. Podéis comprobar si la imagen de A y B utilizando esta matriz coincide con las imágenes encontradas en el apartado d).

Solución
Se resuelve el problema para un valor de c genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a su dígito basta con sustituir c por su valor en los resultados siguientes.

a) Para escribir la matriz de la traslación se necesita el vector que lleva el punto $A = (-1, c+1)$ al punto $A' = (c+1, 5)$. Solo hay que calcular la diferencia $A' - A = (c+1, 5) - (-1, c+1) = (c+2, 4-c)$. La matriz se escribe entonces simplemente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c+2 \\ 0 & 1 & 4-c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La imagen del punto $B = (-3, 2c+2)$ se puede calcular mediante una multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c+2 \\ 0 & 1 & 4-c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2c+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-1 \\ c+6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el punto $B' = (c-1, c+6)$.

c) La matriz del giro de ángulo $270°$ y centro $(0, -2c-2)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(0, 2c+2)$, la del giro de ángulo $270°$ centrado en el origen y la de la traslación de vector $(0, -2c-2)$. Corresponden a las aplicaciones que se deben componer según se explica en el punto 3.4 “Rotación alrededor de un punto genérico” del módulo “Transformaciones geométricas”. Se calcula la composición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2c-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(270°) & -\sin(270°) & 0 \\ \sin(270°) & \cos(270°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2c+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2c-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2c+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2c+2 \\ -1 & 0 & -2c-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Las imágenes de los puntos $A' = (c+1, 5)$ y $B' = (c-1, c+6)$ se pueden calcular mediante una multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2c+2 \\ -1 & 0 & -2c-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c+1 & c-1 \\ 5 & c+6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2c+2 & c+6+2c+2 \\ -c-1-2c-2 & -c+1-2c-2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado son los puntos $(2c+7, -3c-3)$ y $(3c+8, -3c-1)$.

e) Se calcula la composición con la matriz de la traslación a la derecha porque es la primera que se aplica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2c+2 \\ -1 & 0 & -2c-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & c+2 \\ 0 & 1 & 4-c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4-c+2c+2 \\ -1 & 0 & -c-2-2c-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c+6 \\ -1 & 0 & -3c-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para comprobar los resultados, las imágenes de los puntos $A = (-1, c+1)$ y $B = (-3, 2c+2)$ se podrían calcular mediante una única multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & c+6 \\ -1 & 0 & -3c-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ c+1 & 2c+2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+1+c+6 & 2c+2+c+6 \\ 1-3c-4 & 3-3c-4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado son los puntos $(2c+7, -3c-3)$ y $(3c+8, -3c-1)$, que coinciden con las imágenes de A' y B' por el giro encontradas en el apartado anterior como era de esperar.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular el vector de traslación: 0,25 puntos.
- Escribir la matriz de traslación: 0,25 puntos.

Apartado b

- Construir el vector correspondiente a B: 0,25 puntos.
- Multiplicar matriz por vector: 0,25 puntos.

Apartado c

- Escribir la composición de tres matrices: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,25 puntos.

Apartado d

- Construir la matriz correspondiente a los dos puntos A' y B': 0,25 puntos.

- Multiplicar la matriz del giro por la de los puntos: 0,25 puntos.

Apartado e

- Escribir la composición de las dos matrices en el orden adecuado: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz resultante de la composición: 0,25 puntos.