EXAMEN 2 - 13 juny 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:

(a) Expresseu en forma binòmica l´invers del següent complex: $1 - i\sqrt{3}$

(b) Quin valor, o valors, haurà de prendre m, un nombre real, per a què el nombre $\frac{5+mi}{3-2i}$ sigui un nombre complex imaginari pur? Per a $m = -5$, expresseu el nombre complex $5 + mi$ en forma polar.

Solució

(a) L´invers del complex donat és: $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-1}$. Per trobar la seva forma binòmica multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s´explica a l´apartat 3.3.4, pàgina 26, del material sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica) i agrupem part real i part imaginària (recordem que $i^2 = -1$):
$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-3i^2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$
Per tant, la resposta és: $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

(b) Primer mirarem a quin nombre complex correspon la fracció donada. Per a això multiplicarem i dividirem pel conjugat del denominador. Posteriorment aplicarem la definició de nombre complex imaginari pur que hi ha a la pàgina 20 del material.
$\frac{5+mi}{3-2i} = \frac{(5+mi)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{15+10i+3mi+2mi^2}{9-4i^2} = \frac{(15-2m)+(10+3m)i}{9+4} = \frac{15-2m}{13} + \frac{10+3m}{13}i$
La definició d´un nombre complex imaginari pur és que la part real ha de ser nul·la (veure pàgina 20 del material), per tant, imposem que la part real sigui 0:
$\frac{15-2m}{13} = 0 \iff 15 - 2m = 0 \iff m = \frac{15}{2}$
Per tant, el valor sol·licitat és $m = \frac{15}{2}$
Per expressar el nombre $5 - 5i$ en forma polar ho farem tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27, del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:
$m = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$\alpha = \arctan\left(\frac{-5}{5}\right) = \arctan(-1) = 315^o$
Tenim, per tant, que $5 - 5i = 5\sqrt{2}_{315^o}$
NOTA ACLARIDORA: Sabem que la tangent d´un angle val -1 a 135^o i a 315^o. Com l´afix del punt buscat és $(5, -5)$, l´angle està al quart quadrant, és a dir, en 315^o.
Com es diu a l´exercici 19 d´autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a polar, és molt important, de cara a no equivocar-nos en el

resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre $5-5i$ al pla complex. Aquest nombre està associat al punt $(5,-5)$, per tant, és un nombre que es troba al quart quadrant.

2. Siguin $e_1 = (2,0,2,4)$, $e_2 = (0,3,1,1)$, $e_3 = (-1,0,-1,-2)$ i $e_4 = (0,-6,-2,-2)$ vectors de $\mathbb{R}^4$. Sigui $E =< e_1, e_2, e_3, e_4 >$. Sigui $v = (6,-12,2,8)$.

(a) Calculeu la dimensió de E i una base A. $v \in E$? En cas afirmatiu, calculeu-ne les coordenades en la base A.

(b) Sigui $w = e_2 - e_1$. $B = \{v, w\}$ és una base de E. Calculeu la matriu de canvi de base de la base A a la base B i de la base B a la base A.

Solució

(a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Ja que podem veure directament que $C_3 = \frac{-C_1}{2}$ i $C_4 = -2 \cdot C_2$. Així la dimensió de E és 2 i una base pot estar formada pels dos primers vectors ja que són linealment independents: contenen el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs $A = \{e_1, e_2\}$.
Per mirar si $v \in E$ resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x = 3$ i $y = -4$. Per tant $v \in E$ i les seves coordenades en la base A són $(3,-4)$.

(b) Comencem per calcular la matriu de canvi de base de la base B a la base A, ja que per calcular-la cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la de A i això ja ho tenim (per a v ho hem calculat a l'apartat anterior i w està definit directament com a combinació lineal de e_1 i e_2). Així doncs la matriu de canvi de base de B a A és:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a calcular la matriu de canvi de base de A a B calculem la inversa:

$$C_{A\to B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Donat el sistema d'equacions amb un paràmetre real k i incògnites x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 5y + (k-2)z = 0 \\ 3x + (k+6)y - 3z = 0 \\ (k+2)x - \quad y + \quad z = 0 \end{array}\right\}$$

Es demana:

(a) Calculeu per a quins valors de k el sistema només admet la solució $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

(b) Pel valor de $k \geq 0$ (k positiu o zero) que fa compatible indeterminat el sistema, obteniu totes les seves solucions.

(c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascuna de les equacions del sistema quan $k = -3$.

Solució

(a) Per a què un sistema homogeni de tres incògnites només admeti la solució trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ n'hi ha prou en veure que el rang$(A) = 3$ [veure apunts mòdul 3, apartat 5, pàgines 17 i 18].
La matriu de coeficients, A, associada al sistema és:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & k-2 \\ 3 & k+6 & -3 \\ k+2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si calculem el seu determinant s'obté:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & k-2 \\ 3 & k+6 & -3 \\ k+2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -k^3 - 6k^2 - 9k = -k \cdot (k+3)^2$$

Si $k \neq 0$ i $k \neq -3$, aleshores $|A| \neq 0$ i per tant rang$(A) = 3$. Així doncs,

$$\boxed{\text{Per } k \neq 0 \text{ i } k \neq -3 \text{ el sistema només té la solució } (x = 0, y = 0, z = 0)}.$$

(b) A partir dels resultats obtinguts en l'apartat anterior, podem afirmar que per $k = 0$ el rang$(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$ i per tant com que el sistema és homogeni i té tres incògnites s'obté: rang(A) = rang$(M) = 2 \neq$ n. incògnites, és a dir, el sistema és compatible indeterminat.
Per resoldre aquest sistema homogeni compatible indeterminat

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 5y - 2z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \\ 2x - \quad y + \quad z = 0 \end{array}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22]:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & -15 & 9 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) $5{\cdot}F2 - 3{\cdot}F1 \to F2$ i $5{\cdot}F3 - 2{\cdot}F1 \to F3$
(2) $F3 + F2 \to F3$
El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ 15y-9z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+(3z)-2z=0 \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=\frac{-1}{5}z \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\}$$

Així doncs, per $k = 0$ les solucions del sistema homogeni són de la forma:

$$\boxed{\left(x = \frac{-1}{5}z,\ y = \frac{9}{15}z,\ z\right)}.$$

(c) Per $k = -3$ el sistema a considerar és:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-5z=0 \\ 3x+3y-3z=0 \\ -x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

Per tant, tenim que els tres plans definits per cadascuna de les equacions del sistema són:

$\pi_1 : 5x + 5y - 5z = 0$ $\qquad$ $\pi_2 : 3x + 3y - 3z = 0$ $\qquad$ $\pi_3 : -x - y + z = 0$

Si ens fixem en les equacions que defineixen els tres plans, s'observa que són equacions proporcionals i per tant, podem afirmar que aquests tres plans són coincidents, és a dir $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$.

4. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida en la base canònica per

$$f(x, y, z) = (-11x - 7y - 7z, a \cdot y, 14x + 7y + 10z).$$

(a) Trobeu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Quan $a = 3$ calculeu el polinomi característic desenvolupant el determinant per la fila que contingui més zeros. Dieu quins són els valors propis de f i calculeu una base que contingui el nombre màxim de vectors propis.

(c) Si $a \neq 3$ i $a \neq -4$ calculeu una base de $\mathbb{R}^3$ que contingui el nombre màxim de vectors propis de f.

Solució

(a) Per a trobar A, la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$, calculem les imatges dels tres vectors de la base canònica i els posem per columnes.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -7 & -7 \\ 0 & a & 0 \\ 14 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

(b) Per a calcular el polinomi característic de f, desenvolupem el determinant de la matriu per la segona fila:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -11-t & -7 & -7 \\ 0 & 3-t & 0 \\ 14 & 7 & 10-t \end{vmatrix} =$$
$$(3-t)((-11-t)(10-t)+14\cdot 7) = (3-t)(-110+11t-10t+t^2+98) =$$
$$(3-t)(t^2+t-12) = (3-t)(t-3)(t+4)$$

Els valors propis de f són -4 amb multiplicitat 1 i 3 amb multiplicitat 2.

Per a trobar un vector propi de valor propi -4 busquem una base del $\ker(f+4\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11+4 & -7 & -7 \\ 0 & 3+4 & 0 \\ 14 & 7 & 10+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir:

$$\begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 14 & 7 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podem aïllar de la segona equació i veure que $y = 0$. De la primera obtenim $-7x - 7z = 0$ i per tant $z = -x$. De la tercera el mateix. Una solució és el vector $(1, 0, -1)$.

Per a trobar els vectors propis de valor propi 3 busquem una base del $\ker(f-3\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11-3 & -7 & -7 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 14 & 7 & 10-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir:

$$\begin{pmatrix} -14 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema es redueix a una única equació $-14x - 7y - 7z = 0$. Poden ser generadors del subespai de solucions els vectors $(-1, 1, 1)$ i $(0, -1, 1)$ Per tant, una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis de f és $\{(1, 0, -1), (-1, 1, 1), (0, -1, 1)\}$.

(c) El polinomi característic de f en general serà: $\det(A-t\mathrm{I}) = (a-t)(t-3)(t+4)$. Els valors propis de f són -4, 3 i a, tots amb multiplicitat 1 perquè $a \neq 3$ i $a \neq -4$. El vector propi de f corresponent al valor propi -4 és el que ja hem trobat abans, $(1,0,-1)$, perquè de la segona equació es dedueix igualment que $y=0$ i les altres dues equacions són iguals.

Per a trobar el vector propi de valor propi 3 busquem una base del $\ker(f-3\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -14 & -7 & -7 \\ 0 & a-3 & 0 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podem aïllar de la segona equació i $(a-3)y = 0$ i veure que $y=0$ donat que $a \neq 3$. Aleshores de la primera obtenim $-14x - 7z = 0$ i per tant $z = -2x$. La tercera és equivalent. Una solució és el vector $(1,0,-2)$.

Per a trobar el vector propi de valor propi a busquem una base del $\ker(f-a\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11-a & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 10-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si sumem les dues equacions (primera i tercera) obtenim aquesta: $(3-a)x + (3-a)z = 0$. Com que $a \neq 3$ podem aïllar $z = -x$. I substituint a la segona $14x + 7y - (10-a)x = 0$ d'on $y = \frac{-(4+a)x}{7}$. Una solució és el vector $(1, -\frac{4+a}{7}, -1)$.
Per tant una base amb el màxim de vectors propis seria $\{(1,0,-1),(1,0,-2),(1,-\frac{4+a}{7},-1)\}$.
Podem comprovar que el determinant és no nul perquè $a \neq -4$.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$