EXAMEN 2

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Expresad el siguiente número complejo en forma polar: $\dfrac{2-5i}{(2+i)^2}$.

   b) Calculad todas las raíces complejas resultantes de la ecuación: $z^4 i + 5 = 0$. Proporcionad el resultado en forma polar y los ángulos en grados en el intervalo $[0°, 360°)$.

Solución

a) Primero calculamos el cuadrado del denominador:

$$(2+i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2i + i^2 = 3 + 4i$$

Ahora operamos con la división para encontrar la forma binómica. Para ello, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$\frac{2-5i}{(2+i)^2} = \frac{2-5i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-15i+20i^2}{3^2-(4i)^2} = \frac{-14-23i}{25} = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$$

Ahora calculamos el módulo y el argumento del número complejo anterior, utilizando la relación que establece que $r = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ (ver apartado 3.4.1, Módulo 1):

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{\left(-\frac{14}{25}\right)^2 + \left(-\frac{23}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{5} = 1{,}08$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\left(\frac{-\frac{23}{25}}{-\frac{14}{25}}\right) = 238{,}67°$$

NOTA: la tangente de un ángulo vale $\dfrac{-23}{-14}$ en $58{,}67°$ y en $238{,}67°$. Ahora bien, el número complejo que estamos analizando tiene la parte real y la imaginaria negativas, por lo que se encuentra en el tercer cuadrante, es decir, $238{,}67°$.

En resumen, tenemos:

$$\boxed{\frac{2-5i}{(2+i)^2} = 1{,}08_{238{,}67°}}$$

b) Lo primero es aislar z en la ecuación:

$$z = \sqrt[4]{\frac{-5}{i}} = \sqrt[4]{\frac{-5}{i} \cdot \frac{-i}{-i}} = \sqrt[4]{5i}$$

Ahora calculamos el número complejo $5i$ en forma polar (ver apartado 3.4.1, Módulo 1):

Módulo: $r = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

Argumento: $\theta = \arctan\left(\frac{5}{0}\right) = 90°$

NOTA: dado que se trata de un número complejo con parte real nula y parte imaginaria positiva, el ángulo vale 90°.

Tenemos entonces que $z = \sqrt[4]{5i} = \sqrt[4]{5_{90°}}$. Ahora calculamos las raíces cuartas (ver apartado 3.6.1, Módulo 1):

$$z = \sqrt[4]{5_{90°}} = \sqrt[4]{5}_{\frac{90°+360°k}{4}} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, 3$$

El módulo de las raíces es: $\sqrt[4]{5}$

Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \frac{90°+360°k}{4}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

- Para $k = 0$, tenemos $\beta_0 = 22{,}5°$.
- Para $k = 1$, tenemos $\beta_1 = 112{,}5°$.
- Para $k = 2$, tenemos $\beta_2 = 202{,}5°$.
- Para $k = 3$, tenemos $\beta_3 = 292{,}5°$.

En resumen, las raíces resultantes de la ecuación son:

$$\boxed{\sqrt[4]{5}_{22{,}5°},\ \sqrt[4]{5}_{112{,}5°},\ \sqrt[4]{5}_{202{,}5°} \text{ y } \sqrt[4]{5}_{292{,}5°}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular el cuadrado del denominador: 0,25 puntos.
- Expresar la división en forma binómica: 0,5 puntos.
- Calcular el módulo de la división: 0,25 puntos.
- Calcular el argumento de la división: 0,25 puntos.

Apartado b

- Aislar z: 0,25 puntos.
- Expresar z en forma polar: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Calcular los argumentos de las raíces: 0,5 puntos.

2. Considerad el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} kx + (k+1)\,z &=& k \\ ky + (a+1)\,z &=& k \\ (a+1)\,y + kz &=& k \end{array}\right\}$$

Sustituid el parámetro "a" por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con el sistema obtenido:

a) Discutid el sistema en función de los diferentes valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Resolved el sistema para $k = a + 2$.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) Para discutir el sistema utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apartado 4 del módulo "Sistemas de ecuaciones lineales"].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k+1 \\ 0 & k & a+1 \\ 0 & a+1 & k \end{pmatrix} \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & k+1 & k \\ 0 & k & a+1 & k \\ 0 & a+1 & k & k \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$\begin{vmatrix} k & 0 & k+1 \\ 0 & k & a+1 \\ 0 & a+1 & k \end{vmatrix} = k^3 - (a+1)^2 k = k\left(k^2 - (a+1)^2\right) = k\,(k-(a+1))\,(k+(a+1))$$

- Si $k \neq 0$ y $k \neq \pm(a+1) \rightarrow$ $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) =$ n^o incógnitas y, por lo tanto, se obtiene que el $\boxed{\text{sistema es compatible determinado}}$.
- Si $k = 0$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a+1 & 0 \end{vmatrix} = -(a+1) \neq 0$ (este menor se obtiene considerando primera y tercera fila y la segunda y tercera columna).

  Calculamos, para $k = 0$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Así pues, tenemos que $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = 2 \neq$ n^{o}incógnitas y, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es compatible indeterminado}}$.
- Si $k = a+1$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 \neq 0$ (este menor se obtiene considerando primera y segunda fila y la primera y segunda columna).

  Calculamos, para $k = a+1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} a+1 & 0 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 0$. Así pues, tenemos que $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = 2 \neq$ n^{o}incógnitas y, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es compatible indeterminado}}$.

- Si $k = -(a+1)$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -(a+1) & 0 \\ 0 & -(a+1) \end{vmatrix} = (a+1)^2 \neq 0$ (este menor se obtiene considerando primera y segunda fila y la primera y segunda columna).
  Calculamos, para $k = -(a+1)$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} -(a+1) & 0 & -(a+1) \\ 0 & -(a+1) & -(a+1) \\ 0 & a+1 & -(a+1) \end{vmatrix} = -2(a+1)^3 \neq 0$. Así pues, tenemos que $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(M) = 3$, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es incompatible}}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que para $k = a+2$ el sistema es compatible determinado. Así pues, el sistema que nos piden resolver es:

$$\left.\begin{array}{rcl} (a+2)\,x + (a+3)\,z & = & a+2 \\ (a+2)\,y + (a+1)\,z & = & a+2 \\ (a+1)\,y + (a+2)\,z & = & a+2 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apartado 6 del módulo “Sistemas de ecuaciones lineales”] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 0 & a+3 & a+2 \\ 0 & a+2 & a+1 & a+2 \\ 0 & a+1 & a+2 & a+2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 0 & a+3 & a+2 \\ 0 & a+2 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & 2a+3 & a+2 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $(a+2)\cdot F3 - (a+1)\cdot F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{rcl} (a+2)\,x + (a+3)\,z & = & a+2 \\ (a+2)\,y + (a+1)\,z & = & a+2 \\ (2a+3)\,z & = & a+2 \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $z = \frac{a+2}{2a+3}$. Si hacemos la sustitución de este valor de z en la segunda ecuación y aislamos la y obtenemos $y = \frac{a+2}{2a+3}$. Si sustituimos en la primera ecuación el valor de z se obtiene $x = \frac{a}{2a+3}$
Así, la solución de este sistema, en función de los diferentes valores del parámetro

a, es:

	$x = \frac{a}{2a+3}$,	$y = \frac{a+2}{2a+3}$,	$z = \frac{a+2}{2a+3}$
Si $a = 0$	$x = 0$	$y = 2/3$	$z = 2/3$
Si $a = 1$	$x = 1/5$	$y = 3/5$	$z = 3/5$
Si $a = 2$	$x = 2/7$	$y = 4/7$	$z = 4/7$
Si $a = 3$	$x = 3/9$	$y = 5/9$	$z = 5/9$
Si $a = 4$	$x = 4/11$	$y = 6/11$	$z = 6/11$
Si $a = 5$	$x = 5/13$	$y = 7/13$	$z = 7/13$
Si $a = 6$	$x = 6/15$	$y = 8/15$	$z = 8/15$
Si $a = 7$	$x = 7/17$	$y = 9/17$	$z = 9/17$
Si $a = 8$	$x = 8/19$	$y = 10/19$	$z = 10/19$
Si $a = 9$	$x = 9/21$	$y = 11/21$	$z = 11/21$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz A en función de k: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente de 0 y de $\pm(a+1)$ el sistema es SCD: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = 0$ el sistema es SCI: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k = a + 1$ el sistema es SCI: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k = -(a+1)$ el sistema es SI: 0,5 puntos.

Apartado b

- Obtener la solución: 0,5 puntos.

3. Sean $e_1 = (-1, 1, 0, -1)$, $e_2 = (0, 2, 2, 2)$, $e_3 = (0, 0, 0, a+1)$, $e_4 = (-1, 3, 2, 2a+3)$ y $v = (7, 3, 10, 10 - 7a)$ vectores de $\mathbb{R}^4$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP. Y sea $F =< e_1, e_2, e_3, e_4 >$.
Decid si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y **justificad vuestra respuesta**:

   a) La dimensión de F es 4.

   b) $A = \{(-1, 1, 0, -1), (0, 2, 2, 2), (0, 0, 0, a+1)\}$ es una base de F.

   c) $v \in F$ y sus coordenadas en la base A son (3,1,3).

d) $C_{A\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de la base A anterior a la base $B = \{(1,-1,0,1),(1,0,1,2),(0,1,1,a+4)\}$

Solución

a) **FALSO**. Si calculamos el rango de la matriz formada por los vectores:

$$rango \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & a+1 & 2a+3 \end{pmatrix} = 3$$

Ya que tenemos que $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto $dim(F) \geq 2$. Orlando este menor encontramos $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & a+1 \end{vmatrix} = -2a-2 \neq 0$, por tanto, $dim(F) \geq 3$. Y para ver que la dimensión no es 4 podemos calcular el determinante de todos los vectores juntos y ver que es 0, o podemos ver directamente que $e_1+e_2+2e_3 = e_4$ (es decir, son linealmente dependientes). Así tenemos que la dimensión de F es 3.

b) **VERDADERO**. Los vectores de la base A propuesta contienen el menor 3×3 anterior con determinante no nulo, por tanto son linealmente independientes. Además son del espacio F y tenemos tantos como la dimensión. Así pues, son base.

c) **FALSO**. Miramos si $v \in F$ y calculamos sus coordenadas en tal caso resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 10 \\ 10-7a \end{pmatrix}$$

Encontramos que la solución es $x = -7$, $y = 5$ y $z = -7$. Por tanto, $v \in F$ pero sus coordenadas en la base A son $(-7, 5, -7)$, no las del enunciado.

d) **FALSO**. Podemos ver que, como el primer vector de cada base es el mismo con signo contrario, la primera columna de la matriz de cambio de base debería ser $(-1, 0, 0)$; y esto no es así.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado b

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado c

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado d

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

4. Sustituid el parámetro a por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 1, a+1)$, $v = (0, 1, a+1)$ y $w = (1, 0, a+1)$ escritos en la base canónica C.

   Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que cumple que $f(u) = u$, $f(v) = -v$ y $f(w) = bw$ y b un parámetro real.

   Responded razonadamente a los siguientes apartados:

   a) Comprobad que $B = \{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Calculad la matriz $M(f|B, B)$ que corresponde a la aplicación lineal f en la base B y la matriz $M(f|C, C)$ que corresponde a la aplicación lineal f en la base canónica $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

   b) Calculad la potencia 10 de la matriz $M(f|C, C)$ utilizando la matriz $M(f|B, B)$.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen.

a) Para demostrar que B es una base de $\mathbb{R}^3$ basta con ver que el determinante formado por los tres vectores es diferente de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1) + (a+1) - (a+1) = (a+1)$$

Al ser a una cifra ($a \geq 0$ y, por tanto, $a + 1 > 0$), el determinante no es nulo y los tres vectores son linealmente independientes y forman base de $\mathbb{R}^3$.

Para construir la matriz de la aplicación f en la base B tenemos que poner en columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base B expresadas en la base B. Los vectores de la base B son u, v y w y sus imágenes se escriben en la propia base B como: $f(u) = u$ se escribe como $(1, 0, 0)$ $f(v) = -v$ se escribe como $(0, -1, 0)$ $f(w) = bw$ se escribe como $(0, 0, b)$. Por tanto, la matriz de f en base B es:

$$M(f|B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Para construir la matriz de f en la base canónica C tenemos que usar la matriz de cambio de base que podemos construir (como se ve en el apartado 6 del módulo "Aplicaciones lineales") a partir de las coordenadas de los vectores de B en la base canónica que son las que proporciona el enunciado.

$$M(Id|C,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por esta matriz y por su inversa según la siguiente fórmula obtendremos la matriz que pide el enunciado.

$$M(f|C,C) = M(Id|C,B) \cdot M(f|B,B) \cdot M(Id|C,B)^{-1}$$

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{a+1} \\ -1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & -1 & 0 \\ a+1 & -a-1 & (a+1)b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{a+1} \\ -1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

El resultado es:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 1 & 1-b & \frac{b-1}{a+1} \\ 2 & 1 & \frac{-2}{a+1} \\ 2a+2 & (a+1)(1-b) & b-2 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular la potencia n-ésima de una matriz resulta útil conocer su matriz diagonal y la base de vectores propios porque, como se ve en el apartado 8.2 del módulo "Aplicaciones lineales", se cumple la siguiente igualdad:

$$M(f|C,C)^n = M(Id|C,B)M(f|B,B)^n M(Id|C,B)^{-1}$$

Y la potencia de la matriz diagonal se calcula muy fácilmente elevando los elementos diagonales a la potencia correspondiente. En este caso:

$$M(f|B,B)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & b^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{10} \end{pmatrix}$$

$$M(f|C,C)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{a+1} \\ -1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

$$M(f|C,C)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b^{10} \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & a+1 & (a+1)b^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{a+1} \\ -1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

El resultado es:

$$M(f|C,C)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1-b^{10} & \frac{b^{10}-1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (a+1)(1-b^{10}) & b^{10} \end{pmatrix}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Comprobar que B es base: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de f en base B: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de cambio de base B a base C: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de cambio de base C a base B: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de f en base C: 0,25 puntos.

Apartado b

- Escribir la fórmula de cálculo a partir de la matriz diagonal en el caso planteado: 0,5 puntos.
- Calcular la potencia de la matriz diagonal: 0,25 puntos.
- Calcular el producto de las tres matrices: 0,5 puntos.