Solución Examen 2

2017-2018 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 16.06.2018

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad en forma binómica el siguiente número complejo: $z = 4_{135^o}$

b) Sabemos que el producto de dos números complejos es $2\cdot\sqrt{2}_{75^o}$. Sabiendo que uno de los números es $z = 1 + i$, hallad el otro número. Proporcionad el resultado en forma binómica y polar.

Solución:

a) Partimos de un número complejo en forma polar y queremos pasarlo a binómica. Para ello seguiremos el proceso que se dice en la página 33, apartado 3.4.1, del material impreso sobre cómo pasar un número complejo de binómico a polar:

Primero calculamos el argumento y luego el módulo:

$$z = 4_{135^o} = 4\cdot(\cos 135^o + i sen 135^o) = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

Por tanto, la respuesta es:

$$\boxed{z = 4_{135^o} = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}$$

b) Llamemos w al número buscado. Entonces, según el enunciado del ejercicio, tenemos:

$$\begin{cases} z\cdot w = 2\sqrt{2}_{75^o} \\ z = 1 + i \end{cases}$$

Existen diversas formas de resolver este ejercicio. Aquí se plantea una de ellas, pero no es la única:

Expresamos z en forma polar:

$$m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{1}{1}\right) = arctg(1) = 45^o$$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 1 en 45º y en 225º. Como el afijo del punto buscado es (1,1) el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 45º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número 1+i en el plano complejo. Este número está asociado al punto (1,1), por lo tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante.

Por tanto: $z = 1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$

Ahora despejamos w del sistema de ecuaciones:

$$w = \frac{2\sqrt{2}_{75^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}} = 2_{30^\circ}$$

Ahora pasamos el número a forma binómica:

$$w = 2_{30^\circ} = 2\cdot(\cos 30^\circ + i sen 30^\circ) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

Por tanto, el número pedido es:

$$\boxed{w = 2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i}$$

2. Dados los conjuntos de vectores de $\Re^3$:

$A = \{(a,3,-5),(0,a^2,7),(0,0,a)\}$; $B = \{(b,1,1),(1,b^2,0),(0,1,0)\}$.

a. Calculad el valor de a para que A y B sean base de $\Re^3$. Si $a = 2$ y $b = 2$, calculad las coordenadas del vector $v = (2,3,-3)$ en cada una de las bases.

b. Calculad la matriz de cambio de base de A a B para $a = 2$ y $b = 2$. Comprobad la coherencia del resultado del apartado anterior viendo que la matriz de cambio de base de A en B transforma efectivamente las coordenadas de v en A a las coordenadas de v en B.

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores del conjunto A:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & a^2 & 0 \\ -5 & 7 & a \end{vmatrix} = a^4$$

Así para $a \neq 0$ el rango de la matriz es 3 y por tanto son base de R^3.

Hacemos lo mismo para el conjunto B: $\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 1 & b^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En este caso no depende del valor de b y siempre son base de R^3.

Para calcular las coordenadas de v en A cuando $a = 2$ resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$ Que tiene solución x=1, y=0, z=1.

Por tanto las coordenadas de v en A cuando $a = 2$ son (1,0,1).

Para calcular las coordenadas de v en B cuando $b = 2$ resolvemos de forma análoga el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$ Que tiene solución x=-3, y=8, z=-26.

Por tanto las coordenadas de v en B cuando $b = 2$ son (-3,8,-26).

b) Para calcular la matriz de cambio de base C debemos resolver $C=B^{-1}\cdot A$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 12 & -14 & -4 \\ -40 & 53 & 14 \end{pmatrix}$$

Ahora comprobamos el resultado del apartado anterior y vemos que efectivamente transforma las coordenadas de v en A a las coordenadas de v en B.

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 12 & -14 & -4 \\ -40 & 53 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -26 \end{pmatrix}$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y + 2z + at = 1 \\ x + 2z + 3t = 2 \\ x + y + 4z + 5t = b \end{cases}$$

con a y $b \in \Re$.

a. Discutid el sistema de ecuaciones para los diferentes valores de los parámetros.

b. Resolved el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) Tenemos un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas. Para discutir-lo utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius. Calcularemos primero los valores de a y b que hacen que la matriz A tenga rango máximo,
La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, A', asociadas al sistema son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & b \end{array}\right)$$

Simplificamos operando:

F3- F2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b-2 \end{array}\right)$$

Estudiemos ahora el rango de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-a) = -2+a \rightarrow el\ deteminant\ es\ 0\ si\ a=2$$

- Caso I: Si $a \neq 2 \ \rightarrow \ rango\ A = 3 = rango\ A'$
- Caso II: Si $a = 2$, estudiamos ahora el rango de la matriz *A'* .

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b-2 \end{vmatrix} = -1(b-2-1) = -b+3 \rightarrow Si\ b=3\ el\ determinante\ es\ 0$$

- Caso III: Si $a = 2\ y\ b = 3 \ \rightarrow \ rango\ A = 2 = rango\ A'$

$Si\ a \neq 2 \ \rightarrow \ rango\ A = 3 = rango\ A'$ **Sistema Compatible Indeterminado con 1 grado de libertad**
$Si\ a = 2\ y\ b = 3 \ \rightarrow \ rango\ A = 2 = rango\ A'$ **Sistema Compatible indeterminado con 2 grados de libertad**
$Si\ a = 2\ y\ b \neq 3 \ \rightarrow \ rango\ A = 2\ y\ \ rango\ A' = 3$ **Sistema Incompatible**

b) Tenemos que encontrar la solución para $a = 0$, como acabamos de ver no hay una única solución ya que tendría un grado de libertad.

Podemos resolver directamente el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 5 & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 5 & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2-b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 5 & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3-b \end{array}\right)$$

Intercambiamos las filas F3, F1, F2

Restamos la primera y la última filas y finalmente sumamos las dos últimas filas.

Así nos quedan las ecuaciones siguientes.

$$\begin{cases} x+y+4z+5t = b \\ \quad y+2z = 1 \\ \quad -2t = 3-b \end{cases}$$

$$t = \frac{3-b}{-2}$$

$y = 1 - 2z$

$x = b - y - 4z - 5t = b - 1 + 2z - 4z - 5\left(\frac{3-b}{-2}\right) = -2z + \frac{13-3b}{2}$

Las soluciones serán todos los puntos que cumplen:

$\left(-2z + \frac{13-3b}{2}, 1 - 2z, z, \frac{3-b}{-2}\right)$

4. Sea f la aplicación lineal de $\Re^4$ en $\Re^4$ definida por:

   $f(x, y, z, t) = (x, 3y, 2z + t, z + 2t)$

   a. Hallad la matriz de f en las bases canónicas.

   b. Calculad el polinomio característico de f y los valores propios de f.

   c. Estudiad si f diagonaliza.

   d. Hallad una base de $\Re^4$ con el número máximo de vectores propios de f.

Solución:

a) f(1,0,0,0)=(1,0,0,0), f(0,1,0,0)=(0,3,0,0), f(0,0,1,0)=(0,0,2,1) y f(0,0,0,1)=(0,0,1,2). Estos vectores imagen están expresados en la base canónica. Por lo tanto, poniéndolos por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Recordemos el Módulo 4, Sección 7, la definición de polinomio característico de f. Desarrollando el determinante por la primera columna y después por la segunda obtenemos:

$$Q(t) = det(A - tI) = det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-t \end{pmatrix} = (1-t)(3-t)det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Operando, obtenemos:

$$Q(t) = (1-t)(3-t)(t^2 - 4t+3) = (1-t)(3-t)(t-1)(t-3) = (1-t)^2(3-t)^2.$$

Las raíces de este polinomio son 1 y 3 con multiplicidad algebraica 2 (ver Módulo 4, Sección 8.1).

Los valores propios de f son el 1 y el 3, con multiplicidad algebraica 2.

c) Para ver si diagonaliza hemos de comprobar que la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados (ver Módulo 4, Sección 8). Para el valor propio 1, hemos de calcular la dimensión dim(Nuc(f-1I)) = 4-rang(A-I). Fijémonos que el rango de (A-I) es justamente 2.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, la dimensión del espacio propio asociado al valor propio 1 es 4-2=2. Análogamente, para el valor propio 3, hemos de calcular dim(Nuc(f-3I))=4-rang(A-3I). Fijémonos que el rango de (A-3I) es justamente 2.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así, la dimensión del espacio propio asociado al valor propio 3 es 4-2=2. Por lo tanto, para los dos valores propios, la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados. Eso significa que f diagonaliza (ver Módulo 4, Sección 8).

f diagonaliza porqué el polinomio característico descompone en factores lineales y la multiplicidad algebraica de los dos valores propios coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores propios asociados.

d) Usemos ahora el Módulo 4, Sección 7, para encontrar los vectores propios de f. Encontremos vectores propios de f de valor propio 1. Es decir, busquemos el núcleo de la matriz A-I . O sea, resolvamos el sistema (A-I)X=0:

$$(A-I)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 2y=0, z+t=0. Es decir, y=0 y t=-z. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: (x,y,z,t)=(x,0,z,-z)=x(1,0,0,0)+z(0,0,1,-1). En particular, (1,0,0,0) y (0,0,1,-1) son dos vectores propios de f de valor propio 1 linealmente independientes.

Ahora encontremos vectores propios de f de valor propio 3. Es decir, busquemos el núcleo de A-3I. O sea, resolvamos el sistema (A-3I)X=0:

$$(A-3\mathrm{I})X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema -2x=0, -z+t=0. Es decir, x=0 y t=z. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: (x,y,z,t)=(0,y,z,z)=y(0,1,0,0)+z(0,0,1,1). En particular, (0,1,0,0) y (0,0,1,1) son dos vectores propios de f de valor propio 3 linealmente independientes.

(1,0,0,0), (0,0,1,-1), (0,1,0,0,),(0,0,1,1) es una base de R^4 formada por vectores propios de f.

NOTA: En la realización del ejercicio puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0º	30º	45º	60º	75º	90º	135º	180º	270º	300º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$