

Examen 2020/21-2

Assignatura	Codi	Data	Hora inici
Àlgebra	05.557	9/6/2021	16:00

Aquest enunciat també correspon a les assignatures següents:

- 11.506 - Matemàtiques I

Fitxa tècnica de l'examen

- Comprova que el codi i el nom de l'assignatura corresponen a l'assignatura de què t'has matriculat.
 - Temps total: **2 hores** Valor de cada pregunta: **25%**
 - Es pot consultar cap material durant l'examen? **SÍ** Quins materials estan permesos? **TOTS**
 - Es pot fer servir calculadora? **SÍ** De quin tipus? **PROGRAMABLE**
 - Si hi ha preguntes tipus test, descompten les respostes errònies? **NO** Quant?
 - Indicacions específiques per a la realització d'aquest examen: **Pots utilitzar qualsevol material i calculadora (incloent-hi la Calcme) per comprovar els càlculs, però has d'assegurar-te que detalles i justifiques tots els passos seguits per arribar a la solució.**
 - No és necessari que t'identifiquis amb el nom o el número del carnet d'estudiant. L'autoria de la prova és detectada pel propi sistema.
 - Has de resoldre l'examen de forma manuscrita: en una tablet on puguis escriure directament o en paper. **NO s'acceptaran respostes realitzades amb un processador de textos.**
 - No cal imprimir l'enunciat, pots resoldre les preguntes en un full en blanc. Utilitza un bolígraf de tinta blava o negra. Digitalitza les teves respostes en un únic fitxer en format PDF (pots fer-ho amb un escàner o amb un dispositiu mòbil). Disposes de 10 minuts extres per a la digitalització i lliurament de la prova.
-

Examen 2020/21-2

Assignatura	Codi	Data	Hora inici
Àlgebra	05.557	9/6/2021	16:00

Enunciats

- Demostreu per inducció que per a tot nombre natural $n \geq 1$ es compleix que $n^3 - n$ és múltiple de 6.
- Considereu el sistema d'equacions lineals:

$$\left. \begin{aligned} x + y + 3z &= k \\ 3x + y + k^2z &= 2 \\ (2a + 2)x + (a + 1)z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

on el paràmetre a és la primera xifra de la dreta del vostre identificador IDP del campus UOC.

Es demana:

- Utilitzant el teorema de Rouché-Fröbenius, discutiu el sistema en funció del paràmetre $k \in \mathbb{R}$.
 - Determineu les solucions del sistema pel valor de k que fa que el sistema sigui compatible indeterminat.
- Sigui E un subespai vectorial de dimensió 3 de \mathbb{R}^4 definit de la següent forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1 + a_4 = 0\}$$

I sigui $v = (1, 2, 3, -1)$.

- Comproveu que $A = \{(1, 1, 1, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\}$ és una base de E . Demostreu si el vector v pertany al subespai E . En cas afirmatiu calculeu-les les coordenades en la base A .
- Siguin

$$M = \begin{pmatrix} (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ 0 & (a-5)(a-7) & (a-5)(a-7) \\ (a-4)(a-2)a & 0 & (a-9) \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} a(a-2) & (a-9)(a-3) & 0 \\ 0 & a(a-6) & 0 \\ (a-8)(a-1) & 0 & (a-8)(a-4) \end{pmatrix}$$

on a és la primera xifra de la dreta del teu IDP.

Poden M o N ser matrius de canvi de base d'una base B a la base A ? Quines són les coordenades de la base B en la base canònica de \mathbb{R}^4 , en els casos en què M o N ho siguin?

- Siguin $A = (a+1, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (2a+2, 0)$. Considereu el triangle ABC format per aquests tres punts. Sigui la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2a-2 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I sigui f la transformació afí definida per la matriu M .

Substitueixi a per la primera xifra de la dreta del vostre IDP del Campus UOC.

Es demana:

(Continua a la pàgina següent)

Examen 2020/21-2

Assignatura	Codi	Data	Hora inici
Àlgebra	05.557	9/6/2021	16:00

- a) Calculeu les imatges per f dels vèrtexs del triangle ABC .
- b) Demostreu que la transformació f és equivalent a un escalat de raons 2 a l'eix x i a a l'eix y respecte al punt A seguit d'una translació. Determineu el vector de la translació.
- c) Calculeu quins punts del pla queden fixos a l'aplicar aquesta transformació f .