Solución Examen 3

2017-2018 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 20.06.2018

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad en forma polar el siguiente número complejo: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$

b) Hallad la raíz siguiente: $\sqrt[5]{-1}$. Proporcionad el resultado en forma polar.

Solución:

a) Debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$

Ahora tenemos:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4 = i^4 = 1$$

Pasamos el número complejo a forma polar:

$$m = \sqrt{1^2} = 1$$
$$\alpha = arctg\frac{0}{1} = arctg 0 = 0^{\circ}$$

(Observemos que, al ser la parte real positiva y la parte imaginaria nula no hay que sumar ninguna cantidad).

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0º y en 180º. Como el afijo del punto buscado es (1,0) el ángulo está entre el primer y cuarto cuadrante, es decir, en 0º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número 1 en el plano complejo. Este número está asociado al punto (1,0), por lo tanto, es un número que se encuentra entre el primer y el cuarto cuadrante.

Por tanto, la respuesta es:

$$\boxed{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4 = i^4 = 1 = 1_{0^\circ}}$$

b) Escribimos el complejo $z=-1$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

$$m=\sqrt{(-1)^2}=1$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{0}{1}\right)+180^\circ = 0^\circ+180^\circ = 180^\circ$$

Tenemos, por tanto, que $-1 = 1_{180^\circ}$

Como nos piden las raíces quintas debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{1_{180^\circ}} = \sqrt[5]{1}_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{5}} \qquad \text{para k=0, 1, 2, 3, 4}$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[5]{1}=1$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \dfrac{180^\circ+360^\circ k}{5}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 36^\circ$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 36^\circ+72^\circ = 108^\circ$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 36^\circ+144^\circ = 180^\circ$
- Si k=3, tenemos que $\beta_3 = 36^\circ+216^\circ = 252^\circ$
- Si k=4, tenemos que $\beta_4 = 36^\circ+288^\circ = 324^\circ$

Por tanto, las cinco raíces quintas del complejo $z=-1$ son:

$$\boxed{1_{36^\circ}}\boxed{1_{108^\circ}}\boxed{1_{180^\circ}}\boxed{1_{252^\circ}}\boxed{1_{324^\circ}}$$

2. Sea E un subespacio de $\Re^3$ generado por los siguientes vectores:

$$E = <(b-1,0,b+2),(2+2b+b^2,b-1,b+2),(0,0,b-3)>.$$

a. Determinad, en función de b, la dimensión del subespacio E.

b. Para el caso $b=2$ encontrad una base de E. ¿Pertenece $v=(18,2,2)$ a E? ¿Cuáles son sus coordenadas en la base que habéis encontrado?

Solución:

a) Calculemos el determinante de la matriz de vectores:

$$\begin{vmatrix} b-1 & 2+2b+b^2 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 \\ b+2 & b+2 & b-3 \end{vmatrix} = (b-1)^2(b-3)$$

Así para $b\neq 1$ y $b\neq 3$ tenemos que el determinante que forman los vectores será no nulo y por tanto tendremos el máximo nombre de vectores linealmente independientes. En este caso la dimensión es 3.

Calculamos el rango de los vectores para el caso $b=1$:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto la dimensión de E es 2 en el caso $b=1$

Calculamos el rango de los vectores para el caso $b=3$:

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 17 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto la dimensión de E es 2 en el caso $b=3$

En resumen, la dimensión de E es 3 si $b\neq 1$ y $b\neq 3$; y en los otros casos la dimensión es 2.

b) En el apartado anterior ya hemos visto que para $b=2$ los tres vectores son linealmente independientes. Por tanto podemos usar como base los tres vectores con los cuales E está definido: Base={(1,0,4),(10,1,4),(0,0,-1)}

Para ver si v pertenece a E y a la vez calcular sus coordenadas en el cas que pertenezca, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=-2, y=2, z=-2. Por tanto las coordenadas de v en la base encontrada son (-2,2,-2)

3. Considerad las siguientes rectas de $\Re^3$:

$$r_1 \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$s_m \begin{cases} 2y + 2z = m \\ 2x + 3y + (m-2)z = 2 \end{cases}$$

donde m es un parámetro real ($m \in \Re$).

a. Estudiad, según los valores de m, la posición relativa de las dos rectas.

b. Calculad, para aquellos valores de m que tenga sentido, la intersección entre las dos rectas.

Solución:

a) Tenemos un sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas. Para discutir-lo utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius. Calcularemos primero los valores de m que hacen que la matriz A tenga rango máximo.

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, A', asociadas al sistema son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & m \\ 2 & 3 & m-2 & 2 \end{array}\right)$$

Estudiemos ahora el rango de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & m-2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(m-2) - 6 = 2m - 4 - 6 = 2m - 10 = 0$$

$$\rightarrow m = 5$$

$Si\; m = 5$, *el rango A= 2.*

$Si\; m \neq 5$, *el rango A= 3.*

Estudiemos ahora el rango de la matriz ampliada *A'* .

Simplificamos operando:

F2- F1, F4- 2F1 ,
F2+F3, F4+1/2F2
Intercambiamos F3 i F4

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & m \\ 2 & 3 & m-2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & m \\ 0 & 1 & m-4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & m-5 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & m-5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m+2 \end{array}\right)$$

$$|A'| = -2(m-5)(m+2)$$

$Si\; m \neq 5\; i\; m \neq -2$ *el rango A'= 4*

$Si\; m = 5\; o\; m = -2$ *el rango A'= 3*

- $Si\; m = 5$ *el rango A= 2 y el rango A'= 3* por lo consiguiente **Sistema Incompatible** y las dos rectas no se cortan.

- $Si\ m = -2$, *el rango A= 3= rango A'* por consiguiente **Sistema Compatible determinado**, las dos rectas se cortan en un punto.
- $Si\ m \neq 5\ y\ m \neq -2$ *el rango A'= 4* *por* consiguiente **Sistema Incompatible,** las dos rectas no tienen ningún punto en común.

b) Calculad, para aquellos valores de m que tenga sentido, la intersección entre las dos rectas. Como ya hemos visto en el apartado anterior, las rectas se intersectan cuando $m = -2$.

Utilizaremos la matriz que hemos simplificado por método de GAUSS en el apartado anterior sustituyendo $m = -2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{queda:} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 2 \\ \quad -7z = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto el punto de corte será $\left(1, \frac{-4}{7}, \frac{-3}{7}\right)$

4. Consideremos $A = (1,0), B = (0,2), C = (-1,1)$.

   a. Sea f el escalado de razón 3 desde el origen. Calculad $f(A), f(B)$ y $f(C)$.

   b. Sea g el giro de ángulo a en sentido antihorario desde el punto $B = (0,2)$. Calculad $g(A), g(B)$ y $g(C)$. Hallad a de manera que el segmento $g(B), g(C)$ sea paralelo al eje y.

Solución:

a) Recordemos el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 3 desde el origen hay que multiplicar por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A,B,C, efectuamos la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f(A)=(3,0), f(B)=(0,6) y f(C)=(-3,3).

b) Recordemos el Módulo 5, Sección 3.1. La matriz del giro de ángulo a en sentido antihorario desde el punto B=(0,2) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 2\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) & -2\cos(a)+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A,B,C, efectuamos la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 2\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) & -2\cos(a)+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos(a)+2\sin(a) & 0 & -\cos(a)+\sin(a) \\ -2\cos(a)+\sin(a)+2 & 2 & -\cos(a)-\sin(a)+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $g(A)=(\cos(a)+2\sin(a), -2\cos(a)+\sin(a)+2)$,

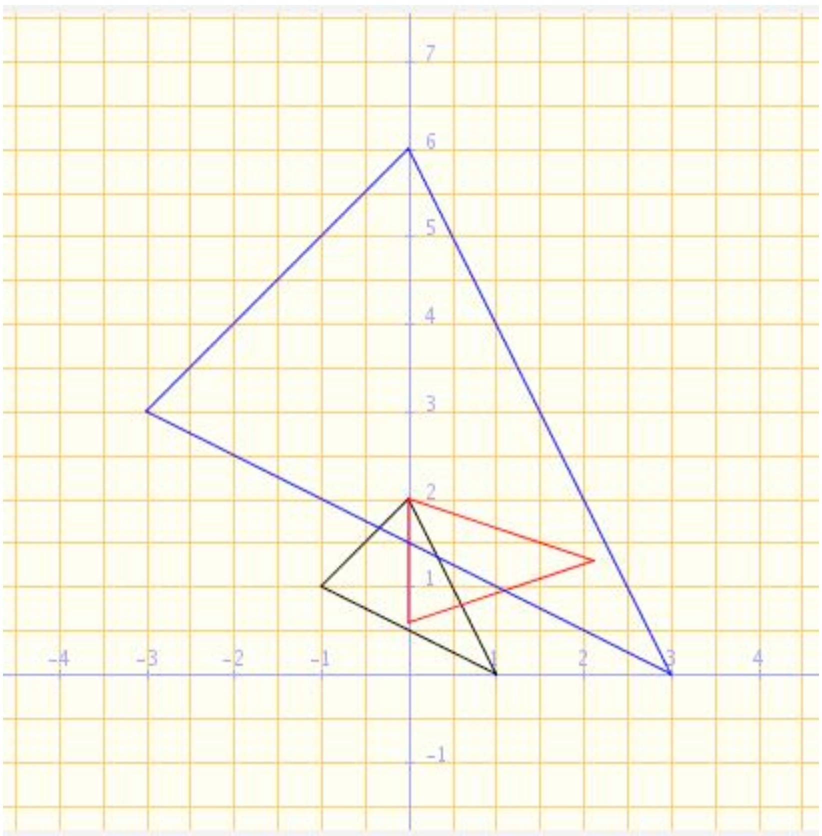
$g(B)=(0,2)$, $g(C)=(-\cos(a)+\sin(a), -\cos(a)-\sin(a)+2)$.

Así, $g(B)-g(C)=(\cos(a)-\sin(a),\cos(a)+\sin(a))$

Este vector es paralelo al eje y si $\cos(a)=\sin(a)$. Es decir, si el ángulo es de 45º.

Entonces los tres puntos son

$g(A)=(3\sqrt{2}/2, 2-\sqrt{2}/2)$, $g(B)=(0,2)$ y $g(C)=(0,2-\sqrt{2})$



NOTA: En la realización del ejercicio puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0º	30º	45º	60º	75º	90º	135º	180º	270º	300º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$