EXAMEN 2

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Resolved la ecuación $(3+2i)\cdot(z-1)=i$, donde z es un número complejo. Expresad el resultado en forma polar. Trabajad con los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$.

   b) Sean $z_1 = 3i\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ y $z_2 = -2\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Expresad z_1 y z_2 en forma exponencial y calculad $z_1 \cdot z_2$ también en forma exponencial. Trabajad con los ángulos en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución

a) Sabiendo que z es un número complejo, podemos escribirlo en forma binómica como $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Así, tenemos:

$$(3+2i)\cdot(z-1) = (3+2i)\cdot(a+bi-1) = 3a+3bi-3+2ai+2bi^2-2i =$$
$$(3a-2b-3)+(2a+3b-2)i$$
$$i = 0 + i$$

Ahora igualamos las partes reales y las partes imaginarias:

$$3a - 2b - 3 = 0$$
$$2a + 3b - 2 = 1$$

Resolviendo este sistema se obtiene: $a = \dfrac{15}{13}$ y $b = \dfrac{3}{13}$. Con esto, tenemos:

$$z = \frac{15}{13} + \frac{3}{13}i$$

Para expresar z en forma polar, debemos calcular el módulo y el argumento (ver apartado 3.4.1, página 30, Módulo 1):

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{\left(\frac{15}{13}\right)^2 + \left(\frac{3}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{13}} = 1{,}177$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\left(\frac{\frac{3}{13}}{\frac{15}{13}}\right) = 11{,}310°$$

Nota: la tangente vale $\dfrac{3}{15}$ en 11,310° y en 191,310°; pero al ser la parte real y la parte imaginaria positivas, estamos en el primer cuadrante, es decir, en 11,310°.

En resumen:

$$\boxed{z = 1{,}177_{11{,}310^\circ}}$$

b) En primer lugar, pasamos z_1 a forma exponencial. Para ello, es importante recordar que el número complejo i se expresa en forma exponencial como $e^{i\frac{\pi}{2}}$ (ver apartado 3.5, Módulo 1). Así:

$$z_1 = 3ie^{i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

En segundo lugar, pasamos z_2 a forma exponencial. Para ello, es importante recordar que el número complejo -2 se expresa en forma exponencial como $2e^{i\pi}$ (ver apartado 3.5, Módulo 1). Así:

$$z_2 = -2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Ahora podemos calcular la multiplicación de ambos números (ver apartado 3.5.1, Módulo 1):

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 6e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Plantear el sistema igualando parte real y parte imaginaria: 0,5 puntos.
- Encontrar el valor de z: 0,25 puntos.
- Calcular el módulo de z: 0,25 puntos.
- Calcular el argumento de z: 0,25 puntos.

Apartado b

- Pasar a forma exponencial z_1: 0,25 puntos.
- Pasar a forma exponencial z_2: 0,25 puntos.
- Calcular la multiplicación: 0,5 puntos.
- Dar los argumentos en $[0, 2\pi)$: 0,25 puntos

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rl} x + 2y - kz = & a - 2 \\ 2x + (k - a + 3)\,y + (1 - 2k)\,z = & k + a - 6 \\ -x + (-k + a - 1)\,y + (-2k - 1)\,z = & 2a + 6 \end{array}\right\}$$

Sustituid el parámetro "a" por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con el sistema obtenido:

a) Calculad los valores del parámetro k para que el sistema **NO** sea compatible determinado.

b) ¿Hay algún valor de k para el cual $x = 1$, $y = -2$, $z = -1$, sea la **única** solución del sistema? Justificad la respuesta.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) Dado que el sistema tiene tres incógnitas, aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius. [ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12], sabemos que si el sistema no puede ser compatible determinado, entonces el rango de la matriz de coeficientes del sistema no puede ser tres, en consecuencia su determinante tiene que ser cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -k \\ 2 & k-a+3 & 1-2k \\ -1 & -k+a-1 & -2k-1 \end{vmatrix} = 3k \cdot (k-(a+1)) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k=0 \\ k=a+1 \end{array} \right.$$

En consecuencia, $\boxed{\text{el sistema no es compatible determinado si } k=0, \text{ o } k=a+1}$.

b) Si $x=1$, $y=-2$, $z=-1$, es solución del sistema cuando sustituimos en las ecuaciones, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} (1)+2(-2)-k(-1) & = & a-2 \\ 2(1)+(k-a+3)(-2)+(1-2k)(-1) & = & k+a-6 \\ -(1)+(-k+a-1)(-2)+(-2k-1)(-1) & = & 2a+6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \rightarrow \ k=a+1 \\ \rightarrow \ k=a+1 \\ \rightarrow \ k=a+1 \end{array}\right\}$$

En consecuencia, el único valor de k para el cual $x=1$, $y=-2$, $z=-1$, es solución del sistema es $k=a+1$, y para este valor la solución no es única como hemos visto en el apartado anterior. Por lo tanto , $\boxed{\text{no hay ningún valor de } k}$ para el cual $x=1$, $y=-2$, $z=-1$, sea la única solución del sistema.

PAUTAS DE CORRECCIÓN:

Apartado a

- Calcular el determinante de la matriz A en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k=0$ y $k=a+1$: 0,25 puntos.
- Justificar que los valores buscados son los que anulan el det(A): 0,75 puntos.

Apartado b

- Imponer, en el sistema, que el punto sea solución: 0,25 puntos.
- Obtener el valor $k=a+1$: 0,25 puntos.
- Razonar que la respuesta es que no existe ningún valor de k: 0,75 puntos.

3. Sean $e_1=(1,-1,2,-2)$, $e_2=(0,a+1,0,a+1)$, $e_3=(0,0,2,-2)$, $e_4=(-3,-3a,0,-3a-3)$ vectores de $\mathbb{R}^4$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP. Y sea $F=<e_1,e_2,e_3,e_4>$.

   a) Calculad la dimensión de F y una base A.

   b) Sea $v=(1,a,4,a-3)$. ¿Pertenece v a F? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A del apartado anterior.

Solució

a) Debemos calcular el rango de la matriz formada por los vectores, para esto calculamos el rango:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & a+1 & 0 & -3a \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & a+1 & -2 & -3-3a \end{pmatrix} = 3$$

Ya que el determinante 4×4 de todos los vectores es 0, pero podemos encontrar un menor 3×3 con determinante distinto de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2a + 2 \neq 0$$

Así tenemos que la dimensión de F es 3. Y como base podemos escoger los tres vectores del menor anterior:
$A = \{(1, -1, 2, -2), (0, a+1, 0, a+1), (0, 0, 2, -2)\}$

b) Para ver si v pertenece a F y a la vez calcular sus coordenadas si pertenece, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & a+1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \\ a-3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Por tanto, $v \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(1, 1, 1)$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN:
Apartado a

- Cálculo de la dimensión de F: 0,75 puntos.
- Dar una base y justificarla: 0,75 puntos.

Apartado b

- Demostrar que el vector pertenece: 0,5 puntos.
- Calcular las coordenadas: 0,5 puntos.

4. Sea a la **tercera cifra de la derecha** de vuestro IDP del campus UOC.

   a) Demostrad que la composición de la translación de vector $(a+1, -a-1)$ seguida de la translación de vector $(0, 2a+2)$ es una translación, e indicad cuál es el vector asociado a la misma. Determinad si el orden de las translaciones afecta al resultado.

b) Escribid la matriz de la composición del giro de ángulo 180° centrado en el punto $(a+1,0)$ seguido de la translación de vector $(-a-1,0)$. Comprobad que el resultado es el giro de ángulo 180° centrado en el punto $(\frac{a+1}{2},0)$.

Solución

Resolvemos el problema para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los resultados siguientes.

a) La matriz de la translación de vector $(a+1,-a-1)$, tal como se ve en el apartado 5 del módulo "Transformaciones geométricas", es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de la translación de vector $(0,2a+2)$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de la composición de las dos translaciones se tienen que multiplicar las dos matrices anteriores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El vector correspondiente a la translación resultante es el $(a+1,a+1)$. Si la composición se realiza en el orden inverso el resultado es el mismo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La matriz del giro de ángulo 180° y centro $(a+1,0)$ se obtiene multiplicando tres matrices que, empezando de derecha a izquierda, son: la matriz de la translación de vector $(-a-1,0)$, la del giro de ángulo 180° centrado en el origen y la de la translación de vector $(a+1,0)$. Corresponden a las aplicaciones que tenemos que componer según se explica en el punto "3.3. Rotación de un objeto alrededor de un punto de rotación genérico" del módulo "Transformaciones geométricas".

Si a continuación se tiene que aplicar la translación de vector $(-a-1,0)$, según se explica en el punto "6. Composición de transformaciones" del módulo "Transformaciones geométricas", se debe añadir por la izquierda la matriz de esta translación. Por tanto el producto a calcular es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se realiza el cálculo de la matriz del giro de ángulo 180° y centro $(\frac{a}{2}, 0)$ siguiendo también las instrucciones del punto "3.3. Rotación de un objeto alrededor de un punto de rotación genérico" del módulo "Transformaciones geométricas", y vemos que se obtiene el mismo resultado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{a+1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{a+1}{2} + \frac{a+1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Construir la primera matriz de translación: 0,25 puntos.
- Construir la segunda matriz de translación: 0,25 puntos.
- Calcular la composición: 0,5 puntos.
- Comprobar la composición en orden inverso: 0,25 puntos.

Apartado b

- Construir las cuatro matrices de las aplicaciones por separado: 0,25 puntos.
- Composición de las cuatro matrices en el orden correcto: 0,25 puntos.
- Calcular el producto: 0,25 puntos.
- Composición de las tres matrices en el orden correcto: 0,25 puntos.
- Calcular el producto: 0,25 puntos.