EXAMEN 1

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Resolved la ecuación $2z + i = \overline{z} + 1$, donde z es un número complejo. Expresad el resultado en forma polar. Trabajad con los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$.

   b) Expresad de forma exponencial el número complejo $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^3}{(1-i)^5}$. Trabajad con los ángulos en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución

a) Sabiendo que z es un número complejo, podemos escribirlo en forma binómica como $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Así, tenemos:

$$2z + i = 2(a + bi) + i = 2a + (2b + 1)i$$
$$\overline{z} + 1 = \overline{a + bi} + 1 = (a + bi) + 1 = (a + 1) - bi$$

Ahora igualamos las partes reales y las partes imaginarias:

$$2a = a + 1 \rightarrow a = 1$$
$$2b + 1 = -b \rightarrow b = -\tfrac{1}{3}$$

Con esto, tenemos:

$$z = 1 - \tfrac{1}{3}i$$

Para expresar z en forma polar, debemos calcular el módulo y el argumento (ver apartado 3.4.1, página 30, Módulo 1):

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{1^2 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{10}{9}} = 1{,}054$$
$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{3}}{1}\right) = -18{,}435°$$

Nota: la tangente vale $-\frac{1}{3}$ en 161,565° y en 341,565°; pero al ser la parte real positiva y la parte imaginaria negativa, estamos en el cuarto cuadrante, es a decir, en 341,565°.

En resumen:

$$\boxed{z = 1{,}054_{341{,}565°}}$$

b) Primero pasamos el numerador y el denominador a forma exponencial (ver apartado 3.5,Módulo 1):

$$\left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$
$$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$
$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} = 2\pi-\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Ahora podemos calcular las potencias (ver apartado 3.5.1, Módulo 1):

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 8e^{i\pi}$$
$$(1-i)^5 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^5 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Finalmente, podemos calcular la división (ver apartado 3.5.1, Módulo 1):

$$\boxed{\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^3}{(1-i)^5} = \frac{8e^{i\pi}}{4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{8}{4\sqrt{2}}e^{i\left(1-\frac{3}{4}\right)\pi} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Plantear el sistema igualando parte real y parte imaginaria: 0,5 puntos.
- Encontrar el valor de z: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo de z: 0,25 puntos.
- Calcular el argumento de z: 0,25 puntos.

Apartado b

- Pasar a forma exponencial: 0,25 puntos.
- Calcular las potencias: 0,5 puntos.
- Calcular la división: 0,25 puntos.

2. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & k+(2a+1) & 3 & 2k+1 \\ 0 & 0 & k-(2a+1) & k^2-(2a+1)^2 \end{pmatrix}$

Sustituid el parámetro "a"de la matriz M por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con la matriz obtenida se pide:

a) Considerad el sistema de ecuaciones lineales que tiene esta matriz como matriz ampliada y discutidlo en función de los diferentes valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Resolved el sistema para $k = 2a+1$ (recordad que a se debe sustituir por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC).

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) El sistema de ecuaciones lineales que tiene por matriz ampliada la matriz M es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ (k + (2a+1))y + 3z = 2k + 1 \\ (k - (2a+1))\, z = k^2 - (2a+1)^2 \end{array}\right\}$$

Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & k + (2a+1) & 3 \\ 0 & 0 & k - (2a+1) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & k + (2a+1) & 3 & 2k+1 \\ 0 & 0 & k - (2a+1) & k^2 - (2a+1)^2 \end{pmatrix}$$

Como el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & k + (2a+1) & 3 \\ 0 & 0 & k - (2a+1) \end{vmatrix} = 2 \cdot (k + (2a+1)) \cdot (k - (2a+1))$$

- Si $k \neq -(2a+1)$ y $k \neq (2a+1) \to$ rango $(A) = 3 =$ rango$(M) =$ n^o incógnitas y, por tanto, se obtiene que el $\boxed{\text{sistema es compatible determinado}}$.
- Si $k = -(2a+1)$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ (este menor se obtiene considerando primera y segunda fila y la primera y tercera columna).
  Calculamos, para $k = -(2a+1)$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de terminos independientes:
  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2(2a+1)+1 \\ 0 & -2(2a+1) & 0 \end{vmatrix} = -32a^2 - 24a - 4 \neq 0$, puesto que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9. Así pues, tenemos que rango$(A) = 2 \neq$ rango$(M) = 3$, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.
- Si $k = 2a + 1$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$.

Calculamos, para $k = 2a+1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de terminos independientes $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2(2a+1)+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Así pues, tenemos que rango(M) = rango$(A) = 2 \neq$ n^o incógnitas y por tanto, el $\boxed{\text{sistema es compatible indeterminado}}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que para $k = 2a+1$ el sistema es compatible indeterminado y el sistema que nos piden resolver es:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z = 3 \\ (2(2a+1))y + 3z = 2(2a+1)+1 \end{aligned}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene:
$(2(2a+1))y + 3z = 2(2a+1)+1 \rightarrow y = \frac{2(2a+1)+1-3z}{2(2a+1)} \rightarrow \boxed{y = \frac{4a+3-3z}{4a+2}}$.
Si hacemos la sustitución de $y = \frac{4a+3-3z}{4a+2}$ en la primera ecuación y despejamos la x obtenemos:
$2x - \left(\frac{4a+3-3z}{4a+2}\right) + z = 3 \rightarrow x = \frac{3-z+\left(\frac{4a+3-3z}{4a+2}\right)}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{16a-5z-4az+9}{8a+4}}$.
Así pues, las soluciones de este sistema, en función del parámetro a, son:

	$x = \frac{16a-5z-4az+9}{8a+4}$,	$y = \frac{4a+3-3z}{4a+2}$,	$z = z$
Si $a = 0$	$x = \frac{-5z+9}{4}$,	$y = \frac{-3z+3}{2}$,	$z = z$
Si $a = 1$	$x = \frac{-9z+25}{12}$,	$y = \frac{-3z+7}{6}$,	$z = z$
Si $a = 2$	$x = \frac{-13z+41}{20}$,	$y = \frac{-3z+11}{10}$,	$z = z$
Si $a = 3$	$x = \frac{-17z+57}{28}$,	$y = \frac{-3z+15}{14}$,	$z = z$
Si $a = 4$	$x = \frac{-21z+73}{36}$,	$y = \frac{-3z+19}{18}$,	$z = z$
Si $a = 5$	$x = \frac{-25z+89}{44}$,	$y = \frac{-3z+23}{22}$,	$z = z$
Si $a = 6$	$x = \frac{-29z+105}{52}$,	$y = \frac{-3z+27}{26}$,	$z = z$
Si $a = 7$	$x = \frac{-33z+121}{60}$,	$y = \frac{-3z+31}{30}$,	$z = z$
Si $a = 8$	$x = \frac{-37z+137}{68}$,	$y = \frac{-3z+35}{34}$,	$z = z$
Si $a = 9$	$x = \frac{-41z+153}{76}$,	$y = \frac{-3z+39}{38}$,	$z = z$

PAUTAS DE CORRECCIÓN:

Apartado a

- Calcular el determinante de la matriz A en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k = -(2a+1)$ y $k = 2a+1$: 0,25 puntos.
- Justificar que SCD para k diferente de $-(2a+1)$ y $2a+1$: 0,5 puntos.
- Justificar que SI para $k = -(2a+1)$: 0,5 puntos.
- Justificar que SCI para $k = 2a+1$: 0,5 puntos.

Apartado b

- Obtener la solución: 0,5 puntos.

3. Sea $b \in \mathbb{R}$ y $e_1 = (0,0,0,b-5)$, $e_2 = (0,0,b-3,1)$, $e_3 = (0,b-1,1,1)$, $e_4 = (b,b+1,1,1)$ vectores de $\mathbb{R}^4$. Y sea $F_b =< e_1, e_2, e_3, e_4 >$.

   a) Calculad la dimensión de F_b en función de b. Calculad una base A para F_0 (es decir, para el caso $b = 0$) y una base B para F_2.
   ¿Son F_0 y F_2 el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?

   b) Sea $v = (0, -a, a+5, a+1)$ donde a es **la tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP. ¿$v \in F_0$? ¿$v \in F_2$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en las bases del apartado anterior.

Solución

a) Debemos calcular el rango de la matriz formada por los vectores, para esto comenzamos calculando el determinante 4×4 de todos los vectores:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b-1 & b+1 \\ 0 & b-3 & 1 & 1 \\ b-5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b(b-1)(b-3)(b-5)$$

Así tendremos que para $b \neq 0,1,3,5$ el determinante es no nulo y por tanto la dimensión de F_b es 4.
Para los casos $b = 0,1,3,5$ podemos encontrar un menor 3×3 con el determinante distinto de 0. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & b-1 & b+1 \\ b-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(b-4)$$

Que sólo se anula para $b = 4$ y por tanto en los casos $b = 0,1,3,5$ será siempre no nulo. Así tenemos que para $b = 0,1,3,5$ la dimensión de F_b es 3.
Vamos ahora a encontrar una base para el caso $b = 0$. Acabamos de ver que la dimensión de F_0 es 3, y hemos encontrado un menor 3×3 con determinante no nulo. Así pues, como base podemos usar directamente los vectores del menor anterior (substituyendo $b = 0$):
$A = \{(0,0,-3,1),(0,-1,1,1),(0,1,1,1)\}$
Para el caso $b = 2$ tenemos que la dimensión es 4 y los 4 vectores con que está definido el espacio vectorial son linealmente independientes. Por tanto substituyendo $b = 2$ en los vectores tenemos que una base B de F_2 puede ser:
$B = \{(0,0,0,-3),(0,0,-1,1),(0,-1,1,1),(2,3,1,1)\}$
Hemos visto que F_0 tiene dimensión 3 y que F_2 tiene dimensión 4. Por tanto, no pueden ser el mismo subespacio vectorial.

b) Para ver si v pertenece a F_0 y a la vez calcular sus coordenadas si pertenece, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a+5 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -1$, $y = a+1$, $z = 1$. Por tanto, $v \in F_0$ y sus coordenadas en la base A son $(-1, a+1, 1)$.
Sabemos que v pertenece a F_2 porque tiene dimensión 4. Para calcular sus coordenadas procedemos análogamente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a+5 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -\frac{4}{3}a - 2$, $y = -2a - 5$, $z = -a$, $t = 0$. Por tanto, $v \in F_2$ y sus coordenadas en la base B son $(-\frac{4}{3}a - 2, -2a - 5, -a, 0)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN:
Apartado a

- Cálculo de la dimensión de F_b: 0,75 puntos.
- Dar una base de F_0 y justificarla: 0,5 puntos.
- Dar una base de F_2 y justificarla: 0,25 puntos.
- Justificar que no son el mismo subespacio vectorial: 0,25 puntos.

Apartado b

- Demostrar que el vector pertenece y calcular las coordenadas en F_0: 0,5 puntos.
- Demostrar que el vector pertenece y calcular las coordenadas en F_2: 0,25 puntos.

4. Sustituid el parámetro a por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente definición de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $f(x, y, z) = ((a+1)x - (a+1)^2 y - \dfrac{(a+1)^3}{2} z, \dfrac{a+1}{2} z, -z)$ donde los vectores (x, y, z) están expresados en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$.

   Responded razonadamente a los siguientes apartados:

   a) Escribid la matriz $M(f|C, C)$ asociada a la aplicación lineal f en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$ y encontrad una base del núcleo de f.

   b) Determinad si la matriz asociada a f diagonaliza y en caso afirmativo escribid una base de vectores propios.

Solución
Resolvemos el problema para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los resultados siguientes.

a) La matriz $M(f|C, C)$ asociada a la aplicación lineal f en la base canónica C se obtiene poniendo en columnas las imágenes de los vectores de la base canónica

C, tal como se ve en el apartado 3 del módulo "Aplicaciones lineales":

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (a+1,0,0) \\ f(0,1,0) &= (-(a+1)^2,0,0) \\ f(0,0,1) &= (-\frac{(a+1)^3}{2},\frac{a+1}{2},-1) \end{aligned}$$

La matriz resultante es la siguiente:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} a+1 & -(a+1)^2 & -\frac{(a+1)^3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a+1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El núcleo de f se obtiene resolviendo el sistema $M(f|C,C) \cdot u = 0$:

$$\begin{pmatrix} a+1 & -(a+1)^2 & -\frac{(a+1)^3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a+1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta expresión se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} (a+1)x-(a+1)^2y-\tfrac{(a+1)^3}{2}z &= 0 \\ \tfrac{a+1}{2}z &= 0 \\ -z &= 0 \end{aligned}$$

De la tercera se obtiene $z = 0$. La segunda da el mismo resultado. Sustituyendo este valor y aislando la incógnita x en la primera ecuación: $(a+1)x = (a+1)^2y$ y por tanto $x = (a+1)y$ por ser $a \neq -1$. Los vectores del núcleo tienen pues la forma $((a+1)y, y, 0)$ y una base puede ser el vector $(a+1, 1, 0)$. Con esto se puede decir además que el núcleo de f tiene dimensión 1 y que la aplicación f no es inyectiva.

El resultado en función del valor de vuestro IDP será:

$$\begin{array}{ll} a=0 & Ker(f) =<(1,1,0)> \\ a=1 & Ker(f) =<(2,1,0)> \\ a=2 & Ker(f) =<(3,1,0)> \\ a=3 & Ker(f) =<(4,1,0)> \\ a=4 & Ker(f) =<(5,1,0)> \\ a=5 & Ker(f) =<(6,1,0)> \\ a=6 & Ker(f) =<(7,1,0)> \\ a=7 & Ker(f) =<(8,1,0)> \\ a=8 & Ker(f) =<(9,1,0)> \\ a=9 & Ker(f) =<(10,1,0)> \end{array}$$

b) Al tener un núcleo no vacío, sabemos que 0 es un VAP de f, pero para escribir la forma diagonal de la matriz necesitamos conocer el resto de VAPs de f y éstos son las soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$ donde $p(\lambda) = |M(f|C,C) - \lambda \mathrm{I}|$ es el polinomio característico de f, tal como se define en el punto

"7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales". Desarrollando el determinante por la primera columna obtenemos:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a+1-\lambda & -(a+1)^2 & -\frac{(a+1)^3}{2} \\ 0 & -\lambda & \frac{a+1}{2} \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (a+1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda)$$

Como las soluciones son $a+1$, 0 y -1 y $a \geq 0$, hay tres VAPs diferentes y existirán tres VEPs correspondientes a cada uno de ellos que serán linealmente independientes. Al poder formar una base de VEPs la matriz sí que diagonaliza.

El VEP de VAP 0 es la base del núcleo que se ha calculado en el apartado anterior, el vector $(a+1, 1, 0)$.

Para calcular el VEP de VAP $a+1$ hay que buscar una base del $Ker(f-(a+1)\mathrm{I})$. Es decir, resolver el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & -(a+1)^2 & -\frac{(a+1)^3}{2} \\ 0 & -a-1 & \frac{a+1}{2} \\ 0 & 0 & -1-a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $a \neq -2$, de la tercera ecuación se obtiene que $z = 0$. De la segunda ecuación, sustituyendo z por 0 en $-(a+1)y + \frac{a+1}{2}z = 0$ se obtiene que también $y = 0$ porque $a \neq -1$. La primera ecuación $-(a+1)^2 y - \frac{(a+1)^3}{2} z = 0$ no pone restricciones sobre la variable x. Por tanto, se obtiene el vector propio $(1, 0, 0)$ para el valor propio $a+1$.

Para calcular el VEP de VAP -1 hay que buscar una base del $Ker(f+\mathrm{I})$. Es decir, resolver el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} a+2 & -(a+1)^2 & -\frac{(a+1)^3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación, $y + \frac{a+1}{2}z = 0$ se obtiene que $z = -\frac{2}{a+1}y$ porque $a \neq -1$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación $(a+2)x - (a+1)^2 y + \frac{(a+1)^3}{2}\frac{2}{a+1}y = 0$ se llega a $(a+2)x = 0$, y, como $a \neq -2$, tiene que ser $x = 0$. Por tanto, tomando el valor $y = (a+1)$ se obtiene el vector propio $(0, a+1, -2)$ para el valor propio -1.

Los valores propios de f son 0, $a+1$ y -1 y los vectores propios correspondientes son $(a+1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, a+1, -2)$.

El resultado en función de vuestro IDP es:

$$a = 0 \quad VAPs = \{0, 1, -1\} \quad VEPs = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, -2)\}$$

$$a = 1 \quad VAPs = \{0, 2, -1\} \quad VEPs = \{(2, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 2, -2)\}$$

$$a = 2 \quad VAPs = \{0, 3, -1\} \quad VEPs = \{(3, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 3, -2)\}$$

$$a = 3 \quad VAPs = \{0, 4, -1\} \quad VEPs = \{(4, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 4, -2)\}$$

$$a = 4 \quad VAPs = \{0, 5, -1\} \quad VEPs = \{(5, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 5, -2)\}$$

$$a = 5 \quad VAPs = \{0, 6, -1\} \quad VEPs = \{(6, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 6, -2)\}$$

$$a = 6 \quad VAPs = \{0, 7, -1\} \quad VEPs = \{(7, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 7, -2)\}$$

$$a = 7 \quad VAPs = \{0, 8, -1\} \quad VEPs = \{(8, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 8, -2)\}$$

$$a = 8 \quad VAPs = \{0, 9, -1\} \quad VEPs = \{(9, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 9, -2)\}$$

$$a = 9 \quad VAPs = \{0, 10, -1\} \quad VEPs = \{(10, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 10, -2)\}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Encontrar las imágenes de los vectores de la base: 0,25 puntos.
- Construir la matriz de la aplicación: 0,25 puntos.
- Plantear el sistema para encontrar el núcleo: 0,25 puntos.
- Calcular la base del núcleo: 0,5 puntos.

Apartado b

- Construir el determinante del polinomio característico: 0,25 puntos.
- Encontrar los VAPs: 0,25 puntos.
- Calcular un VEP de VAP 0: 0,25 puntos.
- Calcular un VEP de VAP a+1: 0,25 puntos.
- Calcular un VEP de VAP -1: 0,25 puntos.