Responded las siguientes preguntas razonadamente:

1. (Valoración de un 50 %) Demostrad, por inducción, que, para cualquier número natural, $n > 1$, se cumple que: $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Solución:

En este caso no se trata de demostrar una propiedad sino una identidad.

Es fácil probar que esta identidad es verdadera para $n = 2$: $\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$. Cierto.

Supongamos cierta la hipótesis para n, es decir, supongamos cierto que $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ y probaremos si la hipótesis es cierta para $n+1$, es decir, queremos ver si es cierta la identidad siguiente:

$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$.

Partimos de:

$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$

Por hipótesis de inducción sabemos que $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

$= \left(\frac{n+1}{2n}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$

Desarrollamos la expresión anterior.

$= \left(\frac{n+1}{2n}\right)\cdot\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n+2)}{2n\cdot(n+1)^2} =$

Eliminamos del numerador y del denominador las expresiones que son iguales.

$= \frac{(n+2)}{2(n+1)} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$

Y llegamos a lo que queríamos demostrar.

Entonces, por el principio de inducción matemática, la identidad es cierta para cualquier número natural $n > 1$.

---

2. Responded a los siguientes apartados:

   a) (Valoración de un 25 %) Pasad a forma polar el siguiente complejo: $(3 + 4i)^{-1}$. Razonad la respuesta.

Solución:

Debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4., página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria. También debemos tener presente que $i^2 = -1$:
$(3+4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2-4^2\cdot i^2} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$
Por tanto, la respuesta es:
$(3+4i)^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$
A continuación pasamos a forma polar el número anteriormente hallado. Tal como se explica en el apartado 3.4., página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:
$m = \sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{-4}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{625} + \frac{16}{625}} = \sqrt{\frac{25}{625}} = \frac{1}{5} = 5^{-1}$
$\alpha = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) = -53^o = 307^o$
NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale $\frac{-4}{3}$ en 307^o y en 127^o. Como el afijo del punto buscado es $(3,-4)$ el ángulo está en el cuarto cuadrado, es decir, en 307^o.
Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer el dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $3-4i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(3,-4)$, por lo tanto, es un número que se encuentra en el cuarto cuadrante.
Tenemos, por tanto, que: $(3+4i)^{-1} = \left(5^{-1}\right)_{307^o}$

---

b) (Valoración de un 25 %) Resolved la ecuación: $z^2 - z + (2i+4) = 0$. Proporcionad las soluciones en forma binómica.

Solución:
Para resolver la ecuación $z^2 - z + (2i+4) = 0$ seguiremos el ejemplo de la página 16 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del material.
Primero aplicamos la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado:
$z = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(2i+4)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{1-8i-16}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{-15-8i}}{2}$
A continuación calculamos las dos raíces cuadradas del número complejo $-15-8i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:
$m = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = 17$
$\alpha = \arctan\left(\frac{-8}{-15}\right) = 208^o$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale $\frac{8}{15}$ en 208^o y en 28^o. Como el afijo del punto buscado es $(-15,-8)$ el ángulo está en el tercer cuadrante, es decir, en 208^o.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $-15-8i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(-15,-8)$, por lo tanto, es un número que se encuentra en el tercer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que: $-15-8i = 17_{208^o}$

Como nos piden las raíces cuadradas debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1 de la página 43 del material se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt{-15-8i} = \sqrt{17}_{\frac{208^o+360^o k}{2}}$ para $k = 0, 1$

Esto es, el módulo de las raíces es $r = \sqrt{17}$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \frac{208^o+360^o k}{2}$ para $k = 0, 1$

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 104^o$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 284^o$

A continuación pasamos a número binario estos números polares encontrados:

- $\sqrt{17}_{104^o} = \sqrt{17}\cdot(\cos 104 + i \sin 104) = -1+4i$
- $\sqrt{17}_{284^o} = \sqrt{17}\cdot(\cos 284 + i \sin 284) = 1-4i$

Regresamos a donde nos habíamos quedado de la ecuación:

$$z = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(2i+4)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{1-8i-16}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{-15-8i}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-1+4i}{2} = 2i \\ \frac{1+1-4i}{2} = 1-2i \\ \frac{1+1-4i}{2} = 1-2i \\ \frac{1-1+4i}{2} = 2i \end{array} \right\}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son:

$z_1 = 2i$ y $z_2 = 1-2i$

Comprobación (no es necesario hacerla en la PEC), si hacemos el siguiente producto vemos que el resultado coincide con la ecuación dada inicialmente:

$(z-2i)\cdot(z-(1-2i)) = 0 \Leftrightarrow z^2 - z + 2iz - 2iz + 2i + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 - z + 2i + 4 = 0$

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	28^o	30^o	45^o	90^o	104^o	127^o	180^o	208^o	284^o	307^o	315^o	330^o
sin α	0	$\frac{8}{17}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{4}{\sqrt{17}}$	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{8}{17}$	$-\frac{4}{\sqrt{17}}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos α	1	$\frac{15}{17}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{17}}$	$-\frac{3}{5}$	-1	$-\frac{15}{17}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan α	0	$\frac{8}{15}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-4	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{8}{15}$	-4	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

1. (Valoración 50 %) Demostrad, por inducción, que si n es un número natural impar se tiene que $7^n + 1$ es divisible por 8.

Solución:

Antes de aplicar el principio de inducción conviene hacer un cambio de índices.

Sea $n = 2i - 1$

Entonces, si $i = 1, 2, 3, ..$se tiene que $n = 1, 3, 5, ...$y el enunciado se transforma en:

Demostrad que, para todo i, número natural, se tiene que $7^{2i-1} + 1$ es divisible por 8.

Paso base: Para $i = 1$, tenemos $7^1 + 1$ es divisible por 8 es una proposición cierta.

Paso inducción: Partimos de que $7^{2i-1} + 1$ es divisible por 8 y queremos llegar a demostrar que $7^{2(i+1)-1} + 1$ es divisible por 8, esto es, $7^{2i+1} + 1$ es divisible por 8.

Dado que la única información de que disponemos es la hipótesis (aquello de lo que partimos) tenemos que hacer que la expresión $7^{2i-1} + 1$ (que es la que conocemos) aparezca en nuestro desarrollo.

Partimos de:

$7^{2i+1} + 1 = 7^{2i} \cdot 7 + 1 = 7^{2i-1} \cdot 7^2 + 1 = 7^2 \cdot 7^{2i-1} + 1 = 7^2(7^{2i-1} + 1) - 7^2 + 1 = 7^2(7^{2i-1} + 1) - 48$

Llegados a este punto, tenemos que $7^2(7^{2i-1} + 1)$ es divisible por 8 por hipótesis de inducción y 48 es divisible per 8 por ser $48 = 6 \cdot 8$. Por tanto, $7^{2i+1} + 1$ es divisible por 8.

Y deshaciendo el cambio de índices tenemos que $7^n + 1$ es divisible por 8 para n impar.

---

2. Responded a los siguientes apartados:

   a) (Valoración 25 %) Calculad los valores que tienen que tener los números reales x e y de manera que: $\frac{3-xi}{1+2i} = y + ai$ donde a es la primera cifra de vuestro identificador IDP del Campus UOC. Razonad la respuesta.

   NOTA: Tenéis que resolver el ejercicio substituyendo el valor de a por vuestra cifra particular. Al inicio de la resolución indicad claramente cuál es la primera cifra de vuestro identificador IDP. El identificador IDP lo podéis encontrar en: Espacio personal, Datos personales.

   Solución: Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, después, cada alumno tiene que substituir su propio valor del IDP.

   Utilizamos la propiedad que dice que si dos fracciones son iguales, entonces:

$3 - xi = (1 + 2i) \cdot (y + ai)$
Aplicamos la distributiva del producto respecto de la suma:
$3 - xi = y + ai + 2yi + 2ai^2$
Agrupamos, ahora, partes reales y partes imaginarias:
$3 - xi = (y - 2a) + (a + 2y)i$
Igualamos parte real de un lado con el otro lado e igual hacemos con la parte imaginaria:
$3 = y - 2a$
$-x = 2y + a$
Resolvemos el sistema de ecuaciones de manera que las incógnitas son x e y. De la primera ecuación obtenemos que:
$y = 3 + 2a$
Substituyendo este valor hallado en la segunda ecuación, obtenemos que:
$x = -6 - 5a$
Si, por ejemplo, la primera cifra del IDP es 2, los valores pedidos son: $x = -16$ e $y = 7$.
Así, las posibles soluciones de este ejercicio son:

a	x	y
0	-6	3
1	-11	5
2	-16	7
3	-21	9
4	-26	11
5	-31	13
6	-36	15
7	-41	17
8	-46	19
9	-51	21

---

b) (Valoración 25 %) Resolved la ecuación: $z^4 + \left(1 - \sqrt{3}i\right) = 0$. Proporcionad las soluciones en forma polar. Razonad la respuesta.

Solución:
Para resolver la ecuación $z^4 + \left(1 - \sqrt{3}i\right) = 0$ seguiremos el ejemplo de la página 16 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del material.
Primero despejamos la incógnita: $z = \sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i}$
A continuación escribimos el complejo $-1 + \sqrt{3}i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = 120^\circ$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale $-\sqrt{3}$ en 120° y en 300°. Como el afijo del punto buscado es $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, el ángulo está en el segundo cuadrante, es decir, en 120°.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número $-1+\sqrt{3}i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, por lo cual es un número que se encuentra en el segundo cuadrante.

Tenemos, por tanto, que: $-1+\sqrt{3}i = 2_{120^\circ}$

Como que nos piden las raíces cuartas tenemos que hacer (observemos que en el apartado 3.6.1 de la página 43 del material se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2}_{\frac{120^o+360^o k}{4}}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

Esto es, el módulo de las raíces es $r = \sqrt[4]{2}$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \frac{120^o + 360^\circ k}{4}$ per a $k = 0, 1, 2, 3$

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 30^\circ$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 120^\circ$
- Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 210^\circ$
- Si $k = 3$, tenemos que $\beta_3 = 300^\circ$

Por tanto, las raíces, en forma polar, pedidas de la ecuación dada son:

$\sqrt[4]{2}_{30^\circ}, \sqrt[4]{2}_{120^\circ}, \sqrt[4]{2}_{210^\circ}, \sqrt[4]{2}_{300^\circ}$

Responded las siguientes preguntas razonando en todo momento los pasos seguidos:

1. Trabajamos con matrices.

   a) (Valoración de un 10 %) Calculad λ tales que la siguiente matriz M es invertible (tiene inversa).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Solución: Para que M tenga inversa, es necesario que el determinante sea distinto de 0. Calculamos desarrollando por la primera columna [Ver módulo 2, sección 4.2]:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Y ahora aplicamos Sarrus a cada determinante 3x3 [Ver módulo 2, sección 4.1]:

$$= (-1) \cdot (6 - 2\lambda) + 2 \cdot (\lambda) + (-3) \cdot (2) = 4\lambda - 12$$

Como queremos $Det(M) \neq 0$, implica que $4\lambda - 12 \neq 0$ y por tanto $\lambda \neq 3$. La matriz M será invertible cuando $\lambda \neq 3$.

---

   b) (Valoración de un 20 %) Sean A_i matrices cuadradas invertibles. Demostrad que para $n \geq 2$ se cumple: $(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$
   Nota: Recordad el método de inducción. Recordad también que si A y B son matrices cuadradas invertibles, entonces $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Solución: Utilizaremos el método de inducción [Ver módulo 1, sección 2].
Para el paso base ($n = 2$): Debemos ver que $(A_1 \cdot A_2)^{-1} = A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$. Pero esto es justamente la propiedad que nos recuerda la nota. Así que queda demostrado el paso base.
Ahora suponemos cierta la propiedad para n: $(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.
Vamos a demostrarla para $n + 1$:
$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot A_{n+1})^{-1} = ((A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) \cdot A_{n+1})^{-1}$ gracias a la propiedad asociativa.
Aplicamos otra vez la propiedad que nos indica la nota y tenemos:
$((A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) \cdot A_{n+1})^{-1} = A_{n+1}^{-1} \cdot (A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1}$.
Ahora aplicamos la hipótesis de inducción y tenemos finalmente:
$A_{n+1}^{-1} \cdot (A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_{n+1}^{-1} \cdot A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$ de forma que:
$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot A_{n+1})^{-1} = A_{n+1}^{-1} \cdot A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$ que es lo que queríamos demostrar.

---

2. Sea $F \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio vectorial definido como:
   $F =< (0,1,2),(1,0,1),(-3,-3,-9),(2,1,0),(-1,7,5) >$

   a) (Valoración de un 10 %) Calculad la dimensión de F y una base A de F.

Solución: Para calcular la dimensión de F calculemos el rango de la matriz que forman los vectores [Ver módulo 2, sección 4.5]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -9 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Vemos que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y orlando obtenemos que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -9 \end{vmatrix} = 0$, pero $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. De forma que la dimensión de F es 3 y una base A puede ser la formada por los vectores del determinante anterior: $A = \{(0,1,2),(1,0,1),(2,1,0)\}$.

---

   b) (Valoración de un 10 %) Sea $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de una base B a la base A del apartado anterior. ¿Cuál es la base B?

Solución: Para calcular la base B podemos hacer:

$$B = A \cdot C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así $B = \{(0,1,2),(3,1,1),(2,2,2)\}$.

---

   c) (Valoración de un 10 %) Sea $v = (-1,-1,-1)$. Calculad las coordenadas de v en la base A y en la base B. Comprobad que efectivamente la matriz $C_{B\to A}$ transforma las coordenadas de v en la base B a las coordenadas en la base A.

Solución: Para calcular las coordenadas de v en la base A solucionamos el siguiente sistema lineal [Ver módulo 2, sección 2.4]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$ y $z = -\frac{1}{2}$. Así las coordenadas de v en la base A son $(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

Para calcular las coordenadas de v en la base B procedemos de forma análoga:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 0$, $y = 0$ y $z = -\frac{1}{2}$. Así las coordenadas de v en la base B son $(0, 0, -\frac{1}{2})$.

Finalmente comprobamos que efectivamente la matriz $C_{B\to A}$ transforma las coordenadas de v en la base B a las coordenadas en la base A [Ver módulo 2, sección 4.7]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

---

3. Sea $F \subset \mathbb{R}^5$ el subespacio vectorial de dimensión 2 definido como:
$F = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0, a_2 + a_3 + a_4 = 0, a_3 + a_4 + a_5 = 0\}$

   a) (Valoración de un 10 %) Comprobad que $A = \{(0, 1, -1, 0, 1), (1, 0, -1, 1, 0)\}$ es una base de F.

Solución: Como sabemos que la dimensión del subespacio vectorial es 2, para comprobar que A es una base de F es suficiente con ver que los vectores de A pertenecen a F y que son linealmente independientes.
Veremos que pertenecen a F si verifican las ecuaciones que determinan los elementos de F: $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ y $a_2 + a_3 + a_4 = 0$ y $a_3 + a_4 + a_5 = 0$. Y vemos que se cumplen para los dos vectores.
Para ver que son linealmente independientes, comprobaremos que la matriz formada por estos 2 vectores tiene rango 2. Para este objetivo, encontramos directamente un menor de orden 2 con determinante distinto de 0:
$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$

---

   b) (Valoración de un 10 %) Sean $v = (1, 1, -2, 1, 1)$ y $w = (0, 0, 1, -1, 0)$. ¿Pertenecen v y w a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A del apartado anterior.

Solución: Para saber si $v \in F$ y a su vez calcular sus coordenadas en la base A, solucionemos el siguiente sistema lineal [Ver módulo 2, sección 2.4]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 1$, $y = 1$. Así $v \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(1, 1)$.
Para w podríamos proceder de forma análoga, o podemos ver directamente que no cumple las propiedades que determinan los elementos de F. Así pues $w \notin F$.

---

c) (Valoración de un 20 %) Sean $A = \{(0, 1, -1, 0, 1), (1, 0, -1, 1, 0)\}$, $B = \{(1, 1, -2, 1, 1), (0, 1, -1, 0, 1)\}$ y $D = \{(1, 2, -3, 1, 2), (2, 2, -4, 2, 2)\}$ tres bases de F.
Calculad la matriz $C_{D\to B}$ de cambio de base de la base D a la base B.
Calculad la matriz $C_{B\to A}$ de cambio de base de la base B a la base A.
Calculad la matriz $C_{D\to A}$ de cambio de base de la base D a la base A.
¿Se puede obtener $C_{D\to A}$ a partir de $C_{D\to B}$ y $C_{B\to A}$? Razonad la respuesta y el porqué.

Solución: Para calcular la matriz $C_{D\to B}$ de cambio de base de la base D a la base B hemos de expresar los vectores de la base D en función de los de la base B [Ver módulo 2, sección 4.7]. Para esto, resolvemos los sistemas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tienen respectivamente solución $x = 1$, $y = 1$ y $x = 2$, $y = 0$. Así la matriz de cambio de base es:

$$C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz $C_{B\to A}$ de cambio de base de la base B a la base A podríamos proceder análogamente. Pero en el apartado anterior ya hemos calculado las coordenadas el primer vector de la base B en la base A, y el segundo vector de la base B es directamente el primero de la base A. Así la matriz de cambio de base es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz $C_{D\to A}$ de cambio de base de la base D a la base A procedemos análogamente resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tienen respectivamente solución $x = 2$, $y = 1$ y $x = 2$, $y = 2$. Así la matriz de cambio de base es:

$$C_{D\to A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, es decir, $C_{D\to A} = C_{B\to A} \cdot C_{D\to B}$.
Para encontrar una explicación pensemos primero que debe ser equivalente, transformar unas coordenadas en la base D a la base A directamente o hacerlo en dos pasos: primero transformar de la base D a la base B y luego de la base B a la base A.
Pensemos también como se realiza la transformación usando la matriz de cambio de base: multiplicando la matriz por las coordenadas.
Así tendremos que haciendo el cambio de base directamente: $v_A = C_{D\to A} \cdot v_D$.
Y en dos pasos: $v_B = C_{D\to B} \cdot v_D$ y $v_A = C_{B\to A} \cdot v_B$, es decir, $v_A = C_{B\to A} \cdot (C_{D\to B} \cdot v_D)$.
Comparando las dos últimas expresiones tenemos que $C_{D\to A} = C_{B\to A} \cdot C_{D\to B}$.

---

1. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} a-2 & a-2 & 2-a \\ 2a-8 & 4-a & a-4 \\ a-6 & 2a-12 & a-6 \end{pmatrix}$

   Sustituid el parámetro "a" de la matriz M por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con la matriz obtenida:

   a) (Valoración de un 10 %) Determinad, de manera razonada, su rango.

   b) (Valoración de un 15 %) Utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius, razonad si el sistema de ecuaciones lineales que tiene esta matriz como matriz ampliada es un SCD, o un SCI o bien un SI.

Solución: Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de "a", de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro "a" por tu valor.

a) Dado que la matriz M es cuadrada de orden 3, estudiamos su rango utilizando que el rango es 3, solo si el determinante de la matriz es diferente de cero [Ver apuntes módulo 2, apartado 4.5, páginas de la 29 a la 32].

$$|M| = \begin{vmatrix} a-2 & a-2 & 2-a \\ 2a-8 & 4-a & a-4 \\ a-6 & 2a-12 & a-6 \end{vmatrix} = -9a^3 + 108a^2 - 396a + 432 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 4 \\ a = 6 \end{cases}$$

En consecuencia

- Si $a \neq 2$ y $a \neq 4$ y $a \neq 6$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{rang}(M) = 3}$.
- Si $a = 2$, entonces $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\boxed{\text{rang}(M) = 2}$, puesto que $|M| = 0$ y tiene un menor de orden 2 no nulo, como por ejemplo $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 40 \neq 0$.
- Si $a = 4$, entonces $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\boxed{\text{rang}(M) = 2}$, puesto que $|M| = 0$ y tiene un menor de orden 2 no nulo, como por ejemplo $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.
- Si $a = 6$, entonces $M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\boxed{\text{rang}(M) = 2}$, puesto que $|M| = 0$ y tiene un menor de orden 2 no nulo, como por ejemplo $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$.

b) Si M es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, el sistema asociado es:

$$\left.\begin{array}{r}(a-2)\,x+(a-2)y=2-a\\(2a-8)x+(4-a)y=a-4\\(a-6)x+(2a-12)\,y=a-6\end{array}\right\}$$

Observamos que el sistema tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas, así pues, siempre que el rango de la matriz ampliada M sea 3, el sistema será incompatible, puesto que la matriz de los coeficientes del sistema, A, no puede tener rango 3, puesto que solo tiene 2 columnas.

En consecuencia, utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12]:

- Si $a \neq 2$, $a \neq 4$ y $a \neq 6$, entonces $\boxed{\text{Sistema Incompatible}}$, ya que $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(M)$.
- Si $a = 2$, entonces, por el apartado anterior, $\text{rango}(M) = 2$. Calculamos, para $a = 2$, el rango de la matriz, A, de los coeficientes del sistema:

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \to \text{rang}\,(A) = 2\,,\text{ ya que } \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} \neq 0.$$

  Por tanto, $\boxed{\text{Sistema Compatible Determinado}}$, ya que $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(M) = \text{n}^o$ incógnitas.
- Si $a = 4$, entonces, por el apartado anterior, $\text{rango}(M) = 2$. Calculamos, para $a = 4$, el rango de la matriz, A, de los coeficientes del sistema:

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \to \text{rang}\,(A) = 2\,,\text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

  Por tanto, $\boxed{\text{Sistema Compatible Determinado}}$, ya que $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(M) = \text{n}^o$ incógnitas.
- Si $a = 6$, entonces, por el apartado anterior, $\text{rango}(M) = 2$. Calculamos, para $a = 6$, el rango de la matriz, A, de los coeficientes del sistema:

  $$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{rang}\,(A) = 2\,,\text{ ya que } \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

  Por tanto, $\boxed{\text{Sistema Compatible Determinado}}$, ya que $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(M) = \text{n}^o$ incógnitas.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rl} x + ay - \ z = & a^2 + a \\ (a-1)\,x - 2y + 3z = & a^2 + 3a - 4 \\ 2x + \ y - az = & -2a^2 + 3a + 2 \\ 5x + 2y - 4z = & -a + 4 \end{array}\right\}$$

(Valoración de un 25 %) Sustituid el parámetro "a" por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC y, utilizando el método de Gauss, calculad la solución del sistema detallando todas las operaciones que hagais para ir transformando la matriz ampliada del sistema en una matriz escalonada inferior y las posteriores operaciones para finalizar con la obtención de la solución.

Solución: Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de "a", de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro "a" por tu valor.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 18 a la 21] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a^2+a \\ a-1 & -2 & 3 & a^2+3a-4 \\ 2 & 1 & -a & -2a^2+3a+2 \\ 5 & 2 & -4 & -a+4 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a^2+a \\ 0 & -a^2+a-2 & a+2 & -a^3+a^2+4a-4 \\ 0 & -2a+1 & -a+2 & -4a^2+a+2 \\ 0 & -5a+2 & 1 & -5a^2-6a+4 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a^2+a \\ 0 & -a^2+a-2 & a+2 & -a^3+a^2+4a-4 \\ 0 & 0 & \frac{a^3-a^2+7a-6}{-a^2+a-2} & \frac{2a^4-2a^3+14a^2-12a}{-a^2+a-2} \\ 0 & 0 & \frac{4a^2+9a-6}{-a^2+a-2} & \frac{8a^3+18a^2-12a}{-a^2+a-2} \end{array}\right) \underset{(3)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a^2+a \\ 0 & -a^2+a-2 & a+2 & -a^3+a^2+4a-4 \\ 0 & 0 & \frac{a^3-a^2+7a-6}{-a^2+a-2} & \frac{2a^4-2a^3+14a^2-12a}{-a^2+a-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2 - (a-1)\cdot F1 \to F2, \qquad F3 - 2\cdot F1 \to F3, \qquad F4 - 5\cdot F1 \to F4$

(2): $F3 - \left(\frac{-2a+1}{-a^2+a-2}\right)\cdot F2 \to F3, \qquad F4 - \left(\frac{-5a+2}{-a^2+a-2}\right)\cdot F1 \to F4$

(3): $F4-\left(\frac{4a^2+9a-6}{a^3-a^2+7a-6}\right)\cdot F3\rightarrow F4$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{rl} x+ay-\ z= & a^2+a\\ \left(-a^2+a-2\right)y+(a+2)\,z= & -a^3+a^2+4a-4\\ \frac{a^3-a^2+7a-6}{-a^2+a-2}z= & \frac{2a^4-2a^3+14a^2-12a}{-a^2+a-2}\end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene

$\frac{a^3-a^2+7a-6}{-a^2+a-2}z=\frac{2a^4-2a^3+14a^2-12a}{-a^2+a-2}\rightarrow z=\frac{2a^4-2a^3+14a^2-12a}{a^3-a^2+7a-6}\rightarrow z=\frac{2a\cdot\left(a^3-a^2+7a-6\right)}{a^3-a^2+7a-6}\rightarrow\boxed{z=2a}$.

Si hacemos la sustitución de $z=2a$ en la segunda ecuación y aislamos la y obtenemos

$\left(-a^2+a-2\right)y+(a+2)\,2a=-a^3+a^2+4a-4\rightarrow y=\frac{-a^3-a^2-4}{-a^2+a-2}\rightarrow y=\frac{(a+2)\left(-a^2+a-2\right)}{-a^2+a-2}\rightarrow\boxed{y=a+2}$.

Si sustituimos en la primera ecuación las dos condiciones anteriores se obtiene

$x+a\,(a+2)-2a\ =a^2+a\rightarrow\boxed{x=a}$.

Así pues, la solución de este sistema, en función del parámetro a, es:

$$\boxed{(x=a,\ y=a+2,\ z=2a)\,.}$$

---

3. Dados los tres planos siguientes:

$\pi_1:2x+y+(k-2)\,z=k+3 \qquad \pi_2:kx+2y-2z=3k+2 \qquad \pi_3:(2k+2)\,x+5y-5z=14$

Se pide:

a) (Valoración de un 25 %) Determinad, de manera razonada, la posición relativa de estos tres planos en función de los diferentes valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$.

b) (Valoración de un 25 %) Determinad para qué valor del parámetro k los tres planos π_1, π_2 y π_3 se intersecan en un único punto que verifica que su primera coordenada es 57, es decir $x=57$.

Solución:

a) Recordemos que el estudio de la posición relativa de tres planos se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema formado por las 3 ecuaciones que definen estos planos [Ver apuntes módulo 3, apartado 8, páginas de la 25 a la 31)

$$\left.\begin{array}{r}2x+y+(k-2)\,z=k+3\\ kx+2y-2z=3k+2\\ (2k+2)\,x+5y-5z=14\end{array}\right\}$$

Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12].
La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k-2 \\ k & 2 & -2 \\ 2k+2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & k-2 & k+3 \\ k & 2 & -2 & 3k+2 \\ 2k+2 & 5 & -5 & 14 \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k-2 \\ k & 2 & -2 \\ 2k+2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = k^2 - 5k + 4 = (k-1)\cdot(k-4)$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 4$ $\rightarrow$ rango$(A) = 3 =$ rango$(M) =$ n^o incógnitas y el sistema es compatible determinado. Por lo tanto, podemos afirmar que $\boxed{\text{los tres planos se cortan en un punto}}$.
- Si $k = 1$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (este menor se obtiene considerando las filas y columnas primera y segunda).
  Calculamos, para $k = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 14 \end{vmatrix} = 0$. Así pues, tenemos que rango(M) =rango$(A) = 2 \neq$ n^o incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. En consecuencia $\boxed{\text{los tres planos se cortan en una recta}}$.
- Si $k = 4$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ (este menor se obtiene considerando las filas 1ª y 2ª y las columnas 2ª y 3ª).
  Calculamos, para $k = 4$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -2 & 14 \\ 5 & -5 & 14 \end{vmatrix} = 126 \neq 0$. Así pues, tenemos que rango$(A) = 2 \neq$ rango$(M) = 3$, entonces el sistema es incompatible y por tanto $\boxed{\text{los tres planos no tienen ningún punto en común}}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que si $k \neq 1$ y $k \neq 4$ los tres planos π_1, π_2 y π_3 se intersecan en un único punto. Por tanto, podemos calcular, en función de $k \neq 1$ y $k \neq 4$, la solución de estos sistemas compatibles determinados.
Utilizaremos el método de Cramer [Ver apuntes módulo 3, apartado 7, páginas de la 22 a la 24] para determinar la solución, en función de k, del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

Notemos que podemos aplicar el método de Cramer, ya que la matriz del sistema es cuadrada y para $k \neq 1$ y $k \neq 4$ su determinante es no nulo.

Aplicando la regla de Cramer se obtiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k+3 & 1 & k-2 \\ 3k+2 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -5 \end{vmatrix}}{A} = \frac{15k^2-33k+18}{k^2-5k+4} = \frac{3\,(k-1)\,(5k-6)}{(k-1)\,(k-4)} = \frac{3\,(5k-6)}{k-4} = \frac{15k-18}{k-4},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k+3 & k-2 \\ k & 3k+2 & -2 \\ 2k+2 & 14 & -5 \end{vmatrix}}{A} = \frac{-6k^3+17k^2-43k+32}{k^2-5k+4} = \frac{11k-6k^2-32}{k-4},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & k+3 \\ k & 2 & 3k+2 \\ 2k+2 & 5 & 14 \end{vmatrix}}{A} = \frac{7k^2-35k+28}{k^2-5k+4} = \frac{7\,(k-1)\,(k-4)}{(k-1)\,(k-4)} = 7.$$

A continuación, si imponemos, en la solución hallada, $x = 57$ obtenemos

$\frac{15k-18}{k-4} = 57 \rightarrow 15k-18 = 57\,(k-4) \rightarrow 15k-18 = 57k-228 \rightarrow 42k = 210 \rightarrow \boxed{k=5}$.

Por tanto, para $k = 5$ los tres planos π_1, π_2 y π_3 intersecan en un único punto y dicho punto es el $(57, -127, 7)$.

1. Considerad el sistema de ecuaciones lineales que tiene por matriz ampliada la matriz

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 & k \end{array}\right)$$

Se pide:

a) (Valoración de un 20 %) Determinad para qué valores de k y a se verifica que una de las soluciones del sistema es $(x = 2,\ y = a,\ z = 1)$.

b) (Valoración de un 10 %) Encontrad todas las soluciones del sistema inicial para $k = 0$.

Solución:

a) El sistema, que tiene por matriz ampliada M, es:

$$\left.\begin{array}{r} 2y + z = k \\ x - y = k \end{array}\right\}$$

Si sabemos que $(x = 2,\ y = a,\ z = 1)$ es una solución del sistema, entonces sustituyendo en las ecuaciones del sistema se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 1 = k \\ 2 - a = k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a + 1 = 2 - a \\ 2 - a = k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a = 1/3 \\ 2 - a = k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a = 1/3 \\ 2 - (1/3) = k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{a = 1/3} \\ \boxed{k = 5/3} \end{array}$$

b) Para $k = 0$, el sistema que debemos resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene la relación $x = y$ y de la primera ecuación obtenemos $z = -2y$. Así pues, las soluciones de este sistema son de la forma:

$$\boxed{(x = y,\ y = y,\ z = -2y)}.$$

---

2. Considerad los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : -x + y = 1 \qquad \pi_2 : -kx + z = 1 \qquad \pi_3 : x - 3y + 2z = -1$$

Se pide:

a) (Valoración de un 20 %) Determinad para qué valores del parámetro k los tres planos pasan por una misma recta.

b) (Valoración de un 10 %) Razonad si la recta intersección del apartado anterior pasa por el punto $(x, y, z) = (1, 2, 0)$.

Solución:

a) Recordemos que el estudio de la posición relativa de tres planos se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema formado por las tres ecuaciones de los planos [ver apuntes módulo 3, apartado 8, página 30]

$$\left.\begin{array}{rcl} -x + y & & = 1 \\ -kx & + & z = 1 \\ x - 3y + 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

Cuando este sistema sea compatible indeterminado y $\text{rang}(A) = \text{rang}(M) = 2$, tendremos que las infinitas soluciones del sistema son los puntos de la recta intersección de los tres planos.

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -k & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

En primer lugar, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2k - 2$$

Si $k = 1$, entonces $\text{rang}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $k = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor, de orden dos no nulo, con la columna de términos independientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \text{rang}\,(M) = 2 \longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Así pues, podemos afirmar que:

$$\boxed{\text{Si } k=1 \text{ los planos } \pi_1,\ \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ interseccionan todos ellos en una recta}}.$$

b) Si queremos ver si el punto de coordenadas $(1,2,0)$ pertenece a la recta intersección de los tres planos, solo tenemos que comprobar si el punto es una de las infinitas soluciones del sistema. Consideramos el sistema para $k=1$, y realizamos la sustitución $x=1$, $y=2$, $z=0$ y comprobamos que las tres ecuaciones del sistema se verifican:

$$\left.\begin{array}{rl} -x+y & =1 \\ -x \quad + \quad z & =1 \\ x-3y+2z & =-1 \end{array}\right\} \underset{x=1,y=2,z=0}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} -(1)+(2)=1 \\ -(1)+(0)=1 \\ (1)-3(2)+2(0)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} 1= & 1 \\ -1\neq & 1 \\ -5\neq & -1 \end{array}\right\}$$

Dado que las coordenadas del punto no verifican las ecuaciones de los planos π_2 y π_3, eso quiere decir que este punto no pertenece a ninguno de estos dos planos y en consecuencia tampoco pertenece a la recta intersección de los tres planos. Solo podemos afirmar que el punto $(1,2,0)$ es un punto del plano π_1 puesto que sí que verifica su ecuación.

---

3. Dado el sistema de ecuaciones con parámetros reales a, b, c y dos incógnitas x, y

$$\left.\begin{array}{r} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) (Valoración de un 20 %) Determinad la relación que tiene que verificar a, b y c para que el sistema sea compatible.

b) (Valoración de un 10 %) Hallad la solución de este sistema si los parámetros verifican las relaciones $a=c=-2b$.

c) (Valoración de un 10 %) Resolved el sistema inicial cuando $a=-1$, $b=2$ y $c=3$.

Solución:

a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{array}\right)$$

Recordad que por el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 13] un sitema de ecuaciones lineales es compatible si:

$$\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(M)$$

Notemos que, $\text{rang}(A) = 2$, puesto que los menores más grandes de la matriz son los de orden dos, pues solo tiene dos columnas, y hay al menos un menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$.

Ahora si analizamos el $\text{rang}(M)$ y queremos que este sea 2, deberemos imponer que el único menor de orden tres de la matriz M sea nulo

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = 7a + 8b - 3c$$

Por lo tanto,

$\boxed{\text{el sistema es compatible si los valores de los parámetros verifican la ecuación } 7a + 8b - 3c = 0}$.

b) Si los parámetros verifican $a = c = -2b$, observamos que a partir del resultado obtenido en el apartado (a), podemos afirmar que el sistema es compatible. Efectivamente, si $a = c = -2b$, entonces se verifica la condición $7a + 8b - 3c = 0$, puesto que si hacemos $a = -2b$ y $c = -2b$ se verifica la condición $7\,(-2b) + 8b - 3\,(-2b) = 0$.

El sistema que tenemos que resolver si $a = -2b$ y $c = -2b$ es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = -2b \\ -x - 4y = b \\ 2x + y = -2b \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -2b \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & -2b \end{array}\right) \underset{(1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -2b \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -2b \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) $2 \cdot F2 + F1 \to F2$ y $F3 - F1 \to F3$
(2) $3 \cdot F3 - 4 \cdot F2 \to F3$
El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = -2b \\ -3y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 5y = -2b \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 5(0)y = -2b \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = -b \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Así pues, la solución del sistema en función de los parámetros a, b y c que verifica $a = c = -2b$ es:

$$\boxed{x = -b \qquad y = 0}$$

c) Si consideramos los valores $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$, entonces a partir del resultado obtenido en el apartado (a), podemos afirmar que el sistema es compatible, pues estos valores verifican la condición $7a + 8b - 3c = 0$, efectivamente: $7\,(-1) + 8\,(2) - 3\,(3) = 0$.

El sistema que tenemos que resolver si $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$ es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = -1 \\ -x - 4y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) $2 \cdot F2 + F1 \to F2$ y $F3 - F1 \to F3$
(2) $3 \cdot F3 - 4 \cdot F2 \to F3$
El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = -1 \\ -3y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 5y = -1 \\ y = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 5\,(-1) = -1 \\ y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = -1 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, la solución del sistema cuando $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$ es:

$$\boxed{x = 2 \qquad y = -1}.$$

Responded las siguientes preguntas razonando en todo momento los pasos seguidos:

1. (Valoración de un 20 %) Sea $v = (1, \lambda, 5, -7, 0)$ y sea $F =< (1, 2, 3, 1, 2a), (1, 3, 2, 5, 3a) >$ donde "a" es la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.
   Calculad λ para que $v \in F$.

Solución: Para que $v \in F$ es necesario que v sea combinación lineal de los vectores de F. Planteamos pues el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 3a \end{pmatrix}$$

La solución del cual es $x = 3$, $y = -2$ y $\lambda = 0$, independientemente del valor de a. Así, el λ que buscamos es 0.

---

2. Sea $F \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial definido como:
   $F =< (-1, 0, 2, 0), (1, 7, a, 0), (5, 0, 0, -3), (2, 0, 6, -3), (1, 0, -12, 3) >$ donde "a" es la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC.

   a) (Valoración de un 10 %) Calculad la dimensión de F y una base A de F.

Solución: Para calcular la dimensión de F calculemos el rango de la matriz que forman los vectores [Ver módulo 2, sección 4.5]:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 3 independientemente de a ya que contiene el menor 3×3:
$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ y ningún menor 4×4 tiene determinante distinto de 0 (solo es necesario calcular los dos determinantes 4×4 fruto de orlar el menor anterior).
De forma que la dimensión de F es 3 y una base A puede ser la formada por los vectores involucrados en el determinante no nulo anterior: $A = \{(-1, 0, 2, 0), (1, 7, a, 0), (5, 0, 0, -3)\}$.

---

b) (Valoración de un 10 %) ¿Cuáles de las siguientes matrices pueden ser matrices de cambio de base de una base B a la base A del apartado anterior?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ a & 2 & -4 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 0 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Hemos visto en el apartado anterior que la dimensión de F es 3. Así, todas las matrices de cambio entre bases de F deberán ser 3×3. Esto nos deja como únicas candidatas C_2 y C_5.
Las matrices de cambio de base han de ser invertibles (la matriz inversa es la matriz de cambio de base en dirección contraria), por tanto deberán tener determinante distinto de 0. Tenemos que $\det(C_5) \neq 0$ y que $\det(C_2) = 0$ independientemente de a.
Por tanto, la única matriz que puede ser un cambio de base entre la base A y otra base B es la matriz C_5.

---

c) (Valoración de un 10 %) Para cada matriz solución del apartado anterior, ¿Cuál es la base de salida B?

Solución: En el apartado anterior hemos visto que la única opción era C_5. Ahora, para calcular la base B podemos hacer [Ver módulo 2, sección 4.7]:

$$B = A \cdot C_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & a \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Así $B = \{(4, 0, 2, -3), (5, 0, 0, -3), (6, 7, a, -3)\}$.

---

d) (Valoración de un 10 %) Sea $v = (40, 14, 2a - 6, -21)$. Calculad las coordenadas de v en la base A y en la base B que has calculado en el apartado anterior.
Comprueba que efectivamente la matriz de cambio de base transforma las coordenadas de v en la base B a las coordenadas en la base A.

Solución: Para calcular las coordenadas de v en la base A solucionamos el siguiente sistema lineal [Ver módulo 2, sección 2.4]:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 14 \\ 2a-6 \\ -21 \end{pmatrix}$$

La solución del cual es $x = -3$, $y = 2$ y $z = 7$. Así las coordenadas de v en la base A son $(-3, 2, 7)$.

Para calcular las coordenadas de v en la base B procedemos de forma análoga:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & a \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 14 \\ 2a-6 \\ -21 \end{pmatrix}$$

La solución del cual es $x = -3$, $y = 8$ y $z = 2$. Así las coordenadas de v en la base B son $(-3, 8, 2)$.

Finalmente comprobamos que efectivamente la matriz C_5 transforma las coordenadas de v en la base B a las coordenadas en la base A [Ver módulo 2, sección 4.7]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

---

3. Sea $F \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial de dimensión 2 definido como:
   $F = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0, a_1 + a_2 = a_3 + a_4\}$

   a) (Valoración de un 10 %) Sea $e_1 = (1, 0, -1, 2)$ y $e_2 = (0, 1, -1, 2)$. Comprobad que $A = \{e_1, e_2\}$ es una base de F.

Solución: Como sabemos que la dimensión del subespacio vectorial es 2, para comprobar que A es una base de F es suficiente con ver que $e_1 \in F$ y $e_2 \in F$ y que son linealmente independientes.
Veremos que pertenecen a F si verifican las ecuaciones que determinan los elementos de F: $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ y $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$. Cosa cierta para los dos vectores.
Para ver que son linealmente independientes, comprobamos que la matriz formada por estos 2 vectores tiene rango 2. Para ello encontramos un menor de orden 2 diferente de 0:
$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

---

b) (Valoración de un 10 %) Sea $u = (2, -2, 0, 0)$ y sea v_1 un vector unitario en la dirección de u. ¿Pertenece v_1 a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A del apartado anterior.

Solución: Podemos calcular el vector v_1 unitario en la dirección de u haciendo: $v_1 = \frac{u}{|u|}$.
Tenemos que $|u| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$.
Así $v_1 = (\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{-2}{2\sqrt{2}}, 0, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$.
Para saber si $v_1 \in F$ y a la vez calcular sus coordenadas en la base A, solucionamos el siguiente sistema lineal [Ver módulo 2, sección 2.4]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución del cual es $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Por tanto $v_1 \in F$ y las coordenadas de v en la base A son $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

---

c) (Valoración de un 20 %) Encontrad un vector v_2 de forma que $B = \{v_1, v_2\}$ sea una base ortogonal de F. Calculad la matriz de cambio de base de la base B a la base A.

Solución: Para calcular una base ortogonal seguimos el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt [Ver módulo 2, sección 6.4]. El primer vector (v_1) ya lo tenemos del apartado anterior, de forma que el primer paso ya lo hemos realizado. Continuamos pues a partir de aquí. Como segundo vector para complementar v_1 y tener una base para hacer Gram-Schmidt, podemos usar, por ejemplo, el vector $e_1 = (1, 0 - 1, 2)$, ya que sabemos que es de F y que es linealmente independiente de v_1 (podemos encontrar un menor 2×2 con determinante distinto de 0).
Por Gram-Schmidt tendremos que $v_2 = e_1 - PO(e_1, < v_1 >)$
Calculamos primero la proyección ortogonal:

$$PO(e_1, < v_1 >) = \frac{e_1 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 0)$$

Así tendremos: $v_2 = e_1 - PO(e_1, < v_1 >) = (1, 0, -1, 2) - (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 2)$.

Para calcular la matriz C de cambio de base de la base B a la base A debemos expresar los vectores de la base B en función de los de la base A [Ver módulo 2, sección 4.7]. Para el vector v_1 ya lo tenemos del apartado anterior. Para el vector v_2 resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución del cual es $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Así pues la matriz de cambio de base es:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $f(a, b, c) = (2a - 4b + c, 3a - 6c)$.
   Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $g(x, y) = (x + y, -x \cdot y)$.
   (a) (Valoración de un 10 %) Averiguad si f y g son aplicaciones lineales: para cada una demostrad si lo es o proporcionad un contraejemplo si no lo es.
   (b) (Valoración de un 10 %) Escribid la matriz de la aplicación f cuando usamos las bases canónicas del espacio origen $\mathbb{R}^3$ y del espacio destino $\mathbb{R}^2$.
   (c) (Valoración de un 15 %) Escribid la matriz de la aplicación f cuando usamos como base del espacio origen $\mathbb{R}^3$ la base canónica y como base del espacio destino $\mathbb{R}^2$ una base formada por vectores de la imagen de la aplicación f.

Solución:

(a) f sí que es una aplicación lineal. Par demostrarlo se debe comprobar (como se explica en el punto 2.2 del Módulo 4) que la imagen de la suma de vectores es siempre la suma de sus imágenes:

$$f(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) = (2(a_1 + a_2) - 4(b_1 + b_2) + (c_1 + c_2), 3(a_1 + a_2) - 6(c_1 + c_2))$$

$$= (2a_1 + 2a_2 - 4b_1 - 4b_2 + c_1 + c_2, 3a_1 + 3a_2 - 6c_1 - 6c_2)$$

$$= (2a_1 - 4b_1 + c_1 + 2a_2 - 4b_2 + c_2, 3a_1 - 6c_1 + 3a_2 - 6c_2)$$

$$= (2a_1 - 4b_1 + c_1, 3a_1 - 6c_1) + (2a_2 - 4b_2 + c_2, 3a_2 - 6c_2) = f(a_1, b_1, c_1) + f(a_2, b_2, c_2)$$

Y también se debe comprobar que la imagen del producto de un vector por un escalar siempre es el producto de la imagen por el escalar:

$$f(ka, kb, kc) = (2(ka) - 4(kb) + (kc), 3(ka) - 6(kc))$$

$$= (2ka - 4kb + kc, 3ka - 6kc) = (k(2a - 4b + c), k(3a - 6c))$$

$$= k(2a - 4b + c, 3a - 6c) = kf(a, b, c)$$

g no es una aplicación lineal. Podemos encontrar un contraejemplo (como en el ejemplo 2 del punto 2.2 del Módulo 4). La imagen de la suma de vectores no es siempre la suma de sus imágenes:

$$(1, 2) = (1, 1) + (0, 1)$$

$$g(1,2) = (1+2, -1\cdot 2) = (3,-2)$$

$$g(1,1) + g(0,1) = (1+1, -1\cdot 1) + (0+1, -0\cdot 1) = (2,-1) + (1,0) = (3,-1)$$

$$g(1,2) \neq g(1,1) + g(0,1)$$

O, alternativamente, podemos encontrar un contraejemplo de que la imagen del producto de un vector por un escalar sea el producto de la imagen por el escalar:

$$(2,2) = 2\cdot(1,1)$$

$$g(2,2) = (2+2, -2\cdot 2) = (4,-4)$$

$$2\cdot g(1,1) = 2\cdot(1+1, -1\cdot 1) = 2\cdot(2,-1) = (4,-2)$$

$$g(2,2) \neq 2\cdot g(1,1)$$

(b) Sean C_3 y C_2 las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Sea

$$A = M(f;\ C_3, C_2),\ \text{ la matriz de } f \text{ en las bases } C_3 \text{ y } C_2;$$

Para construirla tenemos que calcular las imágenes por f de la base canónica C_3 de $\mathbb{R}^3$, o sea, las imágenes de $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ por $f(a,b,c) = (2a-4b+c, 3a-6c)$. Podéis ver el ejemplo 4 de la Sección 3 del Módulo 4. Tenemos $f(1,0,0) = (2,3)$, $f(0,1,0) = (-4,0)$ y $f(0,0,1) = (1,-6)$. Entonces debemos expresar el vector $(2,3)$ en la base canónica C_2 de $\mathbb{R}^2$. Pero esto es muy sencillo ya que $(2,3) = 2\cdot(1,0) + 3\cdot(0,1)$, es decir, las componentes del vector $(2,3)$ en la base canónica son precisamente las coordenadas $2,3$. Esto ocurre siempre que trebajamos con la base canónica. Análogamente, pues, las componentes de $(-4,0)$ en la base C_2 son $-4,0$ y las componentes de $(1,-6)$ en la base C_2 son $1,-6$. Así, pues,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(c) Sabemos que la matriz de una aplicación lineal en dos bases U y V se obtiene: primero calculando las imágenes de los vectores de U; y después calculando sus componentes en la base V; finalmente estas componentes se escriben por columnas (ver Módulo 4, Sección 3).

Sabemos (ver apartado (b)) que las imágenes por f de la base canónica son: $f(1,0,0) = (2,3)$, $f(0,1,0) = (-4,0)$ y $f(0,0,1) = (1,-6)$.

El subespacio imagen de f está generado por las imágenes de una base del espacio origen. Las imágenes de una base aparecen en las columnas de la matriz de la aplicación (ver Módulo 4, Sección 4). Por tanto, para la aplicación f es suficiente tomar las columnas de la matriz A y mirar qué vectores son linealmente independientes.

La imagen de f está generada por los vectores $(2,3),(-4,0),(1,-6)$. Claramente, el primero y el segundo son linealmente independientes y el tercero es combinación lineal de los otros dos. Así, $\{(2,3),(-4,0)\}$ es una base de la imagen de f y la dimensión de la imagen de f es 2. Como el espacio destino también tiene dimensión 2, esta base es también base de $\mathbb{R}^2$.

Entonces debemos expresar el vector $(2,3)$ en esa base $\{(2,3),(-4,0)\}$. Pero eso es muy sencillo, sus componentes son $1,0$. Análogamente, las componentes de $(-4,0)$ en la base $\{(2,3),(-4,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ son $0,1$. Nos falta solo calcular las componentes del vector $(1,-6)$ en la base $\{(2,3),(-4,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Podemos plantear el sistema $1=2x-4y$ y $-6=3x$ de donde obtenemos que $x=-2$ y $1=-4-4y$ nos dice que $y=\frac{-5}{4}$

Así, pues, la matriz que nos piden es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{4} \end{pmatrix}.$$

---

2. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida en las bases canónicas por:

$$f(x,y,z)=(-6x+10y+16z,3x-3y-6z,-3x+5y+8z)$$

   (a) (Valoración de un 10 %) Calculad la matriz A de f en les bases canónicas de $\mathbb{R}^3$.
   (b) (Valoración de un 10 %) Calculad el polinomio característico de f y sus valores propios.
   (c) (Valoración de un 15 %) Calculad una base de $\mathbb{R}^3$ formada por el máximo número de vectores propios de f.

Solución:

(a) La matriz A de f en las bases canónicas se obtiene calculando las imágenes de la base canónica y poniendo sus componentes en columnas (ver Módulo 4, Sección 3). Así, como $f(1,0,0)=(-6,3,-3)$, $f(0,1,0)=(10,-3,5)$ y $f(0,0,1)=(16,-6,8)$, entonces

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 10 & 16 \\ 3 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) El polinomio característico de A es (ver Módulo 4, Sección 7):

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}-6-\lambda & 10 & 16\\ 3 & -3-\lambda & -6\\ -3 & 5 & 8-\lambda\end{vmatrix}$$

Antes de desarrollar este determinante observamos que podemos obtener un cero si a la tercera fila le sumamos la segunda:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}-6-\lambda & 10 & 16\\ 3 & -3-\lambda & -6\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

Y podemos obtener otro cero si a la tercera columna le restamos la segunda:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}-6-\lambda & 10 & 6\\ 3 & -3-\lambda & -3+\lambda\\ 0 & 2-\lambda & 0\end{vmatrix}$$

De este modo podemos desarrollar por la tercera fila y el cálculo resulta más sencillo, y ya tenemos el polinomio parcialmente factorizado:

$$p(\lambda)=-(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}-6-\lambda & 6\\ 3 & -3+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(-\lambda^2+3\lambda-6\lambda+18-18)=(2-\lambda)(-\lambda^2-3\lambda).$$

Los valores propios de A son las raíces de este polinomio (ver Módulo 4, Sección 7). Solo falta sacar factor común la λ del segundo factor y lo tendremos totalmente factorizado:

$$p(\lambda)=(\lambda-2)(-\lambda)(\lambda+3).$$

O sea, *los valores propios de f son 2, 0 y -3, cada uno de ellos con multiplicidad algebraica 1.*

(c) Como $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tiene tres valores propios reales y diferentes, podemos concluir que f diagonaliza (ver Módulo 4, Sección 8). Vamos a buscar un vector propio de cada valor propio.

Para el valor propio 2, tenemos que calcular el $\ker(f-2\cdot \mathrm{I})$, o sea, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix}-6-2 & 10 & 16\\ 3 & -3-2 & -6\\ -3 & 5 & 8-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

O sea,

$$\begin{pmatrix}-8 & 10 & 16\\ 3 & -5 & -6\\ -3 & 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

La tercera ecuación es equivalente a la segunda. Nos queda $-8x+10y+16z=0$ y $3x-5y-6z=0$. Sumando a 8 veces la segunda tres veces la primera obtenemos: $-10y=0$. O sea $y=0$. Por tanto, sustituyendo en la primera, $-8x+16z=0$. O sea, $x=\dfrac{-16z}{-8}=2z$. Los vectores solución son de la forma: $(x,y,z)=(2z,0,z)=z(2,0,1)$. Un vector propio de f de valor propio 2 es el $(2,0,1)$.

Para el valor propio 0, tenemos que calcular el $\ker(f-0\cdot \mathrm{I})$, o sea, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -6 & 10 & 16 \\ 3 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El resultado será el núcleo de la aplicación lineal. Usamos el método de Gauss. Sumamos la primera fila al doble de la segunda y restamos la primera fila al doble de la tercera:

$$\begin{pmatrix} -6 & 10 & 16 \\ 3 & -3 & 6 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 10 & 16 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda $-6x+10y+16z=0$ y $4y+4z=0$. O sea, $y=\dfrac{-4z}{4}=-z$ y, substituyendo en la primera, $-6x-10z+16z=0$. Es decir, $-6x+6z=0$, $x=\dfrac{-6z}{-6}=z$. Los vectores solución son de la forma $(x,y,z)=(z,-z,z)=z(1,-1,1)$. Un vector propio de f de valor propio 0 es el $(1,-1,1)$.

Para el valor propio -3, tenemos que calcular el $\ker(f+3\cdot \mathrm{I})$, o sea, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -6+3 & 10 & 16 \\ 3 & -3+3 & -6 \\ -3 & 5 & 8+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sea,

$$\begin{pmatrix} -3 & 10 & 16 \\ 3 & 0 & -6 \\ -3 & 5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usamos el método de Gauss. Sumamos la primera fila a la segunda y restamos la primera fila a la tercera:

$$\begin{pmatrix} -3 & 10 & 16 \\ 3 & 0 & -6 \\ -3 & 5 & 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 10 & 16 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Sumamos la segunda fila al doble de la tercera:

$$\begin{pmatrix} -3 & 10 & 16 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda $-3x + 10y + 16z = 0$ y $10y + 10z = 0$. A partir de esta segunda ecuación tenemos $y = \dfrac{-10z}{10} = -z$. Substituyendo en la primera, $-3x - 10z + 16z = 0$, es decir, $-3x + 6z = 0$, o sea $x = \dfrac{-6z}{-3} = 2z$. Los vectores solución son de la forma $(x, y, z) = (2z, -z, z) = z(2, -1, 1)$. Un vector propio de f de valor propio -3 es el $(2, -1, 1)$.

Una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f es $\{(2, 0, 1), (1, -1, 1), (2, -1, 1)\}$.

---

3. Consideremos la letra T formada por los segmentos AB y CD, donde $A = (-5, -1)$, $B = (-5, 3)$, $C = (-5, 1)$ y $D = (-1, 1)$. Sea $F = (1, 2)$.

   (a) (Valoración de un 10 %) Sea f el escalado de razón $\frac{1}{2}$ y desde el punto $P = (a, b)$. Encontrad el punto P de manera que la imagen por f del punto C sea F, o sea $f(C) = F$. Escribid la matriz del escalado f en este caso.

   (b) (Valoración de un 10 %) Sea g el giro de ángulo α en sentido antihorario y desde el punto F. Calculad el ángulo α de manera que la imagen por g de la lletra T quede en su posición vertical (T, como se escribe). Escribid la matriz del giro g en este caso.

   (c) (Valoración de un 10 %) Calculad la matriz de la aplicación composición $g \circ f$ y las imágenes por esta composición de los puntos A, B, C y D.

Solución:

(a) Para calcular la matriz del escalado de razón $\frac{1}{2}$ y desde el punto $P = (a, b)$, se tienen que multiplicar las tres matrices siguientes, de derecha a izquierda: la traslación de vector $-(a, b)$, el escalado de razón $\frac{1}{2}$ y la translación de vector (a, b) (ver Módulo 5, Sección 2). Nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

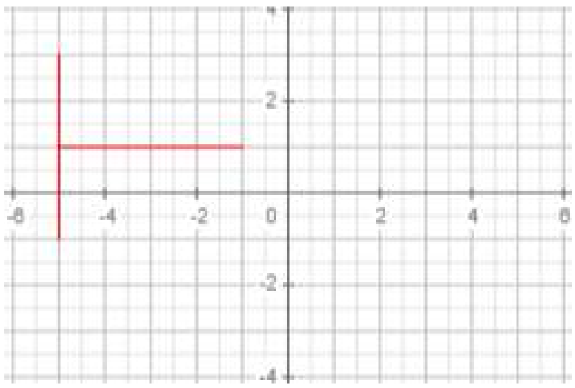

Figura 1: La T

Imponemos que $f(C) = F$. Es a decir:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

És a dir,

$$\begin{pmatrix} \frac{-5}{2} + \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{b}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos que $\frac{a}{2} = 1 + \frac{5}{2}$ de donde $a = 7$. Y $\frac{b}{2} = 2 - \frac{1}{2}$ de donde $b = 3$.

El escalado f tiene que ser desde el punto $P = (7, 3)$ y la matriz correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

(b) Para calcular la matriz del giro de ángulo α en sentido antihorario y desde el punto $F = (1, 2)$, se tienen que multiplicar las tres matrices siguientes, de derecha a izquierda: la traslación de vector $-(1, 2)$, el giro de ángulo α y la traslació de vector $(1, 2)$ (ver Módulo 5, Sección 3). Para simplificar notaciones, denotamos $c = \cos(\alpha)$ y $s = \sin(\alpha)$. Nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 1 - c + 2s \\ s & c & -s + 2 - 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solo tenemos que observar que la T que está girada a la izquierda tiene que pasar a posición vertical. El ángulo que hay que girar es de 270° en sentido antihorario. Entonces $s = -1$ y $c = 0$ y la matriz del giro será:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Para calcular la matriz de la composición del escalado y el giro se tienen que multiplicar sus dos matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las imágenes de los puntos las podemos calcular todas al mismo tiempo multiplicando así:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos que $g(A) = (0, 2)$, $g(B) = (2, 2)$, $g(C) = (1, 2)$ y $g(D) = (1, 0)$.

Responded las siguientes preguntas razonando en todo momento los pasos seguidos:

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida en la base canónica por:

$$f(x, y, z) = ((n-5)x + 8y - n \cdot z, 3y, -n \cdot x + 8y + (n-5)z)$$

Sustituid n por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP. Se pide:

(a) (Valoración de un 10 %) Calculad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) (Valoración de un 20 %) Calculad el polinomio característico de f, indicad cuáles son los valores propios de f y calculad una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga el número máximo de vectores propios.

(c) (Valoración de un 10 %) Decid si f es diagonalizable y usad la expresión diagonal para calcular f^3.

Solución:
Resolvemos el ejercicio para un valor de n genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir n por su valor en los resultados que siguen.

(a) Para calcular A, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calculamos las imágenes por f de los tres vectores de la base canónica y los colocamos en columnas, tal como se explica en el punto "3. Matriz asociada a una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales":

$$A = \begin{pmatrix} n-5 & 8 & -n \\ 0 & 3 & 0 \\ -n & 8 & n-5 \end{pmatrix}$$

(b) El polinomio característico de f es $p(t) = |A - t\mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios". Para calcularlo, desarrollamos este determinante por la segunda fila:

$$\det(A - t\mathrm{Y}) = \begin{vmatrix} n-5-t & 8 & -n \\ 0 & 3-t & 0 \\ -n & 8 & n-5-t \end{vmatrix} = (3-t) \cdot \begin{vmatrix} n-5-t & -n \\ -n & n-5-t \end{vmatrix}$$

$$= (3-t)((n-5-t)(n-5-t) - (-n)^2) =$$

$$= (3-t)(n^2 - 5n - tn - 5n + 25 + 5t - tn + 5t + t^2 - n^2) =$$

$$= (3-t)(25 - 10n + (10-2n)t + t^2) = (3-t)(t+5)(t-2n+5)$$

Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(t) = 0$: 3, -5 y $2n-5$. Si $n = 4$ el VAP 3 tendrá multiplicidad 2. Si $n = 0$ el VAP -5 tendrá multiplicidad 2. En el resto de casos hay 3 VAPs diferentes con multiplicidad 1.

Para encontrar los vectores propios de valor propio -5 buscamos una base del $\ker(f + 5\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} n & 8 & -n \\ 0 & 8 & 0 \\ -n & 8 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $n = 0$ tenemos una única ecuación $8y = 0$ y tendríamos 2 VEPs para el VAP -5: $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$. En caso contrario, si $n \neq 0$, de la segunda ecuación podemos ver que $y = 0$ y sustituyendo en la primera obtenemos $nx - nz = 0$ y por lo tanto $z = x$. Una solución es el vector $(1, 0, 1)$ y este sería un VEP de VAP -5, para $n \neq 0$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio 3 buscamos una base del $\ker(f - 3\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} n-8 & 8 & -n \\ 0 & 0 & 0 \\ -n & 8 & n-8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $n = 4$ la primera y la tercera ecuación son iguales $-4x+8y-4z = 0$ y se deduce que $z = 2y-x$ y por lo tanto tendríamos dos VEPs: $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, 2)$. También serían generadores $(1, 0, -1)$ y $(1, 1, 1)$ (este segundo es la suma de los dos anteriores).
En caso contrario, si $n \neq 4$, podemos restar la primera ecuación de la tercera y ver que $(-2n + 8)x + (2n - 8)z = 0$ de donde $z = x$. Y después sustituyendo esta condición en la primera ecuación tenemos $(n-8)x + 8y - nx = 0$ de donde $-8x + 8y = 0$ y por lo tanto $y = x$. Una solución es el vector $(1, 1, 1)$ y este sería un VEP de VAP 3.

Para encontrar los vectores propios de valor propio $2n-5$ buscamos una base del $\ker(f - (2n-5)\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -n & 8 & -n \\ 0 & 8-2n & 0 \\ -n & 8 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $n = 4$ ya hemos resuelto el sistema para el VAP 3. Si $n = 0$ lo hemos resuelto para el VAP -5.
En caso contrario, podemos aislar de la segunda ecuación que es $(8 - 2n)y = 0$ y ver que $y = 0$. Sustituyendo en la primera $-nx - nz = 0$ obtenemos $z = -x$. Una solución es el vector $(1, 0, -1)$.

Así pues, una base de vectores propios de $\mathbb{R}^3$ es $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, -1)\}$.

(c) Dado que hemos encontrado una base de vectores propios en cualquiera de los casos, podemos aplicar la teoría del punto "8. Diagonalización de endomorfismos" y decir que la matriz A es diagonalizable. Su forma diagonal D contiene los VAPs y la matriz C de cambio a la forma original es la formada por los VEPs correspondientes en columnas (siguiendo el mismo orden que los VAPs):

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2n-5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se cumple que $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$.
Si queremos calcular A^3 usamos que: $A^3 = C \cdot D \cdot C^{-1} \cdot C \cdot D \cdot C^{-1} \cdot C \cdot D \cdot C^{-1} = C \cdot D^3 \cdot C^{-1}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -125 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & (2n-5)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4n^3 - 30n^2 + 75n - 125 & 152 & -4n^3 + 30n^2 - 75n \\ 0 & 27 & 0 \\ -4n^3 + 30n^2 - 75n & 152 & 4n^3 - 30n^2 + 75n - 125 \end{pmatrix}$$

---

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$f(1,0,-1) = (-1,0)$$
$$f(1,1,0) = (3,n)$$
$$f(0,1,2) = (2,n)$$

Sustituid n por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP.

(a) (Valoración de un 10 %) Comprobad que $B_3 = \{(1,0,-1),(1,1,0),(0,1,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y escribid la matriz $M(f \mid B_3, C_2)$ de f en esta base y en la canónica. $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) (Valoración de un 10 %) Escribid la matriz $M(f \mid C_3, C_2)$ de f en las bases canónicas $C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y la expresión de $f(x,y,z)$ en función de las coordenadas canónicas.

(c) (Valoración de un 10 %) Encontrad la matriz $M(f \mid B_3, B_2)$ asociada a la aplicación f en la base de destino $B_2 = \{(0,1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solución:
Resolvemos el ejercicio para un valor de n genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir n por su valor en los resultados que siguen.

(a) Dado que B_3 está formada por tres vectores de $\mathbb{R}^3$, para ver que son base es suficiente probar que son linealmente independientes, es decir, que su determinante no es nulo (puntos 2.4 y 4.6 del módulo "Elementos de álgebra lineal"). Lo comprobamos desarrollando por la primera fila (o usando Sarrus):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Para calcular A, la matriz de f en esta base B_3, colocamos en columnas las imágenes por f de los tres vectores de B_3, tal como se explica en el punto "3.Matriz asociada a una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales":

$$M(f \mid B_3, C_2) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & n & n \end{pmatrix}$$

(b) Cómo se explica en el punto "6. Cambios de base en una aplicación lineal" la matriz asociada a f en las nuevas bases será el resultado de multiplicar la matriz que tenemos de f por la matriz de cambio de C_3 a B_3 que es $M(Id \mid C_3, B_3)$:

$$M(f \mid C_3, C_2) = M(f \mid B_3, C_2) \cdot M(Id \mid C_3, B_3)$$

$$M(Id \mid C_3, B_3) = M(Id \mid B_3, C_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f \mid C_3, C_2) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & n & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

La expresión en función de coordenadas canónicas de f sería: $f(x, y, z) = (-3x + 6y - 2z, ny)$.

(c) Como se explica en el punto "6. Cambios de base en una aplicación lineal" la matriz asociada a f en las nuevas bases será el resultado de multiplicar la matriz de cambio de C_2 a B_2 que es $M(Id \mid C_2, B_2)$ por la matriz que tenemos de f.

$$M(f \mid B_3, B_2) = M(Id \mid C_2, B_2) \cdot M(f \mid B_3, C_2)$$

$$M(Id \mid C_2, B_2) = M(Id \mid B_2, C_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f \mid B_3, B_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & n & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n-3 & n-2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

---

3. Sean $A = (n, \frac{n+1}{2})$, $B = (0,0)$, $C = (n,0)$. Considerad el triángulo ABC formado por estos tres puntos. Sea la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y sea f la transformación afín definida por la matriz M.
Sustituid n por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP.

(a) (Valoración de un 5 %) Calculad las imágenes por f de los tres vértices del triángulo ABC.

(b) (Valoración de un 10 %) Encontrad la fórmula para calcular $f(x, y)$ y decid justificadamente si f es una aplicación lineal.

(c) (Valoración de un 10 %) Demostrad que la transformación f es equivalente a un giro en sentido antihorario de $-90°$ respecto al punto $(n, n+1)$ seguido de una traslación. Determinad el vector de la traslación.

(d) (Valoración de un 5 %) Calculad qué puntos del plano quedan fijos al aplicar esta transformación f.

Solución:

(a) Calculamos las imágenes de A, B, C por M usando la notación matricial eficiente del punto 5 del módulo "Transformaciones geométricas":

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n & 0 & n \\ \frac{n+1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n-3}{2} & -2 & -2 \\ 1 & n+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las imágenes de los puntos dados son: $f(A) = (\frac{n-3}{2}, 1)$, $f(B) = (-2, n+1)$ y $f(C) = (-2, 1)$.

(b) La imagen del punto (x, y) por f es:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2 \\ -x+n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos escribir que $f(x, y) = (y-2, -x+n+1)$. En el punto "2.2. Aplicaciones lineales" del módulo de aplicaciones lineales se caracterizan las aplicaciones lineales diciendo que son aquellas que cumplen que $f(a_1(x_1, y_1) + a_2(x_2, y_2)) = a_1 \cdot f(x_1, y_1) + a_2 \cdot f(x_2, y_2)$. Comprobémoslo en este caso concreto:

$$f(a_1(x_1, y_1) + a_2(x_2, y_2)) = f((a_1x_1 + a_2x_2, a_1y_1 + a_2y_2)) =$$

$$= (a_1y_1 + a_2y_2 - 2, -a_1x_1 - a_2x_2 + n + 1)$$

$$a_1 \cdot f(x_1, y_1) + a_2 \cdot f(x_2, y_2) = a_1(y_1 - 2, -x_1 + n + 1) + a_2(y_2 - 2, -x_2 + n + 1)$$

$$= (a_1y_1 - 2a_1 + a_2y_2 - 2a_2, -a_1x_1 + (n + 1)a_1 - a_2x_2 + (n + 1)a_2)$$

Vemos que las expresiones no son iguales: $a_1y_1 + a_2y_2 - 2 \neq a_1y_1 - 2a_1 + a_2y_2 - 2a_2$ y $-a_1x_1 - a_2x_2 + n + 1 \neq -a_1x_1 + (n + 1)a_1 - a_2x_2 + (n + 1)a_2$.
Por lo tanto f no es una aplicación lineal.

(c) La matriz del giro de centro el punto $(n, n + 1)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda son: la matriz de la traslación de vector $(-n, -n - 1)$, la del giro de ángulo $-90°$ y centro $(0, 0)$ y la de la traslación de vector $(n, n + 1)$. Corresponden a las aplicaciones que hay que componer según se explica en el punto "4.3 Giro de un objeto a partir de un punto fijo genérico".

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos(-90°) & -sen(-90°) & 0 \\ sen(-90°) & cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & -n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La composición de este giro con una traslación de vector (a, b) sería el producto de las dos matrices (punto "6. Composición de transformaciones"):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ -1 & 0 & 2n+1+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparamos con la matriz M y vemos que a y b tienen que cumplir $a - 1 = -2$, de donde $a = -1$ y que $2n + 1 + b = n + 1$, de donde $b = -n$.

(d) La condición que tienen que cumplir los puntos fijos es que $f(x, y) = (x, y)$. Necesitamos pues que $(y - 2, -x + n + 1) = (x, y)$.
Igualando las dos coordenadas obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y - 2 = x \\ -x + n + 1 = y \end{cases}$$

Sustituimos el valor de y obtenido de la segunda ecuación en la primera: $-x + n + 1 - 2 = x$, y aislamos la incógnita x obtenemos: $x = \frac{n-1}{2}$ y sustituimos de nuevo para hallar $y = x + 2 = \frac{n-1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{n+3}{2}$.
Éste es el único punto que queda fijo por la aplicación f, el $(\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2})$.

Responded las siguientes preguntas razonando en todo momento los pasos seguidos.

1. (Valoración de un 25 %) Dados los números complejos en forma polar,

$$z_1 = 2_\pi,$$

$$z_2 = (a+1)_{-\frac{\pi}{2}},$$

donde a es la **primera cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC, calculad:

a) $z_1 + z_2$, y expresad la solución en forma polar.

Solución: Para sumar números complejos, primero los expresaremos en forma binómica. Para ello, recordemos las fórmulas que dado un número complejo en forma polar, r_θ, nos permiten pasar a forma binómica [ver módulo: Los números, sección 3.4.1],

$$z = \alpha + \beta i,$$

$$\alpha = r\cos(\theta),$$
$$\beta = r\sin(\theta).$$

Así pues, aplicando las fórmulas anteriores tenemos que

$$z_1 = 2\cos(\pi) + 2\sin(\pi)i = -2,$$

$$z_2 = (a+1)\cos(-\frac{\pi}{2}) + (a+1)\sin(-\frac{\pi}{2})i = -(a+1)i.$$

A continuación, se realiza la suma en forma binómica sumando las partes reales y las partes imaginarias por separado [Ver módulo: Los números, sección 3.4.1] y se obtiene

$$z_1 + z_2 = -2 - (a+1)i.$$

Finalmente, se nos pide el resultado en forma polar. Para ello, recordemos las fórmulas que dado un número complejo en forma binómica, $\alpha + \beta i$, nos permiten pasar a forma polar [ver módulo: Los números, sección 3.4.1],

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), & \text{si } \alpha \text{ es positivo,} \\ \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \pi, & \text{si } \alpha \text{ es negativo y } \beta \text{ es positivo,} \\ \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \pi, & \text{si } \alpha \text{ es negativo y } \beta \text{ es también negativo.} \end{cases}$$

Aplicando las anteriores fórmulas obtenemos

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-(a+1))^2} = \sqrt{4 + (a+1)^2},$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-(a+1)}{-2}\right) - \pi = \arctan\left(\frac{a+1}{2}\right) - \pi$$

Así pues, las posibles soluciones en función del valor a son:

a	Solución en forma polar
0	$\sqrt{5}_{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)-\pi}$
1	$2\sqrt{2}_{-\frac{3\pi}{4}}$
2	$\sqrt{13}_{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)-\pi}$
3	$2\sqrt{5}_{\arctan(2)-\pi}$
4	$\sqrt{29}_{\arctan\left(\frac{5}{2}\right)-\pi}$
5	$2\sqrt{10}_{\arctan(3)-\pi}$
6	$\sqrt{53}_{\arctan\left(\frac{7}{2}\right)-\pi}$
7	$2\sqrt{17}_{\arctan(4)-\pi}$
8	$\sqrt{85}_{\arctan\left(\frac{9}{2}\right)-\pi}$
9	$2\sqrt{26}_{\arctan(5)-\pi}$

b) $\sqrt[4]{\frac{z_1}{z_2}}$, y expresad las soluciones en forma polar con argumentos en el intervalo $(-\pi, \pi]$.

Solución: Primero calcularemos el cociente $\frac{z_1}{z_2}$. Para ello, se dividen los módulos y se restan los argumentos [ver módulo: Los números, sección 3.4.3]

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2_\pi}{(a+1)_{-\frac{\pi}{2}}} = \left(\frac{2}{a+1}\right)_{\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \left(\frac{2}{a+1}\right)_{\frac{3\pi}{2}}.$$

Recordemos que, con el objetivo de unificar la representación de números complejos en forma polar, es habitual considerar el argumento en el intervalo $(-\pi, \pi]$, [ver módulo: Los números, sección 3.4.1]. Por lo tanto, al argumento obtenido, $\frac{3\pi}{2}$, le restaremos una vuelta para obtener un argumento en el intervalo mencionado anteriormente. Así pues, la solución al cociente es

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{2}{a+1}\right)_{-\frac{\pi}{2}}.$$

A continuación, calcularemos las raíces cuartas. Para ello, [ver módulo: Los números, sección 3.6.1]

$$\sqrt[4]{\frac{z_1}{z_2}} = \left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, 3.$$

Por lo tanto, las raíces pedidas en forma polar son

$$\left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{\frac{-\frac{\pi}{2}}{4}}, \left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{4}}, \left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{4}}, \left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{\frac{-\frac{\pi}{2}+6\pi}{4}},$$

que, tras realizar las operaciones en los argumentos, vienen dadas por

$$\left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{-\frac{\pi}{8}}, \left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{\frac{3\pi}{8}}, \left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{\frac{7\pi}{8}}, \left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{\frac{11\pi}{8}}.$$

Finalmente, observamos que la última solución no tiene el argumento en el intervalo $(-\pi, \pi]$, por lo tanto, le restaremos una vuelta para obtener

$$\left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{-\frac{\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{\frac{3\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{\frac{7\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{(a+1)}}\right)_{-\frac{5\pi}{8}}.$$

Así pues, las posibles soluciones en función del valor a son:

a	Soluciones
0	$(\sqrt[4]{2})_{-\frac{\pi}{8}},\ (\sqrt[4]{2})_{\frac{3\pi}{8}},\ (\sqrt[4]{2})_{\frac{7\pi}{8}},\ (\sqrt[4]{2})_{-\frac{5\pi}{8}}$
1	$(1)_{-\frac{\pi}{8}},\ (1)_{\frac{3\pi}{8}},\ (1)_{\frac{7\pi}{8}},\ (1)_{-\frac{5\pi}{8}}$
2	$\left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)_{-\frac{\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)_{\frac{3\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)_{\frac{7\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)_{-\frac{5\pi}{8}}$
3	$\left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)_{-\frac{\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)_{\frac{3\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)_{\frac{7\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)_{-\frac{5\pi}{8}}$
4	$\left(\sqrt[4]{\frac{2}{5}}\right)_{-\frac{\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{5}}\right)_{\frac{3\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{5}}\right)_{\frac{7\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{5}}\right)_{-\frac{5\pi}{8}}$
5	$\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)_{-\frac{\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)_{\frac{3\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)_{\frac{7\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)_{-\frac{5\pi}{8}}$
6	$\left(\sqrt[4]{\frac{2}{7}}\right)_{-\frac{\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{7}}\right)_{\frac{3\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{7}}\right)_{\frac{7\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{7}}\right)_{-\frac{5\pi}{8}}$
7	$\left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right)_{-\frac{\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right)_{\frac{3\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right)_{\frac{7\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right)_{-\frac{5\pi}{8}}$
8	$\left(\sqrt[4]{\frac{2}{9}}\right)_{-\frac{\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{9}}\right)_{\frac{3\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{9}}\right)_{\frac{7\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{2}{9}}\right)_{-\frac{5\pi}{8}}$
9	$\left(\sqrt[4]{\frac{1}{5}}\right)_{-\frac{\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{5}}\right)_{\frac{3\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{5}}\right)_{\frac{7\pi}{8}},\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{5}}\right)_{-\frac{5\pi}{8}}$

2. (Valoración de un 25 %) Discutid el siguiente sistema lineal de ecuaciones dado en forma matricial, donde a es la **primera cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC y $b \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Resolvedlo en los casos en que sea posible.

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

Solución: Recordemos que antes de proceder a buscar las soluciones de un sistema de ecuaciones, puede resultar conveniente estudiar el sistema para saber si éste será o no compatible. Este proceso de determinar el tipo de sistema al que nos enfrentamos se llama discusión del sistema. Para ello, utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver módulo: Sistemas de ecuaciones lineales, sección 4], el cual nos dice que dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas, con A la matriz de coeficientes del sistema y M la matriz ampliada, se cumple lo siguiente:

- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = n$, entonces se tiene un sistema compatible determinado (SCD).

- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(M) = r < n$, entonces se tiene un sistema compatible indeterminado (SCI). En esta situación se dice que el sistema tiene $n - r$ grados de libertad.
- Si $\mathrm{rg}(A)<\mathrm{rg}(M)$ entonces se tiene un sistema incompatible (SI).

Para estudiar el rango de las matrices A y M operamos sobre la matriz ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & a \\ 1 & 1 & b & a \end{array}\right) \underset{pf13}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & a \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & 1 & a \end{array}\right) \underset{\substack{f2=f2-f1 \\ f3=f3-af1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & a \\ 0 & b-1 & 1-b & 0 \\ 0 & 1-b & 1-b^2 & a(1-b) \end{array}\right)$$

$$\underset{f3=f3+f2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & a \\ 0 & b-1 & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 2-b-b^2 & a(1-b) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & a \\ 0 & b-1 & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & -(b-1)(b+2) & a(1-b) \end{array}\right).$$

Así pues, tenemos los siguientes casos.

- Si $b = 1$, entonces el sistema es compatible indeterminado (SCI), ya que
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(M) = 1 < n = 3.$$
La solución del sistema es entonces:
$$x = a - y - z,\ y = y,\ z = z.$$
- Si $b = -2$ la matriz ampliada es la siguiente
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a \end{array}\right)$$
y, por tanto, tenemos los siguientes casos.
  - Si $a = 0$, entonces el sistema es compatible indeterminado (SCI), ya que
  $$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(M) = 2 < n = 3.$$
  La solución del sistema es entonces:
  $$x = z, y = z, z = z.$$
  - Si $a \neq 0$, el sistema es incompatible (SI), ya que
  $$\mathrm{rg}(A)=2 < \mathrm{rg}(M) = 3.$$
- Si $b \neq 1, -2$, $\forall a \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado (SCD), ya que
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(M) = n = 3.$$
La solución del sistema, en este caso, viene dada por
$$x = \frac{a}{b+2},\ y = \frac{a}{b+2},\ z = \frac{a}{b+2}.$$

---

3. (Valoración de un 25 %) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal usando las bases A, B respectivamente, y definida por:

$$f(x, y, z) = (2x - y, -ax + ny + z, 3z)$$

con $n \in \mathbb{N}$ un número natural y a el primer dígito de la derecha de vuestro IDP del campus UOC. Y siendo las bases A, B definidas por $A = \{(1, 0, 5), (2, -1, 1), (3, 1, 0)\}$ y $B = \{(0, 1, 1), (1, -1, 2), (1, 0, 2)\}$

a) Expresad la matriz M de la aplicación lineal $f_{A,B}$ en las bases A, B. ¿Para qué valores de n, la dimensión de la imagen de f no será máxima? Encontrad el valor de n, el número natural más pequeño tal que la dimensión de la imagen de f sea máxima. Para ese valor, ¿es f biyectiva? *NOTA: No consideramos el cero un número natural.*

Solución: La matriz de f es:

$$M_{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -a & n & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora, podemos calcular su determinante en función de a y n y verificar si tiene rango máximo:

$$\det(M_{A,B}) = 6n - 3a = 0 \iff n = a/2. \qquad (1)$$

Entonces, para todo valor de n que no cumpla esa igualdad, el rango de $M_{A,B}$ será 3, y la dimensión de la imagen será máxima.
Para $a \neq 2$, el mínimo valor de n es 1. En ese caso, la matriz de la aplicación lineal queda:

$$M_{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para $a = 2$, el mínimo valor de n es 2. En ese caso, la matriz de la aplicación lineal queda:

$$M_{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como se trata de una aplicación lineal de rango máximo entre dos espacios del mismo tamaño, se trata de una biyección.

---

b) Encontrad C, la base del espacio de llegada en la que la aplicación lineal f es $f_{A,C} = (3x + y - z, y, x + 3z)$. Encontrad también la matriz de cambio de base de B a C.

Solución: Para encontrar la nueva base C, escribiremos la ecuación del cambio de base [ver módulo 4, sección 6]:

$$M_{A,C} = Q^{-1} \cdot M_{A,B} \cdot P = Q^{-1} \cdot M_{A,B}, \qquad (2)$$

donde Q es la matriz del cambio de base de B a C y P es la identidad, al no cambiar la base del espacio de salida. Podemos calcular la matriz de la aplicación lineal f en las bases A, C a partir de la expresión del enunciado:

$$M_{A,C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

Cuyo determinante es $\det(M_{A,C}) = 10$ y, por lo tanto, también tiene rango máximo.
En esta ecuación podemos despejar Q, pues todas las matrices son invertibles al tener determinante distinto de cero:

$$Q^{-1} = M_{A,C} \cdot M_{A,B}^{-1}, \tag{3}$$

y entonces:

$$Q = M_{A,B} \cdot M_{A,C}^{-1}. \tag{4}$$

Obtenemos como resultado la matriz de cambio de base de B a C:

$$Q = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -16 & 2 \\ -3a-1 & 10n+3a+1 & -a+3 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la base C se puede expresar como $C = Q \cdot B$, que da como resultado:

$$C = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -16 & 2 \\ -3a-1 & 10n+3a+1 & -a+3 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -14 & 26 & 10 \\ 2a+10n+4 & -8a-10n+4 & -5a+5 \\ 12 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

---

4. (Valoración de un 25 %) Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Demostrad que las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^3$. ¿Es una base ortogonal? Si no es así, encontrad una base ortogonal B de $\mathbb{R}^3$ cuyo primer vector sea la primera columna de A, aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt.

Solución: Las columnas de A forman una base, al ser linealmente independientes entre ellas y tener la misma dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$. Pero no forman una base ortogonal [ver módulo 2, apartado 6.2], pues $(0, 4, 1) \cdot (0, 1, 8) = 12$. Es decir, que los productos escalares cruzados entre los vectores de la base no son cero, requisito para ser una base ortogonal. Para encontrar tal base, vamos a usar Gram-Schmidt [ver módulo 2, apartado 6.4], donde usaremos a_i como los vectores de la base A y b_j como los vectores de la nueva base ortogonal B:

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1$$
$$b_3 = a_3 - \frac{a_3 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 - \frac{a_3 \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} b_2,$$

Que nos da como resultado:

$$b_1 = (2, 0, 0)$$
$$b_2 = (0, 4, 1)$$
$$b_3 = (0, -1{,}82, 7{,}29)$$

Y forman la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1{,}82 \\ 0 & 1 & 7{,}29 \end{pmatrix}.$$

---

b) Si colocamos los vectores de la base de B en columnas, ¿Puede considerarse que B sea una matriz de rotación, escalado, o alguna combinación de éstos? Si es así, decid los factores de escala y/o ángulos de rotación. *NOTA: Expresad primero $B = C \cdot D$, donde C es una base ortonormal asociada a B y D una matriz diagonal.*

Solución: Primero calcularemos C, normalizando las columnas de B:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}97 & -0{,}24 \\ 0 & 0{,}24 & 0{,}97 \end{pmatrix}$$

Y ahora, podemos expresar $B = C \cdot D$:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1{,}82 \\ 0 & 1 & 7{,}29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}97 & -0{,}24 \\ 0 & 0{,}24 & 0{,}97 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Podemos encontrar fácilmente los valores $d_1 = 2, d_2 = 4{,}12, d_3 = 7{,}52$, y así:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}97 & -0{,}24 \\ 0 & 0{,}24 & 0{,}97 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}12 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}52 \end{pmatrix}.$$

o, equivalentemente,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}12 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}52 \end{pmatrix}.$$

De donde se deduce que $\cos(\alpha) = 0{,}97$ y $\sin(\alpha) = 0{,}24$, por lo que $\alpha = 0{,}25 rad = 14°$. Por lo tanto, la matriz B representa una rotación alrededor del eje x de α grados, y un reescalado de los ejes resultantes con factores $2, 4{,}12, 7{,}52$, respectivamente.

Responded las siguientes preguntas razonando en todo momento los pasos seguidos.

1. (Valoración de un 25 %) Responded:

   a) ¿Qué número complejo hay que sumarle a $-3+ci$ para que resulte 5_{270°? Donde c es la primera cifra de la derecha de tu IDP.

   b) Las raíces cuartas del número -4096 describen un cuadrado en el plano complejo. Proporcionad las coordenadas de los vértices que describen el cuadrado.

Solución:

a) Para sumar dos números complejos en forma polar hay que pasar el número que está en forma polar a forma binómica (ver apartado 3.4.3, Módulo 1, página 35, sobre suma de números complejos en forma polar).

$5_{270^\circ} = 5(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ) = 5(0-i) = -5i$

$-3+ci+(a+bi) = -5i$

$a+bi = 3-ci-5i$

$a+bi = 3+(-c-5)i$

Igualamos parte real y parte imaginaria:

$a = 3$

$b = -c-5$

El número que hay que sumarle es: $3+(-c-5)i$

De esta manera tenemos:

- Si $c=0$, tenemos que el número buscado es: $3-5i$
- Si $c=1$, tenemos que el número buscado es: $3-6i$
- Si $c=2$, tenemos que el número buscado es: $3-7i$
- Si $c=3$, tenemos que el número buscado es: $3-8i$
- Si $c=4$, tenemos que el número buscado es: $3-9i$
- Si $c=5$, tenemos que el número buscado es: $3-10i$
- Si $c=6$, tenemos que el número buscado es: $3-11i$
- Si $c=7$, tenemos que el número buscado es: $3-12i$
- Si $c=8$, tenemos que el número buscado es: $3-13i$
- Si $c=9$, tenemos que el número buscado es: $3-14i$

b) Para hallar las raíces cuartas de -4096 seguiremos el ejemplo de la página 44 así como los ejercicios 29 y 30 de la página 50 del Módulo 1.

Escribimos el complejo -4096 en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4.1, página 30 del Módulo 1, sobre la forma polar de los números complejos:

$r = \sqrt{(-4096)^2+(0)^2} = 4096$

$\theta = \arctan\left(\frac{0}{-4096}\right) = 180^\circ$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0° y en 180°. Como el afijo del punto buscado es $(-4096, 0)$, el ángulo está entre el segundo y el tercer cuadrante, es decir, en 180°.

Tenemos, por tanto, que: $-4096 = 4096_{180^\circ}$

Como que nos piden las raíces cuartas tenemos que hacer (observemos que en el apartado 3.6.1, en el ejemplo de la página 44 del Módulo 1, se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de -8):

$\sqrt[4]{-4096} = \sqrt[4]{4096_{180^\circ}} = \sqrt[4]{4096}_{\frac{180^o+360^o k}{4}}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

Esto es, el módulo de las raíces es $\sqrt[4]{4096} = 8$

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \frac{180^o+360^\circ k}{4}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 45^\circ$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 135^\circ$
- Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 225^\circ$
- Si $k = 3$, tenemos que $\beta_3 = 315^\circ$

Por tanto, las raíces, en forma polar, pedidas son:

$8_{45^\circ}, 8_{135^\circ}, 8_{225^\circ}, 8_{315^\circ}$

Para saber las coordenadas de estos puntos es necesario pasar los números anteriores a forma binómica:

$8_{45^\circ} = 8(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 8(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

$8_{135^\circ} = 3(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 8(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

$8_{225^\circ} = 8(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = 8(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

$8_{315^\circ} = 8(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = 8(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

Por tanto, los puntos buscados son:

$(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}), (-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}), (-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}), (4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

---

2. (Valoración de un 25 %) Considerad el siguiente sistema lineal de ecuaciones dado en forma matricial, donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC y $b \in \mathbb{R}$ es un parámetro,

$$\begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & -b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}.$$

   a) Resolvedlo en los casos en que sea posible.

   b) ¿Cuál es la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $b = 3/2$?

Solución:

a) Recordemos que antes de proceder a buscar las soluciones de un sistema de ecuaciones, puede resultar conveniente estudiar el sistema para saber si éste será o no compatible. Este proceso de determinar el tipo de sistema al que nos enfrentamos se llama discusión del sistema. Para ello, utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver módulo: Sistemas de ecuaciones lineales, sección 4], el cual nos dice que dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas, con A la matriz de coeficientes del sistema y M la matriz ampliada, se cumple lo siguiente:

- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = n$, entonces se tiene un sistema compatible determinado (SCD).
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = r < n$, entonces se tiene un sistema compatible indeterminado (SCI). En esta situación se dice que el sistema tiene $n - r$ grados de libertad.
- Si $\text{rg}(A)<\text{rg}(M)$ entonces se tiene un sistema incompatible (SI).

En primer lugar, se determina la matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada en este problema en concreto:

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & -b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -b & 1 & 4 \\ 1 & 1 & b & a \end{array}\right).$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incóggnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, puesto que si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$\begin{vmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & -b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = -b^3 - 3b.$$

Así pues, tenemos los siguientes casos:

- Si $b = 0$, la matriz A tiene rango 2 pues,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

  y podemos encontrar un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

  Asimismo, la matriz ampliada es

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{array}\right)$$

  y observamos que cuando $a = 5$ la última fila es la suma de las dos primeras. Por lo tanto, en este caso tenemos $rg(M) = 2$, ya que cualquier menor de orden 3 será nulo. Es decir, en este caso el sistema es compatible indeterminado (SCI), ya que $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 2 < n = 3$. La solución del sistema se determina de la siguiente manera. Asumiendo que las incógnitas se denominan x, y, y z, tomamos z como parámetro arbitrario, y sustituimos en la ecuación asociada a la segunda fila

$$x + z = 4,$$

  de la cual obtenemos $x = 4 - z$. Finalmente, sustituimos en la ecuación asociada a la primera fila

$$y - z = 1,$$

  donde despejando y se obtiene $y = 1 + z$. Así pues, la solución del sistema para $b = 0$ y $a = 5$ es:

$$x = 4 - z, y = 1 + z, z = z.$$

  Por otro lado, si $a \neq 5$, la matriz ampliada tiene rango 3, ya que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 5 - a \neq 0$$

y el sistema es incompatible (SI) ya que

$$\text{rg}(A)\text{=}2 < \text{rg}(M) = 3.$$

- Si $b \neq 0$ calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & -b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = -b^3 - 3b$$

y observamos que será no nulo (para cualquier valor de a), ya que estamos en el caso $b \neq 0$. Así pues el sistema es compatible determinado (SCD), ya que

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(M) \ = n = 3.$$

La resolución del sistema la realizaremos mediante el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -b & 1 & 4 \\ 1 & 1 & b & a \end{array}\right) \underset{pf13}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & a \\ 1 & -b & 1 & 4 \\ b & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{f2=f2-f1 \\ f3=f3-bf1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & a \\ 0 & -b-1 & 1-b & 4-a \\ 0 & 1-b & -1-b^2 & 1-ab \end{array}\right)$$

$$\underset{f2=f2-f3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & a \\ 0 & -2 & 2+b^2-b & 3+ab-a \\ 0 & 1-b & -1-b^2 & 1-ab \end{array}\right)$$

$$\underset{-2f3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & a \\ 0 & -2 & 2+b^2-b & 3+ab-a \\ 0 & 2b-2 & 2b^2+2 & 2ab-2 \end{array}\right)$$

$$\underset{f3=(b-1)f2+f3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & a \\ 0 & -2 & 2+b^2-b & 3+ab-a \\ 0 & 0 & b(3+b^2) & b^2a+3b+a-5 \end{array}\right)$$

A partir de la ecuación asociada a la última fila obtenemos

$$b(3+b^2)z = b^2a + 3b + a - 5,$$

donde despejando z se obtiene

$$z = \frac{b^2a + 3b + a - 5}{b(3+b^2)}.$$

A partir de la ecuación asociada a la segunda fila obtenemos

$$-2y + (2 + b^2 - b)z = 3 + ab - a,$$

donde sustituyendo el valor obtenido previamente de z tenemos

$$-2y + (2 + b^2 - b)\frac{(b^2a + 3b + a - 5)}{b(3+b^2)} = 3 + ab - a,$$

donde realizando las operaciones se obtiene, primero,

$$-2y + \frac{(ab^4 - ab^3 + 3ab^2 + 3b^3 - ab - 8b^2 + 2a + 11b - 10)}{b(3+b^2)} = 3 + ab - a,$$

y después pasando a la izquierda todos los términos que no dependen de y,

$$-2y = -\frac{2(ab - 4b^2 + a + b - 5)}{b(3 + b^2)},$$

y finalmente despejando y se obtiene

$$y = \frac{ab - 4b^2 + a + b - 5}{b(3 + b^2)}.$$

A partir de la ecuación asociada a la primera fila obtenemos

$$x + y + bz = a$$

donde sustituyendo los valores obtenidos previamente de z e y tenemos

$$x + \frac{(ab - 4b^2 + a + b - 5)}{b(3 + b^2)} + b\frac{(b^2a + 3b + a - 5)}{b(3 + b^2)} = a$$

y realizando las operaciones se obtiene, primero,

$$x + \frac{(ab^3 + 2ab - b^2 + a - 4b - 5)}{b(3 + b^2)} = a$$

y, finalmente, despejando x se obtiene

$$x = \frac{ab + b^2 - a + 4b + 5}{b(3 + b^2)}.$$

En resumen,

$$x = \frac{ab + b^2 - a + 4b + 5}{b(3 + b^2)},\ y = \frac{ab - 4b^2 + a + b - 5}{b(3 + b^2)},\ z = \frac{b^2a + 3b + a - 5}{b(3 + b^2)}.$$

Así pues, en la siguiente tabla se dan las posibles soluciones en función del valor a (en el caso $b \neq 0$).

a	x	y	z
0	$\frac{b^2+4b+5}{b(b^2+3)}$	$\frac{-4b^2+b-5}{b(b^2+3)}$	$\frac{-5+3b}{b(b^2+3)}$
1	$\frac{b^2+5b+4}{b(b^2+3)}$	$\frac{-4b^2+2b-4}{b(b^2+3)}$	$\frac{b^2+3b-4}{b(b^2+3)}$
2	$\frac{b^2+6b+3}{b(b^2+3)}$	$\frac{-4b^2+3b-3}{b(b^2+3)}$	$\frac{2b^2+3b-3}{b(b^2+3)}$
3	$\frac{b^2+7b+2}{b(b^2+3)}$	$\frac{-4b^2+4b-2}{b(b^2+3)}$	$\frac{3b^2+3b-2}{b(b^2+3)}$
4	$\frac{b^2+8b+1}{b(b^2+3)}$	$\frac{-4b^2+5b-1}{b(b^2+3)}$	$\frac{4b^2+3b-1}{b(b^2+3)}$
5	$\frac{b^2+9b}{b(b^2+3)}$	$\frac{-4b^2+6b}{b(b^2+3)}$	$\frac{5b^2+3b}{b(b^2+3)}$
6	$\frac{b^2+10b-1}{b(b^2+3)}$	$\frac{-4b^2+7b+1}{b(b^2+3)}$	$\frac{6b^2+3b+1}{b(b^2+3)}$
7	$\frac{b^2+11b-2}{b(b^2+3)}$	$\frac{-4b^2+8b+2}{b(b^2+3)}$	$\frac{7b^2+3b+2}{b(b^2+3)}$
8	$\frac{b^2+12b-3}{b(b^2+3)}$	$\frac{-4b^2+9b+3}{b(b^2+3)}$	$\frac{8b^2+3b+3}{b(b^2+3)}$
9	$\frac{b^2+13b-4}{b(b^2+3)}$	$\frac{-4b^2+10b+4}{b(b^2+3)}$	$\frac{9b^2+3b+4}{b(b^2+3)}$

b) ¿Cuál es la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $b = 3/2$?

Recordemos que, en el apartado anterior, hemos obtenido que cuando $b \neq 0$ para cualquier valor de a el sistema es compatible determinado. Por lo tanto, la posición relativa de los tres planos en el caso $b = 3/2$ es que se cortan en un único punto.

---

3. (Valoración de un 25 %) Sean los vectores $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (0, a, 0, a-1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 0)$, $v_4 = (1, a+2, -1, a)$ y $v_5 = (-2, a-4, -2, a-3)$. Donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP.

   a) Encontrad una base B del subespacio F generado por los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4.

   b) ¿Pertenece v_5 a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base B del apartado anterior.

   c) Encontrad una base ortogonal W de F.

   d) Encontrad la matriz cambio de base de B a W y expresad v_5 en la nueva base ortogonal.

Solución:

a) Buscamos una base de F. Como sabemos que los cuatro vectores generan el subespacio, para encontrar una base solo debemos comprobar si són linealmente independientes.

Para ello, calculamos el rango de la matriz que tiene por filas los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4. Lo haremos mediante determinantes. Calculamos el determinante la matriz A, desarrollando por menores.

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+2 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a+2 & -1 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [a^2 - (a-1)(a+2)] - [a - 2(a-1)] = a^2 - a^2 - 2a + a + 2 - a + 2a - 2 = 0$$

Dado que $det(A) = 0$, entonces el rango de A debe ser menor de 4.

Podemos comprobar que la matriz tiene como mínimo rango 2. Ya que el menor de orden dos que encontramos entre la 1ra y la 3ra fila y columna es distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Para saber si el rango de la matriz es 3, deberemos encontrar un menor de orden 3 que también sea distinto de 0. Orlando, podemos encontrar el siguiente menor 3×3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a$$

Este determinante es distinto de 0 siempre y cuando a sea distinto de 0. Ahora bien, para $a = 0$, podemos encontrar otros menores 3×3 que sí son distintos de 0. Como por ejemplo eliminando la cuarta fila y la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - a$$

Que vale 1 cuando $a = 0$, el caso en el que el anterior determinante era nulo. Por tanto, para cualquier valor de a tenemos que existe un menor 3×3 distinto de 0.

El rango de la matriz es 3. Existen, por lo tanto, 3 vectores linealmente independientes. En particular, v_1, v_2 y v_3 generan F y son linealmente independientes. Por lo que són base.

$$F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

b) Un modo de comprobar si v_5 pertenece a F es intentar expresarlo como combinación lineal de los vectores de la base. Es decir, encontrar valores de C_1, C_2 y C_3 tales que:

$$v_5 = C_1 \cdot v_1 + C_2 \cdot v_2 + C_3 \cdot v_3$$

Encontrar los valores de los coeficientes equivale a solucionar el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ a-4 \\ -2 \\ a-3 \end{pmatrix}$$

Debemos solucionar las siguientes ecuaciones:

(1) $C_1 = -2$
(2) $2C_1 + aC_2 = a - 4$
(3) $C_3 = -2$
(4) $C_1 + (a-1)C_2 = a - 3$

De (1) y (3) obtenemos directamente que $C_1 = -2$ y $C_3 = -2$. Substituyendo en (2) y (4), obtenemos que:

(2)' $-4 + aC_2 = a - 4 \;\rightarrow\; aC_2 = a \;\rightarrow\; C_2 = 1$
(4)' $-2 + (a-1)C_2 = a - 3 \;\rightarrow\; (a-1)C_2 = a - 1 \;\rightarrow\; C_2 = 1$

Como el sistema es compatible, podemos expresar v_5 como combinación lineal de los vectores de la base. Por tanto, v_5 pertenece a F y sus coordenadas en la base B son $(-2, 1, -2)_B$

c) Para encontrar una base ortogonal seguiremos el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt, explicado en la página 48 del modulo dedicado a Elementos de Álgebra lineal y geometría.

Para facilitar el cálculo, aplicaremos el proceso empezando por el vector v_3. El orden que sigamos no impide que encontremos vectores ortogonales, y empezar por el vector v_3 facilitará los cálculos.

Así, el primer vector de la nueva base ortogonal W será:

$$u_1 = v_3 = (0, 0, 1, 0)$$

Consideramos pues el subespacio $F_1 = \langle u_1 \rangle$
Buscamos el segundo vector a partir, ahora si, de v_1. Necesitamos un vector ortogonal a F_1

$$u_2 = v_1 - PO(v_1, F_1)$$

Es sencillo comprobar que $v_1 = (1, 2, 0, 1)$ y $u_1 = (0, 0, 1, 0)$ ya son ortogonales. De hecho, $v_1 \cdot u_1 = 0$. De forma que:

$$u_2 = v_1 = (1, 2, 0, 1)$$

Tendremos el subespacio $F_2 = \langle u_1, u_2 \rangle$
Por último, buscamos u_3, el tercer vector de la base, a partir de $v_2 = (0, a, 0, a-1)$. Deberemos imponer que sea ortogonal a F_2.

$$u_3 = v_2 - PO(v_2, F_2)$$

Para calcular la proyección ortogonal necesitamos calcular:

$$\begin{gathered} v_2 \cdot u_1 = (0, a, 0, a-1) \cdot (0, 0, 1, 0) = 0 \\ u_1 \cdot u_1 = (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = 1 \\ v_2 \cdot u_2 = (0, a, 0, a-1) \cdot (1, 2, 0, 1) = 2a + a - 1 = 3a - 1 \\ u_2 \cdot u_2 = (1, 2, 0, 1) \cdot (1, 2, 0, 1) = 1 + 4 + 1 = 6 \end{gathered}$$

De forma que

$$u_3 = v_2 - PO(v_1, F_2) = (0, a, 0, a-1) - 0 - \frac{3a-1}{6} \cdot (1, 2, 0, 1) = (-\frac{3a-1}{6}, \frac{1}{3}, 0, \frac{3a-5}{6})$$

De forma que obtenemos la base ortogonal W de F.

$$F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle (0, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1), (-\frac{3a-1}{6}, \frac{1}{3}, 0, \frac{3a-5}{6}) \rangle$$

d) Buscamos la matriz cambio de base de B a la base ortogonal C. Para ello necesitamos encontrar las coordenadas de los vectores de la base B (v_1, v_2, v_3) en la base W (u_1, u_2, u_3).
Dado que u_1 es v_3 y u_2 es v_1, es trivial que:

$$v_1 = (0, 1, 0)_W \text{ y } v_3 = (1, 0, 0)_W$$

Un modo sencillo de encontrar las coordenadas de v_2 es partir de la siguiente expresión:

$$u_3 = v_2 - \frac{3a-1}{6} \cdot u_2$$

Aislando v_2

$$v_2 = u_3 + \frac{3a-1}{6} \cdot u_2$$

De forma que, directamente vemos que

$$v_2 = (0, \frac{3a-1}{6}, 1)_W$$

Encontramos la matriz cambio de base de B a W colocando en las columnas las coordenadas de los vectores de B en la base W.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{3a-1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez tenemos la matriz, calcular las coordenadas del vector v_5 en la base W consistirá en multiplicar la matriz de cambio de base por las coordenadas del vector en la base B.
En el apartado b) hemos visto que las coordenadas del vector v_5 en la base B son $(-2, 1, -2)_B$. Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{3a-1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3a-13}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que

$$v_5 = (-2, \frac{3a-13}{6}, 1)_W$$

---

4. (Valoración de un 25 %) Sustituid el parámetro c por la tercera cifra de la derecha de vuestro identicador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:

$$M(f|C, C) = \begin{pmatrix} a & b & c+1 \\ 0 & -1 & c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal y $M(f|C, C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$. Sean a, b dos parámetros reales.

Se pide:

a) Para qué valores de los parámetros a y b la matriz diagonaliza. Determinad, en cada caso, su forma diagonal.

b) Para $a = -1$ y $b = 0$, el resultado de M^n si n es un número natural par.

c) Para $a = 1$ y $b = -2$, el resultado de M^n si n es un número natural impar.

Solución:

Resolvemos los apartados para un valor de c genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir c por su valor en los desarrollos que siguen. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

Durante la resolución, cuando nos referimos a la matriz M nos estamos refiriendo a $M(f|C, C)$.

a) En un primer momento buscaremos los VAPs de f buscando las raíces del polinomio característico, tal como se define en el punto “7. Vectores y valores propios”. El polinomio característico de f es:

$$p(\lambda) = |M - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c+1 \\ 0 & -1-\lambda & c+1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

Las soluciones de $p(\lambda) = 0$: a, -1, 1; que corresponden a los VAPs de f.

Debemos estudiar diferentes casos según el valor del parámetro a. Por un lado, estudiaremos el caso $|a| \neq 1$ (donde los 3 valores propios son distintos), el caso $a = 1$ (donde tenemos dos valores propios iguales a 1) y el caso $a = -1$ (donde tenemos dos valores propios iguales a -1). Hagamos un estudio en detalle para cada uno de los casos:

- Si $|a| \neq 1$ los 3 VAPs son distintos y, por ello, la matriz seguro que diagonaliza. En este caso, la matriz diagonal en la base de vectores propios B_1 será:

$$M(f|B_1, B_1) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 1$ tenemos los VAPs: -1 y 1. El VAP 1 tiene multiplicidad 2, debemos estudiar el $\ker(f-I)$ para determinar si la matriz diagonaliza. Es necesario que el rango de la matriz $(M - I)$ sea 1 para que el núcleo tenga dimensión 2 y, por ello, la matriz M diagonalice,

  Estudiemos pues el rango de la matriz $(M - I)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c+1 \\ 0 & -2 & c+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Empecemos observando que $c + 1$ siempre será mayor que 0 (ya que $c \geq 0$), por ello, la única forma para que las dos ecuaciones sean proporcionales es que $b = -2$ y eso implica que el rango será 1. Obtenemos 2 VEP linealmente independientes asociados al VAP 1 y, por lo tanto, la matriz M diagonalizará en este caso. Si $b \neq -2$ las ecuaciones no son proporcionales, el rango será 2, consecuentemente, solo encontraremos un VAP linealmente independiente y la matriz M no diagonalizará.

  Para $a = 1$ y $b = -2$ la matriz M en forma diagonal es:

$$M(f|B_2, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Finalmente, debemos estudiar el caso $a = -1$. Tenemos dos VAPs: -1 y 1. El VAP -1 tiene multiplicidad 2, debemos estudiar el $\ker(f + I)$ para determinar si la matriz diagonaliza. Es necesario que el rango de la matriz $(M + I)$ sea 1 para que el núcleo tenga dimensión 2 y, por ello, la matriz M diagonalice, Estudiemos entonces el rango de $(M+I)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c+1 \\ 0 & 0 & c+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como hemos visto antes $c+1>0$, $b=0$ es el único valor para el cual la matriz M tiene rango 1, ya que en dicho caso obtenemos dos columnas nulas. Entonces, para $b=0$, obtenemos 2 VEP linealmente independientes asociados al VAP -1 y, por lo tanto, la matriz M diagonalizará en este caso. Si $b \neq 0$ el rango será 2, consecuentemente, solo encontraremos un VAP linealmente independiente y la matriz M no diagonalizará.

Para $a=-1$ y $b=0$ la matriz M en forma diagonal es:

$$M(f|B_3,B_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusión. La matriz M diagonaliza en los casos:

- $|a| \neq 1$ (y cualquier valor de b real)

$$M(f|B_1,B_1) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $a=1$ y $b=-2$

$$M(f|B_2,B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $a=-1$ y $b=0$

$$M(f|B_3,B_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La matriz M cuando $a = -1$ y $b = 0$ es:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & c+1 \\ 0 & -1 & c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Del apartado “8.1. Diagonalización: conceptos y resultados”, sabemos que podemos hallar M^n usando:

$$M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

Siendo P la matriz del cambio de base y D corresponde a la matriz diagonal de M en el caso $a = -1$ y $b = 0$, es decir, a la matriz $M(f|B_3, B_3)$ hallada en el apartado a).

Teniendo en cuenta que n es un número par:

$$D^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Entonces:

$$M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I$$

Conclusión: Si $a = -1$ y $b = 0$, $M^n = I$ siendo n un número natural par.

c) La matriz M cuando $a = 1$ y $b = -2$ es:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & c+1 \\ 0 & -1 & c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como hemos visto en el apartado b):

$$M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

Siendo P la matriz del cambio de base y D corresponde a la matriz diagonal de M en el caso $a = 1$ y $b = -2$, es decir, a la matriz $M(f|B_2, B_2)$ hallada en el apartado a).

Teniendo en cuenta que n es un número impar:

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

Entonces:

$$M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1} = M$$

Conclusión: Si $a = 1$ y $b = -2$, $M^n = M$ siendo n un número natural impar.

EXAMEN 1 - 10 junio 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

(a) Expresad en forma binómica el siguiente complejo: $(-4i)^{-1}$

(b) Resolved la ecuación: $(1+i)z = \frac{1-i}{z}$. Proporcionad la solución o las soluciones en forma binómica.

Solución

(a) Tenemos que saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica), recordando que $i^2 = -1$, y agrupamos parte real y parte imaginaria.

$(-4i)^{-1} = \frac{1}{-4i} = \frac{4i}{(-4i)4i} = \frac{4i}{-16i^2} = \frac{4i}{16} = \frac{i}{4}$

Por tanto, la respuesta es: $\frac{1}{4}i$

(b) Seguiremos el ejemplo de la página 16 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del material. Tal como haríamos con una ecuación con coeficientes reales, intentaremos aislar la z de esta ecuación.

$(1+i)z = \frac{1-i}{z} \Longleftrightarrow (1+i)z^2 = 1-i \Longleftrightarrow z^2 = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$

Por tanto, tenemos que resolver la ecuación: $z^2 = -i$

Es decir, las soluciones son: $z = \sqrt{-i}$

La solución de la ecuación es, pues, las dos raíces cuadradas de $-i$. Para hallarlas, primero, pasamos $-i$ a forma polar.

Escribimos el complejo $-i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{(-1)^2} = 1$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{0}\right) = \arctan(-\infty) = 270^o$

Tenemos, por tanto, que $-i = 1_{270^o}$

Como nos piden las raíces cuadradas tenemos que hacer lo siguiente (observemos que en el apartado 3.6.1 de la página 43 del material se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt{z} = \sqrt{1_{270^o}} = 1_{\frac{270^o+360^o k}{2}}$ para $k = 0, 1$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = 1$

Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \frac{270^o+360^o k}{2}$ para k=0,1

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 135^o$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 135^o + 180^o = 315^o$

Por tanto, las dos raíces cuadradas del complejo $-i$, que son las soluciones de la ecuación dada, son: 1_{135^o}, 1_{315^o}

Para pasar estas soluciones a forma binómica solo tenemos que mirar los valores de la tabla y tendremos:

- $1_{135^o} = \cos 135^o + i \sin 135^o = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$
- $1_{315^o} = \cos 315^o + i \sin 315^o = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

2. Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$F = < (\lambda, \lambda, \lambda), (0, \lambda^2, \lambda^2), (\lambda^3, 0, \lambda^3), (\lambda^4, \lambda^4, 0) >, \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) Calculad la dimensión de F según λ y una base en cada caso.

(b) Sea $v = (-2, 2, 1)$. En el caso $\lambda = 1$, ¿$v \in F$? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base que habéis encontrado en el apartado anterior.

(c) Sea $B = \{(-2, 2, 1), (0, -1, -1), (-1, 0, -1)\}$ una base de F para el caso $\lambda = 1$. Calculad la matriz $C_{B \to A}$ de cambio de base de la base B a la base A que habéis calculado en el primer apartado para $\lambda = 1$.

Solución

(a) Calculamos el rango de los vectores con los que está definido F. Comenzamos con el determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda^3 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda^2 \cdot \lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^6$$

Así, si $\lambda \neq 0$ la dimensión de F es 3. Es decir, F es $\mathbb{R}^3$. En este caso una base puede ser la formada por los vectores con los que está definido F con un valor cualquiera de λ distinto de 0. Por ejemplo, $\lambda = 1$: $A = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

Si $\lambda = 0$ todos los vectores de F son 0, de forma que la dimensión de F es 0.

(b) Como en el caso $\lambda = 1$ la dimensión de F es 3, sabemos directamente que $v \in F$. Para calcular sus coordenadas resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -1$, $y = 3$, $z = -1$. Por tanto, las coordenadas de v en la base A son $(-1, 3, -1)$.

(c) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A. Para el primer vector de B hemos calculado sus coordenadas en A en el apartado anterior. El segundo y tercer vector de B vemos que son directamente el segundo y tercero de A en negativo (también podríamos resolver unos sistemas lineales análogos al del apartado anterior). Así la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Dado el sistema de ecuaciones con parámetros reales a, b, c e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = a \\ -x + 2y - z = b \\ x - y + z = c \end{array}\right\}$$

Se pide:

(a) Demostrad que es un sistema compatible determinado para cualquier valor de los parámetros a, b y c.

(b) Resolved por Cramer el sistema dejando las soluciones en función de a, b y c.

(c) Determinad razonadamente qué tienen que cumplir a, b y c para que la solución verifique $x = y = z$.

Solución

(a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & a \\ -1 & 2 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right)$$

Recordad que por el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 13] un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado si:

$$\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(M) = \text{ n.}^o \text{ incógnitas.}$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, independientemente de los valores de a, b y c, entonces también lo será el rango de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 2 - 4 + 1 - 1 = -1$$

Así pues, como que $|A| \neq 0$ para cualquier valor de a, b y c, podemos afirmar que:

$$\boxed{\text{el sistema siempre es compatible determinado}}.$$

(b) Para calcular la solución del sistema podemos utilizar la regla de Cramer [ver apuntes módulo 3, apartado 7, páginas 23 a 26]:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & -1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a-3b-5c}{-1} = -a+3b+5c$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-b-c}{-1} = b+c$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a+2b+3c}{-1} = a-2b-3c$$

Así pues, la solución del sistema en función de los parámetros a, b y c es:

$$\boxed{x = -a+3b+5c \qquad y = b+c \qquad z = a-2b-3c}.$$

(c) Para determinar qué tienen que cumplir a, b y c para que la solución verifique $x = y = z$, se puede proceder de varias maneras. Por ejemplo, podemos coger el sistema e imponer $x = y = z$ obteniendo:

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z &= a \\ -x+2y-z &= b \\ x-y+z &= c \end{aligned}\right\} \underset{x=y=z}{\Longrightarrow} \left.\begin{aligned} x+x+2x &= a \\ -x+2x-x &= b \\ x-x+x &= c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 4x &= a \\ 0 &= b \\ x &= c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 4c &= a \\ 0 &= b \end{aligned}\right\}$$

Por lo tanto, si queremos que la solución verifique $x = y = z$, entonces los parámetros tienen que cumplir que $\boxed{a = 4c \text{ y } b = 0}$.
Otra manera de resolver este apartado, es a partir de la solución encontrada en el apartado anterior. Por el apartado (b) sabemos que la solución del sistema es:

$$x = -a+3b+5c \qquad y = b+c \qquad z = a-2b-3c.$$

Así pues, si se tiene que verificar que $x = y = z$ (es decir, $x = y$, $x = z$ y $y = z$) se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -a+3b+5c &= b+c \\ -a+3b+5c &= a-2b-3c \\ b+c &= a-2b-3c \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} -a+2b+4c &= 0 \\ -2a+5b+8c &= 0 \\ -a+3b+4c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F2-2\cdot F1 \to F2 \\ F3-F1 \to F3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F3-F2 \to F3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{aligned} -a+2b+4c &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{a = 4c \text{ y } b = 0}.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida en las bases canónicas por

$$f(x, y, z, t) = (x + 2z - t, -\lambda y + 2\lambda t, -2x - 3y).$$

Consideremos $\lambda = 1$ en los dos primeros apartados.

(a) Demostrad que f es una aplicación lineal.

(b) Calculad la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y de $\mathbb{R}^3$.

(c) Para los diferentes valores de λ, calculad una base B de $\mathbb{R}^4$ formada por los vectores de la base del núcleo de f y los vectores necesarios de la base canónica hasta completarla. Escribid la matriz de f si usamos la base B en $\mathbb{R}^4$ y la base canónica en $\mathbb{R}^3$.

Solución

(a) f sí que es una aplicación lineal. Para demostrarlo se debe comprobar (como en el ejemplo 1 del punto 2.2 del Módulo 4) que la imagen de la suma de vectores es siempre la suma de sus imágenes:

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$$

$$= ((x_1 + x_2) + 2(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2), -(y_1 + y_2) + 2(t_1 + t_2), -2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2))$$

$$= (x_1 + 2z_1 - t_1 + x_2 + 2z_2 - t_2, -y_1 + 2t_1 - y_2 + 2t_2, -2x_1 - 3y_1 - 2x_2 - 3y_2)$$

$$= (x_1 + 2z_1 - t_1, -y_1 + 2t_1, -2x_1 - 3y_1) + (x_2 + 2z_2 - t_2, -y_2 + 2t_2, -2x_2 - 3y_2)$$

$$= f(x_1, y_1, z_1, t_1) + f(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

Comprobamos también que la imagen del producto de un vector por un escalar siempre es el producto de la imagen por el escalar:

$$f(kx, ky, kz, kt) = (kx + 2kz - kt, -ky + 2kt, -2kx - 3ky)$$

$$= (k(x + 2z - t), k(-y + 2t), k(-2x - 3y))$$

$$= k(x + 2z - t, -y + 2t, -2x - 3y) = k \cdot f(x, y, z, t)$$

(b) Para calcular A, la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^4$, calculamos las imágenes de los cuatro vectores de la base canónica y los colocamos en columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Para calcular una base del $\ker(f)$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 2\lambda \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda ecuación es $-\lambda y + 2\lambda t = 0$. Vemos que aparecen dos casos a tratar:
Si $\lambda \neq 0$, podemos dividir y obtener $y = 2t$. Sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos $-2x - 6t = 0$. Por tanto, $x = -3t$. Sustituyendo en la primera equación $-3t + 2z - t = 0$ de donde $z = 2t$. O sea, $(x, y, z, t) = (-3t, 2t, 2t, t)$. Sacando factor común: $(x, y, z, t) = t(-3, 2, 2, 1)$. Por tanto, una base del núcleo es $\{(-3, 2, 2, 1)\}$.
Para completar una base de $\mathbb{R}^4$ podemos añadir los vectores $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$. Estos cuatro vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base B de $\mathbb{R}^4$. Para obtener la matriz en esta base B de salida podemos multiplicar la matriz A por la matriz de los vectores de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 0$ los vectores del núcleo cumplen $x + 2z - t = 0$ y $-2x - 3y = 0$. Sumándole a esta segunda ecuación el doble de la primera, y aislando la x y la y, obtenemos dos expresiones $x = -2z + t$ y $-3y = -4z + 2t$. Por tanto una base del núcleo es $\{(-2, \frac{4}{3}, 1, 0), (1, -\frac{2}{3}, 0, 1)\}$. Para completar esta base del núcleo hasta tener una base de $\mathbb{R}^4$ podemos añadir los vectores $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, 0)$. Se puede comprobar que el determinante de estos vectores no es nulo. Para obtener la matriz en esta base B de salida podemos multiplicar la matriz A por la matriz de los vectores de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 2 - 13 junio 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

(a) Expresad en forma binómica el inverso del siguiente complejo: $1 - i\sqrt{3}$

(a) ¿Qué valor, o valores, tendrá que tomar m, un número real, para que el número $\frac{5+mi}{3-2i}$ sea un número complejo imaginario puro? Para $m = -5$, expresad el número complejo $5 + mi$ en forma polar..

Solución

(a) El inverso del complejo dado es: $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-1}$. Para hallar su forma binómica multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria (recordemos que $i^2 = -1$):

$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-3i^2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

Por tanto, la respuesta es: $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

(b) Primero miraremos a qué número complejo corresponde la fracción dada. Para esto multiplicaremos y dividiremos por el conjugado del denominador. Posteriormente aplicaremos la definición de número complejo imaginario puro que hay en la página 20 del material.

$\frac{5+mi}{3-2i} = \frac{(5+mi)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{15+10i+3mi+2mi^2}{9-4i^2} = \frac{(15-2m)+(10+3m)i}{9+4} = \frac{15-2m}{13} + \frac{10+3m}{13}i$

La definición de un número complejo imaginario puro es que la parte real tiene que ser nula (ver página 20 del material), por tanto, imponemos que la parte real sea 0:

$\frac{15-2m}{13} = 0 \Longleftrightarrow 15 - 2m = 0 \Longleftrightarrow m = \frac{15}{2}$

Por tanto, el valor solicitado es $m = \frac{15}{2}$

Para expresar el número $5 - 5i$ en forma polar lo haremos tal como se explica en el apartado 3.4, página 27, del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-5}{5}\right) = \arctan(-1) = 315^o$

Tenemos, por tanto, que $5 - 5i = 5\sqrt{2}_{315^o}$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en 135^o y en 315^o. Como el afijo del punto buscado es $(5, -5)$, el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en 315^o.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $5-5i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(5,-5)$, por tanto, es un número que se encuentra en el cuarto cuadrante.

2. Sean $e_1=(2,0,2,4)$, $e_2=(0,3,1,1)$, $e_3=(-1,0,-1,-2)$ y $e_4=(0,-6,-2,-2)$ vectores de $\mathbb{R}^4$. Sea $E=<e_1,e_2,e_3,e_4>$. Sea $v=(6,-12,2,8)$.

(a) Calculad la dimensión de E y una base A. ¿$v\in E$? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sea $w=e_2-e_1$. $B=\{v,w\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de la base A a la base B y de la base B a la base A.

Solución

(a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -6\\ 2 & 1 & -1 & -2\\ 4 & 1 & -2 & -2\end{pmatrix}=2$$

Ya que podemos ver directamente que $C_3=\frac{-C_1}{2}$ y $C_4=-2\cdot C_2$. Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores ya que son linealmente independientes: contienen el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}\neq 0$. Así pues $A=\{e_1,e_2\}$.

Para ver si $v\in E$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 3\\ 2 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\\ -12\\ 2\\ 8\end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x=3$ y $y=-4$. Por tanto, $v\in E$ y sus coordenadas en la base A son $(3,-4)$.

(b) Comenzamos por calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A, ya que para calcularla debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A y esto ya lo tenemos (para v lo hemos calculado en el apartado anterior y w está definido directamente como combinación lineal de e_1 y e_2). Así pues la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A}=\begin{pmatrix} 3 & -1\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B calculamos la inversa:

$$C_{A\to B}=\begin{pmatrix} 3 & -1\\ -4 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1\\ -4 & -3\end{pmatrix}$$

3. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real k e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 5y + (k-2)z = 0 \\ 3x + (k+6)y - 3z = 0 \\ (k+2)x - \quad y + \quad z = 0 \end{array}\right\}$$

Se pide:

(a) Calculad para qué valores de k el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

(b) Para el valor $k \geq 0$ (k positivo o cero) que hace que el sistema sea compatible indeterminado, obtened todas sus soluciones.

(c) Determinad la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $k = -3$.

Solución

(a) Para que un sistema homogéneo de tres incógnitas sólo admita la solución trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ se debe verificar que el rango$(A) = 3$ [ver apuntes módulo 3, apartado 5, páginas 17 y 18].

La matriz de coeficientes, A, asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & k-2 \\ 3 & k+6 & -3 \\ k+2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si calculamos su determinante se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & k-2 \\ 3 & k+6 & -3 \\ k+2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -k^3 - 6k^2 - 9k = -k \cdot (k+3)^2$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq -3$, entonces $|A| \neq 0$ y por lo tanto rang$(A) = 3$. Así pues,

$$\boxed{\text{Para } k \neq 0 \text{ y } k \neq -3 \text{ el sistema sólo tiene la solución } (x = 0, y = 0, z = 0)}.$$

(b) A partir de los resultados obtenidos en el apartado anterior, podemos afirmar que para $k = 0$ el rang$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$ por lo tanto, como que el sistema es homogéneo y tiene tres incógnitas se obtiene:

$$\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(M) = 2 \neq \text{ n.}^o \text{ incógnitas.}$$

es decir, el sistema es compatible indeterminado.

Para resolver este sistema homogéneo compatible indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ 3x+6y-3z=0 \\ 2x-\ \ y+\ \ z=0 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & -15 & 9 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) $5{\cdot}F2-3{\cdot}F1 \to F2$ y $5{\cdot}F3-2{\cdot}F1 \to F3$
(2) $F3+F2 \to F3$
El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ 15y-9z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+(3z)-2z=0 \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=\frac{-1}{5}z \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\}$$

Así pues, para $k=0$ las soluciones del sistema homogéneo son de la forma:

$$\boxed{\left(x=\frac{-1}{5}z,\ y=\frac{9}{15}z,\ z\right)}.$$

(c) Para $k=-3$ el sistema a considerar es:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-5z=0 \\ 3x+3y-3z=0 \\ -x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, tenemos que los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema son:

$\pi_1 : 5x+5y-5z=0$ $\qquad$ $\pi_2 : 3x+3y-3z=0$ $\qquad$ $\pi_3 : -x-y+z=0$

Si nos fijamos en las ecuaciones que definen los tres planos, podemos observar que son ecuaciones proporcionales y por lo tanto, podemos afirmar que estos tres planos son coincidentes, es decir $\pi_1=\pi_2=\pi_3$.

4. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida en la base canónica por

$$f(x,y,z)=(-11x-7y-7z, a\cdot y, 14x+7y+10z).$$

(a) Calculad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Cuando $a=3$ calculad el polinomio característico desarrollando el determinante por la fila que contenga más ceros. Indicad cuáles son los valores propios de f y calculad una base que contenga el número máximo de vectores propios.

(c) Si $a \neq 3$ y $a \neq -4$ calculad una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga el número máximo de vectores propios de f.

Solución

(a) Para calcular A, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los colocamos en columnas.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -7 & -7 \\ 0 & a & 0 \\ 14 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

(b) Para calcular el polinomio característico de f, desarrollamos el determinante de la matriz por la segunda fila:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -11-t & -7 & -7 \\ 0 & 3-t & 0 \\ 14 & 7 & 10-t \end{vmatrix} =$$
$$(3-t)((-11-t)(10-t) + 14 \cdot 7) = (3-t)(-110 + 11t - 10t + t^2 + 98) =$$
$$(3-t)(t^2 + t - 12) = (3-t)(t-3)(t+4)$$

Los valores propios de f son -4 con multiplicidad 1 y 3 con multiplicidad 2.

Para encontrar un vector propio de valor propio -4 buscamos una base del $\ker(f + 4\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11+4 & -7 & -7 \\ 0 & 3+4 & 0 \\ 14 & 7 & 10+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 14 & 7 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos aislar de la segunda ecuación y ver que $y = 0$. De la primera obtenemos $-7x - 7z = 0$ y por tanto $z = -x$. De la tercera lo mismo. Una solución es el vector $(1, 0, -1)$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio 3 buscamos una base del $\ker(f - 3\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11-3 & -7 & -7 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 14 & 7 & 10-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} -14 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema se reduce a una única ecuación $-14x - 7y - 7z = 0$. Pueden ser generadores del subespacio de soluciones los vectores $(-1, 1, 1)$ y $(0, -1, 1)$ Por tanto, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f es $\{(1, 0, -1), (-1, 1, 1), (0, -1, 1)\}$.

(c) El polinomio característico de f en general será: $\det(A - t\mathrm{I}) = (a - t)(t - 3)(t + 4)$. Los valores propios de f son -4, 3 y a, todos con multiplicidad 1 porque $a \neq 3$ y $a \neq -4$. El vector propio de f correspondiente al valor propio -4 es el que ya hemos encontrado antes, $(1, 0, -1)$, porque de la segunda ecuación se deduce igualmente que $y = 0$ y las otras dos ecuaciones son iguales.

Para encontrar el vector propio de valor propio 3 buscamos una base del $\ker(f - 3\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -14 & -7 & -7 \\ 0 & a-3 & 0 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos aislar de la segunda ecuación $(a - 3)y = 0$ y ver que $y = 0$ dado que $a \neq 3$. Entonces de la primera obtenemos $-14x - 7z = 0$ y por tanto $z = -2x$. La tercera es equivalente. Una solución es el vector $(1, 0, -2)$.

Para encontrar el vector propio de valor propio a buscamos una base del $\ker(f - a\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11-a & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 10-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si sumamos las dos ecuaciones (primera y tercera) obtenemos ésta: $(3 - a)x + (3 - a)z = 0$. Como $a \neq 3$ podemos aislar $z = -x$. Y sustituyendo en la segunda $14x + 7y - (10 - a)x = 0$ de donde $y = \frac{-(4+a)x}{7}$. Una solución es el vector $(1, -\frac{4+a}{7}, -1)$. Por tanto una base con el máximo de vectores propios seria $\{(1, 0, -1), (1, 0, -2), (1, -\frac{4+a}{7}, -1)\}$. Podemos comprobar que el determinante es no nulo porque $a \neq -4$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 3 - 20 junio 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

(a) Expresad en forma binómica el siguiente complejo: $(3+2i)^{-1}$

(b) ¿Qué valor, o valores, tendrá que tomar n, número real, para que el número $\frac{10+10i}{5+ni}$ sea un número complejo real? Una vez hayáis encontrado el valor, o valores, de n, expresad el número complejo $5+ni$ en forma polar.

Solución

(a) Tenemos que saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica), recordando que $i^2 = -1$, y agrupamos parte real y parte imaginaria.
$(3+2i)^{-1} = \frac{1}{3+21} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{3^2-2^2i^2} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
Por tanto, la respuesta es: $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

(b) Primero miraremos a qué número complejo corresponde la fracción dada. Para esto multiplicaremos y dividiremos por el conjugado del denominador. Posteriormente aplicaremos la definición de número complejo real que hay en la página 20 del material:
$\frac{10+10i}{5+ni} = \frac{(10+10i)(5-ni)}{(5+ni)(5-ni)} = \frac{50-10ni+50i-10ni^2}{25-n^2i^2} = \frac{(50+10n)+(50-10n)i}{25+n^2} = \frac{50+10n}{25+n^2} + \frac{50-10n}{25+n^2}i$
La definición de un número complejo real es que la parte imaginaria tiene que ser nula (ver página 20 del material), por tanto, imponemos que la parte imaginaria sea 0:
$\frac{50-10n}{25+n^2} = 0 \Longleftrightarrow 50-10n = 0 \Longleftrightarrow 10n = 50 \Longleftrightarrow n = 5$
Por tanto, el valor solicitado es $n = 5$
Para expresar el número $5+5i$ en forma polar lo haremos tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:
$m = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$\alpha = \arctan\left(\frac{5}{5}\right) = \arctan(1) = 45^o$
Tenemos, por tanto, que $5+5i = 5\sqrt{2}_{45^o}$
NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 1 en 45^o y en 225^o. Como el afijo del punto buscado es $(5,5)$ el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 45^o.

Com se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $5+5i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(5,5)$, por tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante.

2. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^5$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in^5 |a_1 + a_2 = 0, a_2 + a_3 = 0\}.$$

Y sea $v = (-3, 3, -3, 3, -3)$.

(a) Comprobad que $A = \{(1,-1,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ es una base de E. ¿$v \in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sean $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ las matrices de cambio de base de una base B a la base A, y de una base D a la base B respectivamente. ¿Cuál es la base D?

Solución

(a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumplen las condiciones $a_1 + a_2 = 0$ y $a_2 + a_3 = 0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues A es una base de E.
Para ver si $v \in E$ miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Que tiene solución $x = -3$, $y = 3$ y $z = -3$. Por tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(-3, 3, -3)$.

(b) Sabemos que:

$$C_{D\to A} = C_{B\to A} \cdot C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O alternativamente, podríamos realizar el procedimiento mostrado a continuación dos veces (para calcular primero la base B y luego la base D).
La matriz de cambio de base de D a A expresa los vectores de la base D en función

de los vectores de A. Así, usando las columnas de la matriz $C_{D\to A}$ tenemos que los tres vectores de la base D serán:

$$\begin{aligned}
(-1)\cdot(1,-1,1,0,0)+0\cdot(0,0,0,1,0)+(-1)\cdot(0,0,0,0,1)&=(-1,1,-1,0,-1)\\
0\cdot(1,-1,1,0,0)+(-1)\cdot(0,0,0,1,0)+0\cdot(0,0,0,0,1)&=(0,0,0,-1,0)\\
0\cdot(1,-1,1,0,0)+(-1)\cdot(0,0,0,1,0)+(-1)\cdot(0,0,0,0,1)&=(0,0,0,-1,-1)
\end{aligned}$$

Por tanto, $D=\{(-1,1,-1,0,-1),(0,0,0,-1,0),(0,0,0,-1,-1)\}$.

3. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real m e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{aligned}
x-3y+2z&=m\\
x+7y-2z&=1\\
2x-11y+6z&=2
\end{aligned}\right\}$$

Se pide:

(a) Determinad razonadamente el valor de m para el cual el sistema es compatible.

(b) Para este valor de m, obtenido en el apartado anterior, calculad el conjunto de soluciones del sistema.

(c) Determinad la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $m=0$.

Solución

(a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&7&-2\\2&-11&6\end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&m\\1&7&-2&1\\2&-11&6&2\end{array}\right)$$

Notemos que $|A|=0$, pero A tiene menores de orden 2 no nulos: $\begin{vmatrix}1&-3\\1&7\end{vmatrix}\neq 0$, entonces podemos afirmar que $\operatorname{rang}(A)=2$.

Para que el sistema sea compatible se tiene que verificar que $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(M)$. Por lo tanto, tenemos que calcular el valor del parámetro m que anula el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor, de orden dos no nulo, con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}1&-3&m\\1&7&1\\2&-11&2\end{vmatrix}=25-25m \implies 25-25m=0 \implies m=1.$$

Así pues, podemos afirmar:

$$\boxed{\text{Si } m=1 \;\to\; \operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(M) \;\to\; \text{Sistema compatible}}.$$

(b) Para $m = 1$, el sistema que se tiene que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 1 \\ x + 7y - 2z = 1 \\ 2x - 11y + 6z = 2 \end{array}\right\}$$

Sabemos por el apartado anterior que para $m = 1$ este sistema es compatible indeterminado.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & 6 & 2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1) $F2 - F1 \to F2$ y $F3 - 2{\cdot}F1 \to F3$

(2) $2{\cdot}F3 + F2 \to F3$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 1 \\ 10y - 4z = 0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene la relación $z = \frac{5}{2}y$. Si hacemos esta sustitución en la primera ecuación y aislamos la x obtenemos que $x = 1 - 2y$. Así pues, las soluciones de este sistema son de la forma:

$$\boxed{\left(x = 1 - 2y,\ y = y,\ z = \tfrac{5}{2}y\right)}.$$

(c) Para $m = 0$ el sistema a considerar es:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 0 \\ x + 7y - 2z = 1 \\ 2x - 11y + 6z = 2 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, tenemos que los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema son:

$\pi_1 : x - 3y + 2z = 0$ $\qquad \pi_2 : x + 7y - 2z = 1$ $\qquad \pi_3 : 2x - 11y + 6z = 2$

A partir de los resultados obtenidos en el apartado (a), [ver apuntes módulo 3, apartado 8, página 32] podemos afirmar que para $m = 0$ el $\text{rang}(A) = 2$ y el $\text{rang}(M) = 3$, por lo tanto, el sistema es incompatible y esto quiere decir que

$$\boxed{\text{los tres planos no tienen ningún punto en común}}.$$

Comentario: notemos que se puede afinar algo más la conclusión anterior. Si nos fijamos que no hay planos coincidentes (puesto que, no hay ninguna fila proporcional en la matriz M) y además no hay planos paralelos (puesto que, no hay filas proporcionales en la matriz A), podemos afirmar que los tres planos son secantes dos a dos en tres rectas paralelas.

4. Sean $A=(1,-1)$, $B=(4,-1)$, $C=(1,-3)$ y $D=(4,-3)$. Considerad la figura formada por los segmentos AB, BC y CD.

(a) Sea g un giro de ángulo $\alpha\in(0,2\pi)$ desde el origen en sentido antihorario. Calculad la matriz de g.

(b) Usando la matriz anterior, encontrad el ángulo α de manera que el segmento que va de $g(A)$ a $g(B)$ sea paralelo al eje y y el punto $g(B)$ quede en el primer cuadrante. Calculad $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ y $g(D)$.

(c) Sea f un escalado de razón $\frac{1}{3}$ y desde el punto $P=(a,b)$. Calculad la matriz de f y encontrad los valores que deberían tener a y b si queremos que $f(A)=(0,0)$.

Solución

(a) Para simplificar notaciones, denotamos $c=\cos(\alpha)$ y $s=\sin(\alpha)$. La matriz del giro de ángulo α en sentido antihorario y desde el punto $(0,0)$ es la siguiente (Ver el Módulo 5, Sección 3):

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0\\ s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) Las imágenes de A,B,C,D por g son:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0\\ s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4\\ -1 & -1 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c+s & 4c+s & c+3s & 4c+3s\\ s-c & 4s-c & s-3c & 4s-3c\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos el vector $g(B)-g(A)=(4c+s,4s-c)-(c+s,s-c)=(3c,3s)$.
Imponiendo que sea paralelo al eje y, obtenemos $3c=0$. O sea, $c=0$.
Imponiendo que $g(B)=(s,4s)$ esté en el primer cuadrante obtenemos que $s>0$.
Por tanto, $\alpha=90^{\circ}$.
Entonces $s=1$ y, sustituyendo s y c por sus valores en la matriz anterior, obtenemos las imágenes de los puntos dados: $g(A)=(1,1)$, $g(B)=(1,4)$, $g(C)=(3,1)$ y $g(D)=(3,4)$.

(c) La matriz del escalado desde el punto $P=(a,b)$ y de razón $\frac{1}{3}$ se obtiene multiplicando las tres matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2a}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2b}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos la imagen de A utilizando la matriz anterior

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2a}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2b}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2a}{3}\\ -\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

Si queremos que $f(A) = (0,0)$, igualamos esos puntos. Obtenemos dos ecuaciones: $\frac{1}{3} + \frac{2a}{3} = 0$ $-\frac{1}{3} + \frac{2b}{3} = 0$. Y de ellas podemos deducir que $a = -\frac{1}{2}$ y que $b = \frac{1}{2}$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 1 - 10 enero 2021

1. Hallad el módulo y el argumento del resultado de la operación siguiente: $\frac{4+4i}{1+\sqrt{3}i}$

Solución

Primero de todo multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador para eliminarlo:
$\frac{4+4i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(4+4i)\cdot(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})\cdot(1-i\sqrt{3})} = \frac{4-4i\sqrt{3}+4i-4\sqrt{3}i^2}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 i^2} = \frac{4-4i\sqrt{3}+4i+4\sqrt{3}}{1+3} = \frac{4+4\sqrt{3}+(-4\sqrt{3}+4)i}{4} = \frac{4(1+\sqrt{3})+4(1-\sqrt{3})i}{4} = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$

Por tanto, tenemos que: $\frac{4+4i}{1+i\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$.

A continuación buscamos el módulo y el argumento del número $(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$ tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) = -15^\circ = 345^\circ$

Sabemos que la tangente de un ángulo vale $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ en 345° y en 165°. Como el afijo del punto buscado es $(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$ el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en 345°.

Tenemos, por tanto, que $\frac{4+4i}{1+i\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i = (2\sqrt{2})_{345^\circ}$

2. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} nx+y&=m\\ y&=a\\ nz&=0\end{aligned}\right.$$

donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus.

(a) Discutid el sistema en función de n, m y dad una interpretación geométrica del sistema para cada caso.

(b) Resolved el sistema para $n=1$ y $m=a$.

Solución

(a) Primero calcularemos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, A:

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = n^2$$

que es cero solo para $n = 0$.

En el caso de $n = 0$, tendremos que la matriz ampliada M es:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Observamos que el único menor que puede ser no nulo es el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & a \end{vmatrix}$.

Así pues, para $m = a$, el sistema será compatible indeterminado [rango(A) = rango(M) = 1] y tendremos dos planos coincidentes (el plano $y = a$)

Para $m \neq a$, tendremos un sistema incompatible, [rango$(A) \neq$ rango(M)] que representa dos planos paralelos (el plano $y = a$ y el plano $y = m$)

En el caso de $n \neq 0$, el rango de A será 3, así como también el rango de M, por lo que aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius será un sistema compatible determinado (SCD), que representa 3 planos que se cortan en un punto [ver apuntes módulo 3, apartado 8, páginas de la 25 a 31].

(b) En este caso, el sistema queda como:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \quad\;\; y = a \\ \quad\;\; z = 0 \end{cases}$$

Con el apartado anterior, es un SCD y puede resorverse fácilmente. De la tercera ecuación sacamos $z = 0$, de la segunda $y = a$ y de la primera y la segunda, $x = 0$.

3. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 | a_1 - 2a_3 = 0\}.$$

Y sea $v = (-4, 6, -2, 2)$.

(a) Comprobad que $A = \{(2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base de E. ¿$v \in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sean

$$C_1 = \begin{pmatrix} (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ 0 & (a-5)(a-7) & 0 \\ (a-1)(a-3) & (a-5)(a-7) & a-9 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} a(a-2)(a-4) & a(a-6) & 0 \\ 0 & a(a-6) & a-8 \\ 0 & 0 & a-8 \end{pmatrix}$$

donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP.
¿Pueden C_1 o C_2 ser matrices de cambio de base de una base B a la base A? ¿Cuáles son las bases B para las que lo son?

Solución

(a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumple la condición $a_1 - 2a_3 = 0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes, ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Así pues A es una base de E.
Para ver si $v \in E$ miramos si tiene solución el siguiente sistema [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Que tiene solución $x = -2$, $y = 6$ y $z = 2$. Por tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(-2, 6, 2)$.

(b) Como sabemos que E tiene dimensión 3, las matrices de cambio de base deberán de ser 3×3. Pero esto no nos descarta ninguna. También sabemos que deben ser invertibles, por tanto vamos a ver si C_1 y C_2 lo son [Ver módulo 2, sección 4.7]. Al ser matrices triangulares, podemos multiplicar la diagonal directamente para calcular el determinante: $Det(C_1) = (a-1)(a-3)(a-5)(a-7)(a-9)$. De forma que para $a = 1, 3, 5, 7, 9$ el determinante de C_1 es cero, así para estos valores de a no es matriz de cambio de base, para el resto de valores sí.
$Det(C_2) = a^2(a-2)(a-4)(a-6)(a-8)$. De forma que para $a = 0, 2, 4, 6, 8$ el determinante de C_2 es cero, así para estos valores de a no es matriz de cambio de base, para el resto de valores sí.
Para calcular la base B en cada caso, podemos multiplicar directamente y obtenemos la base B (columnas de la matriz resultado) [Ver módulo 2, sección 4.7].
Para los casos $a = 0, 2, 4, 6, 8$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_1 = \begin{pmatrix} 2(a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ 0 & (a-5)(a-7) & 0 \\ (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ (a-1)(a-3) & (a-5)(a-7) & a-9 \end{pmatrix}$$

y para los casos $a = 1, 3, 5, 7, 9$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_2 = \begin{pmatrix} 2a(a-2)(a-4) & 2a(a-6) & 0 \\ 0 & a(a-6) & a-8 \\ a(a-2)(a-4) & a(a-6) & 0 \\ 0 & 0 & a-8 \end{pmatrix}$$

4. Sean $A = (a, 1)$, $B = (0, 0)$ y $C = (2a, 0)$. Considerad el triángulo ABC formado por estos tres puntos. Sea la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a-3 \\ 0 & -a & 2a-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y sea f la transformación afín definida por la matriz M.
Sustituid a por la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC. Se pide:

(a) Calculad las imágenes por f de los tres vértices del triángulo ABC.

(b) Demostrad que la transformación f es equivalente a un escalado de razones 4 y $-a$ respecto al punto A seguido de una traslación. Determinad el vector de la tranlación.

(c) Calculad qué puntos del plano quedan fijos al aplicar esta transformación f.

Solución

(a) Calculamos las imágenes de A, B, C por M usando la notación matricial eficiente del punto 5 del módulo "Transformaciones geométricas":

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a-3 \\ 0 & -a & 2a-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 & -3a-3 & 5a-3 \\ a-4 & 2a-4 & 2a-4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las imágenes de los puntos dados: $f(A) = (a-3, a-4)$, $f(B) = (-3a-3, 2a-4)$ y $f(C) = (5a-3, 2a-4)$.

(b) La matriz del escalado desde el punto $A = (a, 1)$ y de razón 4 y $-a$ se obtiene multiplicando tres matrices que, de derecha a izquierda son: la matriz de la traslación de vector $(-a, -1)$, la del escalado y la de la traslación de vector $(a, 1)$. Corresponden a las aplicaciones que hay que componer según se explica en el punto "4.3 Escalado de un objeto a partir de un punto fijo genérico".

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a \\ 0 & -a & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de la traslación de vector (r, s) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La composición del escalado con esta traslación seria el producto de las dos matrices (punto "6. Composición de transformaciones"):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a \\ 0 & -a & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a+r \\ 0 & -a & a+1+s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparamos con la matriz M y vemos que r y s deben cumplir $-3a+r = -3a-3$, de donde $r = -3$ y que $a+1+s = 2a-4$, de donde $s = a-5$.

(c) La condición que deben cumplir los puntos fijos es que $f(x,y) = (x,y)$.
La imagen del punto (x,y) por f es:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a-3 \\ 0 & -a & 2a-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-3a-3 \\ -ya+2a-4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Necesitamos pues que $(4x-3a-3, -ya+2a-4) = (x,y)$.
Igualando las dos coordenadas obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x-3a-3 = x \\ -ya+2a-4 = y \end{cases}$$

Agrupamos los términos con x e y:

$$\begin{cases} 3x = 3a+3 \\ 2a-4 = y+ay = (1+a)\cdot y \end{cases}$$

Y aislando las incógnitas x e y obtenemos:

$$\begin{cases} x = a+1 \\ y = \frac{2a-4}{a+1} \end{cases}$$

Éste es el único punto que queda fijo por la aplicación f, el $(a+1, \frac{2a-4}{a+1})$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$--\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 2 - 16 enero 2021

1. Proporcionad las raíces, soluciones de la siguiente ecuación, en forma polar: $z^4 - 256 = 0$.

Solución

Despejamos la incógnita: $z = \sqrt[4]{256}$

Escribimos el número 256 en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{256^2 + 0^2} = 256$

$\alpha = \arctan\left(\frac{0}{256}\right) = 0°$

Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0° y en 180°. Como el afijo del punto buscado es $(256, 0)$ el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 0°.

Tenemos, por tanto, que $256 = 256_{0°}$

Como nos piden las raíces cuartas, debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1 de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$z = \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{256_{0°}} = \sqrt[4]{256}_{\frac{0°+360°k}{4}}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

Esto es, el módulo de z es $\sqrt[4]{256} = 4$ y los argumentos son β_k para $k = 0, 1, 2, 3$

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 0^o$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 90^o$
- Si $k = 2$, tenemos que $\beta_0 = 180^o$
- Si $k = 3$, tenemos que $\beta_1 = 270^o$

Por tanto, las raíces, en forma polar, soluciones de la ecuación dada son:

$4_{90^o}, 4_{180^o}, 4_{270^o}, 4_{360^o}$

2. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (n+a)x + 2y + nz &=& m \\ 3x + y &=& 1 \\ y + nz &=& 0 \end{array}\right.$$

Usando a como la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus, discutid el sistema en función de los parámetros n y m.

Solución

Si expresamos la matriz de coeficientes del sistema, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} n+a & 2 & n \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & n \end{pmatrix}.$$

El rango de A lo podemos encontrar calculando su determinante:

$$\det(A) = n(n+a) + 3n - 6n = n^2 + an + 3n - 6n = n(n+a-3).$$

Que es cero para $n = 0$ o $n = 3 - a$. En cualquiera de estos casos, la primera columna resultante sería linealmente independiente de la segunda columna (mirando el menor de filas 2-3 y columnas 1-2), por lo que para $n = 0$ o $n = 3 - a$, el rango de A es 2, y para cualquier otro valor es 3.

Ahora miraremos la matriz ampliada M

$$M = \begin{pmatrix} n+a & 2 & n & m \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & n & 0 \end{pmatrix}.$$

En el caso de $n = 0$, A tiene rango 2 y tenemos:

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & m \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo rango podemos calcular con el determinante de la primera, segunda y cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & m \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3m - a.$$

Para $m = a/3$ y $n = 0$, M tendrá rango 2 y tendremos rango(A) = rango$(M) = 2 \neq$ número de incógnitas, y aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver módulo 3, apartado 4, página 12], sabemos que el sistema es compatible indeterminado (SCI). Para cualquier otro valor de m y $n = 0$, el rango de M será 3 y tendremos $2 =$ rango$(A) <$ rango$(M) = 3 =$ número de incógnitas, por lo que será un sistema incompatible (SI).

En el caso de $n = 3 - a$, A tiene rango 2 y tenemos que calcular el rango de M con $n = 3 - a$:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-a & m \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3-a & 0 \end{pmatrix},$$

Para ello, tomamos el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando el menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & m \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3m - 3.$$

Vemos que para $m = 1$, el menor de orden 3 será 0 y, viendo que las dos primeras columnas de M son linealmente independientes, M tendrá rango 2, el mismo que A, por lo que aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius se trata de un SCI para $m = 1, n = 3 - a$, y un sistema incompatible para $m \neq 1, n = 3 - a$

Para cualquier otro valor de n, distinto de $3 - a$ y 0, tenemos que el rango de A es 3, y también el de M, por lo que se trataría de un sistema compatible determinado (SCD), independientemente del valor de m.

La siguiente tabla muestra los resultados según los valors de a, n y m

	SI	SCI	SCD
$a = 0$	$\{n = 0, m \neq 0\}$ $\{n = 3, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 0\}$ $\{n = 3, m = 1\}$	$n \neq \{0, 3\}$
$a = 1$	$\{n = 0, m \neq 1/3\}$ $\{n = 2, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 1/3\}$ $\{n = 2, m = 1\}$	$n \neq \{0, 2\}$
$a = 2$	$\{n = 0, m \neq 2/3\}$ $\{n = 1, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 2/3\}$ $\{n = 1, m = 1\}$	$n \neq \{0, 1\}$
$a = 3$	$\{n = 0, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 1\}$	$n \neq 0$
$a = 4$	$\{n = 0, m \neq 4/3\}$ $\{n = -1, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 4/3\}$ $\{n = -1, m = 1\}$	$n \neq \{-1, 0\}$
$a = 5$	$\{n = 0, m \neq 5/3\}$ $\{n = -2, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 5/3\}$ $\{n = -2, m = 1\}$	$n \neq \{-2, 0\}$
$a = 6$	$\{n = 0, m \neq 2\}$ $\{n = -3, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 2\}$ $\{n = -3, m = 1\}$	$n \neq \{-3, 0\}$
$a = 7$	$\{n = 0, m \neq 7/3\}$ $\{n = -4, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 7/3\}$ $\{n = -4, m = 1\}$	$n \neq \{-4, 0\}$
$a = 8$	$\{n = 0, m \neq 8/3\}$ $\{n = -5, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 8/3\}$ $\{n = -5, m = 1\}$	$n \neq \{-5, 0\}$
$a = 9$	$\{n = 0, m \neq 3\}$ $\{n = -6, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 3\}$ $\{n = -6, m = 1\}$	$n \neq \{-6, 0\}$

Taula 1: Resultados en función de a, n i m.

3. Sean $e_1 = (3, 0, -3)$, $e_2 = (-1, -2, 5)$, $e_3 = (0, -6, 12)$ y $e_4 = (-2, 2, -2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sea $E =< e_1, e_2, e_3, e_4 >$. Sea $v = (3a + 12, -6, -3a)$ donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP.

(a) Calculad la dimensión de E y una base A. ¿$v \in E$? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sea $w = (3a + 3, 0, -3a - 3)$ donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP. $B = \{v, w\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de la base A a la base B y de la base B a la base A.

Solución

(a) Calculamos el rango de la matriz de vectores [Ver módulo 2, sección 4.5]:

$$rango \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \\ -3 & 5 & 12 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ y los dos menores 3×3 resultado de orlar el menor anterior [Ver módulo 2, sección 4.5], tiene determinante nulo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ -3 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Como base podemos escoger $A = \{e_1, e_2\}$, ya que contiene el menor 2×2 anterior. Para ver si $v \in E$ resolvemos el sistema [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+12 \\ -6 \\ -3a \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a + 5$ y $y = 3$. Por tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a + 5, 3)$.

(b) Comenzamos por calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A, ya que para calcularla debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A [Ver módulo 2, sección 4.7]. Para v lo hemos calculado en el apartado anterior y para w podríamos seguir el mismo procedimiento (calcular sus coordenadas en A), o también podemos ver directamente que es $a+1$ veces e_1. Así pues, la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} a+5 & a+1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B calculamos la inversa [Ver módulo 2, sección 4.7 y sección 3.3]:

$$C_{A\to B} = \begin{pmatrix} a+5 & a+1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3(a+1)} \begin{pmatrix} 0 & -1-a \\ -3 & a+5 \end{pmatrix}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida en la base canónica por

$$f(x, y, z) = (3x + 4y + (a - 3)z, 4x + 3y - 4z, az).$$

Se pide:

(a) Calculad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Justificad si la aplicación f es exhaustiva cuando $a = 0$ y dad una base de la imagen.

(c) Para a igual a la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC, calculad el polinomio característico de f. Indicad cuáles son los valores propios de f y calculad una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga el número máximo de vectores propios.

Solución

(a) Para calcular A, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los colocamos en columnas, tal como se explica en el punto "3.Matriz asociada a una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales":

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & a-3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(b) En el caso $a = 0$, la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar si la aplicación f es exhaustiva, podemos usar la equivalencia del punto "5.Monomorfismos y epimorfismos" que nos dice que f será exhaustiva si su matriz asociada A tiene rango igual a la dimensión del espacio de llegada, que en este caso es $\mathbb{R}^3$. El rango de la matriz no es 3, porque al tener una fila nula el determinante es 0. El rango es 2 porque existe un menor 2x2 con determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

Así que ya podemos deducir que f no es exhaustiva. Como el rango de la matriz coincide con la dimensión de la imagen de la aplicación lineal asociada a ella, $dim(Imf) = 2$. Las imágenes de los vectores de la base canónica son generadoras de la imagen de f, tal como se explica en el punto "4.Núcleo e imagen de una aplicación lineal". Las columnas de la matriz son esas imágenes. Por tanto, una base de la imagen son los vectores $(3, 4, 0), (4, 3, 0)$, ya que son un subconjunto linealmente independiente de los vectores columna.

(c) Resolvemos este apartado para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir a por su valor en los resultados que siguen.

El polinomio característico de f es $p(t) = |A - t\mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios". Para calcularlo, desarrollamos este determinante por la tercera fila:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-t & 4 & a-3 \\ 4 & 3-t & -4 \\ 0 & 0 & a-t \end{vmatrix} =$$

$$(a-t)((3-t)(3-t) - 4 \cdot 4) = (a-t)(9 - 6t + t^2 - 16) =$$

$$(a-t)(t^2 - 6t - 7) = (a-t)(t+1)(t-7)$$

Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(t) = 0$: a,-1 y 7. En el caso $a = 7$ el valor propio 7 tendría multiplicidad 2. En el resto de casos los tres VAPs tienen multiplicidad 1.

Para encontrar un vector propio de valor propio a buscamos una base del $\ker(f - a\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3-a & 4 & a-3 \\ 4 & 3-a & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq 3$, podemos usar Gauss y restar de la segunda ecuación $4/(3-a)$ veces la primera y ver que $y = 0$. De la primera obtenemos entonces que $(3-a)x + (a-3)z = 0$ y por tanto $z = x$.
Si $a = 3$ no hace falta Gauss, ya que se deduce directamente de la primera ecuación que $y = 0$ y después de la segunda obtenemos que $4x - 4z = 0$ y por tanto $z = x$. Para cualquiera de los valores posibles de a un VEP de VAP a es el vector $(1, 0, 1)$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio -1 buscamos una base del $\ker(f + \mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3+1 & 4 & a-3 \\ 4 & 3+1 & -4 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la tercera ecuación obtenemos que $z = 0$. Sustituyendo este valor en la primera o en la segunda obtenemos la ecuación $4x + 4y = 0$ de donde $x = -y$. Por tanto un VEP de VAP -1 es el vector $(-1, 1, 0)$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio 7 buscamos una base del $\ker(f - 7\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3-7 & 4 & a-3 \\ 4 & 3-7 & -4 \\ 0 & 0 & a-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq 7$, de la tercera ecuación obtenemos que $z = 0$. Sustituyendo este valor en la primera o en la segunda obtenemos la ecuación $-4x + 4y = 0$ de donde $x = y$. Por tanto una solución es el vector $(1, 1, 0)$.
Si $a = 7$ la tercera ecuación es nula y no nos da información, pero las dos primeras ecuaciones son proporcionales y se reducen a $4x - 4y - 4z = 0$ de donde $x = y + z$ y por tanto los VEPs asociados son $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$.
Así pues, una base de vectores propios de $\mathbb{R}^3$ es $(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 0)$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 3 - 20 enero 2021

1. Calculad el valor que ha de tener k para que el resultado de la operación siguiente $\frac{1+i}{k+2i}$ sea:

(a) Un número real.

(b) Un número imaginario puro.

Solución

(a) Tenemos que saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica), recordando que $i^2 = -1$, y agrupamos parte real y parte imaginaria.
$\frac{1+i}{k+2i} = \frac{(1+i)\cdot(k-2i)}{(k+2i)\cdot(k-2i)} = \frac{k-2i+ki-2i^2}{k^2-4i^2} = \frac{k-2i+ki+2}{k^2+4} = \frac{k+2}{k^2+4} + \frac{k-2}{k^2+4}i$
Para que el número sea real, imponemos que la parte imaginaria sea 0:
$\frac{k-2}{k^2+4} = 0 \Longleftrightarrow k-2=0 \Longleftrightarrow k=2$
Por tanto, la respuesta a fin de que el resultado sea un número real es: $k=2$

(b) Para que el número sea imaginario puro, imponemos que la parte real sea 0:
$\frac{k+2}{k^2+4} = 0 \Longleftrightarrow k+2=0 \Longleftrightarrow k=-2$
Por tanto, la respuesta para que el resultado sea un número imaginario puro es: $k=-2$

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rl} x+y+\ \ z = & 18a \\ x+2y+(6a+3)\,z = & 3 \\ 2x+4\ y+(18a+3)\,z = & 8 \end{array}\right\}$$

Se pide:

(a) Determinad, de manera razonada, para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado.

(b) Considerad el sistema de ecuaciones que se obtiene sustituyendo el parámetro a por la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC y calculad su solución.

Solución

(a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6a+3 \\ 2 & 4 & 18a+3 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18a \\ 1 & 2 & 6a+3 & 3 \\ 2 & 4 & 18a+3 & 8 \end{array}\right)$$

Por el Teorema de Rouché-Fröbenius [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12] sabemos que el sistema será compatible determinado si y solo si $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(M) = \text{n}^o$ incógnitas. Dado que el sistema tiene tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6a+3 \\ 2 & 4 & 18a+3 \end{vmatrix} = 6a-3$$

Así pues, si $\boxed{a \neq 1/2}$ $\rightarrow$ $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(M) = \text{n}^o$ incógnitas y el sistema es compatible determinado.

(b) Resolvemos este apartado del ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 18 a la 21] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18a \\ 1 & 2 & 6a+3 & 3 \\ 2 & 4 & 18a+3 & 8 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18a \\ 0 & 1 & 6a+2 & 3-18a \\ 0 & 2 & 18a+1 & 8-36a \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18a \\ 0 & 1 & 6a+2 & 3-18a \\ 0 & 0 & 6a-3 & 2 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2 - F1 \rightarrow F2$, $\quad F3 - 2{\cdot}F1 \rightarrow F3$, $\quad$ (2): $F3 - 2{\cdot}F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z = & 18a \\ y + (6a+2)\,z = & 3-18a \\ (6a-3)\,z = & 2 \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $\boxed{z = \frac{2}{6a-3}}$ y sustituyendo este valor de z en la segunda ecuación y despejando la y obtenemos $\boxed{y = \frac{-108a^2+60a-13}{6a-3}}$. Si sustituimos en la primera ecuación las dos condiciones anteriores se obtiene $\boxed{x = \frac{216a^2-114a+11}{6a-3}}$.

Así pues, la solución de este sistema, en función de los diferentes valores del parámetro a, es:

	$x = \frac{216a^2-114a+11}{6a-3}$,	$y = \frac{-108a^2+60a-13}{6a-3}$,	$z = \frac{2}{6a-3}$
Si $a = 0$	$x = -11/3$	$y = 13/3$	$z = -2/3$
Si $a = 1$	$x = 113/3$	$y = -61/3$	$z = 2/3$
Si $a = 2$	$x = 647/9$	$y = -325/9$	$z = 2/9$
Si $a = 3$	$x = 1613/15$	$y = -805/15$	$z = 2/15$
Si $a = 4$	$x = 3011/21$	$y = -1501/21$	$z = 2/21$
Si $a = 5$	$x = 4841/27$	$y = -2413/27$	$z = 2/27$
Si $a = 6$	$x = 7103/33$	$y = -3541/33$	$z = 2/33$
Si $a = 7$	$x = 9797/39$	$y = -4885/39$	$z = 2/39$
Si $a = 8$	$x = 12923/45$	$y = -6445/45$	$z = 2/45$
Si $a = 9$	$x = 16481/51$	$y = -8221/51$	$z = 2/51$

3. Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$F = < (1,-2,3),(3\lambda,-2\lambda,\lambda),(0,2,-3),(-1,2,0) >, \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) Calculad la dimensión de F según λ y una base A en cada caso.

(b) Sea $v_1 = (1+a, -2a, 3(1+a))$, $v_2 = (0, 4+2a, -3-3a)$, $v_3 = (-1-a, 4+2a, 0)$ donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP. ¿Cuáles pertenecen a F? Para los que sí pertenezcan, calculad sus coordenadas en la base A del apartado anterior.

(c) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ el conjunto formado por los vectores del apartado anterior. B es una base de F. Calculad la matriz $C_{B\to A}$ de cambio de base de la base B a las bases A que habéis calculado en el primer apartado.

Solución

(a) Calculamos el rango de los vectores con los que está definido F [Ver módulo 2, sección 4.5]. Si calculamos el determinante (usando la regla de Sarrus) [Ver módulo 2, sección 4.1]:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0-6+0+6-0+6 = 6$$

Vemos directamente que la dimensión de F es 3 independientemente de λ. Una base puede ser la formada por los vectores del determinante anterior:
$A = \{(1,-2,3),(0,2,-3),(-1,2,0)\}$.

(b) Como la dimensión de F es 3, sabemos directamente que todos los vectores v_i serán de F. Para calcular las coordenadas de v_1 resolvemos el sistema lineal [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ -2a \\ 3(1+a) \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a+2$, $y = 1$, $z = 1$. Por tanto, las coordenadas de v_1 en la base A son $(a+2, 1, 1)$.
Para calcular las coordenadas de v_2 procedemos de forma análoga resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4+2a \\ -3-3a \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 1$, $y = a+2$, $z = 1$. Obtenemos que las coordenadas de v_2 en la base A son $(1, a+2, 1)$.
Y una vez más, para las coordenadas de v_3 procedemos de forma análoga resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-a \\ 4+2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 1$, $y = 1$, $z = a+2$. Así obtenemos que las coordenadas de v_3 en la base A son $(1, 1, a+2)$.

(c) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A [Ver módulo 2, sección 4.7]. Pero esto es justo lo que hemos hecho en el apartado anterior! Así la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida en la base canónica por

$$f(x, y, z) = (7x + (5 - 5a)z, (a + 7)x - ay + (a + 7)z, (5a + 2)z).$$

Se pide:

(a) Calculad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Justificad si la aplicación f es inyectiva cuando $a = 0$ y dad una base del núcleo de f en este caso.

(c) Para a igual a la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC, calculad el polinomio característico de f. Indicad cuáles son los valores propios de f y calculad una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga el número máximo de vectores propios.

Solución

(a) Para calcular A, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los colocamos en columnas, tal como se explica en el punto "3.Matriz asociada a una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales":

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a & a+7 \\ 0 & 0 & 5a+2 \end{pmatrix}.$$

(b) En el caso $a = 0$, la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para determinar si la aplicación f es inyectiva, podemos usar la equivalencia del punto "5.Monomorfismos y epimorfismos" que nos dice que f será inyectiva si su matriz asociada A tiene rango igual a la dimensión del espacio de salida, que en este caso es $\mathbb{R}^3$. El rango de la matriz no es 3 porque, al tener una columna nula, el determinante 3x3 asociado es 0. El rango es 2, ya que el siguiente determinante 2x2 es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

Así que ya podemos deducir que f no es inyectiva. Además en el mismo punto del módulo encontramos que este hecho es equivalente a que el núcleo de f no es nulo. Podemos calcular una base del núcleo usando la definición del punto "4.Núcleo e imagen de una aplicación lineal". Para encontrar los vectores con imagen el vector nulo, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como las soluciones cumplen $x = 0$ y $z = 0$, están generadas por el vector $(0, 1, 0)$.

También se puede usar para resolver este apartado el teorema de la dimensión del mismo punto del tema. Como el rango de la matriz coincide con la dimensión de la imagen de la aplicación lineal asociada a ella, tenemos que $dim(Imf) = 2$ y por el teorema de la dimensión sabemos que $dim(Kerf) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Imf) = 3 - 2 = 1$. Por tanto el núcleo tiene dimensión 1 y la aplicación no es inyectiva. El núcleo está generado por el vector $(0, 1, 0)$, ya que su imagen es la segunda columna de la matriz y esta columna es $(0, 0, 0)$.

(c) Resolvemos este apartado para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir a por su valor en los resultados que siguen.

El polinomio característico de f es $p(t) = |A - t\mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios". Para calcularlo, desarrollamos este determinante por la segunda columna:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 7-t & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a-t & a+7 \\ 0 & 0 & 5a+2-t \end{vmatrix} = (-a-t) \cdot \begin{vmatrix} 7-t & 5-5a \\ 0 & 5a+2-t \end{vmatrix}$$

$$\det(A - t\mathrm{I}) = (-a-t)(7-t)(5a+2-t)$$

Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(t) = 0$: $-a$, 7 y $5a + 2$. Si $a = 1$ el VAP 7 tendrá multiplicidad 2, en el resto de casos hay 3 VAPs con multiplicidad 1.

Para encontrar un vector propio de valor propio $-a$ buscamos una base del $\ker(f + a\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7+a & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a+a & a+7 \\ 0 & 0 & 5a+2+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 7+a & 0 & 5-5a \\ a+7 & 0 & a+7 \\ 0 & 0 & 6a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos aislar de la tercera ecuación y ver que $z = 0$. Substituyendo este valor en la segunda obtenemos $(a + 7)x = 0$ y por tanto $x = z = 0$. Una solución es el vector $(0, 1, 0)$ y éste sería un VEP de VAP $-a$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio 7 buscamos una base del $\ker(f - 7\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7-7 & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a-7 & a+7 \\ 0 & 0 & 5a+2-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a-7 & a+7 \\ 0 & 0 & 5a-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = 1$ la primera y tercera ecuación son nulas y no nos dan información, pero podemos dividir la segunda ecuación $8x-8y+8z = 0$ por $(a+7) = 8$ y se convierte en $x-y+z = 0$. De donde $x = y - z$ y tendríamos 2 VEPs para el VAP 7:$(-1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$.
En caso contrario, podemos aislar de la tercera ecuación o de la primera $(5a-5)z = 0$ y ver que $z = 0$. De la segunda obtenemos $(a + 7)x - (a + 7)y = 0$ y por tanto $x = y$. Una solución es el vector $(1, 1, 0)$ y éste sería un VEP de VAP 7, para $a \neq 1$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio $5a + 2$ buscamos una base del $\ker(f - (5a + 2)\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7-5a-2 & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a-5a-2 & a+7 \\ 0 & 0 & 5a+2-5a-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5-5a & 0 & 5-5a \\ a+7 & -6a-2 & a+7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = 1$ ya hemos resuelto el sistema en el punto anterior.
En caso contrario, podemos aislar de la primera ecuación que es $(5-5a)x+(5-5a)z = 0$ y ver que $x = -z$. Sustituyendo en la segunda $(a + 7)x - (6a + 2)y + (a + 7)z = 0$ obtenemos $(6a + 2)y = 0$ y por tanto $y = 0$. Una solución es el vector $(-1, 0, 1)$.

Así pues, una base de vectores propios de $\mathbb{R}^3$ es $(0, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$