Solución Examen 1

2017-2018 Semestre 1

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 10.01.2018

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad en forma binómica el siguiente número complejo: $\dfrac{(4-2i)i^5}{1+i}$

b) Calculad todas las raíces de la ecuación: $x^3+8=0$. Proporcionad las soluciones en forma polar y binómica.

Solución:

a) Debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria:

$$\frac{(4-2i)i^5}{1+i}=\frac{(4-2i)\cdot i}{1+i}=\frac{4i+2}{1+i}=\frac{(2+4i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{2-2i+4i+4}{1+1}=\frac{6+2i}{2}=3+i$$

Por tanto, la respuesta es:

$$\boxed{\frac{(4-2i)\cdot i^5}{1+i}=3+i}$$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso. De hecho lo que se pide son las raíces terceras de -8. Para determinar las raíces terceras de -8 determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m=\sqrt{(-8)^2+0^2}=8$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{-8}+180º=arctg0+180º=180º$$

(Observemos que, al ser la parte real negativa y la parte imaginaria nula hay que sumar la cantidad de 180º).

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0º y en 180º. Como el afijo del punto buscado es $(-8,0)$ el ángulo está entre el segundo y tercer cuadrante, es decir, en 180º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número -8 en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(-8{,}0)$, por lo tanto, es un número que se encuentra entre el segundo y el tercer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $x = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}}$

Como nos piden las raíces terceras, debemos hacer:

$$x = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{3}} = 2_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{3}} \quad \text{para k=0, 1,2}$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = 2$

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \dfrac{180^\circ + 360^\circ k}{3}$ para k=0, 1,2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 60^\circ$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 60^\circ + 240^\circ = 300^\circ$

Por tanto, las tres raíces de la ecuación, en forma polar, son:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2_{60^\circ} \\ 2_{180^\circ} \\ 2_{300^\circ} \end{array}}$$

Siguiendo las instrucciones del apartado 3.4.2 de la página 33, pasamos los números a forma binómica:

$$\boxed{2_{60^\circ} = 2\cdot(\cos 60^\circ + i sen 60^\circ) = 2\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right) = 1 + \sqrt{3}i}$$

$$\boxed{2_{180^\circ} = 2\cdot(\cos 180^\circ + i sen 180^\circ) = 2\cdot(-1 + i\cdot 0) = -2}$$

$$\boxed{2_{300^\circ} = 2\cdot(\cos 300^\circ + i sen 300^\circ) = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i}$$

Y las soluciones, en forma binómica, son:

$\boxed{-2}$ $\boxed{1+\sqrt{3}i}$ $\boxed{1-\sqrt{3}i}$

2. Sean $e_1=(0,1,2)$, $e_2=(1,0,-1)$, $e_3=(1,1,1)$, $e_4=(2,-2,-6)$ vectores de R^3.

   Sea $E=<e_1, e_2, e_3, e_4>$. Sea $v=(-2,1,4)$.

a) Calculad la dimensión de E y una base A. ¿Pertenece v a E? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.
b) Sea $w_1=e_1+e_2$, $w_2=e_1$. $B=\{w_1, w_2\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de B a A y la de A a B.

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}=2$$

Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores ya que contiene el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ Así pues $A=\{e_1, e_2\}$.

Para ver si v pertenece a E resolvemos el sistema: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Este sistema tiene solución: x=1, y=-2. Por tanto, v pertenece a E, y sus coordenadas en la base A son (1, -2).

b) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A. Así es justamente como tenemos definida la base B. De manera que la matriz de cambio de base de B a A será directamente:

$$C_{B\to A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B podemos calcular directamente la inversa de M:

$$C_{A\to B}=C_{B\to A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx - y &= m \\ 3x + (m-4)y &= m+2 \end{cases}$$

con $m \in \mathbb{R}$.

a) Discutid el sistema de ecuaciones para los diferentes valores del parámetro m.

b) Resolved el sistema en aquellos casos que el sistema sea compatible.

Solución:

a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, A', asociadas al sistema son:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & m \\ 3 & m-4 & m+2 \end{array}\right)$$

$rango(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} \neq 0$

$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3).$

- Caso I: Si $m \neq 1,3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 2 = rango(A') =$ nombre de incógnitas y por lo tanto el sistema es Compatible Determinado.
- Caso II: Si $m = 1$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

y tenemos $rango(A) = rango(A') = 1$ y el sistema es Compatible Indeterminado con (2-1=1) 1 grados de libertad.

- Caso III: Si $m = 3$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

que corresponde claramente a un sistema incompatible ya que la primera ecuación es $3x - y = 3$, mientras que la segunda es $3x - y = 5$.

En resumen:

Si $m \neq 1,3$, el sistema es Compatible Determinado
Si $m = 1$, el sistema es Compatible Indeterminado con 1 grado de libertad
Si $m = 3$, el sistema es Incompatible.

b) Tenemos que encontrar la solución para los casos I: $m \neq 1,3$ y II: $m = 1$.

Caso I: $m \neq 1,3$

Como que la matriz de coeficientes es cuadrada y $|A| \neq 0$, podemos resolver directamente el sistema por el método de Crámer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ m+2 & m-4 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - 4m + m + 2}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - 3m + 2}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m-1)(m-3)} = \frac{m-2}{m-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m \\ 3 & m+2 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 + 2m - 3m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - m}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m}{m-3}.$$

Por tanto, para cada valor de $m \neq 1, 3$ el punto solución del sistema es $\boxed{\left(\frac{m-2}{m-3}, \frac{m}{m-3}\right)}$.

Caso II: $m = 1$

En este caso el sistema queda reducido a una única ecuación $x - y = 1$, ya que la segunda ecuación queda múltiple de la primera.

Los puntos solución del sistema son de la forma $\boxed{(x, x-1)}$.

4. Sea f la aplicación lineal de R³ en R³ definida por

$$f(0,1,0) = (0,3,0), f(1,1,1) = (2,2,2), f(0,0,1) = (0,1,1).$$

a) Demostrad que $(0,1,0), (1,1,1), (0,0,1)$ es una base de R³.

b) Calculad una base del subespacio Imagen de f. ¿Es f exhaustiva?

c) Calculad una base del subespacio Ker(f), el núcleo de f. ¿Es f inyectiva?

d) Encontrad la matriz de f en la base $(0,1,0), (1,1,1), (0,0,1)$. ¿Diagonaliza f?

Solución:

a) Nombramos u=(0,1,0), v=(1,1,1), w=(0,0,1). El determinante de u,v y w es:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Puesto que es diferente de cero, los tres vectores u, v y w son linealmente independientes. Puesto que son tres vectores linealmente independientes de R^3, forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

b) Para calcular el subespacio imagen es suficiente calcular la imagen de una base, o sea, la imagen de la base u,v,w: f(u)=(0,3,0), f(v)=(2,2,2) y f(w)=(0,1,1). Por lo tanto, Im(f)=<(0,3,0),(2,2,2),(0,1,1)>. Es decir, (0,3,0), (2,2,2), (0,1,1) generan el subespacio imagen. Observemos que el determinante de estos tres vectores es:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -6,$$

distinto de cero. Así, f(u),f(v),f(w) son tres vectores linealmente independientes de R^3. Como antes, son base de R^3. Así, Im(f)=R^3. En particular, f es exhaustiva. (Ver Módulo 4, sección 4.)

c) Recordemos que la fórmula de la dimensión dice que dim E=dim Im(f)+dim Nuc(f). Puesto que E=R^3 y la dimensión de la imagen es 3, deducimos que la dimensión del núcleo es 0. Por lo tanto, el núcleo es nulo. En particular, f es inyectiva (ver Módulo 4, Sección 5).

d) Tenemos que f(u)=3u. O sea, u es vector propio de f de valor propio 3. Análogamente, f(v)=2v y v es vector propio de f de valor propio 2. Finalmente, nos dicen que f(w)=f(0,0,1)=(0,1,1)=(0,1,0)+(0,0,1)=u+w. O sea, f(w)=u+w. Por lo tanto, la matriz de f en la base u,v,w es:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es:

$$Q(t) = det(B - tI) = det\begin{pmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (3-t)(2-t)(1-t).$$

Por lo tanto, f tiene tres valores propios distintos que son el 1, el 2 y el 3. De aquí se deduce que f diagonaliza. (Ver Módulo 4, sección 8.)

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	210º	270º	300º	330º	345º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$