

Solució examen 14-01-2015

Exercici 1.

a) Donat el quocient de nombres complexos $\frac{a+i}{2+i}$, determina el valor del paràmetre a per a què el mòdul d'aquest quocient sigui $\sqrt{2}$.

b) Calcula: $\sqrt[3]{1+i}$ (proporciona els resultats en forma polar)

NOTA: $\arctg(1) = 45^\circ$

Solució:

a) Efectuem primer el quocient. Per a això multipliquem i dividim pel conjugat del denominador:

$$\frac{a+i}{2+i} = \frac{(a+i) \cdot (2-i)}{(2+i) \cdot (2-i)} = \frac{2a - ai + 2i - i^2}{4 - i^2}$$

Operem l'expressió anterior, recordant, tal com s'explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2 = -1$:

$$\frac{a+i}{2+i} = \frac{(a+i) \cdot (2-i)}{(2+i) \cdot (2-i)} = \frac{2a - ai + 2i - i^2}{4 - i^2} = \frac{2a - ai + 2i + 1}{5} = \frac{2a+1}{5} + \frac{2-a}{5}i$$

A continuació trobem el mòdul del complex anterior i imposem la condició de l'enunciat: el seu valor ha de ser $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{\left(\frac{2a+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2-a}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Elevem al quadrat ambdós membres de la igualtat i desenvolupem:

$$\left(\frac{2a+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2-a}{5}\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{(2a+1)^2 + (2-a)^2}{25} = 2 \rightarrow 4a^2 + 4a + 1 + 4 - 4a + a^2 = 50 \rightarrow 5a^2 + 5 = 50 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

I la solució demanada a l'enunciat és:

$a = \pm 3$

b) Escrivim el complex $1+i$ en forma polar tal com s'explica a l'apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

Àlgebra/ Matemàtiques I

$$m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{arctg}(1) = 45^\circ$$

Observem que ni sumem ni restem cap angle donat que la part real i la part imaginària del complex són positives (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}}$

Com ens demanen les arrels terceres hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[6]{2_{\frac{45^\circ+360^\circ k}{3}}} \text{ per a } k=0, 1, 2$$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[6]{2}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \frac{45^\circ+360^\circ k}{3}$ per a $k=0, 1, 2$

- Si $k=0$, tenim que $\beta_0 = 15^\circ$
- Si $k=1$, tenim que $\beta_1 = 15^\circ+120^\circ = 135^\circ$
- Si $k=2$, tenim que $\beta_2 = 15^\circ+240^\circ = 255^\circ$

Per tant, les tres arrels terceres del complex $1+i$ són:

$$\sqrt[6]{2}_{15^\circ}$$

$$\sqrt[6]{2}_{135^\circ}$$

$$\sqrt[6]{2}_{255^\circ}$$

Exercici 2:

Sigui A un subespai vectorial de dimensió 2 de \mathbb{R}^4 definit de la següent forma:

$$A = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 = a_3, a_2 = 0\}$$

I sigui $v = (2, 0, 2, 2)$

a) Si $W = \{(a, b, a, 0), (a, 0, a, a-1)\}$, quins valors poden tenir a i b per tal que W sigui base d'A?

b) Si $a = 2$ i $b = 0$ quines són les coordenades de v en la base W?

Sigui $T = \{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ una altra base d'A, troba les coordenades de v en la base T.

Àlgebra/ Matemàtiques I

c) Troba la matriu de canvi de base de W a T quan $a = 2$ i $b = 0$. Comproveu també que la matriu que heu trobat efectivament transforma les coordenades de v en W en les coordenades de v en T i que obteniu el mateix resultat que a l'apartat anterior.

Solució

a) Per a que W sigui base d'A, com que sabem que la dimensió d'A és 2, caldrà que els vectors de W compleixin dos requisits: ser d'A i ser linealment independents.

Així doncs $(a, b, a, 0)$ serà d'A si $a=a$ i $b=0$; $(a, 0, a, a-1)$ serà d'A si $a=a$. D'aquí podem concloure que $b=0$ necessàriament.

D'altra banda volem que $\text{rang} \begin{pmatrix} a & a \\ b & 0 \\ a & a \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \\ a & a \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} = 2$ Per a que això es

compleixi ens cal que $a-1 \neq 0$ i per tant $a \neq 1$ i també s'ha de complir que $a \neq 0$.

Per tant, quan $a \neq 0, a \neq 1$ i $b = 0$ W serà base de A.

b) Si $a=2$ i $b=0$ tenim $W=\{(2,0,2,0), (2,0,2,1)\}$. Per trobar les coordenades de v cal que resolguem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Que té per solució } x=-1 \text{ i } y=2. \text{ Per tant les coordenades de v en}$$

W són $(-1, 2)$.

De manera anàloga trobem les coordenades de v en T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Que té per solució } x=2 \text{ i } y=2. \text{ Per tant les coordenades de v en}$$

T són $(2, 2)$.

c) Per a trobar el canvi de base de W a T cal expressar els vectors de la base W en funció dels vectors de la base de T.

Si $a=2$ i $b=0$ tenim $W=\{(2,0,2,0), (2,0,2,1)\}$ i tenim que $T=\{(1,0,1,0), (0,0,0,1)\}$.

Resolem:

Àlgebra/ Matemàtiques I

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Que ens dona } x=2, y=0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Que ens dona } x=2, y=1.$$

Per tant la matriu de canvi de base serà $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comprovem la coherència de les coordenades trobades a l'apartat anterior fent:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 3:

Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per a $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu A segons els valors del paràmetre real α .

b) Per quins valors de α el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ no té solució única? Per a aquests

casos, trobeu les solucions del sistema.

Resolució:

a) La matriu amb la que treballem és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculem el seu rang. Prenem el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1$$

Àlgebra/ Matemàtiques I

de l'equació $\alpha - 1 = 0$ tenim que si $\alpha \neq 1$, aquest menor d'ordre 3 és diferent de zero i per tant, el rang de la matriu serà 3, mentre que si $\alpha = 1$, la matriu A és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que té rang 2, ja que, per exemple, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ és diferent de zero.

En resum:

- Si $\alpha \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$
- Si $\alpha = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$.

b) El sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és homogeni i, per tant, és sempre compatible. La seva

solució serà diferent de $x=0, y=0, z=0$, quan el rang de la matriu del sistema sigui menor que el nombre d'incògnites, és a dir, quan $\alpha = 1$.

En aquest cas $\alpha = 1$, el sistema esdevé

$$\left. \begin{array}{lcl} x + y + z & = & 0 \\ x + y & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ 0x + 0y + 0z & = & 0 \end{array} \right\}$$

és a dir $\left. \begin{array}{lcl} x + y + z & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{array} \right\}$. De la segona equació resulta $y = -x$ i substituint-ho a la

primera equació obtenim $x - x + z = 0$, o sigui, $z = 0$.

Els punts solució són doncs de la forma $\boxed{(x, -x, 0), x \in \mathbb{R}}$.

Exercici 4

Sigui $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z) = (2x, x + y + 2z, 2y + z).$$

- Trobeu la matriu f de en les bases canòniques.
- Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f .
- Estudieu si f diagonalitza.
- Trobeu una base de \mathbb{R}^3 amb el nombre màxim de vectors propis de f .

Àlgebra/ Matemàtiques I

Resolució:

- a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)

- b) El polinomi característic de f és $q(t) = \det(A - tI)$ on:

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 2 \\ 0 & 2 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} =$$
$$(2-t)(t^2 - 2t - 3) = (2-t)(-1-t)(3-t)$$

Fixem-nos que el polinomi característic descomposa completament en tres factors reals diferents de grau 1. Els valors propis són 2 (amb multiplicitat algebraica 1), -1 (amb multiplicitat algebraica 1) i 3 (amb multiplicitat algebraica 1) (veure apunts M5, Teorema de diagonalització.)

- c) Com que f té tres valors propis diferents, f diagonalitza. (veure apunts M5, Teorema de diagonalització.)
- d) Per trobar els vectors propis de f de valor propi 2, -1 i 3 cal resoldre els tres sistemes d'equacions lineals: $(A - 2I)X = 0$, $(A - (-1)I)X = 0$ i $(A - 3I)X = 0$.

O sigui, els tres sistemes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base de solucions del primer sistema és: $(-3, 1, 2)$.

Una base de solucions del segon sistema és: $(0, 1, -1)$.

Una base de solucions del tercer sistema és: $(0, 1, 1)$.

Una base de \mathbb{R}^3 formada per vector propis de f és $(-3, 1, 2), (0, 1, -1), (0, 1, 1)$.