EXAMEN 2

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Determinad el conjugado de z^3, donde z es el número complejo: $3e^{\frac{\pi}{4}i}$. Proporcionad el conjugado de z^3 en forma binómica.

   b) Determinad todas las soluciones de la raíz siguiente: $\sqrt[4]{3-2i}$. Proporcionad el resultado en forma exponencial con los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$.

Solución

a) Primero calculamos el cubo del número complejo z (ver apartado 3.5.1, Módulo 1):

$$z^3 = (3e^{\frac{\pi}{4}i})^3 = 3^3 e^{3\frac{\pi}{4}i} = 27e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

Ahora calculamos el conjugado del número complejo obtenido (ver apartado 3.5.1, Módulo 1):

$$\overline{z^3} = \overline{27e^{\frac{3\pi}{4}i}} = 27e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

Finalmente, pasamos el número complejo obtenido a forma binómica:

Parte real: $27\cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{27\sqrt{2}}{2}$

Parte imaginaria: $27\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{27\sqrt{2}}{2}$

En resumen:

$$\boxed{\overline{z^3} = -\frac{27\sqrt{2}}{2} - \frac{27\sqrt{2}}{2}i}$$

b) Escribimos el número complejo $3-2i$ en forma polar (ver apartado 3.4.1, Módulo 1):

Módulo: $r = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$

Argumento: $\theta = \arctan\left(\frac{-2}{3}\right) \approx 326{,}31°$

NOTA: la tangente de un ángulo vale $\frac{-2}{3}$ en $146{,}31°$ y en $326{,}31°$. Ahora bien, dado que la parte real es positiva y la parte imaginaria es negativa, estamos en el cuarto cuadrante, por lo que el ángulo vale $326{,}31°$.

Así, tenemos que $3-2i = 3{,}61_{326{,}31°}$. Ahora aplicamos la raíz cuarta (ver apartado 3.6.1, Módulo 1):

$$\sqrt[4]{3{,}61_{326{,}31^\circ}} = \sqrt[4]{3{,}61}_{\frac{326{,}31^\circ+360^\circ k}{4}} \qquad \text{para } k = 0,1,2,3$$

El módulo de las raíces es: $r = \sqrt[4]{3{,}61} \approx 1{,}38$

Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \dfrac{326{,}31^\circ + 360^\circ k}{4}$ para $k = 0,1,2,3$

- Para $k = 0$, tenemos $\beta_0 \approx 81{,}58^\circ$.
- Para $k = 1$, tenemos $\beta_1 \approx 171{,}58^\circ$.
- Para $k = 2$, tenemos $\beta_2 \approx 261{,}58^\circ$.
- Para $k = 3$, tenemos $\beta_2 \approx 351{,}58^\circ$.

En resumen:

$$\boxed{\text{Las raíces son: } 1{,}38e^{81{,}58^\circ i},\ 1{,}38e^{171{,}58^\circ i},\ 1{,}38e^{261{,}58^\circ i} \text{ y } 1{,}38e^{351{,}86^\circ i}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular el cubo de z: 0,5 puntos.
- Determinar el conjugado: 0,25 puntos.
- Pasar a forma binómica: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular el módulo: 0,25 puntos.
- Calcular el argumento: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Calcular los argumentos de las raíces: 0,5 puntos.

2. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 6k+1 & 21+a \\ 0 & 6k+1 & k+20 \\ k+1 & -2k-1 & a-13 \end{pmatrix}$.

Sustituid el parámetro "a"de la matriz M por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con la matriz obtenida se pide:

a) Determinad el rango de la matriz M en función de los diferentes valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Considerad el sistema de ecuaciones lineales que tiene la matriz M como matriz ampliada y resolvedlo para el valor de k que lo hace compatible determinado.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) Dado que la matriz M es cuadrada estudiaremos el rango de esta matriz calculando, en primer lugar, su determinante

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 6k+1 & 21+a \\ 0 & 6k+1 & k+20 \\ k+1 & -2k-1 & a-13 \end{vmatrix} = (k+1)\begin{vmatrix} 6k+1 & 21+a \\ 6k+1 & k+20 \end{vmatrix}$$

$$= (k+1)(6k+1)\begin{vmatrix} 1 & 21+a \\ 1 & k+20 \end{vmatrix}$$

$$= (k+1)(6k+1)((k+20)-(21+a))$$

$$= (k+1)(6k+1)(k-(a+1)).$$

- Si $k \neq -1$, $k \neq -\frac{1}{6}$ y $k \neq a+1$, entonces $\boxed{\text{rango}(M) = 3}$, puesto que $|M| \neq 0$.
- Si $k = -1$, entonces $\boxed{\text{rango}(M) = 2}$, puesto que $|M| = 0$ y M tiene un menor de orden dos no nulo: $\begin{vmatrix} 6k+1 & 21+a \\ 6k+1 & k+20 \end{vmatrix} = (6k+1)(k-(a+1)) \neq 0$ para $k = -1$.
- Si $k = -\frac{1}{6}$, entonces $\boxed{\text{rango}(M) = 2}$, puesto que $|M| = 0$ y M tiene un menor de orden dos no nulo, $\begin{vmatrix} 0 & k+20 \\ k+1 & a-13 \end{vmatrix} = -(k+1)(k+20) \neq 0$ para $k = -\frac{1}{6}$.
- Si $k = a+1$, entonces $\boxed{\text{rango}(M) = 2}$, puesto que $|M| = 0$ y M tiene un menor de orden dos no nulo, $\begin{vmatrix} 0 & k+20 \\ k+1 & a-13 \end{vmatrix} = -(k+1)(k+20) \neq 0$ para $k = a+1$.

b) El sistema de ecuaciones lineales que tiene por matriz ampliada la matriz M es:

$$\left.\begin{aligned} (6k+1)y &= 21+a \\ (6k+1)y &= k+20 \\ (k+1)x - (2k+1)y &= a-13 \end{aligned}\right\}$$

Notemos que, este sistema tiene tres ecuaciones y solo dos incógnitas. La matriz de coeficientes, A, asociada a este sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6k+1 \\ 0 & 6k+1 \\ k+1 & -(2k+1) \end{pmatrix}.$$

Si $k = -1$ o bien $k = -\frac{1}{6}$ esta matriz A tiene rango$(A) = 1$, puesto que no hay ningún menor de orden 2 diferente de cero y algún elemento de la matriz es diferente de cero. Por otro lado, si $k \neq -1$ y $K \neq -\frac{1}{6}$ entonces el rango$(A) = 2$, puesto que el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 0 & 6k+1 \\ k+1 & -(2k+1) \end{vmatrix} = -(k+1)(6k+1) \neq 0$.

Para discutir el sistema a partir del rango de la matriz A de coeficientes del sistema y su matriz ampliada M que hemos calculado anteriormente, utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apuntes módulo 3, apartado 4].

- Si $k \neq -1$, $k \neq -\frac{1}{6}$ y $k \neq a+1$, entonces $\text{rango}(M) = 3 \neq \text{rango}(A) = 2$, por lo tanto, tenemos que el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.
- Si $k = -1$, entonces $\text{rango}(M) = 2 \neq \text{rango}(A) = 1$, por lo tanto, tenemos que el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.
- Si $k = -\frac{1}{6}$, entonces $\text{rango}(M) = 2 \neq \text{rango}(A) = 1$, por lo tanto, tenemos que el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.
- Si $k = a+1$, entonces $\text{rango}(M) = 2 = \text{rango}(A) =$ número de incógnitas, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es compatible determinado}}$ y, por lo tanto, el sistema que nos piden resolver es:

$$\left.\begin{array}{r}(6a+7)y = 21+a\\ (6a+7)y = 21+a\\ (a+2)x-(2a+3)y = a-13\end{array}\right\}$$

Notemos que, la primera y la segunda ecuaciones son iguales. Despejando de la segunda se obtiene $y = \frac{21+a}{6a+7}$. Si hacemos la sustitución de este valor en la tercera ecuación obtenemos $(a+2)x - (2a+3)\frac{21+a}{6a+7} = a - 13$ y despejando obtenemos $x = \frac{8a^2-26a-28}{(a+2)(6a+7)}$.
Así pues, las soluciones de este sistema, en función del parámetro a, son:

	$x = \frac{8a^2-26a-28}{(a+2)(6a+7)}$,	$y = \frac{21+a}{6a+7}$
Si $a = 0$	$x = -2$,	$y = 3$
Si $a = 1$	$x = -1{,}18$,	$y = 1{,}69$
Si $a = 2$	$x = -0{,}63$,	$y = 1{,}21$
Si $a = 3$	$x = -0{,}27$,	$y = 0{,}96$
Si $a = 4$	$x = -0{,}02$,	$y = 0{,}81$
Si $a = 5$	$x = 0{,}16$,	$y = 0{,}70$
Si $a = 6$	$x = 0{,}30$,	$y = 0{,}63$
Si $a = 7$	$x = 0{,}41$,	$y = 0{,}57$
Si $a = 8$	$x = 0{,}50$,	$y = 0{,}53$
Si $a = 9$	$x = 0{,}58$,	$y = 0{,}49$

PAUTAS DE CORRECCIÓN:

Apartado a

- Calcular el determinante de la matriz M en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k = -1$, $k = -\frac{1}{6}$ y $k = a+1$ y justificar que $\text{rango}(M) = 3$ para k diferente de estos tres valores: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = -1$ $\text{rango}(M) = 2$: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = -\frac{1}{6}$ $\text{rango}(M) = 2$: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = a+1$ $\text{rango}(M) = 2$: 0,25 puntos.

Apartado b

- Justificar que SCD para $k = a+1$: 0,5 puntos.

- Obtener la solución del sistema compatible determinado: 0,75 puntos.

3. Sean $e_1 = (1,-1,0,1)$, $e_2 = (-1,0,1,2)$, $e_3 = (0,0,a+1,0)$, $e_4 = (0,-1,a+2,3)$ vectores de $\mathbb{R}^4$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP. Y sea $F = < e_1, e_2, e_3, e_4 >$.

   a) Calculad la dimensión de F y una base A.

   b) Sea $w_n = (0,-2, an+n+2, 6)$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP. Demostrad <u>usando el método de inducción</u> que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ tenemos que $w_n \in F$.

Solución

a) Calculamos el rango de la matriz formada por los vectores:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

Ya que tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por tanto $dim(F) \geq 2$. Orlando este menor encontramos $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = -(a+1) \neq 0$, por tanto $dim(F) \geq 3$. Y para ver que la dimensión no es 4 podemos calcular el determinante de todos los vectores juntos y ver que es 0, o podemos ver directamente que $v_1 + v_2 + v_3 = v_4$ (es decir, son linealmente dependientes). Así tenemos que la dimensión de F es 3. Y como base podemos escoger los tres vectores del menor 3×3 anterior: $A = \{(1,-1,0,1), (-1,0,1,2), (0,0,a+1,0)\}$

b) Vamos a seguir los pasos del método de inducción para demostrar la propiedad que nos piden.
<u>Paso base</u>. Veamos que para $n = 1$ se cumple la condición, es decir que $w_1 \in F$. $w_1 = (0,-2, a{\cdot}1+1+2, 6) = (0,-2,a+3,6)$. Para ver que pertenece a F resolvemos el sistema usando la base A que hemos calculado en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ a+3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Por tanto, $w_1 \in F$.
<u>Hipótesis de inducción</u>. Supondremos cierta la propiedad para $n = k$, es decir que $w_k = (0,-2, ak+k+2, 6) \in F$.
<u>Inducción</u>. Debemos demostrar que entonces la propiedad es cierta para $n = k+1$, es decir que $w_{k+1} \in F$.
Tenemos que $w_{k+1} = (0,-2, a \cdot (k+1) + (k+1) + 2, 6) = (0,-2, ak+a+k+3, 6)$.

Tendremos que $w_{k+1} \in F$ si y solo si $w_{k+1} - w_k \in F$ ya que sabemos por la hipótesis de inducción que $w_k \in F$.
Y tenemos que $w_{k+1} - w_k = (0, 0, a+1, 0) \in F$ ya que es directamente el tercer vector de la base A.
Alternativa: También podemos demostrar este paso de inducción viendo que como $w_k \in F$ y $(0, 0, a+1, 0) \in F$ entonces $w_k + (0, 0, a+1, 0) = w_{k+1} \in F$ ya que F es un espacio vectorial.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente la dimensión de F: 0,5 puntos.
- Calcular y justificar una base A: 0,5 puntos.

Apartado b

- Realizar el paso base: 0,5 puntos.
- Escribir correctamente la hipótesis de inducción: 0,5 puntos.
- Realizar el paso de inducción: 0,5 puntos.
- Nota: Demostraciones por otros métodos que no sean el de inducción: 0 puntos.

4. Sustituid el parámetro a por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente definición de las imágenes de los vectores de la base canónica C de $\mathbb{R}^3$ por una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(1,0,0) = (a+1, -(a+1)(b+1), 0)$$
$$f(0,1,0) = (0, a-b, 0)$$
$$f(0,0,1) = (-1, b+1, 0)$$

Considerad que b es un parámetro real diferente de -1.

Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Calculad, en función del valor del parámetro b, una base del núcleo de la aplicación f, decid cuál es su dimensión y determinad la dimensión de la imagen de f.

b) Calculad para qué valor del parámetro $c \in \mathbb{R}$ los vectores del siguiente conjunto B son vectores propios de la aplicación lineal f y cuáles son sus valores propios correspondientes:

$$B = \{(-1, c, 0), (0, 1, 0), (1, 0, c)\}$$

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

a) El núcleo de f se obtiene resolviendo el sistema $M(f|C,C)\cdot u = 0$:

$$\begin{pmatrix} (a+1) & 0 & -1 \\ -(a+1)(b+1) & a-b & b+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta expresión se obtienen dos ecuaciones, pues la tercera fila se anula completamente:

$$\begin{aligned} (a+1)x - z &= 0 \\ -(a+1)(b+1)x + (a-b)y + (b+1)z &= 0 \end{aligned}$$

De la primera se obtiene $z = (a+1)x$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación se obtiene $-(a+1)(b+1)x + (a-b)y + (b+1)(a+1)x = 0$ y por tanto $(a-b)y = 0$. Aquí aparecen dos posibilidades. Si $a \neq b$ se obtiene $y = 0$ y, por tanto, los vectores del núcleo tienen la forma $(x, 0, (a+1)x)$ y una base del núcleo es el vector $(1, 0, a+1)$, éste tiene dimensión 1 y la imagen tendrá dimensión 2 (por el Teorema de la dimensión del punto 4."Núcleo e imagen de una aplicación lineal"). En cambio, si $a = b$ el valor de y no queda restringido y, por tanto, el núcleo tiene base $\{(0,1,0),(1,0,a+1)\}$, dimensión 2 y la imagen de f tendrá dimensión 1.

El resultado en función del valor de vuestro IDP será:

$$\begin{array}{ll}
a=0 & Ker(f) =< (1,0,1) > \text{ si } b \neq a \text{ y } Ker(f) =< (0,1,0),(1,0,1) > \text{ si } b = a \\
a=1 & Ker(f) =< (1,0,2) > \text{ si } b \neq a \text{ y } Ker(f) =< (0,1,0),(1,0,2) > \text{ si } b = a \\
a=2 & Ker(f) =< (1,0,3) > \text{ si } b \neq a \text{ y } Ker(f) =< (0,1,0),(1,0,3) > \text{ si } b = a \\
a=3 & Ker(f) =< (1,0,4) > \text{ si } b \neq a \text{ y } Ker(f) =< (0,1,0),(1,0,4) > \text{ si } b = a \\
a=4 & Ker(f) =< (1,0,5) > \text{ si } b \neq a \text{ y } Ker(f) =< (0,1,0),(1,0,5) > \text{ si } b = a \\
a=5 & Ker(f) =< (1,0,6) > \text{ si } b \neq a \text{ y } Ker(f) =< (0,1,0),(1,0,6) > \text{ si } b = a \\
a=6 & Ker(f) =< (1,0,7) > \text{ si } b \neq a \text{ y } Ker(f) =< (0,1,0),(1,0,7) > \text{ si } b = a \\
a=7 & Ker(f) =< (1,0,8) > \text{ si } b \neq a \text{ y } Ker(f) =< (0,1,0),(1,0,8) > \text{ si } b = a \\
a=8 & Ker(f) =< (1,0,9) > \text{ si } b \neq a \text{ y } Ker(f) =< (0,1,0),(1,0,9) > \text{ si } b = a \\
a=9 & Ker(f) =< (1,0,10) > \text{ si } b \neq a \text{ y } Ker(f) =< (0,1,0),(1,0,10) > \text{ si } b = a
\end{array}$$

b) Para que $u = (-1, c, 0)$ sea un vector propio de f, la imagen del vector u por la aplicación f ha de ser un múltiplo de u. Tal como se define en el punto "7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales" tiene que existir un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = \lambda \cdot u$.

$$\begin{aligned} f(u) = f(-1,c,0) &= f(-(1,0,0) + c(0,1,0)) = \\ &= -f(1,0,0) + cf(0,1,0) = \\ &= -(a+1, -(a+1)(b+1), 0) + c(0, a-b, 0) = \\ &= (-(a+1), (a+1)(b+1) + c(a-b), 0) \end{aligned}$$

Igualando $f(u)$ a $\lambda \cdot u = (-\lambda, c\lambda, 0)$ se obtienen dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} -(a+1) &= -\lambda \\ (a+1)(b+1) + c(a-b) &= c\lambda \end{aligned}$$

De la primera se obtiene que $\lambda = a + 1$. De la segunda, sustituyendo λ, que

$$(a+1)(b+1) + c(a-b) = c(a+1)$$
$$(a+1)(b+1) = c(a+1) + c(b-a) = c(b+1)$$

Como el enunciado dice que $b \neq -1$ se puede dividir esta expresión por $(b+1)$ y obtener $c = a + 1$.

El segundo vector del conjunto B, $v = (0,1,0)$, es también un vector propio porque $f(v) = f(0,1,0) = (0, a-b, 0) = (a-b)(0,1,0) = (a-b)v$. En este caso el valor propio es $a - b$.

Para que el tercer vector del conjunto B, $w = (1,0,c)$ sea un vector propio de f, la imagen del vector w por la aplicación f ha de ser un múltiplo de w. Tal como se define en el punto "7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales" tiene que existir un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(w) = \lambda \cdot w$.

$$\begin{aligned} f(w) = f(1,0,c) &= f(1(1,0,0) + c(0,0,1)) = \\ &= f(1,0,0) + cf(0,1,0) = \\ &= (a+1, -(a+1)(b+1), 0) + c(-1, b+1, 0) = \\ &= (a+1-c, -(a+1)(b+1) + c(b+1), 0) \end{aligned}$$

Igualando $f(w)$ a $\lambda \cdot w = (\lambda, 0, c\lambda)$ se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} a+1-c &= \lambda \\ (b+1)(-a-1+c) &= 0 \\ 0 &= c\lambda \end{aligned}$$

De la tercera se obtiene que $\lambda = 0$ o bien $c = 0$. Si fuera $c = 0$ la segunda ecuación sería $(b+1)(a+1) = 0$ cosa que no es posible pues en el enunciado se establece que $b \neq -1$ y $0 \leq a \leq 9$. Entonces $\lambda = 0$ y de la primera ecuación se obtiene $c = a+1$. Por tanto, para el valor $c = a+1$, w es un vector propio de valor propio 0 ya que $f(w) = (0,0,0)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Plantear el sistema para encontrar el núcleo: 0,25 puntos.
- Calcular la base del núcleo en el caso $b = a$: 0,25 puntos.
- Calcular la base del núcleo en el caso $b \neq a$: 0,25 puntos.
- Calcular las dimensiones en el caso $b = a$: 0,25 puntos.
- Calcular las dimensiones en el caso $b \neq a$: 0,25 puntos.

Apartado b

- Escribir la condición de VEP para el primer vector, resolver la ecuación y encontrar el valor de c: 0,5 puntos.
- Escribir la condición de VEP para el segundo vector y comprobar que se cumple para el valor de c anterior: 0,25 puntos.
- Escribir la condición de VEP para el tercer vector y comprobar que se cumple para el valor de c anterior: 0,5 puntos.