## Àlgebra / Matemàtiques I

# EXAMEN 1 - 11 gener 2020

**1.** Responeu raonadament als següents apartats:
a) Passeu a forma binòmica el següent complex: $\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}}$
b) Calculeu totes les arrels quadrades del següent nombre complex: $5-6i$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

**Solució**
a) Utilitzem la relació que diu que un nombre complex, en forma binària, $a+bi$ , per passar-lo a forma polar hem de saber que $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$.

$\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}} \rightarrow 2\sqrt{2}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos(135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin(135°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per tant, $\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos(135°) + i\sin(135°)\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2+2i$

b) Escrivim el complex $5-6i$ en forma polar tal com s'explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$m = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-6}{5}\right) = 310°$

NOTA ACLARATÒRIA: Sabem que la tangent d'un angle val $\frac{-6}{5}$ en $130^o$ i en $310^o$. Com que l'afix del punt buscat és $(5,-6)$ l´angle està al quart quadrant, és a dir, en $310^o$. Com es diu a l'exercici 19 d´autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per la qual cosa, el primer que fem és dibuixar el nombre $5-6i$ al pla complex. Aquest nombre està associat al punt $(5,-6)$, per tant, és un nombre que es troba al quart quadrant.

Tenim, per tant, que $5-6i = \sqrt{61}_{310°}$

Com que ens demanen les arrels quadrades hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt{5-6i} = \sqrt{\sqrt{61}_{310°}} = \sqrt[4]{61}_{\frac{310°+360°k}{2}}$ per a $k = 0,1$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[4]{61}$

Els arguments de les arrels quadrades són $\beta = \frac{310°+360°k}{2}$ per a $k = 0,1$

Si $k = 0$, tenim que $\beta_0 = 155°$

Si $k = 1$, tenim que $\beta_1 = 155° + 180° = 335°$

Per tant, les dues arrels quadrades del complex $5-6i$ són:

$\sqrt[4]{61}_{155^\circ}, \sqrt[4]{61}_{335^\circ}$

**2.** Sigui $F$ el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ definit per:

$$F =< (3,\lambda^2,1), (-\lambda^2,0,0), (1,0,-\lambda) >, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calculeu la dimensió de $F$ segons $\lambda$ i una base en cada cas.
b) Sigui $v=(0,0,-6)$. En el cas $\lambda=0$, $v\in F$? En cas afirmatiu, calculeu-ne les coordenades en la base que heu trobat en l'apartat anterior.
c) Sigui $B=\{(0,0,-6),(-6,0,-2)\}$. En el cas $\lambda=0$, calculeu la matriu de canvi de base de la base $B$ a la base que heu trobat per a $\lambda=0$ en el primer apartat.

**Solució**
a) Calculem el rang dels vectors amb que està definit $F$.

$$\begin{vmatrix} 3 & -\lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5$$

Així doncs, si $\lambda\neq 0$ llavors la dimensió de $F$ és 3. És a dir, $F$ és $\mathbb{R}^3$. En aquest cas una base pot ser la formada pels vectors amb que està definit $F$ o la formada per qualsevols 3 vectors de $\mathbb{R}^3$ linealment independents.
Si $\lambda=0$ calculem el rang:

$$rang\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ja que podem trobar el menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs, si $\lambda=0$ llavors la dimensió de $F$ és 2 i una base pot ser $A=\{(3,0,1),(1,0,0)\}$.

b) Per veure si $v\in F$ i a la vegada calcular-ne les coordenades si és el cas, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x=-6$ i $y=18$. Per tant $v\in F$ i les seves coordenades en la base $A$ són $(-6,18)$.

c) Per a trobar la matriu de canvi de base de $B$ a $A$ hem d´expressar els vectors de $B$ en funció dels de $A$. Per al primer vector de $B$ hem trobat les seves coordenades en $A$ a l'apartat anterior. El segon vector de $B$ veiem que és $-2$ vegades el primer de

$A$ (també podriem resoldre un sistema lineal anàlogament a com hem fet en l'apartat anterior). Així doncs la matriu de canvi de base de $B$ a $A$ és:

$$C = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

**3.** Considereu el pla $\pi : 2x + ky - 2z = 6$ i la recta $r : \left.\begin{array}{r} x + y - z = \ \ k \\ kx + 2y - z = 3k \end{array}\right\}$

Es demana:
a) Determineu, raonadament, per quins valors del paràmetre $k$ la recta $r$ no té cap punt en comú amb el pla $\pi$.
b) Per $k = 0$, calculeu el punt de tall de la recta $r$ amb el pla $\pi$.

**Solució**
a) Recordem que, l'estudi de la posició relativa d'una recta $r$ (donada per dues equacions) i un pla $\pi$, es pot fer a partir de la discussió del conseqüent sistema de 3 equacions i 3 incògnites (Veure apunts mòdul 3, pàgina 32)

$$\left.\begin{array}{r} 2x + ky - 2z = 6 \\ x + y - z = k \\ kx + 2y - z = 3k \end{array}\right\}$$

Quan aquest sistema sigui incompatible tindrem que la recta $r$ i el pla $\pi$ no tenen cap punt en comú.

Per discutir-lo utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Veure apunts mòdul 3, apartat 4, pàgina 13].

La matriu de coeficients, $A$, i la matriu ampliada, $M$, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & k \\ k & 2 & -1 & 3k \end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients $A$, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & k & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 + 3k - 2 = -(k-2)(k-1)$$

- Si $k \neq 2$ i $k \neq 1$ $\rightarrow$ rang$(A) = 3 =$ rang$(M) =$n$^o$ incògnites, aleshores el sistema és compatible determinat.
- Si $k = 2$, aleshores rang$(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculem, per $k = 2$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor, d'ordre dos no nul, amb la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{Sistema incompatible}}.$$

- Si $k=1$, aleshores $\operatorname{rang}(A)=2$, ja que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculem, per $k=1$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor, d'ordre dos no nul, amb la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \ \operatorname{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{Sistema incompatible}}.$$

Així doncs, podem afirmar que:

$$\boxed{\text{Si } k=1 \text{ o } k=2, \text{ aleshores la recta } r \text{ no té cap punt en comú amb el pla } \pi}$$

b) Per $k=0$ el pla $\pi$ i la recta $r$ tenen per equacions:

$$\pi : 2x - 2z = 6 \qquad\qquad r: \left.\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sabem, per l'apartat anterior, que per $k=0$ la recta $r$ talla al pla $\pi$ en un únic punt, és a dir, recta i pla tenen un únic punt en comú que és el que s'obté al resoldre el sistema compatible determinat format per les tres equacions:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2z &= 6 \\ x+y-z &= 0 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22] per determinar la solució d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{2\cdot F2 - F1 \to F2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F3 - F2 \to F3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2z &= \ \ 6 \\ 2y &= -6 \\ -z &= \ \ 6 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{ Solució: } (x=-3, y=-3, z=-6)$$

Així doncs, $\boxed{\text{per } k=0 \text{ la recta } r \text{ talla al pla } \pi \text{ en el punt } (-3,-3,-6)}$.

**4.** Siguin $A=(0,0)$, $B=(2,1)$ i $C=(1,2)$. Siguin $D=(3,2)$ i $E=(1,4)$.
a) Sigui $g$ un gir d'angle $\alpha \in (0, \pi/2)$ des de l'origen en sentit antihorari. Doneu la matriu de $g$.
b) Trobeu $\alpha$ de manera que el triangle $g(A), g(B), g(C)$ tingui un costat paral·lel a l'eix $x$.
c) Sigui $h$ un escalatge de raó $\lambda$ i des del punt $P=(a,b)$. Doneu la matriu de $h$.

d) Trobeu la matriu de l'escalatge $f$ tal que $f(B) = D$ i $f(C) = E$.
e) Calculeu $f(A)$, on $f$ és l'escalatge que heu trobat a l'apartat anterior.

**Solució**
a) Per simplificar la notació escrivim $c = \cos(\alpha)$ i $s = \sin(\alpha)$. La matriu del gir $g$ és:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Les imatges de $A, B, C$ per $g$ són:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2c - s & c - 2s \\ 0 & 2s + c & s + 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem el vector $g(B) - g(C) = (c + s, s - c)$. Imposant que sigui paral·lel a l'eix $x$, obtenim $s - c = 0$. O sigui, $s = c$. Per tant, la tangent de $\alpha$ és 1. És a dir $\alpha = 45^{\text{o}}$.
c) La matriu de l'escalatge des del punt $P = (a, b)$ i de raó $\lambda$ s'obté en multiplicar les tres matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a(1 - \lambda) \\ 0 & \lambda & b(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) El punt d'intersecció de les rectes $BD$ i $CE$ és el $(1, 0)$. Per tant, l'escalatge ha de ser des del punt $P = (1, 0)$. D'altra banda, observem que $PD = D - P = (3, 2) - (1, 0) = (2, 2)$ i que $PB = B - P = (2, 1) - (1, 0) = (1, 1)$. O sigui, $PD = 2PB$. Anàlogament, $PE = E - P = (1, 4) - (1, 0) = (0, 4)$ i $PC = C - P = (1, 2) - (1, 0) = (0, 2)$. O sigui, $PE = 2PC$. Per tant, l'escalatge ha de ser de raó 2. Concloem que $f$ ha de ser l'escalatge de raó 2 des del punt $P = (1, 0)$. La matriu d'aquest escalatge és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) La imatge de $A$ per aquest escalatge $f$ s'obté en multiplicar el vector columna $(0, 0, 1)$ per aquesta matriu. Obtenim $f(A) = (-1, 0)$.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

| $\alpha$ | $0^o$ | $30^o$ | $45^o$ | $90^o$ | $135^o$ | $180^o$ | $210^o$ | $315^o$ | $330^o$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\,\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $\cos\,\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}}{3}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{3}$ |
| $\tan\,\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\infty$ | $-1$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |