

SOLUCION EXAMEN 23 ENERO 2016

Problema 1: Responded a los siguientes apartados:

- a) (1,25 puntos) Sean los complejos: $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + 3i$, $z_3 = 7 + 4i$. Calculad: $\overline{(z_1 \cdot z_2)} z_3$. Proporcionad el resultado en forma binómica.

NOTA: Recordad que $\overline{z_1}$ representa el conjugado de z_1 .

- b) (1,25 puntos) Hallad la raíz siguiente: $\sqrt[3]{2 - 2i}$. Proporcionad el resultado en forma binómica y polar.

Solución:

- a) Primero hallamos $\overline{z_1}$; esto es, el conjugado de z_1 que es $2 + i$.

Ahora hallamos: $\overline{z_1 \cdot z_2}$ que es: $(2 + i) \cdot (1 + 3i) = 2 + 6i + i - 3 = -1 + 7i$

A continuación hallamos $\overline{(z_1 \cdot z_2)} z_3 = -1 - 7i$

Y, por último, calculamos:

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} z_3 = (-1 - 7i) \cdot (7 + 4i) = -7 - 4i - 49i + 28 = 21 - 53i$$

Por tanto:

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} z_3 = 21 - 53i$$

- b) Escribimos el complejo $2 - 2i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

$$m = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{-2}{2}\right) = \arctg(-1) = 315^\circ$$

Observemos que no sumamos ni restamos ninguna cantidad dado que la parte real del complejo es positiva (apartado 3.4.1 de la página 30 del material impreso).

Tenemos, por tanto, que $\sqrt[3]{2 - 2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8} \cdot e^{j315^\circ}}$

Como nos piden las raíces tercera debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$$\sqrt[3]{\sqrt{8} \cdot e^{j315^\circ}} = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{315^\circ + 360^\circ k}{3}} \quad \text{para } k=0, 1, 2$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt{2}$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \frac{315^\circ + 360^\circ k}{3}$ para $k=0, 1, 2$

- Si $k=0$, tenemos que $\beta_0 = 105^\circ$
- Si $k=1$, tenemos que $\beta_1 = 105^\circ + 120^\circ = 225^\circ$
- Si $k=2$, tenemos que $\beta_2 = 105^\circ + 240^\circ = 345^\circ$

Por tanto, las tres raíces terceras del complejo $2 - 2i$ son:

$$\sqrt{2}_{60^\circ} = \sqrt{2} \cdot (\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)$$

$$\sqrt{2}_{225^\circ} = \sqrt{2} \cdot (\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = -1 - i$$

$$\sqrt{2}_{345^\circ} = \sqrt{2} \cdot (\cos 345^\circ + i \sin 345^\circ) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \right)$$

Problema 2: Sean A y B dos subespacios vectoriales de dimensión 2 de \mathbb{R}^4 definidos de la siguiente forma:

$$A = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 = a_3, a_4 - a_1 = 0\}$$

$$B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \mid b_1 = b_3, b_4 = 0\}$$

Y sea $v = (0, 5, 0, 0)$.

a) (1,25 puntos) Comprobad que $W = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ es una base de A. ¿Pertenece v a A? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base anterior.

b) (1,25 puntos) Encontrad una base de B y justificad que lo es. ¿Pertenece v a B? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base que habéis encontrado. ¿Son A y B el mismo subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 ? Justificad la respuesta.

Solución

a) Como sabemos que la dimensión de A es 2, solo es necesario ver que los vectores de W pertenecen a A y que son linealmente independientes.

Primer comprobamos que los vectores de W pertenecen a A comprobando que cumplen las condiciones $a_1 + a_2 = a_3$, $a_4 - a_1 = 0$, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues W es una base de A.

Para ver si v pertenece a A miramos si tiene solución el siguiente sistema: (también podríamos comprobar si se cumplen las condiciones).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que no tiene solución. Por tanto v no pertenece a A.

b) Podemos proponer como base de B:

T={ (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0) }. De forma análoga al apartado anterior podemos probar que es base:

Primero comprobamos que los vectores de T pertenecen a B comprobando que se cumplen las condiciones $b_1 = b_3$, $b_4 = 0$ cosa que es cierta.

Después comprobamos que son linealmente independientes:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Así T es una base de B.

Para ver si v pertenece a B miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x=0$, $y=5$. Por tanto las coordenadas de v en B en la base que hemos encontrado son (0,5)

A y B no generan el mismo subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 ya que hay vectores (como por ejemplo el v), que pertenecen a uno y no al otro.

Problema 3: Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

- a) (1,25 puntos) Calculad el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro a .
- b) (1,25 puntos) Discutid y solucionad el sistema de ecuaciones lineales

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

según los valores del parámetro a .

Solución:

- a) Para calcular el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ aplicaremos transformaciones elementales para triangular la matriz (método de Gauss)

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (a+1)^2 - a^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 - a^2 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & -1 & -2a+1 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

Una vez aplicadas las siguientes transformaciones:

- (1) A la segunda fila restarle la primera
A la tercera fila restarle la primera
- (2) Operar en las filas segunda y tercera
- (3) A la tercera fila sumarle la segunda

Por lo tanto, podemos ver que independientemente del valor de a , la matriz M es siempre equivalente a una con tres filas no nulas y por lo tanto $\text{rang}(M) = 3$.

- b) El sistema $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene por matriz asociada la matriz M , cuadrada y de rango máximo e igual al número de incógnitas. Por lo tanto, para cualquier valor del parámetro a el sistema será compatible determinado, con una solución única. La solución la podemos obtener aplicando el método de Crámer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 1, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & (a+1)^2 \\ 1 & 1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 0, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 0.$$

Para cualquier valor de a la solución del sistema es $x=1, y=0, z=0$.

Nota: En la resolución del apartado b) también se podría haber utilizado el método de Gauss de manera análoga a cómo se ha hecho en el apartado a).

Problema 4: Sea f la aplicación de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 definida por $f(x,y,z)=(2y,2x+3y,2z)$.

- a) (0,5 punto) Encontrad la matriz de f en las bases canónicas.
- b) (0,5 punto) Calculad el polinomio característico de f y los valores propios de f .
- c) (0,5 punto) Estudiad si f diagonaliza.
- d) (1 punto) Encontrad una base de \mathbb{R}^3 con el número máximo de vectores propios de f .

Solución:

- a) La matriz de f en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) El polinomio característico de f es:

$$Q(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 2 & 0 \\ 2 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Desarrollando por la última columna, obtenemos:

$$Q(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 2 \\ 2 & 3-t \end{pmatrix} (2-t) = [(-t)(3-t)-4](2-t) = (t^2 - 3t - 4)(2-t) = (t-4)(t+1)(2-t).$$

(Buscando las raíces del polinomio t^2-3t-4 vemos que son -1 y 4.) O sea, el polinomio característico descompone en producto de 3 factores reales diferentes de grado 1. Los valores propios son -1, 2 y 4, los tres de multiplicidad algebraica 1 (ver Apuntes, Módulo 5, página 28).

c) Puesto que f tiene tres valores propios diferentes, podemos asegurar que f diagonaliza.

d) Encontremos vectores propios de f de valor propio -1. Es decir, busquemos el núcleo de la matriz $A - (-1)I = A + I$. O sea, resolvamos el sistema $(A + I)X = 0$:

$$(A + I)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema $x+2y=0, 2x+4y=0, 3z=0$ es $(x,y,z)=(-2y,y,0)=y(-2,1,0)$.

Ahora encontremos vectores propios de f de valor propio 2. Es decir, busquemos el núcleo de $A - 2I$. O sea, resolvamos el sistema $(A - 2I)X = 0$:

$$(A - 2I)X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema $-2x+2y=0, 2x+y=0, 3z=0$ es $(x,y,z)=(0,0,z)=z(0,0,1)$.

Finalmente encontremos vectores propios de f de valor propio 4. Es decir, busquemos el núcleo de $A - 4I$. O sea, resolvamos el sistema $(A - 4I)X = 0$:

$$(A - 4I)X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema $-4x+2y=0, 2x-y=0, -2z=0$ es $(x,y,z)=(x,2x,0)=x(1,2,0)$.

Tenemos que $(-2,1,0), (0,0,1), (1,2,0)$ es una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de f . Ya sabíamos por el apartado anterior que f diagonaliza y que, por lo tanto, una base de estas tenía que existir.

NOTA: En la realización del examen puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0°	30°	45°	60°	90°	105°	180°	225°	270°	300°	315°	345°
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
Tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$	0	1	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$