Estadística sin espinas

(2) Probabilidad

v0.1 24_02_21

Aprende sin espinas
con @carlos_cactus

Sócrates se equivocaba. El conocimiento no es lo único que crece al compartirse: La alegría también.

A la inspiración del bucle_infinito,
al Cibergrupo y al tHash_A, por su amistad,
y sobre todo, a quienes dicen "pero quiero"
cuando sienten "no puedo".

¡Un saludo sin espinas!
@carlos_cactus :D

Y si quieres saber más:
¡Encuéntrame en Telegram como @carlos_cactus o habla con Espinito, el bot Sin Espinas, en @GestionSinEsinasBot.

Únete a la comunidad de Telegram Sin Espinas y no te pierdas nada!

Deja de preocuparte por aprobar y ¡Aprende sin Espinas!

PROBABILIDAD

1. Definiciones

1.1. EXPERIMENTO ALEATORIO

Experimento con distintos posibles resultados sin certeza de cuál sucederá.

Exige ser reproducible: de forma idéntica y tantas veces como se desee.

EJEMPLO

Tirar un dado perfecto.
Lanzar al aire una moneda perfecta.

Se entiende por perfecto aquello que garantiza la equiprobabilidad de resultados elementales.

1.2. ESPACIO MUESTRAL

El conjunto Ω de los posibles resultados que se pueden obtener de un experimento aleatorio es el ESPACIO MUESTRAL.
Se considera FINITO. Se denota, para k resultados, por $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_k$.

EJEMPLO

$\Omega = \{\text{cara}, \text{cara}, \text{cruz}\}$
$\Omega = \{1{,}2{,}4{,}4{,}5\}$

1.3. CARDINAL DE UN CONJUNTO

El operador unario cardinal devuelve el número de elementos de un conjunto dado. Se denota por:
#A
Card(A)
n(A)

EJEMPLO

Se tiene el conjunto A = {a,b,c}
Entonces #A = 3.

Se tiene el conjunto B = {rojo, martes, queso, tiburón}
entonces #B = 4.

1.4. SUCESO ALEATORIO

Cualquier subconjunto del espacio muestral es un suceso aleatorio.
Por tanto, cualquier agrupación de resultados posibles, dados por su DESCRIPCIÓN integra un suceso aleatorio.

EJEMPLO

Para un dado de 6 caras, un suceso aleatorio es:
"sacar un número par"

cuyo cardinal satisface:

$\#(Sacar\ un\ número\ par) = 3$ ya que en el espacio muestral
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
hay 3 resultados FAVORABLES a ese suceso.

→ Nótese que "un número par" no es DIRECTAMENTE NINGÚN RESULTADO, sino la DESCRIPCIÓN DE UN CONJUNTO de resultados.

1.5. RESULTADO FAVORABLE

Se define el número de resultados favorables a un suceso A como su cardinal, es decir, el número de elementos del espacio muestral que contiene.

EJEMPLO

El suceso S = "sacar un número impar" tiene $\#S = 3$

Ya que 3 elementos del espacio muestral Ω lo cumplen {1,3,5}.

1.6. SUCESO ALEATORIO ELEMENTAL

Si un suceso aleatorio contiene un único elemento (un solo resultado), se denomina SUCESO ELEMENTAL.
Se trata ESTRICTAMENTE de aquellos resultados que se pueden obtener del experimento.

EJEMPLO

Sacar un 4.
Sacar un 6.

→ Sí se pueden obtener DIRECTAMENTE del experimento, sin descripción alguna.

1.7. SUCESO SEGURO

Un suceso seguro E está formado por TODOS los resultados del espacio muestral. Entonces, ES propiamente EL ESPACIO MUESTRAL Ω:

$$\#(\mathrm{E}) = \#(\Omega)$$

Se denota por E.

1.8. SUCESO IMPOSIBLE

Un suceso imposible $\emptyset$ (conjunto vacío) es aquel que no ocurre NUNCA.
Se denota por el conjunto vacío $\emptyset$.

Nótese que:

$$\#(\emptyset) = 0$$

2. Operaciones con sucesos

Dado que los sucesos son conjuntos, operar con sucesos es operar con conjuntos.

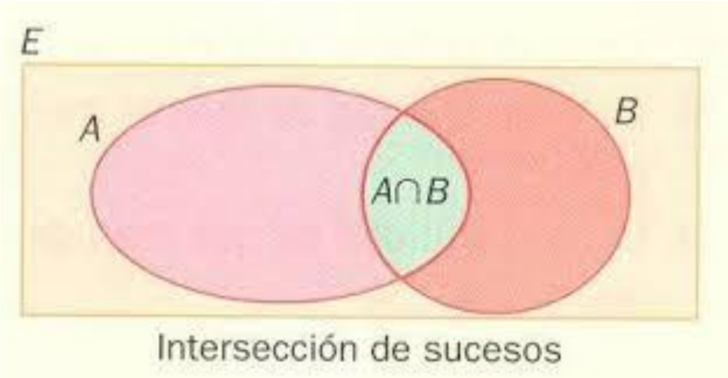
2.1. INTERSECCIÓN DE SUCESOS

La intersección de sucesos está formada por los resultados favorables a todos ellos SIMULTÁNEAMENTE. Se denota por:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$$

Se lee *A intersección B*.

En un diagrama de Venn:



Nótese que:

1. No hay una expresión para conocer la intersección independiente, es decir, hay que examinar cuántos resultados hay en $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

2. Se cumple, para 2 sucesos A y B:
   - $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \leq \#A$
   - $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \leq \#B$

2.2. SUCESOS INCOMPATIBLES Y SUCESOS COMPATIBLES

Dos sucesos A y B son incompatibles si no tiene ningún resultado en común. Por tanto, son mutuamente excluyentes.

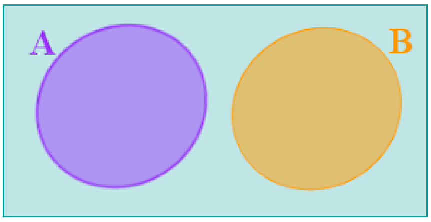
Su intersección es IMPOSIBLE. Es decir:

$$A \cap B = \emptyset$$

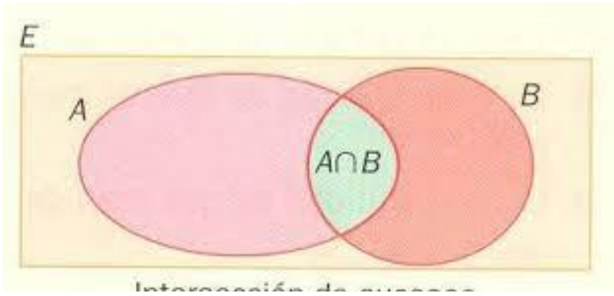
Así como:

$$\#(A \cap B) = 0$$

En un diagrama de Venn:



Sucesos incompatibles (cuya intersección es nula)



Intersección NO NULA de sucesos. A y B son compatibles.

- Los sucesos INCOMPATIBLES cumplen: $\{\nexists\ a\ |a \in A, a \in B\}$

- Los sucesos COMPATIBLES cumplen: $\{\exists\ a\ |a \in A, a \in B\}$

2.3. UNIÓN DE SUCESOS

La unión de sucesos (A unión B) está formada por los resultados favorables a A, a B o a ambos a la vez. Se define como:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Nótese que cuando se efectúa $\#(A) + \#(B)$ se incluyen aquellos que pertenecen a ambos simultáneamente 2 veces. Esta redundancia se resuelve restando $\#(A \cap B)$.

2.4. COMPLEMENTARIO DE UN SUCESO

El suceso complementario $\overline{A}$ de otro suceso A está formado por los resultados NO FAVORABLES a A. Es decir, ÚNICAMENTE contiene resultados fuera de A.

También se escribe A^C.

Se cumple:

$$\#(\overline{A}) = \#(\Omega) - \#(A)$$

2.5. TABLAS DE SUCESOS

Puede ser útil considerar las tablas de sucesos, que se construyen de forma similar a las tablas de contingencia de operadores lógicos.

EJEMPLO

Se toma un dado de 6 caras.
Se definen los sucesos:
A = "Sacar un número par"
B = "Sacar un número mayor que 3"
Entonces:

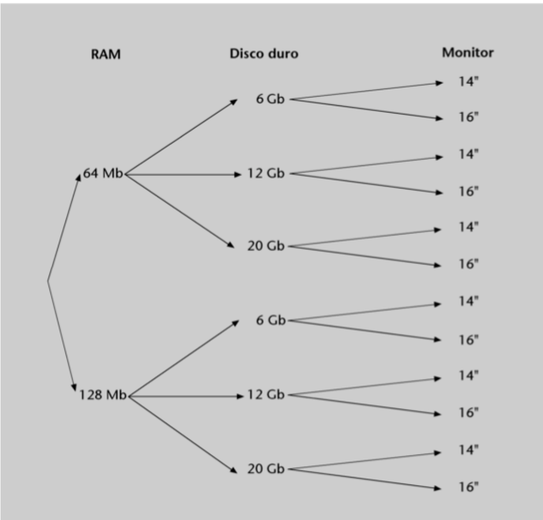
Resultado	¿Está en A?	¿Está en B?	¿Está en $A \cup B$?	¿Está en $A \cap B$?	¿Está en $\overline{A}$?
1	No	No	No	No	Sí
2	Sí	No	Sí	No	No
3	No	No	No	No	Sí
4	Sí	Sí	Sí	Sí	No
5	No	Sí	Sí	No	Sí
6	Sí	Sí	Sí	Sí	No

3. Combinatoria y técnicas de recuento

3.1. REGLA DEL PRODUCTO

El total de posibilidades en una secuencia de elecciones resulta de multiplicar el número de posibilidades de cada elección por el número de posibilidades de la siguiente sucesivamente.

Se puede representar como un árbol:



Se desea conocer cuántas posibilidades hay para componer un equipo informático del cual se elige entre:

- 2 procesadores distintos
- 3 discos duros distintos
- 2 monitores distintos

Entonces hay 2 · 3 · 3 = 16 posibilidades distintas.

3.2. VARIACIONES

Son las agrupaciones ordenadas de elementos de un conjunto SIN posibilidad de repetir.

Si se tienen N objetos, se toman k de forma que:

- NO HACEN FALTA TODOS los elementos
- SIN REPETICIÓN
- IMPORTA EL ORDEN
-

El número de VARIACIONES es:

$$N(N-1)\ldots(N-k+1)=\frac{N!}{(N-k)!}$$

Es decir, k factores decrecientes desde N.

3.3. VARIACIONES CON REPETICIÓN

Son las agrupaciones ordenadas de elementos de un conjunto con posibilidad de repetir.

Si se tienen N objetos, se toman k de forma que:

- NO HACEN FALTA TODOS los elementos
- CON REPETICIÓN
- IMPORTA EL ORDEN

El número de VARIACIONES CON REPETICIÓN es:

$$N^k$$

3.4. PERMUTACIONES

Son las ORDENACIONES de TODOS los elementos de un conjunto sin repetición.

Se tienen N objetos, se toman TODOS ellos de forma que:

- SÍ HACEN FALTA TODOS los elementos
- SIN REPETICIÓN
- IMPORTA EL ORDEN
-

El número de PERMUTACIONES es:

$$N!=N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$$

Es decir, es una VARIACIÓN SIN REPETICIÓN con k = N.

3.5. COMBINACIONES

Son los subconjuntos no ordenados de N elementos tomados de k en k de forma que:

- Pueden NO INTERVENIR TODOS
- SIN REPETICIÓN
- SIN IMPORTAR EL ORDEN

El número de COMBINACIONES es:

$$\binom{N}{k} = \frac{Variaciones\ de\ N\ elementos\ tomados\ de\ k\ en\ k}{permutaciones\ de\ k\ elementos} = \frac{\frac{N!}{(N-k)!}}{k!} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$

Donde $\binom{N}{k}$ se denomina NÚMERO COMBINATORIO y se lee "N sobre k".

También se puede escribir de otras 2 formas:

$$\binom{N}{k} = C(N,k) = C_N^k$$

3.6. EXPRESIONES DE COMBINATORIA

<table>
<tr><td rowspan="2">AGRUPACIONES
6 modelos posibles</td><td colspan="2">$n\ =\ número\ de\ elementos\ disponibles$
$k\ =\ número\ de\ elementos\ que\ agrupamos$</td></tr>
<tr><td>Sí importa el orden
(variaciones y permutaciones)</td><td>No importa el orden
(combinaciones)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sin repetición</td><td>$Si\ n \neq k \rightarrow Variaciones$
$V_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}_{k\ veces}$
$= \frac{n!}{(n-k)!}$</td><td rowspan="2">$Combinaciones$ sin $repetición$:
$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{V_{n,k}}{P_k}$</td></tr>
<tr><td>$Si\ n = k \rightarrow Permutaciones$
$P_k = k!$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Con repetición</td><td>$Si\ n \neq k \rightarrow Variaciones\ con\ repetición$
$VR_{n,k} = n^k$</td><td rowspan="2">$Combinaciones\ con\ repetición$:
$CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$</td></tr>
<tr><td>$Si\ n = k$
$\rightarrow\ Permutaciones\ con\ repetición$
$PR_k^{r_1,r_2,r_3\dots} = \frac{k!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \dots}$</td></tr>
</table>

4. Cálculo de probabilidades

4.1. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

La probabilidad se puede definir como la medida de la tendencia con que se produce un suceso. La probabilidad de un suceso oscila entre 0 (suceso imposible) y 1 (suceso seguro).

La frecuencia relativa de un resultado es un indicador de su tendencia a ocurrir.

Por tanto, se puede asimilar a la probabilidad de A a la suma de las frecuencias relativas de sus resultados favorables.

$$\frac{Resultados\ favorables\ del\ suceso\ A}{Repeticiones\ del\ experimento} = \frac{n_1}{R} + \frac{n_2}{R} + \cdots + \frac{n_3}{R} = r_1 + r_2 + \cdots r_k = P(A)$$

Entendiendo un suceso como un conjunto de resultados, cada uno de los cuales tiene asociada una frecuencia relativa r_i.

EJEMPLO

Considérese un dado trucado del cual se quiere conocer el defecto.
Por ejemplo, se define un suceso A = "sacar número impar":

$$A = \{1,3,5\}$$

Un dado perfecto ofrecería la tabla de valores:

x_i	1	2	3	4	5	6
r_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Pero el dado que se considera devuelve:

x_i	1	2	3	4	5	6
r_i	5/20	1/20	2/20	3/20	7/20	2/20

Ahora, se puede calcular la probabilidad P del suceso A (denotado por P(A) que se lee "probabilidad de A") sumando las frecuencias relativas de los resultados que lo componen:

$$P(A) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{5}{20} + \frac{2}{20} + \frac{7}{20} = \frac{14}{20} = 0{,}7$$

Este cálculo corresponde ya que cada uno de los resultados es un suceso elemental DISYUNTO (mutuamente excluyente con todos los otros).

4.2. TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

La teoría de la probabilidad aspira a asignar probabilidades a sucesos complejos a partir del cálculo de la probabilidad de sucesos más simples
.
Es extensa, pero los requisitos de coherencia que definen las propiedades que se emplean aquí fueron propuestas por Kolmogorov y son:

1. La probabilidad de cualquier suceso está comprendida entre 0 y 1 (que se puede expresar como número decimal o porcentaje):

$$0 \leq P(A) \leq 1 \ \forall \ A$$

2. La probabilidad de la unión de sucesos disyuntos (mutuamente excluyentes) es la suma de las probabilidades de cada suceso.

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

$$\text{Siempre que } \mathrm{P(A \cap B) = 0}, \text{es decir que A y B sean INCOMPATIBLES}$$

3. La probabilidad del conjunto de todos los posibles resultados es 1:

$$\mathrm{P}(\Omega) = 1$$

Nótese que a partir de ahora se usa P para definir una función que asigna a cada suceso (el parámetro de la función) su valor de probabilidad.

A partir de las propiedades anteriores, se definen algunas otras, enunciadas a continuación.

4.3. PROBABILIDAD DEL SUCESO SEGURO

Un suceso seguro, denotado por E, tiene probabilidad 1:

$$\mathrm{P(E) = 1}$$

Es decir, su frecuencia relativa es 1.

4.4. PROBABILIDAD DEL SUCESO IMPOSIBLE

Un suceso imposible, denotado por el conjunto vacío ∅, tiene probabilidad 0:

$$P(\emptyset) = 0$$

Es decir, su frecuencia relativa es 0.

4.5. PROBABILIDAD DEL SUCESO COMPLEMENTARIO U OPUESTO

Dado un suceso A, se denota el suceso opuesto o complementario como $\overline{\mathrm{A}}$ o bien A^C, cuya probabilidad es:

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}^{\mathrm{C}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$$

Nótese:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1$$

4.6. PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE SUCESOS COMPATIBLES

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

Donde: $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \neq 0$ Es decir, A y B pueden darse a la vez.

Nótese que cuando se efectúa $\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$ se incluyen aquellos que pertenecen a ambos simultáneamente 2 veces. Esta redundancia se resuelve restando $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Nótese otra propiedad relevante de la unión:

Si se define A como aquellos resultados de A que están en B además de aquellos resultados que NO están en B, se tiene:

$$A = (A \cap \mathrm{B}) \cup (A \cap \overline{\mathrm{B}})$$

4.7. PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE SUCESOS INCOMPATIBLES

Según lo anterior, para 2 sucesos INCOMPATIBLES, se cumplirá:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) + 0$$

Donde: $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0 \leftrightarrow \mathrm{A\ y\ B\ son\ incompatibles}$

Nótese que la probabilidad de la unión de sucesos INCOMPATIBLES coincide con la suma de sus frecuencias relativas.

Su probabilidad de intersección es nula, es decir, nunca se dan a la par.

4.8. LEYES DE DE MORGAN

Primera ley de De Morgan

La probabilidad del complementario de la unión equivale a la probabilidad de la intersección de complementarios:

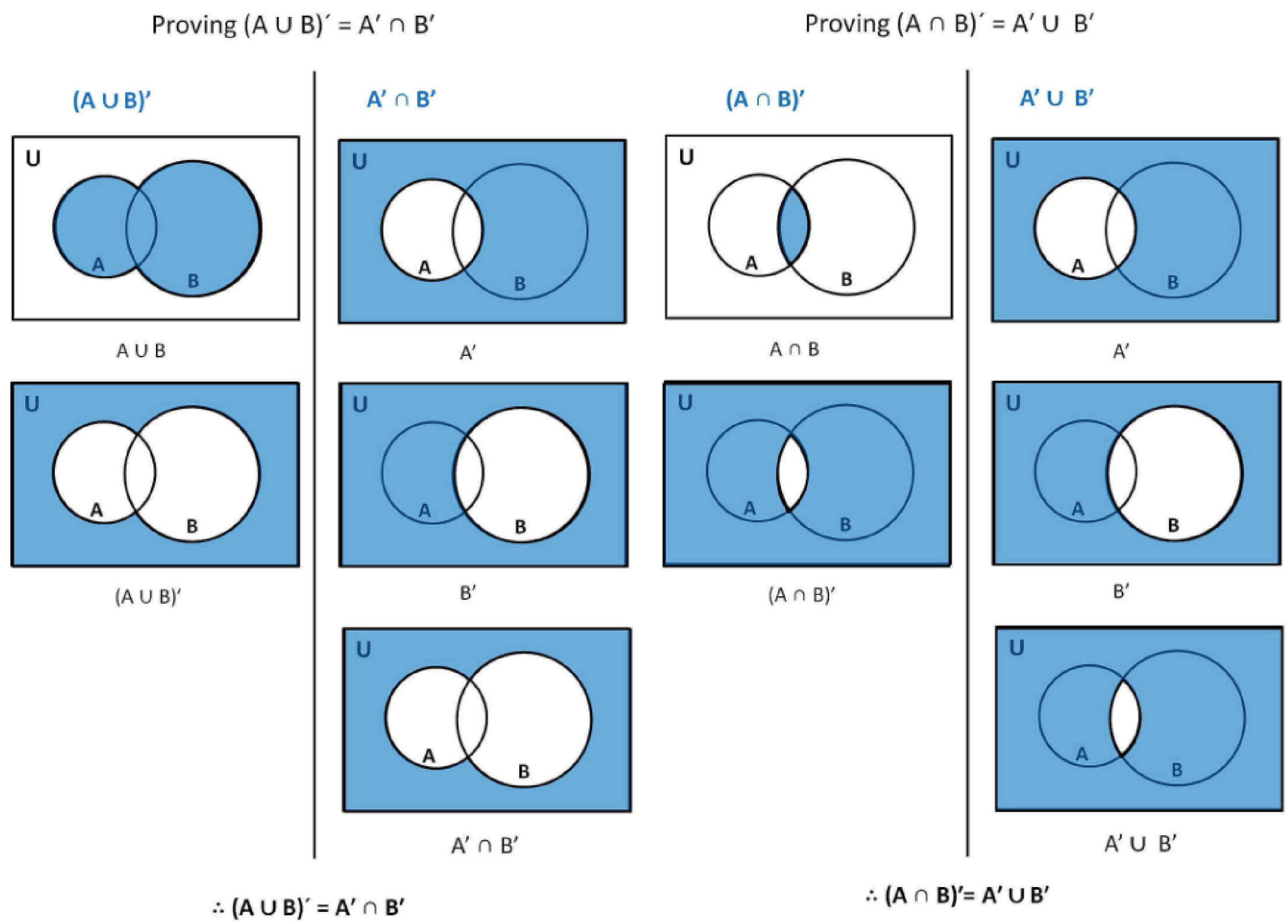
$$P(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})$$

Segunda ley de De Morgan

La probabilidad del complementario de la intersección equivale a la probabilidad de la unión de complementarios:

$$P(\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}})$$

Se pueden visualizar mediante un diagrama de Venn:
→En la imagen se denota el complementario con "prima". Es decir: $\overline{\mathrm{A}} = A'$



4.9. ESPACIO UNIFORME

Un espacio muestral Ω es UNIFORME si todos los sucesos que lo forman son EQUIPROBABLES. Considerando:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$$

Se cumple:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{k}$$

Es decir:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_k)$$

Nótese que necesariamente:

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_3) = 1 = P(\Omega)$$

4.10. REGLA DE LAPLACE

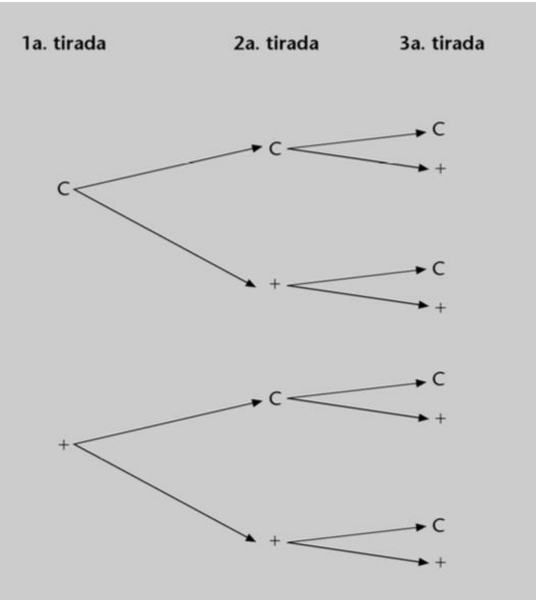
En un espacio uniforme Ω (sucesos EQUIPROBABLES), la probabilidad de un suceso A resulta de dividir el cardinal de ese suceso #A (número de resultados favorables a A) entre el número de resultados en el espacio #Ω.

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables a A}}{\text{Número de resultados posibles en } \Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Donde P(A) es la probabilidad asignada al suceso A.

EJEMPLO

Se tira una moneda al aire 3 veces y se examinan los resultados.



Se definen los sucesos:

C = "sale cara"

\+ = "sale cruz"

Se consideran las 8 posibilidades:

Ω = {CCC,CC+,C+C,C++,+CC,+C+,++C,+++}

Se desea conocer la probabilidad de los sucesos A, B y C siendo:

A = "salen 3 caras"
B = "sale 1 única cruz"
C = "no salen 2 caras ni 2 cruces consecutivas"

Entonces:

$$P(A) = \frac{1}{8}; P(B) = \frac{3}{8}; P(C) = \frac{2}{8}$$

4.11. PROBABILIDAD EN ESPACIO NO UNIFORMES: PROBABILIDAD EMPÍRICA

Cuando no se puede asegurar que los resultados de un experimento aleatorio son equiprobables, se debe recurrir a la experimentación: repetir MUCHAS veces el experimento para dar representatividad a las frecuencias relativas observadas (nótese la necesidad de REPETIBILIDAD de los experimentos aleatorios).

4.12. PROBABILIDAD CONDICIONADA: SUCESOS DEPENDIENTES

La probabilidad condicionada modela las situaciones en que el resultado de un suceso influye en el resultado de otro. Si existe esa relación entre sucesos, se dice que son DEPENDIENTES.
Dados 2 sucesos DEPENDIENTES A y B, se cumple que su probabilidad condicionada $\mathrm{P(A \mid B)}$ es:

$$\mathrm{P(A \mid B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$

Donde $\mathrm{P(A \mid B)}$ se lee "probabilidad del suceso A condicionada al suceso B".

Esa expresión permite conocer la probabilidad con que se da el suceso A SABIENDO QUE SE HA DADO EL SUCESO B. Es decir, en el cálculo interviene INFORMACIÓN sobre lo sucedido, no definida a priori por los conjuntos A y B.

Nótese que esto exige que A y B SEAN COMPATIBLES. Es decir:

$$\mathrm{P(A \cap B)} \neq 0$$

EJEMPLO

Se tira un dado perfecto de 6 caras.
Se desea conocer la probabilidad de que salga un número PAR (suceso S).
A priori se tiene:

$$P(S) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 50\%$$

Puesto que #S = 3, con S = {2,4,6}.

Lo lanzamos y cae debajo de la mesa. Antes de ver el resultado, otra persona nos dice que ha salido un número MAYOR que 3 (se ha cumplido un suceso T).
La probabilidad de S se ve modificada por el resultado de T.

Ahora, tanto el espacio Ω como el conjunto S se ven restringidos:

1. #Ω' = 3 dado que Ω' = {4,5,6}.
2. #S' = 2 dado que hay 2 números pares en Ω', el 4 y el 6.

Entonces:

$$P(S \mid T) = \frac{2}{3}$$

→ Lo anterior se verifica a partir de la expresión para la probabilidad condicionada. Es decir:

S = "sale PAR" → #S = #{2,4,6} = 3
T = "sale mayor que 3" → #T = #{4,5,6} = 3 → $P(T) = \frac{3}{6} = 0.5$

Para conocer $\mathrm{S} \cap \mathrm{T}$ se EXAMINAN los conjuntos (NOHAY UNA EXPRESIÓN) en busca de los RESULTADOS COMUNES A AMBOS CONJUNTOS.

Se encuentra $\mathrm{S} \cap \mathrm{T} = \{4,6\}$. Entonces:

$$\mathrm{P}(\mathrm{S} \cap \mathrm{T}) = \frac{2}{6}$$

De lo cual:

$$\mathrm{P}(\mathrm{S} \mid \mathrm{T}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{S} \cap \mathrm{T})}{\mathrm{P}(\mathrm{T})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

EJEMPLO

Se dispone de la siguiente información sobre los ordenadores de una empresa

		Velocidad	
		V1	V2
Procesador	Modelo 1	10	20
	Modelo 2	15	8

Es decir, por ejemplo:

- 10 ordenadores tienen el modelo M1 y funcionan a V1.
- 8 ordenadores tienen el modelo M2 y función a V2.
- 30 ordenadores tienen el modelo M1.
- 23 ordenadores tienen el modelo M2.
- 28 funcionan a velocidad V2.
- 25 funcionan a velocidad V1.

Se desea calcular:

a) La probabilidad de que funcione a V1 sabiendo que es del modelo M2:

$$P(V1 \mid M2) = \frac{\mathrm{P(V1 \cap M2)}}{\mathrm{P(M2)}} = \frac{15}{15+8} = \frac{15}{23}$$

b) Ahora al revés: probabilidad de que lleve M2 sabiendo que opera a V1.

$$P(M2 \mid V1) = \frac{\mathrm{P(V1 \cap M2)}}{\mathrm{P(V1)}} = \frac{15}{10+15} = \frac{15}{25}$$

Como se observa, la probabilidad condicionada, no es conmutativa.

c) La probabilidad de que lleve M1 sabiendo que funciona a V2.

$$P(M2 \mid V1) = \frac{\mathrm{P(V1 \cap M2)}}{\mathrm{P(V1)}} = \frac{15}{10+15} = \frac{15}{25}$$

En conclusión:
- **La INTERSECCIÓN de ambos sucesos (condicionado y condición) se lee en la tabla, EN LA CELDA en que se cruzan ambas fila y columna.**
- **La probabilidad del suceso CONDICIÓN (denominador) se extrae de la suma de la HILERA (fila o columna).**

4.13. INTERSECCIÓN DE SUCESOS DEPENDIENTES

No se dispone de una expresión para el cálculo de la intersección de sucesos de forma autónoma.
En el caso de sucesos INDEPENDIENTES, se deben examinar los conjuntos.
En el caso de sucesos DEPENDIENTES, la probabilidad de la intersección se calcula en función de la probabilidad CONDICIONADA entre ellos $\mathrm{P(A \mid B)}$, según la cual se dará A en función de una condición B.

$$\mathrm{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)}$$

Donde:
A es el suceso condicionado.
B es el suceso CONDICIÓN (información previamente conocida).

Esto se deriva de la expresión anterior:

$$\mathrm{P(A \mid B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$

Y, aislando la intersección, también se cumple:

$$\mathrm{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)}$$

Por tanto, es relevante notar:

$$\mathrm{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A) \cdot P(B \mid A)}$$

4.14. SUCESOS INDEPENDIENTES

Dos sucesos son independientes si la probabilidad de que uno ocurra no está influida por que el otro suceso ocurra.

Los sucesos independientes cumplen:

- La probabilidad de su intersección es el producto de sus probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Mientras que para sucesos DEPENDIENTES:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

sino que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

- La probabilidad de uno no se modifica porque ocurra el otro:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

- La probabilidad del otro no se modifica porque ocurra el uno:

$$P(B \mid A) = P(B)$$

4.15. INFLUENCIA DE SUCESOS

Nótese la influencia favorecedora u obstructora de sucesos en la definición del carácter dependiente o independiente entre ellos:

- Si $P(A \mid B) = P(A)$ B no influye en que ocurra A. Son independientes
- Si $P(A \mid B) > P(A)$ B favorece que ocurra A. Son dependientes.
- Si $P(A \mid B) < P(A)$ B obstruye que ocurra A. Son dependientes.

5. Teorema de Bayes

5.1. APROXIMACIÓN AL TEOREMA DE BAYES

El teorema de Bayes permite entender relaciones de causa-efecto entre sucesos dependientes o identificar su grado de dependencia.

Se basa en el concepto de PARTICIÓN del espacio muestral, que permite estudiar CONSECUTIVAMENTE 2 características de la muestra y la influencia de una sobre otra.

En el caso de la probabilidad condicionada, se conoce que el suceso condición se ha dado. En el caso del Teorema de Bayes, se prevé la probabilidad del suceso condicionado si se diera la condición, que es asumida como HIPÓTESIS.

5.2. PARTICIÓN MUESTRAL

Se denomina partición de un conjunto de E a cualquier colección de conjuntos disyuntos de E, tales que su unión es el conjunto E.

O sea, dado el conjunto E, la colección de conjuntos $\{A_1, A_2, \ldots A_m\}$ es una partición si verifica 2 propiedades:

1. $\mathrm{A_i} \cap \mathrm{A_j} = \emptyset \; \forall (i, j, i \neq j)$

2. $\mathrm{A_1} \cup \mathrm{A_2} \cup \ldots \cup \mathrm{A_m} = E$

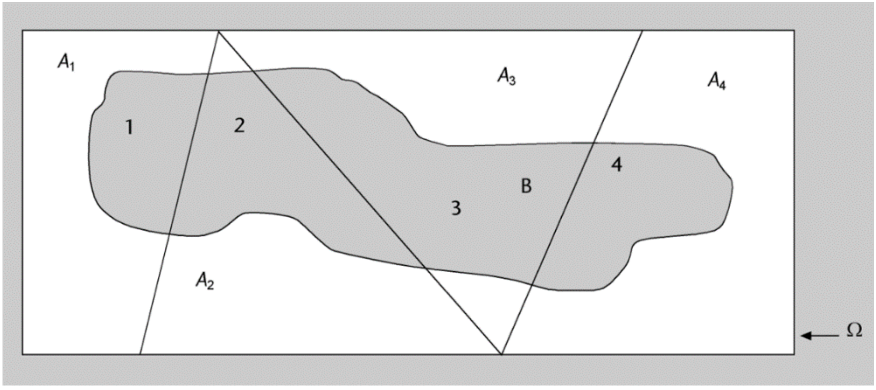
5.3. TEOREMA DE LAS PROBABILIDADES TOTALES

el teorema de las probabilidades totales afirma que si la colección de conjuntos $\{A_1, A_2, \ldots A_m\}$ es partición del espacio muestral Ω y B es cualquiera de los sucesos que contiene, se verifica lo siguiente:

$$P(B) = \underbrace{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1)}_{P(B)\ si\ ocurre\ A_1} + \underbrace{P(A_2) \cdot P(B \mid A_2)}_{P(B)\ si\ ocurre\ A_2} + \cdots + \underbrace{P(A_m) \cdot P(B \mid A_m)}_{P(B)\ si\ ocurre\ A_m}$$

Es decir, que la probabilidad de B es la suma de las probabilidades de que ocurra B de forma condicionada al acontecimiento de cada suceso A_i contenido en la partición de Ω.

Esto es la suma de probabilidad de cada uno de los posibles caminos que conducen a que se dé B. Gráficamente:



5.4. ÁRBOLES DE PROBABILIDAD Y TABLAS DE CONTINGENCIA PARA PROBABILIDAD CONDICIONADA

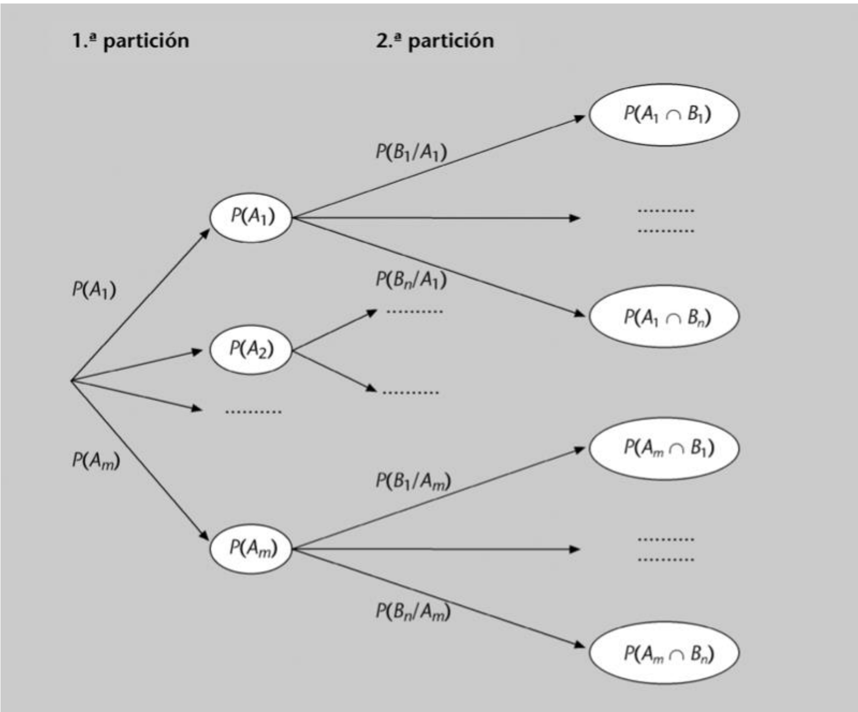
Una forma muy útil de representar las particiones y sus probabilidades condicionadas son los árboles:

- En cada nodo se escribe la probabilidad de LLEGAR allí.
- En cada rama se escribe la probabilidad de PASAR por allí.

Entonces:

- En los nodos terminales se escribe la probabilidad de la intersección. Se calcula como el producto de probabilidades de las ramas que hay que cruzar para llegar allí.
- La suma de probabilidades de las ramas que salen del mismo nodo es 1.
- La suma de todos los nodos terminales es 1.

Se aplica el teorema de las probabilidades totales:



EJEMPLO

El grado de satisfacción entre 2 sistemas operativos (Doors98 y Lanus) en una encuesta se puede responder con "Muy satisfecho" y "Poco satisfecho" solamente.

Se han obtenido de la encuesta los siguientes datos.

a) El 70% de los usuarios encuestados usa Doors98.
b) El 34% de los usuarios encuestados está "Muy satisfecho".
c) La probabilidad de estar "Poco satisfecho" usando Doors98 es del 63%.
d) El 10% de los encuestados que usa Doors98 está "Muy satisfecho".

Se observan 2 particiones:

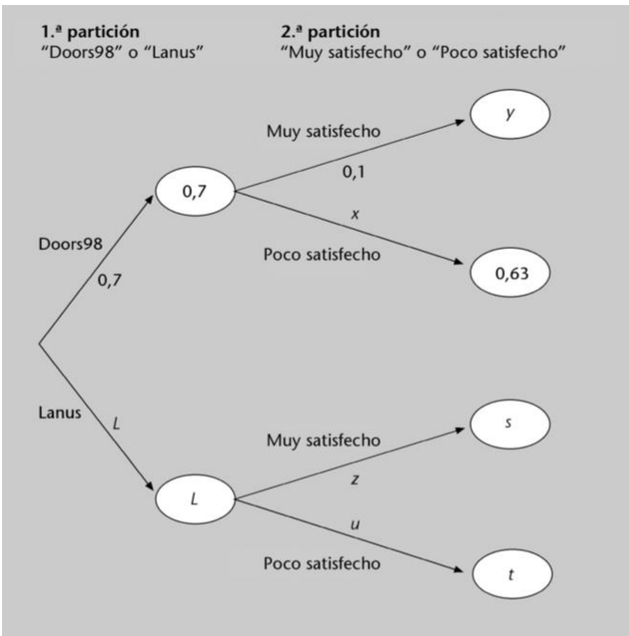
- Según el sistema operativo que usan {"Doors98", "Lanus"}
- Según el grado de satisfacción {"Muy satisfecho", "Poco satisfecho"}

Se presume que el uso de un sistema u otro puede ser la CAUSA del grado de satisfacción.

Con los datos provistos, puede construir la tabla:

	Muy satisfecho	Poco satisfecho	TOTAL
Doors98	0,07	0,63	0,7
Lanus			
	0,34		

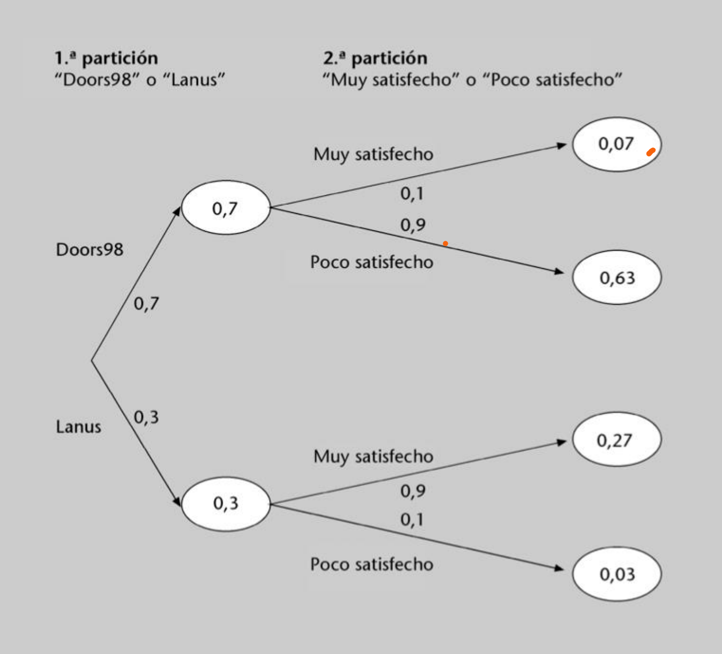
→ Nótese que la probabilidad 0,07 se deriva de conocer a) y d). Si el 70% del total de usuarios usa Doors98 y el 10% de quienes usan Doors98 está "Muy satisfecho", representan el 7% del total (10% del 70%). Se representa el árbol:



Además, dado que la suma de todos los nodos terminales ha de sumar 1, se puede completar la tabla:

	Muy satisfecho	Poco satisfecho	TOTAL
Doors98	0,07	0,63	0,7
Lanus	0,34 – 0,07 = 0,27	0,66 – 0,63 = 0,03	1 – 0,7 = 0,3
	0,34	1 – 0,34 = 0,66	Debe ser 1

Y se puede completar el árbol:



El tipo de tabla que se ha usado se denomina TABLA DE CONTINGENCIA y permite calcular las probabilidades condicionas de forma MUY SENCILLA:

- En los encabezados de filas y columnas se sitúan las 2 particiones (por ejemplo, sistema usado en filas y grado de satisfacción en columnas).

- En cada celda de cada hilera se encuentra la INTERSECCIÓN (en forma de frecuencia o probabilidad) de cada una de las hileras que allí se intersecan.

- En las últimas hileras se escribe la probabilidad MARGINAL, es decir, la probabilidad de cada suceso de cada partición.

- La suma de las probabilidades marginales es 1, ya que las particiones, por definición, son conjuntos disyuntos cuya unión es el espacio muestral.

Las tablas de contingencia se emplean para:

1. La identificación de INDEPENDENCIA de sucesos verificando si se cumple:
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
2. El cálculo de las INTERSECCIONES de las particiones, CONSULTANDO en las CELDAS.
3. El cálculo de PROBABILIDAD CONDICIONADA dividiendo una CELDA ENTRE el total de su HILERA (ya sea fila o columna).

	A_1	A_2	...	A_m	Total
B_1	$P(B_1 \cap A_1)$	$P(B_1 \cap A_2)$	...	$P(B_1 \cap A_m)$	$P(B_1)$
B_2	$P(B_2 \cap A_1)$	$P(B_2 \cap A_2)$	...	$P(B_2 \cap A_m)$	$P(B_2)$
...					
B_n	$P(B_n \cap A_1)$	$P(B_n \cap A_2)$	...	$P(B_n \cap A_m)$	$P(B_n)$
Total	$P(A_1)$	$P(A_2)$	...	$P(A_m)$	1

Es decir:

- Al final de cada hilera hay la probabilidad marginal de cada suceso.
- La suma de las probabilidades marginales es 1.
- En cada celda se encuentra la intersección de 2 sucesos.

5.5. DEFINICIÓN DEL TEOREMA DE BAYES

A partir del teorema de las probabilidades totales, para un espacio Ω con una partición $\{A_1, A_2, \dots A_m\}$ en el que se da B, se puede aislar la probabilidad condicionada de cada suceso A_i considerándolo como posible causa de B.

Se define como:
$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

Se demuestra de la siguiente forma. La probabilidad condicionada cumple:
$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$$

Pero a su vez:
$$P(B \mid A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)}$$

De lo cual:
$$P(B \cap A_i) = P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

Entonces, en la primera expresión:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

Y esta es la expresión que permite calcular la probabilidad con se da CADA UNO DE LOS SUCESOS DE A (CAUSAS DE B) presumiéndolo como posible causa del efecto observado en B.

EJEMPLO

Se desea calcular con qué probabilidad un usuario usa Doors98 sabiendo que su grado de satisfacción es "Muy satisfecho".

Es decir, se pide:

$$P(\text{"}Doors98\text{"} \mid \text{"Muy satisfecho"})$$

Donde:
"Doors98" = D (posible **CAUSA** A_i)
"Muy satisfecho" = M (**EFECTO** B en)

Se tiene:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

En este caso:

$$P(D \mid M) = \frac{P(M \mid D) \cdot P(D)}{P(M)}$$

Ahora se recurre a la tabla de contingencia anterior:

	Muy satisfecho	Poco satisfecho	TOTAL
Doors98	0,07	0,63	0,7
Lanus	0,27	0,03	0,3
	0,34	0,66	1

Se lee:
1. $P(D) = 0{,}7$
2. $P(M) = 0{,}34$
3. $P(M \mid D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}07}{0{,}7} = 0{,}1 \rightarrow$ Probabilidad de M usando D.

De lo cual:

$$P(D \mid M) = \frac{P(M \mid D) \cdot P(D)}{P(M)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}7}{0{,}34} = 0{,}2058$$

Nótese que es una consecuencia del teorema de las probabilidades totales:

$$\mathrm{P}(D \mid \mathrm{M}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \mid \mathrm{D}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{D})}{\mathrm{P}(\mathrm{M})} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \mid \mathrm{D}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{D})}{\underbrace{\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{M}|\mathrm{D}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{D})}_{\substack{camino\ D \\ para\ M}} + \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{M}|\mathrm{L}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{L})}_{\substack{camino\ L \\ para\ M}}}_{T^{a}\ Probabilidad\ total}}$$

Donde L = "Usa Lanus" y cada probabilidad condicionada es:

$$\mathrm{P}(D \mid \mathrm{M}) = \frac{\frac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap D)}{\mathrm{P}(\mathrm{D})} \cdot \mathrm{P}(\mathrm{D})}{\frac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap D)}{\mathrm{P}(\mathrm{D})} \cdot \mathrm{P}(\mathrm{D}) + \frac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap L)}{\mathrm{P}(\mathrm{L})} \cdot \mathrm{P}(\mathrm{L})}$$

De lo cual, simplificando:

$$\mathrm{P}(D \mid \mathrm{M}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap D)}{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap D) + \mathrm{P}(\mathrm{M} \cap L)} = \frac{0{,}07}{0{,}07 + 0{,}27} = \frac{0{,}07}{0{,}34} = 0{,}2058$$

En el árbol de probabilidad:

$\frac{7}{10}$ D
- $\frac{1}{10}$ M 0,07
- $\frac{9}{10}$ P 0,63

$\frac{3}{10}$ L
- $\frac{9}{10}$ M 0,27
- $\frac{1}{10}$ P 0,03

Nótese que la suma de los nodos derivados de ramas M es:

0,07 (M usando D)
0,27 (M usando L)
0,07 + 0,27 = 0,34

Y la probabilidad de alcanzar M usando D, es decir $\mathrm{P}(D \mid \mathrm{M})$ se lee en el nodo terminal superior, como producto de las ramas que conducen a él:

$$\mathrm{P}(D \mid \mathrm{M}) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07$$

Se generaliza como:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A_i} \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A_i} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{\text{Nodo terminal INTERSECCIÓN de causa } \mathrm{A_i} \text{ con efecto B}}{\text{Suma de nodos termianles con efecto B}}$$

Nótese que se observa lo mismo en la tabla:

	Muy satisfecho	Poco satisfecho	TOTAL
Doors98	0,07	0,63	0,7
Lanus	0,27	0,03	0,3
	0,34	0,66	1

5.6. DIFERENCIA DE SUCESOS

Se define la diferencia entre 2 sucesos como la exclusión de los elementos de aquellos que están en AMBOS (es decir, de su intersección) respecto los de uno de ellos. Es decir:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$

ENTREGABLE 2 – CUESTIONARIO

PREGUNTA 1

Se tira un dado dos veces y se denota por "S" a la suma de los resultados y por "P" al producto de los resultados. Calculad las siguientes probabilidades:

a) $P(7 \leq S \leq 9)$

Se consideran los pares de resultados de ambos dados:

PARES		D2					
		1	2	3	4	5	6
D1	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Se considera la suma de cada par:

SUMA		D2					
		1	2	3	4	5	6
D1	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Se observan 15 casos favorables respecto 36 posibles:

$$P(7 \leq S \leq 9) = \frac{15}{36}$$

b) $P(8 \leq P \leq 11)$

PRODUCTO		D2					
		1	2	3	4	5	6
D1	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24
	5	5	10	15	20	25	30
	6	6	12	18	24	30	36

Se considera el producto P de cada par:

Se observan 5 casos favorables respecto 36 posibles:

$$P(8 \leq S \leq 11) = \frac{5}{36}$$

PREGUNTA 2

En la siguiente tabla se encuentra la relación entre el nivel de satisfacción de 209 individuos con su moto, distinguiendo según su nivel de estudios:

	Alto	Medio	Bajo
No graduado	39	33	32
Graduado	36	39	30

En primer lugar, se completan los totales por filas y columnas:

	Alto	Medio	Bajo	TOTAL
$\overline{G}$	39	33	32	104
G	36	39	30	105
TOTAL	75	72	62	209

El tamaño muestral es n = 209

Pregunta 2a

Calculad la probabilidad de que el nivel de satisfacción sea "Medio".

$$P(\text{Medio}) = \frac{72}{209}$$

Pregunta 2b

Calculad la probabilidad de que su nivel de estudios sea "No graduado".

$$P(\overline{G}) = \frac{104}{209}$$

Pregunta 2c

Calculad la probabilidad de que el nivel de satisfacción con su moto sea "Bajo" y su nivel de estudios sea "No graduado".

$$P(\text{Bajo} \cap \overline{G}) = \frac{32}{209}$$

Pregunta 2d

Calculad la probabilidad de que el nivel de satisfacción con su moto sea "Bajo" sabiendo que su nivel de estudios es "No graduado".

En este caso, se trata de una probabilidad CONDICIONADA, es decir, de entre las observaciones con nivel de estudios "No graduado", se buscan aquellas con nivel de satisfacción "Bajo". Esto es:

$$\mathrm{P(Bajo} \mid \overline{\mathrm{G}}) = \frac{\mathrm{P(Bajo} \cap \overline{\mathrm{G}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}})} = \frac{\frac{32}{209}}{\frac{104}{209}} = \frac{32}{104}$$

Pregunta 2e

Calculad la probabilidad de que su nivel de estudios sea "No graduado" sabiendo que el nivel de satisfacción con su moto es "Bajo".

En este caso, se trata de una probabilidad CONDICIONADA, es decir, de entre las observaciones con nivel de satisfacción "Bajo", se buscan aquellas con nivel de estudios "No graduado". Esto es:

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}} \mid \mathrm{Bajo}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}} \cap \mathrm{Bajo})}{\mathrm{P(Bajo)}} = \frac{\frac{32}{209}}{\frac{62}{209}} = \frac{32}{62}$$

PREGUNTA 3

Si dados dos sucesos A y B resulta que:

a) $\mathrm{P(A)} = 0.5000$
b) $\mathrm{P(B)} = 0.7000$
c) $\mathrm{P(A \cap B)} = 0.350$

En primer lugar, se observa que:

- A y B son sucesos INDEPENDIENTES, ya que: $\mathrm{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$
- A y B son sucesos COMPATIBLES, ya que: $\mathrm{P(A \cap B)} \neq 0$

Entonces, se cumplirá que:

- $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
- $\mathrm{P(A \mid B) = P(A)}$ ya que son independientes
- $\mathrm{P(B \mid A) = P(B)}$ ya que son independientes

Calculad las siguientes probabilidades de manera exacta:

a. $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = 0.5 + 0.7 - 0.35 = 0.85$

b. $\mathrm{P(A) \cdot P(B)} = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$

c. $\mathrm{P(A^C)} = 1 - \mathrm{P(A)} = 1 - 0.5 = 0.5$

d. $\mathrm{P(A \mid B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) = 0.5$

PREGUNTA 4

Un estudio entre 370 alumnos de la UOC pedía, entre otras variables, el sexo y si alguna vez se había visitado el Taj Mahal. Una vez procesadas las respuestas, se obtuvo lo siguiente:

- Respondieron 176 hombres y 194 mujeres.
- En total 123 de los encuestados no habían visitado el Taj Mahal
- 48 mujeres no habían visitado el Taj Mahal

En primer lugar, se construye la tabla de contingencia (T designa "haber visitado Taj Mahal"):

	Hombre	Mujer	TOTAL
$\overline{T}$		48	123
T			
TOTAL	176	194	370

Se deducen los datos que faltan:

123 − 48 = 75 hombres no habían visitado el Taj Mahal
176 − 75 = 101 hombres sí habían visitado el Taj Mahal
194 − 48 = 146 mujeres que sí habían visitado el Taj Mahal
370 − 123 = 247 personas que han visitado el Taj Mahal

	H	M	TOTAL
$\overline{T}$	75	48	123
T	101	146	247
TOTAL	176	194	370

Se pide:

Pregunta 4a

Calculad la probabilidad de que un encuestado seleccionado al azar sea hombre.

Según la Ley de LaPlace:

$$P(H) = \frac{176}{370}$$

Pregunta 4b

Calculad la probabilidad de que un encuestado seleccionado al azar sea mujer y haya visitado el Taj Mahal

Se consideran la intersección entre "Mujer" y "Haber visitado el Taj Mahal" (sucesos independientes):

$$P(M \cap T) = \frac{146}{370}$$

Pregunta 4c

Escogemos un cuestionario al azar y resulta ser el de un hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya visitado el Taj Mahal?

Se trata de una probabilidad condicionada a "Hombre".

$$P(\bar{T} \mid H) = \frac{P(\bar{T} \ \cap \ H)}{P(H)} = \frac{\frac{75}{370}}{\frac{176}{370}} = \frac{75}{176}$$

Pregunta 4d

Escogemos un cuestionario al azar y resulta ser el de una persona que ha visitado el Taj Mahal. ¿Cual es la probabilidad de que sea una mujer?

Se trata de una probabilidad condicionada a "Haber visitado el Taj Mahal".

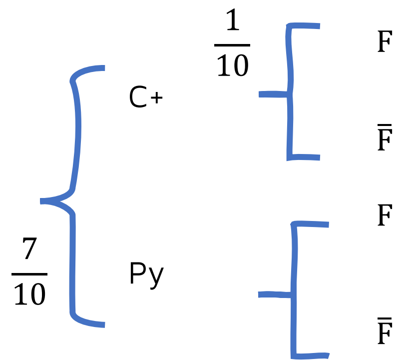
$$P(M \mid T) = \frac{P(M \ \cap \ T)}{P(T)} = \frac{\frac{146}{370}}{\frac{247}{370}} = \frac{146}{247}$$

PREGUNTA 5
Un determinado proyecto se puede realizar en Python o en C+ y puede ser que funcione o que no. Además, disponemos de la siguiente información:

A. La probabilidad de realizar el proyecto en Python es $\frac{7}{10}$.
B. La probabilidad de que funcione sabiendo que NO se ha realizado en Python es fracción $\frac{1}{10}$.
C. La probabilidad de que el proyecto funcione es fracción $\frac{59}{100}$.

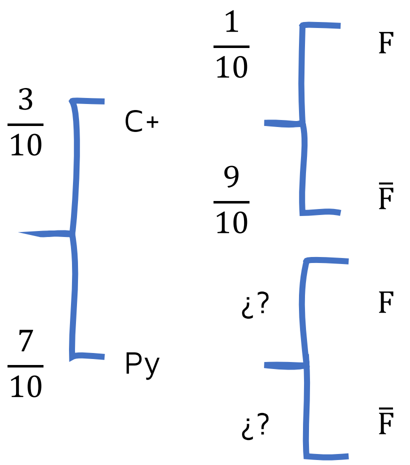
En primer lugar, se dibuja el diagrama de árbol con la información dada:

Siendo:
C+ = El proyecto se realiza en C+
Py = El proyecto se realiza en Python
F = El proyecto funciona
$\overline{\mathrm{F}}$ = El proyecto NO funciona



Se sabe:
P(Py) = 0.7
P(C+) = 0.1
$\mathrm{P(F)}$ = 0.59 → No representa una rama úni
Puede fallar tanto hecho en Py como en C+.

Se deduce cuanto se puede a partir de los datos, por complementariedad:



Pregunta 5a

La probabilidad de que el proyecto se haya realizado en C+.

$$\mathrm{P(C+)} = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{C+}}) = 1 - \mathrm{P(Py)} = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

Pregunta 5b

La probabilidad de que funcione y que se haya realizado en Python.

$$\mathrm{P(F \cap Py)} = \mathrm{P(Py)} \cdot \mathrm{P(F \mid Py)} = \frac{7}{10} \cdot \mathrm{P(F \mid Py)}$$

Averiguar P(F | Py) exige recurrir al Teorema de la probabilidad total, sabiendo que la probabilidad de que el proyecto funcione $P(F) = \frac{59}{100}$. Es decir:

$$P(F) = P(Py) \cdot P(F \mid Py) + P(C+) \cdot P(F \mid C+)$$

En este caso:

$$\frac{59}{100} = \frac{7}{10} \cdot P(F \mid Py) + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10}$$

Aislando $P(F \mid Py)$:

$$P(F \mid Py) = \left(\frac{59}{100} - \frac{3}{100}\right) \cdot \frac{10}{7} = \frac{56}{100} \cdot \frac{10}{7} = \frac{8}{10}$$

Ahora ya podemos calcular la intersección:

$$\mathrm{P(F \cap Py)} = \frac{7}{10} \cdot \mathrm{P(F \mid Py)} = \frac{7}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{56}{100}$$

Pregunta 5c

La probabilidad de que funcione sabiendo que se ha realizado en Python

Se ha calculado en el apartado anterior:

$$P(F \mid Py) = \frac{8}{10}$$

ENTREGABLE 2 – Práctica de R

Importación de los datos

1. Se localiza el fichero .csv que aloja los datos en la ubicación:
   C:\Users\Tete\Downloads

2. Se escribe la instrucción recomendada introduciendo la ruta del archivo en ella:

```
> dadesPM10<-
read.table("C:/Users/Tete/Downloads/AirPollution2000WB_UOC2.CSV"
, header=TRUE,
+                    sep=";",na.strings="NA",
+                    fileEncoding = "UTF-8", quote = "\"",
+                    colClasses=c(rep("character",4),rep("numeric",2),
+                              rep("character",2)))
```

3. Se verifica la correcta importación de los datos mediante la instrucción View():

```
> View(dadesPM10)
```

   O bien, se puede optar por la instrucción head(dadesPM10,5) para visualizar las primeras 5 entradas de la tabla:

```
> head(dadesPM10,5)
```

   Que devuelve:

```
Cod     Country Citycode              City Population2000
PM10Concentration1999             Region         IncomeGroup
1 AFG Afghanistan    40003              Herat        323741               46
South Asia          Low income
2 AFG Afghanistan    40001              KABUL       2457496
46            South Asia          Low income
3 AFG Afghanistan    40002 Kandahar (Quandahar)         411752
51            South Asia          Low income
4 AFG Afghanistan    40004       Mazar-i-Sharif        238469
60            South Asia          Low income
5 ALB      Albania    80001              TIRANA         263274
32 Europe & Central Asia Upper middle income
```

PREGUNTA 1

Pregunta 1a

Haced una tabla con el número de ciudades que hay en cada país y mostrad los primeros resultados.

Se recurre a la instrucción table(). Se escribe:

> *> tabla1<-table(dadesPM10$Country)*

Se verifica la creación de la tabla:

> *> View(tabla1)*

O bien mediante:

> *> head(tabla1,20)*

Que devuelve:

```
        Afghanistan          Albania          Algeria          Andorra          Angola
Antigua and Barbuda
                  4                1               31                1               1          1
          Argentina          Armenia        Australia          Austria      Azerbaijan
Bahamas
                 32                3               14                8               3          1
            Bahrain       Bangladesh         Barbados          Belarus         Belgium
Belize
                  1               18                1               13              11          1
              Benin           Bhutan
                  4                1
```

A partir de los datos obtenidos en la tabla anterior, calculad las siguientes probabilidades.

Pregunta 1b

Probabilidad que una ciudad escogida al azar esté en Francia.

Según la línea 60 de la tabla1, hay 40 ciudades en el país Francia. Por tanto, según la Ley de LaPlace y de acuerdo al número de observaciones que muestra el panel entorno:

$$P(\text{ciudad de Francia}) = \frac{40}{3218}$$

Pregunta 1c

Probabilidad que una ciudad escogida al azar esté en Afghanistan o Albania.

Según la línea 1 de la tabla1, hay 4 ciudades del país Afghanistan.
Según la línea 2 de la tabla1, hay 1 ciudad del país Albania.
Por tanto, según la Ley de LaPlace y de acuerdo al número de observaciones que muestra el panel entorno:

$$P(\text{ciudad de Afghanistan } \cup \text{ ciudad de Albania}) = \frac{4}{3218} + \frac{1}{3218} = \frac{5}{3218}$$

PREGUNTA 2

Pregunta 2a

Haced una tabla de contingencia según Región / Grupo ingresos.

Se recurre a la instrucción table(datos$variable1,datos$variable2) y se escribe:

> *> tabla2<-table(dadesPM10$Region,dadesPM10$Income)*

Se verifica la creación de la tabla mediante View() y mediante head(tabla2):

> *> head(tabla2)*

Devuelve:

	High income	Low income	Lower middle income	Upper middle income
East Asia & Pacific	284	7	143	405
Europe & Central Asia	487	2	72	310
Latin America & Caribbean	38	3	21	405
Middle East & North Africa	30	12	46	103
North America	256	0	0	0
South Asia	0	6	388	8
Sub-Saharan Africa	0	69	86	37

A partir de los datos obtenidos a la tabla anterior calculad las siguientes probabilidades.

Pregunta 2b

Probabilidad que una ciudad esté en el Sur de Asia.

Se suman las ciudades de las filas de la región Sur de Asia de cada nivel de ingresos:

0 ciudades en High	(fila 6 de tabla2)
6 en Low	(fila 13 de tabla 2)
20 en Lower Middle	(fila 20 de tabla2)
8 en Upper Middle	(fila 27 de tabla 2).

Entonces, según la Ley de LaPlace:

$$P(\text{Sur Asia}) = \frac{0+6+388+8}{3218} = \frac{402}{3218}$$

Pregunta 2c

Probabilidad que una ciudad esté al grupo de ingresos altos.

Se suman las observaciones de todas las regiones geográficas presentes en la categoría High Income, es decir, las filas 1 a 7 de la tabla2: (284+487+38+30+256+0+0 = 1095).

Entonces, según la Ley de LaPlace:

$$P(\text{High Income}) = \frac{1095}{3218}$$

Pregunta 2d

Probabilidad que una ciudad esté en el sur de Asia y esté en el grupo de ingresos altos.

En la tabla 2 (fila 6), se observa que hay 0 ciudades de la región Sur de Asia con ingresos High. Por tanto, se puede concluir que:

$$P(\text{Sur Asia} \cap \text{High Income}) = \frac{0}{3218}$$

Pregunta 2e

Probabilidad que una ciudad esté en el grupo de ingresos altos sabiendo que está en Norte América.

Esta es una probabilidad condicionada a que la ciudad se encuentre en Norte América.
En el apartado anterior se han asumido sucesos independientes puesto que se lee "y" mientras que en este se lee "sabiendo que", es decir, el suceso "Ciudad de Norte américa" ya se ha dado en el momento de evaluar la probabilidad del grupo de ingresos High.

En la tabla 2 (filas 5, 12, 19 y 26), se observa que todas las ciudades de Norte América presentan ingresos High.

Por tanto, se puede concluir que:

$$P(\text{High} \mid \text{North America}) = \frac{P(\text{High} \cap \text{North America})}{P(\text{North America})} = 1$$

Ya que:

$$P(\text{High} \cap \text{North America}) = P(\text{North America}) = 256$$

Pregunta 2f

¿Los sucesos "ser una ciudad del sur de Asia" y "estar en el grupo de ingresos altos", son independientes? ¿Por qué?

Se definen 2 sucesos:

- "Ciudad del Sur de Asia".
- "Ciudad con Ingresos High".

Entonces, esos 2 sucesos son independientes si y solo si se cumple:

$$\mathrm{P(Sur\ Asia\ \cap\ High\ Income) = P(Sur\ Asia)\ \cdot\ P(High\ Income)}$$

En el apartado 2b se calculó:

$$\mathrm{P(Sur\ Asia)} = \frac{402}{3218}$$

En el apartado 2c se calculó:

$$\mathrm{P(High\ Income)} = \frac{1095}{3218}$$

En el apartado 2d se calculó:

$$\mathrm{P(Sur\ Asia \cap High\ Income)} = \frac{0}{3218}$$

Por tanto, se observa:

$$\mathrm{P(Sur\ Asia\ \cap\ High\ Income) \neq P(Sur\ Asia)\ \cdot\ P(High\ Income)}$$

Ya que:

$$\frac{0}{3218} \neq \frac{402}{3218} \cdot \frac{1095}{3218}$$

Y, por tanto, se concluye que ambos sucesos NO SON INDEPENDIENTES.