Espai
grapa

Examen 2008/09-1

Assignatura	Codi	Data	Hora inici
Lògica	05.056	17/01/2009	18:45

05.056 17 01 09 EX

Enganxeu en aquest espai una etiqueta identificativa
amb el vostre codi personal
Examen

Fitxa tècnica de l'examen

- **Comprova que el codi i el nom de l'assignatura corresponen a l'assignatura en la qual estàs matriculat.**
- **Només has d'enganxar una etiqueta d'estudiant a l'espai corresponent d'aquest full.**
- **No es poden adjuntar fulls addicionals.**
- **No es pot realitzar la prova en llapis ni en retolador gruixut.**
- **Temps total:** 2 **h.**
- **En cas que els estudiants puguin consultar algun material durant l'examen, quin o quins materials poden consultar?**
  No es pot consultar cap material
- **Valor de cada pregunta:** Problema 1: 30%; problema 2: 20%; problema 3: 20%; problema 4: 20%; problema 5: 10%
- **En cas que hi hagi preguntes tipus test: Descompten les respostes errònies?** NO **Quant?**
- **Indicacions específiques per a la realització d'aquest examen:**

Enunciats

Examen 2008/09-1

Assignatura	**Codi**	**Data**	**Hora inici**
Lògica	05.056	17/01/2009	18:45

Problema 1

a) Formalitzeu utilitzant la lògica d'enunciats les frases següents. Utilitzeu els àtoms proposats.

1) Si guanyo diners i no gasto, estalvio.
$D \wedge \neg G \rightarrow E$

2) Si gasto i no sóc previsor, només estalvio si tinc ingressos extra.
$G \wedge \neg P \rightarrow (E \rightarrow I)$

3) Si no gasto quan tinc ingressos extra, llavors estalvio i sóc previsor.
$(I \rightarrow \neg G) \rightarrow E \wedge P$

Àtoms:
- D: Guanyo diners
- G: Gasto
- E: Estalvio
- P: Sóc previsor
- I: Tinc ingressos extra

b) Formalitzeu utilitzant la lògica de predicats les frases següents. Utilitzeu els predicats proposats.

1) Si "El Pocero" és ric o ven molts pisos, llavors és amic de totes les caixes i bancs.
$R(a) \vee V(a) \rightarrow \forall y[S(y) \vee B(y) \rightarrow A(a,y)]$

2) Hi ha constructors que no venen molts pisos i no son amics d'alguns bancs.
$\exists x[C(x) \wedge \neg V(x) \wedge \exists y[B(y) \wedge \neg A(x,y)]]$

3) Hi ha bancs que només són amics dels constructors rics.
$\exists x[B(x) \wedge \forall y[A(x,y) \rightarrow C(y) \wedge R(y)]]$

Domini: qualsevol conjunt no buit
Predicats:
- C(x): x és constructor
- R(x): x és ric
- V(x): x ven molts pisos
- A(x,y): x és amic de y
- B(x): x és un banc
- S(x): x és una caixa

Constant:
- a: "El Pocero"

Problema 2

Demostreu, utilitzant la deducció natural, que els següents raonaments són correctes. Utilitzeu només les 9 regles bàsiques (és a dir, no utilitzeu ni regles derivades ni equivalents deductius).

$S \rightarrow \neg Q,\ Q \vee T \rightarrow R,\ R \rightarrow S \therefore \neg(Q \wedge T)$

1.	$S \rightarrow \neg Q$		P
2.	$Q \vee T \rightarrow R$		P
3.	$R \rightarrow S$		P
4.		$Q \wedge T$	H
5.		Q	$E\wedge$ 4
6.		$Q \vee T$	$I\vee$ 5
7.		R	$E\rightarrow$ 2,6
8.		S	$E\rightarrow$ 3,7
9.		$\neg Q$	$E\rightarrow$ 1,8
10.	$\neg(Q \wedge T)$		$I\neg$ 4,5,9

Problema 3

El raonament següent NO és vàlid. Demostreu-ho utilitzant el mètode de resolució.

$R \rightarrow S \wedge T$
$\neg T \wedge S \rightarrow W$
$\neg S \rightarrow (\neg R \rightarrow T)$
$S \vee T$
$\therefore$
$T \rightarrow (S \wedge \neg W)$

Cerquem les FNC :

1a Premissa:
$R \rightarrow S \wedge T$
$\neg R \vee (S \wedge T)$
$(\neg R \vee S) \wedge (\neg R \vee T)$

FNC($R \rightarrow S \wedge T$) = $(\neg R \vee S) \wedge (\neg R \vee T)$

2a Premissa
$\neg T \wedge S \rightarrow W$
$\neg(\neg T \wedge S) \vee W$
$\neg\neg T \vee \neg S \vee W$
$T \vee \neg S \vee W$

FNC($\neg T \wedge S \rightarrow W$) = $T \vee \neg S \vee W$

3a Premissa
$\neg S \rightarrow (\neg R \rightarrow T)$
$\neg\neg S \vee (\neg R \rightarrow T)$
$S \vee (\neg\neg R \vee T)$
$S \vee R \vee T$

FNC($\neg S \rightarrow (\neg R \rightarrow T)$) = $S \vee R \vee T$

4a Premissa
S ˅ T

FNC(S ˅ T) = S ˅ T

Negació de la conclusió
¬(T → (S ˄ ¬W))
¬(¬T ˅ (S ˄ ¬W))
¬¬T ˄ ¬(S ˄ ¬W)
T ˄ (¬S ˅ ¬¬W)
T ˄ (¬S ˅ W)

FNC(¬(T → (S ˄ ¬W))) = T ˄ (¬S ˅ W)

El conjunt de clàusules obtingudes és (en negreta el conjunt de suport):

{ ¬R ˅ S, ¬R ˅ T, T ˅ ¬S ˅ W, S ˅ R ˅ T, S ˅ T, **T, ¬S ˅ W** }

La clàusula S ˅ T subsumeix totes les clàusules que la contenen (S ˅ R ˅ T):

{ ¬R ˅ S, ¬R ˅ T, T ˅ ¬S ˅ W, S ˅ T, **T, ¬S ˅ W** }

Aplicant la regla del literal pur podem eliminar totes les clàusules que contenen ¬R ja que no tenim cap clàusula amb R (eliminem ¬R ˅ S i ¬R ˅ T):

{ T ˅ ¬S ˅ W, S ˅ T, **T, ¬S ˅ W** }

Aplicant la regla del literal pur podem eliminar totes les clàusules que contenen T ja que no tenim cap clàusula amb ¬T (eliminem T ˅ ¬S ˅ W, S ˅ T i **T**):

{ **¬S ˅ W** }

És obvi que aquest conjunt no permet obtenir la clàusula buida.

D'aquests manera podem afirmar que el raonament NO és vàlid.

Problema 4

El següent raonament és vàlid. Demostreu-ho utilitzant el mètode de resolució.

∀x[S(x) → T(x)]
∀x [S(x) → ∃y [Q(y) ˄ W(y,x)]]
∃x T(x) → ∃y P(y)
∃x P(x) → ∀y [Q(y) → ∃z [S(z) ˄ W(y,z)]]
∴ ∀x [Q(x) ˄ T(x) → ∃y [T(y) ˄ W(x,y)]]

Cerquem les FNS:

1a Premissa:
∀x[S(x) → T(x)]

$\forall x[\neg S(x) \vee T(x)]$

FNS($\forall x[S(x) \rightarrow T(x)]$) = $\forall x[\neg S(x) \vee T(x)]$

2a Premissa:
$\forall x[S(x) \rightarrow \exists y[Q(y) \wedge W(y,x)]]$
$\forall x[\neg S(x) \vee \exists y[Q(y) \wedge W(y,x)]]$
$\forall x[\neg S(x) \vee [Q(f(x)) \wedge W(f(x),x)]]$
$\forall x[(\neg S(x) \vee Q(f(x))) \wedge (\neg S(x) \vee W(f(x),x))]$

FNS($\forall x[S(x) \rightarrow \exists y[Q(y) \wedge W(y,x)]]$) = $\forall x[(\neg S(x) \vee Q(f(x))) \wedge (\neg S(x) \vee W(f(x),x))]$

3a Premissa:
$\exists x\, T(x) \rightarrow \exists y\, P(y)$
$\neg\exists x\, T(x) \vee \exists y\, P(y)$
$\forall x\, \neg T(x) \vee \exists y\, P(y)$
$\forall x\, \neg T(x) \vee P(a)$

FNS($\exists x\, T(x) \rightarrow \exists y\, P(y)$) = $\forall x\, \neg T(x) \vee P(a)$

4a Premissa:
$\exists x\, P(x) \rightarrow \forall y[Q(y) \rightarrow \exists z[S(z) \wedge W(y,z)]]$
$\neg\exists x\, P(x) \vee \forall y[Q(y) \rightarrow \exists z[S(z) \wedge W(y,z)]]$
$\neg\exists x\, P(x) \vee \forall y[\neg Q(y) \vee \exists z[S(z) \wedge W(y,z)]]$
$\forall x\, \neg P(x) \vee \forall y[\neg Q(y) \vee \exists z[S(z) \wedge W(y,z)]]$
$\forall x\, \neg P(x) \vee \forall y[\neg Q(y) \vee (S(g(y)) \wedge W(y,g(y)))]$
$\forall x \forall y[\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee (S(g(y)) \wedge W(y,g(y)))]$
$\forall x \forall y[(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee S(g(y))) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee W(y,g(y)))]$

FNS($\exists x\, P(x) \rightarrow \forall y[Q(y) \rightarrow \exists z(S(z) \wedge W(y,z))]$) = $\forall x \forall y[(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee S(g(y))) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee W(y,g(y)))]$

Negació de la conclusió:
$\neg\forall x[Q(x) \wedge T(x) \rightarrow \exists y[T(y) \wedge W(x,y)]]$
$\neg\forall x[\neg(Q(x) \wedge T(x)) \vee \exists y[T(y) \wedge W(x,y)]]$
$\exists x\, \neg[\neg(Q(x) \wedge T(x)) \vee \exists y[T(y) \wedge W(x,y)]]$
$\exists x[\neg\neg(Q(x) \wedge T(x)) \wedge \neg\exists y[T(y) \wedge W(x,y)]]$
$\exists x[(Q(x) \wedge T(x)) \wedge \forall y\, \neg[T(y) \wedge W(x,y)]]$
$\exists x[(Q(x) \wedge T(x)) \wedge \forall y[\neg T(y) \vee \neg W(x,y)]]$
$[(Q(b) \wedge T(b)) \wedge \forall y[\neg T(y) \vee \neg W(b,y)]]$
$\forall y[(Q(b) \wedge T(b)) \wedge [\neg T(y) \vee \neg W(b,y)]]$

FNS($\neg\forall x[Q(x) \wedge T(x) \rightarrow \exists y[T(y) \wedge W(x,y)]]$) = $\forall y[Q(b) \wedge T(b) \wedge (\neg T(y) \vee \neg W(b,y))]$

{ $\neg S(x) \vee T(x)$, $\neg S(x) \vee Q(f(x))$, $\neg S(x) \vee W(f(x),x)$, $\neg T(x) \vee P(a)$, $\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee S(g(y))$, $\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee W(y,g(y))$, **$Q(b)$, $T(b)$, $\neg T(y) \vee \neg W(b,y)$** }

Clàusules troncals	**Clàusules laterals**	
$Q(b)$	$\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee S(g(y))$ $\neg P(x) \vee \neg Q(b) \vee S(g(b))$	Substituïm y per b
$\neg P(x) \vee S(g(b))$	$\neg S(x) \vee T(x)$ $\neg S(g(b)) \vee T(g(b))$	Substituïm x de la clàusula

		lateral per g(b)
¬P(x) ˅ T(g(b))	¬T(y) ˅ ¬W(b,y) ¬T(g(b)) ˅ ¬W(b,g(b))	Substituïm y per g(b)
¬P(x) ˅ ¬W(b,g(b))	¬P(x) ˅ ¬Q(y) ˅ W(y,g(y)) ¬P(x) ˅ ¬Q(b) ˅ W(b,g(b))	Substituïm y per b
¬P(x) ˅ ¬Q(b)	Q(b)	
¬P(x) ¬P(a)	¬T(x) ˅ P(a)	Substituïm x de la clàusula troncal per a
¬T(x) ¬T(b)	T(b)	Substituïm x per b
Clàusula buida		

Problema 5

Considereu el següent raonament (incorrecte)

∃x[P(x) → ∀y ¬Q(y,x)]
∀x[P(x) → R(x)]
∴
∀x[P(x) ˄ R(x) → ∃y Q (x,y)]

Doneu una interpretació en el domini {1,2} tal que R(1)=F, Q(1,1)=V y Q(1,2)=F, que en sigui un contraexemple.

Un contraexemple ha de fer certes les premisses i falsa la conclusió.

Passem les fórmules de las premisses i la conclusió a enunciats:

Primera premissa:
∃x[P(x) → ∀y ¬Q(y,x)]

[P(1) → ∀y ¬Q(y,1)] ˅ [P(2) → ∀y ¬Q(y,2)]
[P(1) → ¬Q(1,1) ˄ ¬Q(2,1)] ˅ [P(2) → ¬Q(1,2) ˄ ¬Q(2,2)]

Segona premissa:
∀x[P(x) → R(x)]

[P(1) → R(1)] ˄ [P(2) → R(2)]

Conclusió:
∀x[P(x) ˄ R(x) → ∃y Q (x,y)]

[P(1) ˄ R(1) → ∃y Q (1,y)] ˄ [P(2) ˄ R(2) → ∃y Q (2,y)]
[P(1) ˄ R(1) → Q (1,1) ˅ Q (1,2)] ˄ [P(2) ˄ R(2) → Q (2,1) ˅ Q (2,2)]

Ara hem de cercar quins valors fan certes les premisses i falsa la conclusió.

Estudiem primer la conclusió. La connectiva principal d'aquest enunciat és una conjunció, per tant perquè la conclusió sigui falsa cal que com a mínim un dels dos conjuntants sigui fals.

Estudiem primer el conjuntant P(1) ˄ R(1) → Q (1,1) ˅ Q (1,2). Com que es tracta d'una implicació, perquè sigui fals cal que sigui V →F

Assignatura	Codi	Data	Hora inici
Lògica	05.056	17/01/2009	18:45

Com que tenim que Q(1,1) = V, Q(1,2) = F y R(1) = F, veiem que el conjuntant sempre és cert:
P(1) ^ F → V ˅ F
F → V
V

Això ens obliga a comprovar el segon conjuntant P(2) ^ R(2) → Q (2,1) ˅ Q (2,2), que hauria de ser fals. Per això P(2) i R(2) han de ser certs i Q(2,1) i Q(2,2) falsos
P(2) ^ R(2) → Q (2,1) ˅ Q (2,2)
V ^ V → F ˅ F
V → F
F

Així, fins ara tenim que la interpretació que busquem ha de tenir els següents valors:

P(1) = ?
R(1) = F
P(2) = V
R(2) = V
Q(1,1) = V
Q(1,2) = F
Q(2,1) = F
Q(2,2) = F

Tenint en compte aquests valors, estudiem ara la primera premissa. Si substituïm els valors trobats, tenim que la primera premissa és:
[P(1) → ¬V ^ ¬F] ˅ [V → ¬F ^ ¬F]
[P(1) → F ^ V] ˅ [V → V ^ V]

Com que el segon disjuntant és cert ja hem comprovat que la primera premissa és certa.

Ara cal comprovar que aquests valors fan certa la segona premissa:
[P(1) → F] ^ [V → V]

Perquè sigui certa, P(1) ha de ser fals. D'aquesta manera els valors són:
P(1) = F
R(1) = F
P(2) = V
R(2) = V
Q(1,1) = V
Q(1,2) = F
Q(2,1) = F
Q(2,2) = F

Per tant tenim que la següent interpretació és un contraexemple del raonament proposat:

<{1, 2}, { P(1)=F, P(2)=V, R(1)=F, R(2)=V, Q(1,1)=V, Q(1,2)=F, Q(2,1)=F, Q(2,2)=F }, {}>