Álgebra / Matemáticas I

EXAMEN 2 - 16 enero 2021

1. Proporcionad las raíces, soluciones de la siguiente ecuación, en forma polar: $z^4 - 256 = 0$.

Solución

Despejamos la incógnita: $z = \sqrt[4]{256}$

Escribimos el número 256 en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{256^2 + 0^2} = 256$

$\alpha = \arctan\left(\frac{0}{256}\right) = 0°$

Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0° y en 180°. Como el afijo del punto buscado es $(256, 0)$ el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 0°.

Tenemos, por tanto, que $256 = 256_{0°}$

Como nos piden las raíces cuartas, debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1 de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$z = \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{256_{0°}} = \sqrt[4]{256}_{\frac{0°+360°k}{4}}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

Esto es, el módulo de z es $\sqrt[4]{256} = 4$ y los argumentos son β_k para $k = 0, 1, 2, 3$

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 0^o$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 90^o$
- Si $k = 2$, tenemos que $\beta_0 = 180^o$
- Si $k = 3$, tenemos que $\beta_1 = 270^o$

Por tanto, las raíces, en forma polar, soluciones de la ecuación dada son:

$4_{90^o}, 4_{180^o}, 4_{270^o}, 4_{360^o}$

2. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (n+a)x + 2y + nz & = & m \\ 3x + y & = & 1 \\ y + nz & = & 0 \end{array}\right.$$

Usando a como la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus, discutid el sistema en función de los parámetros n y m.

Solución

Si expresamos la matriz de coeficientes del sistema, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} n+a & 2 & n \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & n \end{pmatrix}.$$

El rango de A lo podemos encontrar calculando su determinante:

$$\det(A) = n(n+a) + 3n - 6n = n^2 + an + 3n - 6n = n(n+a-3).$$

Que es cero para $n = 0$ o $n = 3 - a$. En cualquiera de estos casos, la primera columna resultante sería linealmente independiente de la segunda columna (mirando el menor de filas 2-3 y columnas 1-2), por lo que para $n = 0$ o $n = 3 - a$, el rango de A es 2, y para cualquier otro valor es 3.

Ahora miraremos la matriz ampliada M

$$M = \begin{pmatrix} n+a & 2 & n & m \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & n & 0 \end{pmatrix}.$$

En el caso de $n = 0$, A tiene rango 2 y tenemos:

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & m \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo rango podemos calcular con el determinante de la primera, segunda y cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & m \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3m - a.$$

Para $m = a/3$ y $n = 0$, M tendrá rango 2 y tendremos $\text{rango}(A) = \text{rango}(M) = 2 \neq$ número de incógnitas, y aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver módulo 3, apartado 4, página 12], sabemos que el sistema es compatible indeterminado (SCI). Para cualquier otro valor de m y $n = 0$, el rango de M será 3 y tendremos $2 = \text{rango}(A) < \text{rango}(M) = 3 =$ número de incógnitas, por lo que será un sistema incompatible (SI).

En el caso de $n = 3 - a$, A tiene rango 2 y tenemos que calcular el rango de M con $n = 3 - a$:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-a & m \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3-a & 0 \end{pmatrix},$$

Para ello, tomamos el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando el menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & m \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3m - 3.$$

Vemos que para $m = 1$, el menor de orden 3 será 0 y, viendo que las dos primeras columnas de M son linealmente independientes, M tendrá rango 2, el mismo que A, por lo que aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius se trata de un SCI para $m = 1, n = 3 - a$, y un sistema incompatible para $m \neq 1, n = 3 - a$

Para cualquier otro valor de n, distinto de $3 - a$ y 0, tenemos que el rango de A es 3, y también el de M, por lo que se trataría de un sistema compatible determinado (SCD), independientemente del valor de m.

La siguiente tabla muestra los resultados según los valors de a, n y m

	SI	SCI	SCD
$a = 0$	$\{n = 0, m \neq 0\}$ $\{n = 3, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 0\}$ $\{n = 3, m = 1\}$	$n \neq \{0, 3\}$
$a = 1$	$\{n = 0, m \neq 1/3\}$ $\{n = 2, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 1/3\}$ $\{n = 2, m = 1\}$	$n \neq \{0, 2\}$
$a = 2$	$\{n = 0, m \neq 2/3\}$ $\{n = 1, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 2/3\}$ $\{n = 1, m = 1\}$	$n \neq \{0, 1\}$
$a = 3$	$\{n = 0, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 1\}$	$n \neq 0$
$a = 4$	$\{n = 0, m \neq 4/3\}$ $\{n = -1, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 4/3\}$ $\{n = -1, m = 1\}$	$n \neq \{-1, 0\}$
$a = 5$	$\{n = 0, m \neq 5/3\}$ $\{n = -2, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 5/3\}$ $\{n = -2, m = 1\}$	$n \neq \{-2, 0\}$
$a = 6$	$\{n = 0, m \neq 2\}$ $\{n = -3, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 2\}$ $\{n = -3, m = 1\}$	$n \neq \{-3, 0\}$
$a = 7$	$\{n = 0, m \neq 7/3\}$ $\{n = -4, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 7/3\}$ $\{n = -4, m = 1\}$	$n \neq \{-4, 0\}$
$a = 8$	$\{n = 0, m \neq 8/3\}$ $\{n = -5, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 8/3\}$ $\{n = -5, m = 1\}$	$n \neq \{-5, 0\}$
$a = 9$	$\{n = 0, m \neq 3\}$ $\{n = -6, m \neq 1\}$	$\{n = 0, m = 3\}$ $\{n = -6, m = 1\}$	$n \neq \{-6, 0\}$

Taula 1: Resultados en función de a, n i m.

3. Sean $e_1 = (3, 0, -3)$, $e_2 = (-1, -2, 5)$, $e_3 = (0, -6, 12)$ y $e_4 = (-2, 2, -2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sea $E =< e_1, e_2, e_3, e_4 >$. Sea $v = (3a + 12, -6, -3a)$ donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP.

(a) Calculad la dimensión de E y una base A. ¿$v \in E$? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sea $w = (3a + 3, 0, -3a - 3)$ donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP. $B = \{v, w\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de la base A a la base B y de la base B a la base A.

Solución

(a) Calculamos el rango de la matriz de vectores [Ver módulo 2, sección 4.5]:

$$rango\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \\ -3 & 5 & 12 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ y los dos menores 3×3 resultado de orlar el menor anterior [Ver módulo 2, sección 4.5], tiene determinante nulo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ -3 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Como base podemos escoger $A = \{e_1, e_2\}$, ya que contiene el menor 2×2 anterior. Para ver si $v \in E$ resolvemos el sistema [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+12 \\ -6 \\ -3a \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a + 5$ y $y = 3$. Por tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a + 5, 3)$.

(b) Comenzamos por calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A, ya que para calcularla debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A [Ver módulo 2, sección 4.7]. Para v lo hemos calculado en el apartado anterior y para w podríamos seguir el mismo procedimiento (calcular sus coordenadas en A), o también podemos ver directamente que es $a+1$ veces e_1. Así pues, la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} a+5 & a+1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B calculamos la inversa [Ver módulo 2, sección 4.7 y sección 3.3]:

$$C_{A\to B} = \begin{pmatrix} a+5 & a+1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3(a+1)}\begin{pmatrix} 0 & -1-a \\ -3 & a+5 \end{pmatrix}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida en la base canónica por

$$f(x, y, z) = (3x + 4y + (a - 3)z, 4x + 3y - 4z, az).$$

Se pide:

(a) Calculad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Justificad si la aplicación f es exhaustiva cuando $a = 0$ y dad una base de la imagen.

(c) Para a igual a la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC, calculad el polinomio característico de f. Indicad cuáles son los valores propios de f y calculad una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga el número máximo de vectores propios.

Solución

(a) Para calcular A, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los colocamos en columnas, tal como se explica en el punto "3.Matriz asociada a una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales":

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & a-3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(b) En el caso $a = 0$, la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar si la aplicación f es exhaustiva, podemos usar la equivalencia del punto "5.Monomorfismos y epimorfismos" que nos dice que f será exhaustiva si su matriz asociada A tiene rango igual a la dimensión del espacio de llegada, que en este caso es $\mathbb{R}^3$. El rango de la matriz no es 3, porque al tener una fila nula el determinante es 0. El rango es 2 porque existe un menor 2x2 con determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

Así que ya podemos deducir que f no es exhaustiva. Como el rango de la matriz coincide con la dimensión de la imagen de la aplicación lineal asociada a ella, $dim(Imf) = 2$. Las imágenes de los vectores de la base canónica son generadoras de la imagen de f, tal como se explica en el punto "4.Núcleo e imagen de una aplicación lineal". Las columnas de la matriz son esas imágenes. Por tanto, una base de la imagen son los vectores $(3, 4, 0), (4, 3, 0)$, ya que son un subconjunto linealmente independiente de los vectores columna.

(c) Resolvemos este apartado para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir a por su valor en los resultados que siguen.

El polinomio característico de f es $p(t) = |A - t\mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios". Para calcularlo, desarrollamos este determinante por la tercera fila:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-t & 4 & a-3 \\ 4 & 3-t & -4 \\ 0 & 0 & a-t \end{vmatrix} =$$
$$(a-t)((3-t)(3-t) - 4 \cdot 4) = (a-t)(9 - 6t + t^2 - 16) =$$
$$(a-t)(t^2 - 6t - 7) = (a-t)(t+1)(t-7)$$

Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(t) = 0$: a,-1 y 7. En el caso $a = 7$ el valor propio 7 tendría multiplicidad 2. En el resto de casos los tres VAPs tienen multiplicidad 1.

Para encontrar un vector propio de valor propio a buscamos una base del $\ker(f - a\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3-a & 4 & a-3 \\ 4 & 3-a & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq 3$, podemos usar Gauss y restar de la segunda ecuación $4/(3-a)$ veces la primera y ver que $y = 0$. De la primera obtenemos entonces que $(3-a)x + (a-3)z = 0$ y por tanto $z = x$.
Si $a = 3$ no hace falta Gauss, ya que se deduce directamente de la primera ecuación que $y = 0$ y después de la segunda obtenemos que $4x - 4z = 0$ y por tanto $z = x$. Para cualquiera de los valores posibles de a un VEP de VAP a es el vector $(1, 0, 1)$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio -1 buscamos una base del $\ker(f + \mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3+1 & 4 & a-3 \\ 4 & 3+1 & -4 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la tercera ecuación obtenemos que $z = 0$. Sustituyendo este valor en la primera o en la segunda obtenemos la ecuación $4x + 4y = 0$ de donde $x = -y$. Por tanto un VEP de VAP -1 es el vector $(-1, 1, 0)$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio 7 buscamos una base del $\ker(f - 7\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3-7 & 4 & a-3 \\ 4 & 3-7 & -4 \\ 0 & 0 & a-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq 7$, de la tercera ecuación obtenemos que $z = 0$. Sustituyendo este valor en la primera o en la segunda obtenemos la ecuación $-4x + 4y = 0$ de donde $x = y$. Por tanto una solución es el vector $(1, 1, 0)$.
Si $a = 7$ la tercera ecuación es nula y no nos da información, pero las dos primeras ecuaciones son proporcionales y se reducen a $4x - 4y - 4z = 0$ de donde $x = y + z$ y por tanto los VEPs asociados son $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$.
Así pues, una base de vectores propios de $\mathbb{R}^3$ es $(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 0)$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$