EXAMEN 3

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Sean x e y dos números complejos. Resolved el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} (2+i)x + 2y = 1+7i \\ (1-i)x + iy = 0 \end{array} \right.$$

   b) Determinad las raíces cúbicas del número complejo $z = 8i$ y expresad el resultado en forma binómica.

Solución

a) Este ejercicio se puede resolver de diferentes maneras. Una de ellas consiste en empezar con la segunda ecuación y expresar y en función de x:

$$(1-i)x + iy = 0 \rightarrow y = -\frac{(1-i)x}{i} = -\frac{(1-i)ix}{i^2} = -\frac{(i-i^2)x}{-1} = (1+i)x$$

Ahora se puede sustituir y en la primera ecuación para determinar el valor de x:

$$(2+i)x + 2y = 1+7i \rightarrow (2+i)x + 2(1+i)x = 1+7i \rightarrow 4x + 3ix = 1+7i \rightarrow$$
$$x = \frac{1+7i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{4-3i+28i-21i^2}{4^2-(3i)^2} = \frac{25+25i}{25} = 1+i$$

Finalmente, podemos volver a la segunda ecuación para determinar el valor de y:

$$y = (1+i)x = (1+i)(1+i) = 1+i+i+i^2 = 2i$$

En resumen:

$$\boxed{x = 1+i \ ; \ y = 2i}$$

b) Fácilmente se puede ver que el número complejo $8i$ tiene parte real nula y parte imaginaria 8, siendo su módulo 8 y su argumento $\frac{\pi}{2}$. Así, $8i = 8_{\frac{\pi}{2}}$.

Ahora podemos pasar a calcular las raíces cúbicas (ver apartado 3.6.1, Módulo 1):

$$\sqrt[3]{8_{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[3]{8}_{\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}} \qquad \text{para } k = 0,1,2$$

El módulo de las raíces es: $r = \sqrt[3]{8} = 2$

Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}$ para $k = 0, 1, 2$

- Para $k = 0$, tenemos $\beta_0 = \dfrac{\pi}{6}$.
- Para $k = 1$, tenemos $\beta_1 = \dfrac{5\pi}{6}$.
- Para $k = 2$, tenemos $\beta_2 = \dfrac{3\pi}{2}$.

Ahora se deben hacer las transformaciones para pasar a forma binómica:

- $2_{\frac{\pi}{6}} \rightarrow 2\cos\dfrac{\pi}{6} + 2\sin\dfrac{\pi}{6}i = 1{,}732 + i$.
- $2_{\frac{5\pi}{6}} \rightarrow 2\cos\dfrac{5\pi}{6} + 2\sin\dfrac{5\pi}{6}i = -1{,}732 + i$.
- $2_{\frac{3\pi}{2}} \rightarrow 2\cos\dfrac{3\pi}{2} + 2\sin\dfrac{3\pi}{2}i = -2i$.

En resumen, las raíces cúbicas de z son:

$$\boxed{1{,}732 + i;\ -1{,}732 + i;\ -2i}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Por la explicación paso a paso del procedimiento: 0,75 puntos.
- Por hallar los valores correctos de x e y: 0,5 puntos.

Apartado b

- Expresar z en forma polar: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo de las raíces: 0,25 puntos.
- Calcular los argumentos de las raíces: 0,25 puntos.
- Pasar a forma binómica: 0,5 puntos.

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -k + (a+1) \\ a & 1 & -2 \\ k+3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Substituid el parámetro "a" de la matriu A por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con la matriz obtenida:

a) Determinad, de manera razonada, el rango de la matriz A en función de los diferentes valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Considerad el sistema de ecuaciones lineales **homogéneo** que tiene la matriz A como matriz de coeficientes y razonad para qué valores del parámetro k el sistema es compatible indeterminado. Calculad las soluciones del sistema para $k = a$.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) Dado que la matriz A es cuadrada de orden 3, estudiaremos su rango utilizando que el rango es 3, solo si el determinante de la matriz es diferente de cero [Ver apuntes del módulo “Elementos de álgebra lineal y geometría”, apartado 4.5, páginas de la 30 a la 33]:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -k+a+1 \\ a & 1 & -2 \\ k+3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = k^2-(5a+4)k+\left(4a^2+4a\right) = (k-a)\cdot(k-(4a+4))$$

En consecuencia,

- Si $k \neq a$ y $k \neq 4a+4 \;\rightarrow\;$ rg$(A) = 3$.
- Si $k = a$, entonces $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ a+3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que rg$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.
- Si $k = 4a+4$, entonces $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3a-3 \\ a & 1 & -2 \\ 4a+7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que rg$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

b) El sistema homogéneo que tiene por matriz de coeficientes la matriz A es:

$$\left.\begin{aligned} 3x+3y+(-k+(a+1))\,z = 0 \\ ax+y-2z = 0 \\ (k+3)\,x+4y-z = 0 \end{aligned}\right\}$$

Sabemos que todo sistema homogéneo es siempre un sistema compatible [Ver apuntes del módulo ”Sistemas de ecuaciones lineales”, apartado 5, páginas 17 y 18], puesto que siempre se verifica que rg(A) =rg(M), notemos que la matriz ampliada M se obtiene añadiendo a la matriz A la columna de los términos independientes que son todos ellos nulos.

Así pues, a partir de lo que hemos deducido en el apartado anterior y aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apuntes módulo de ”Sistemas de ecuaciones lineales”, apartat 4, pàgina 13], podemos afirmar:

- Si $k \neq a$ y $k \neq 4a+4$, rg$(A) = 3 =$ rg$(M) =$ n^o incógnitas y, por lo tanto, se obtiene que el $\boxed{\text{sistema es compatible determinado}}$.
- Si $k = a$, rg$(A) =$ rg$(M) = 2 \neq$ n^o incógnitas y, por lo tanto, podemos afirmar que el $\boxed{\text{sistema es compatible indeterminado}}$.
- Si $k = 4a+4$, rg$(A) =$ rg$(M) = 2 \neq$ n^o incógnitas y, por lo tanto, el $\boxed{\text{sistema es compatible indeterminado}}$.

Calculamos, a continuación, las soluciones del sistema homogéneo compatible indeterminado que se obtiene si $k = a$.

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 3y + z = 0 \\ ax + y - 2z = 0 \\ (a+3)\,x + 4y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes del módulo de ”Sistemas de ecuaciones lineales”, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 0 \\ a & 1 & -2 & 0 \\ a+3 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3-3a & -6-a & 0 \\ 0 & 3-3a & -6-a & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $3{\cdot}F2 - a{\cdot}F1 \to F2, \qquad 3{\cdot}F3 - (a+3){\cdot}F1 \to F3.$

Notemos que la segunda y la tercera fila son iguales, por lo tanto, el sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 3y + z = 0 \\ (3-3a)\,y - (6+a)\,z = 0 \end{array}\right\}$$

Si $a \neq 1$ entonces $3 - 3a \neq 0$ y, por lo tanto, de la segunda ecuación se obtiene $y = \frac{6+a}{3-3a}z$. Si sustituimos en la primera ecuación este valor de y obtenemos $x = \frac{-7}{3-3a}z$.

Así, las soluciones de este sistema, en función de los diferentes valores del parámetro $a \neq 1$, son:

	$x = \frac{-7}{3-3a}z,$	$y = \frac{6+a}{3-3a}z,$	$z = z$
Si $a = 0$	$x = \frac{-7}{3}z$	$y = 2z$	$z = z$
Si $a = 2$	$x = \frac{7}{3}z$	$x = -\frac{8}{3}z$	$z = z$
Si $a = 3$	$x = \frac{7}{6}z$	$x = -\frac{9}{6}z$	$z = z$
Si $a = 4$	$x = \frac{7}{9}z$	$x = -\frac{10}{9}z$	$z = z$
Si $a = 5$	$x = \frac{7}{12}z$	$x = -\frac{11}{12}z$	$z = z$
Si $a = 6$	$x = \frac{7}{15}z$	$x = -\frac{12}{15}z$	$z = z$
Si $a = 7$	$x = \frac{7}{18}z$	$x = -\frac{13}{18}z$	$z = z$
Si $a = 8$	$x = \frac{7}{21}z$	$x = -\frac{14}{21}z$	$z = z$
Si $a = 9$	$x = \frac{7}{24}z$	$x = -\frac{15}{24}z$	$z = z$

En el caso $a = 1$, el sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 3y + z = 0 \\ -7z = 0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene $z = 0$ y si sustituimos este valor en la primera ecuación obtenemos $3x + 3y = 0$, es decir $x = -y$.

Así pues, para el caso $a = 1$, las soluciones son de la forma: $\boxed{x = -y,\ y = y,\ z = 0}$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Calcular correctamente el determinante de la matriz A en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k = a$ y $k = 4a + 4$: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente de a y $4a + 4$ el $\text{rg}(A) = 3$: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = a$ y para $k = 4a + 4$ el $\text{rg}(A) = 2$: 0,5 puntos.

Apartado b

- Plantear el sistema homogéneo asociado a la matriz A: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente de a y $4a + 4$ el sistema es SCD: 0,25 puntos.
- Justificar que para $k = a$ y para $k = 4a + 4$ el sistema es SCI: 0,25 puntos.
- Calcular, para $k = a$, las soluciones del sistema homogéneo: 0,5 puntos.

3. Sean $v_1 = (1, 0, -2)$, $v_2 = (0, -1, 1)$, $v_3 = (1, -1, -1)$, $v_4 = (1, -2, 0)$ y $v_5 = (2, 1, -5)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sea $E =< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 >$. Sea $w = (2a + 3, -3a - 3, -a - 1)$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP.
Decid si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y **justificad vuestra respuesta**:

a) La dimensión de E es 3.

b) $A = \{(1, -1, -1), (1, -2, 0)\}$ es una base de E y las coordenadas de w en esta base son $(a + 1, a - 5)$.

c) Sean $e_1 = v_3 + v_4$ y $e_2 = v_3 - 3v_4$. $B = \{e_1, e_2\}$ es una base de E.

d) La matriz de cambio de base de la base A a la base B es:

$$C_{A\to B} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

a) **FALSO**. Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 2$$

Ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ y todos los menores 3×3 resultantes de orlar el anterior tienen determinante nulo.
La dimensión de E es 2.

b) **FALSO**. A es base, ya que sus dos vectores son de E (son v_3 y v_4), son linealmente independientes (contienen el menor no nulo $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$) y tiene tantos vectores como la dimensión.
Pero si calculamos las coordenadas de $w \in E$ resolviendo el sistema:

errata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3 \\ -3a-3 \\ -a-1 \end{pmatrix}$$

Encontramos que la solución es $x = a+1$ y $y = a+2$. Por tanto las coordenadas de w en la base A son $(a+1, a+2)$, no las del enunciado.

(-2,5,-1)

c) **VERDADERO**. Tenemos que $e_1 = (2, -3, -1)$ y $e_2 = (-2, -7, -1)$ son base porque son de E (son combinación lineal de vectores de E), son linealmente independientes (contienen el menor no nulo $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$) y tenemos tantos vectores como la dimensión.

d) **VERDADERO**. Para calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la base A. Y esta es justamente la definición de estos vectores!
Así tenemos que la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base en la dirección contraria calculamos la inversa de la matriz anterior:

$$C_{A\to B} = C_{B\to A}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado b

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado c

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

Apartado d

- Respuesta correcta (verdadero/falso): 0 puntos.
- Justificación: 0,625 puntos.

4. Sea a la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC.

   a) Escribid la matriz del escalado de razón $a+2$ centrado en el punto $(1, a)$ y calculad la imagen del punto $(2, 3)$ por el escalado.

   b) Escribid la matriz del giro de ángulo $270°$ centrado en el punto $(a, -1)$ y calculad la imagen del punto $(2, 3)$ por el giro.

   c) Calculad la imagen del punto $(2, 3)$ por la composición del escalado y el giro anteriores.

   d) Calculad la imagen del punto $(2, 3)$ por la composición del giro y el escalado anteriores.

Solución

Resolvemos el problema para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los resultados siguientes.

a) La matriz del escalado de razón $a+2$ y centro $(1, a)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(-1, -a)$, la del escalado de razón $a+2$ centrado en el origen y la de la traslación de vector $(1, a)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 4.3 "Escalado a partir de un punto genérico"del módulo "Transformaciones geométricas".

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a+2 & 0 & 1 \\ 0 & a+2 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a-1 \\ 0 & a+2 & -a^2-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La imagen del punto $(2, 3)$ se puede calcular mediante la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a-1 \\ 0 & a+2 & -a^2-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+4-a-1 \\ 3a+6-a^2-a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 \\ 2a+6-a^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el punto $(a+3, 2a+6-a^2)$.

b) La matriz del giro de ángulo 270° y centro $(a, -1)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la traslación de vector $(-a, 1)$, la del giro de ángulo 270° centrado en el origen y la de la traslación de vector $(a, -1)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto 3.4 "Rotación alrededor de un punto genérico" del módulo "Transformaciones geométricas". Calculamos la composición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(270°) & -\sin(270°) & 0 \\ \sin(270°) & \cos(270°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+a \\ -1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La imagen del punto $(2, 3)$ se puede calcular mediante la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+a \\ -1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1+a \\ -2+a-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4 \\ a-3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el punto $(a + 4, a - 3)$.

c) La imagen del punto $(2, 3)$ se puede calcular mediante la multiplicación de la matriz del giro por el punto resultante del apartado a):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+a \\ -1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+3 \\ 2a+6-a^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+6-a^2+1+a \\ -a-3+a-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+7-a^2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el punto $(3a + 7 - a^2, -4)$.

d) La imagen del punto $(2, 3)$ se puede calcular mediante la multiplicación de la matriz del escalado por el punto resultante del apartado b):

$$\begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a-1 \\ 0 & a+2 & -a^2-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+4 \\ a-3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+6a+8-a-1 \\ a^2-a-6-a^2-a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+5a+7 \\ -2a-6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el punto $(a^2 + 5a + 7, -2a - 6)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Escribir correctamente el producto de matrices: 0,25 puntos.
- Calcular la matriz de la composición: 0,25 puntos.
- Calcular la imagen del punto: 0,25 puntos.

Apartado b

- Escribir correctamente el producto de matrices: 0,25 puntos.

- Calcular la matriz de la composición: 0,25 puntos.
- Calcular la imagen del punto: 0,25 puntos.

Apartado c

- Escribir correctamente el producto de matrices: 0,25 puntos.
- Calcular la imagen del punto: 0,25 puntos.

Apartado d

- Escribir correctamente el producto de matrices: 0,25 puntos.
- Calcular la imagen del punto: 0,25 puntos.