ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN 3

19 de enero 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad el cociente $\frac{2-2i}{4+3i}$ en forma binómica.

b) Calculad todas las raíces quintas del siguiente número complejo: $\sqrt{3}+\mathrm{i}$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) Debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria; recordemos que $i^2=-1$:

$$\frac{2-2i}{4+3i}=\frac{(2-2i)\cdot(4-3i)}{(4+3i)\cdot(4-3i)}=\frac{8-6i-8i+6i^2}{4^2-3^2i^2}=\frac{8-14i-6}{16+9}=\frac{2-14i}{25}$$
$$=\frac{2}{25}-\frac{14}{25}i$$

Por tanto, la respuesta es:

$$\frac{2-2i}{4+3i}=\frac{2}{25}-\frac{14}{25}i$$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso. Para determinar las raíces quintas de $\sqrt{3}+i$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=2$$
$$\theta=arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=30^{\circ}$$

(Observemos que, al ser la parte real y la imaginaria positivas, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$ en 30º y en 210º. Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, si quisiéramos dibujar el número $\sqrt{3}+i$ en el plano complejo veríamos que este número está asociado al punto $(\sqrt{3},1)$, por lo tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante, es decir, en 30º.

Tenemos, por tanto, que $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2_{30°}$

Como nos piden las raíces quintas, debemos hacer:

$x=(\sqrt[5]{2})_{\frac{30°+360°k}{5}}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[5]{2}$ (esto es sobre los números reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k=\frac{30°+360°k}{5}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=6°$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=6°+72°=78°$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=6°+144°=150°$
- Si k=3, tenemos que $\beta_1=6°+216°=222°$
- Si k=4, tenemos que $\beta_2=6°+288°=294°$

Por tanto, las cinco raíces de la ecuación, en forma polar, son:

$$(\sqrt[5]{2})_{6°},(\sqrt[5]{2})_{78°},(\sqrt[5]{2})_{150°},(\sqrt[5]{2})_{222°},(\sqrt[5]{2})_{294°}$$

2. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$ definido de la siguiente forma:

   $E=\langle(a_1,a_2,a_3)|a_1+a_3=a_2\rangle$. Y sea $v=(-3,2,5)$.

   a) Comprobad que $A=\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$ es una base de E. ¿Pertenece v a E? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

b) Sea $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de una base B a la base A. ¿Cuál es la base B?

Resolución:

a) Sabemos que la dimensión de E es 2, así solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes.
Primero comprobamos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumple la condición $a_1+a_3=a_2$ para los dos vectores, cosa que es cierta.
Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues, A es una base de E.
Para ver si v pertenece a E miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=-3, y=2 y por tanto v pertenece a E y sus coordenadas en la base A son (-3,2).

b) La matriz de cambio de base de B a A expresa los vectores de la base de B en función de los de la de A. Así pues, si miramos les columnas de la matriz C ya tenemos que los dos vectores de la base B serán: 1·(1,0,-1) + 1·(0,1,1) = (1,1,0) y el segundo directamente (1,0,-1).
Por tanto B={(1,1,0), (1,0,-1)}.
Nota: También podríamos mirar en qué se transforman los vectores con coordenadas (1,0) y (0,1) en la base B (es decir cómo se expresan en la base A los dos vectores de la base B):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y después realizar el mismo cálculo anterior. Primer vector: 1·(1,0,-1) + 1·(0,1,1) = (1,1,0) y segundo vector directamente (1,0,-1).

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ ax + 2ay + (a+2)z = 3+2a \\ (a-2)x + (2a-4)y + (2-a)z = 4+a \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resolved el sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página13].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 2a & a+2 \\ a-2 & 2a-4 & 2-a \end{pmatrix}$$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ a & 2a & a+2 & 3+2a \\ a-2 & 2a-4 & 2-a & 4+a \end{array}\right)$$

Como que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 2a & a+2 \\ a-2 & 2a-4 & 2-a \end{vmatrix} = -6a^2 + 6a + 12 = -6(a^2 - a - 2) = -6(a+1)(a-2)$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$
  $\rightarrow \text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(M) = \text{nº incógnitas} \rightarrow \boxed{\text{S. C. Determinado}}$.
- Si $a = -1 \rightarrow \text{rango}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculemos, para $a = -1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rango}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = 2 \rightarrow \text{rango}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = 2$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & 4 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & -6 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(1) Intercambiar F2 con F3. (2) Operaciones: F2=F2+2·F1.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ -6y + 6z = 18 \\ 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ -y + z = 3 \\ z = 3/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ y = -3/2 \\ z = 3/2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 5/2 \\ y = -3/2 \\ z = 3/2 \end{cases}}$$

4. Consideremos $A = (-1,1),\ B = (0,-3),\ C = (3,2)$.

a) Sea f el escalado de razón 4 desde el origen. Calculad $f(A),\ f(B)$ y $f(C)$.

b) Sea g el giro de ángulo α en sentido antihorario desde el punto $(1,0)$. Calculad $g(A), g(B)$ y $g(C)$. Encontrad α, entre 0° y 180°, de manera que el punto medio entre $g(A)$ y $g(C)$ esté en el eje x.

Resolución:

a) Recordemos el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 4 desde el origen hay que multiplicar por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A ,B, C, hemos de hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 12 \\ 4 & -12 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f(A)=(-4,4), f(B)=(0,-12) y f(C)=(12,8).

b) Recordemos el Módulo 5, Secciones 3 y 5. La matriz del giro de ángulo α en sentido antihorario desde el punto (1,0) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) + 1 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A, B, C, hemos de hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) + 1 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -2\cos(a)-\sin(a)+1 & -\cos(a)+3\sin(a)+1 & 2\cos(a)-2\sin(a)+1 \\ -2\sin(a)+\cos(a) & -\sin(a)-3\cos(a) & 2\sin(a)+2\cos(a) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

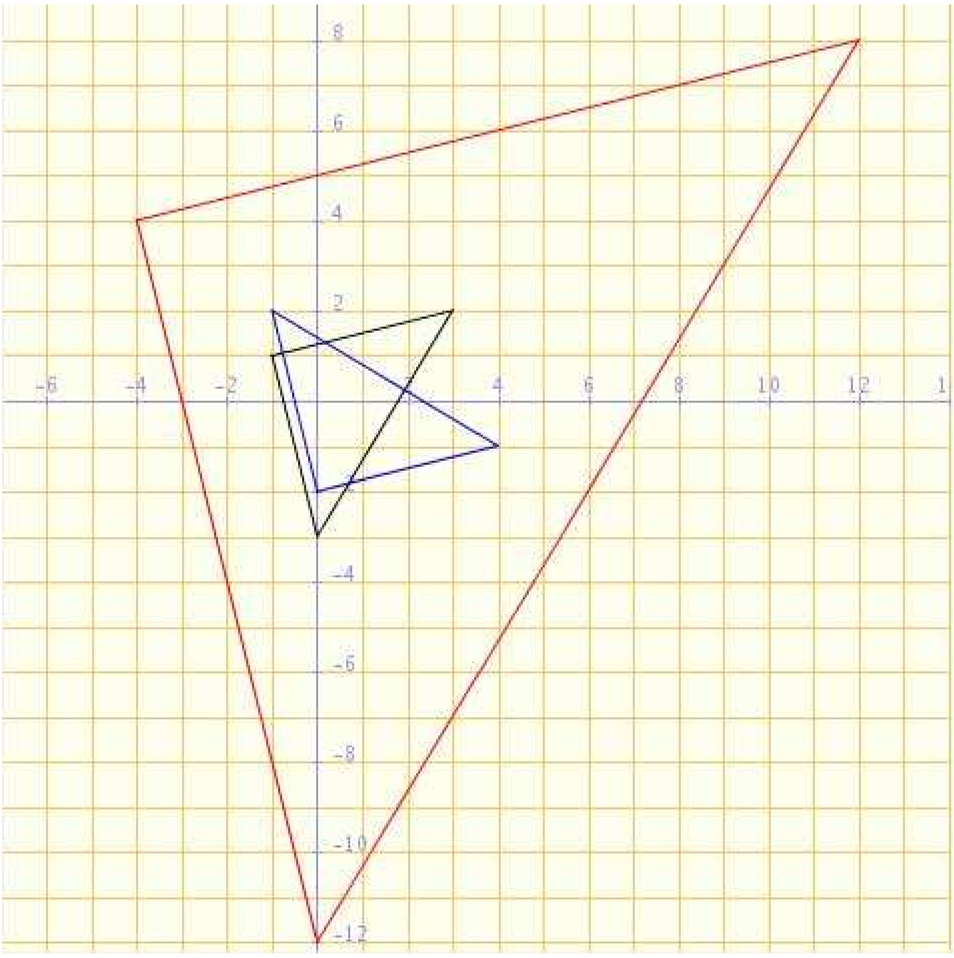
Por lo tanto, $g(A)=\left(-2\cos(a)-\sin(a)+1,-2\sin(a)+\cos(a)\right)$.

Análogamente, $g(B)=\left(-\cos(a)+3\sin(a)+1,-\sin(a)-3\cos(a)\right)$.

Finalmente, $g(C)=\left(2\cos(a)-2\sin(a)+1{,}2\sin(a)+2\cos(a)\right)$.

Así, $\frac{1}{2}[g(A)+g(C)]=\frac{1}{2}\left(-3\sin(a)+2,\,3\cos(a)\right)$

Este punto está encima del eje x cuando $\cos(a)=0$. Es decir, cuando el ángulo es de 90º. En este caso, cuando $a=90º$, entonces los tres puntos son: g(A)=(0,-2), g(B)=(4,-1), g(C)=(-1,2).



NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	270º	285º	300º	330º	345º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	0	$-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	$-\infty$	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$