Álgebra

EXAMEN 1

1. Demostrad por inducción que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple que $n^3 - n$ es múltiplo de 6.

Solución

Aplicaremos la teoría del principio de inducción, apartado 2.3 de la página 14 del material del curso.
Para $n = 1$, tenemos que $1^3 - 1 = 0$, que es múltiplo de 6.
Supongamos cierta la hipótesis para n, es decir, supongamos cierto que $n^3 - n$ es múltiplo de 6 y probemos que la hipótesis es cierta para $n + 1$, es decir, queremos probar que $(n + 1)^3 - (n + 1)$ es múltiplo de 6.
Calculando obtenemos:
$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3n^2 + 3n$.
Por hipótesis de inducción, sabemos que $n^3 - n$ es múltiplo de 6, probaremos que $3n^2 + 3n$ también lo es y de esta manera quedará demostrado el caso $n + 1$, ya que la suma de dos múltiplos de 6 siempre es otro múltiplo de 6.
En efecto, partimos de: $3n^2 + 3n = 3n(n + 1)$.
Por un lado, tenemos que $3n(n + 1)$ es múltiplo de 3 por estar multiplicado por 3.
Por otro lado, nos hace falta comprobar que también es múltiplo de 2. Tenemos que $n(n + 1)$ es el producto de dos números naturales consecutivos y, por tanto, podemos asegurar que uno de los dos números será par y, por tanto, su producto también será par.
Por tanto, $3n^2 + 3n$ es múltiplo de 6 (por ser múltiplo de 2 y de 3).
Con lo que hemos demostrado que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple que $n^3 - n$ es múltiplo de 6.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + 3z = & k \\ 3x + y + k^2 z = & 2 \\ (2a+2)x + (a+1)z = & 0 \end{array}\right\}$$

donde el parámetro a es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Se pide:
a) Utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius, discutid el sistema en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) Determinad las soluciones del sistema para el valor de k que hace que el sistema sea compatible indeterminado.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

a) Para discutirlo utilizaremos el teorema de Rouché-Fröbenius [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & k^2 \\ 2a+2 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ 3 & 1 & k^2 & 2 \\ 2a+2 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right)$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, ya que si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & k^2 \\ 2a+2 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)+2k^2(a+1)-6(a+1)-3(a+1) = (a+1)(2k^2-8)$$

- Si $k \neq 2$ y $k \neq -2 \rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) = \text{n}^o$ incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.
- Si $k = 2$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

  Calculamos, para $k = 2$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes
  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2a+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$
  Así pues, $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = 2 \neq \text{n}^o$ incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.
- Si $k = -2$, entonces $\text{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

  Calculamos, para $k = -2$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes
  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2a+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8a+8 \neq 0.$$
  Así pues, tenemos que se verifica $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(M) = 3$, y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Por el apartado anterior sabemos que si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado. Así pues, el sistema que nos piden resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = \ 2 \\ 3x + y + 4z = \ 2 \\ (2a+2)x + (a+1)z = \ 0 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 18 a la 21] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2a+2 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & -2a-2 & -5a-5 & -4a-4 \end{array}\right) \underset{(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2-3\cdot F1 \rightarrow F2$, $F3-(2a+2)\cdot F1 \rightarrow F3$, (2): $F3-(a+1)\cdot F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = \ 2 \\ -2y - 5z = \ -4 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene $y = \frac{4-5z}{2}$ y sustituyendo este valor de y en la primera ecuación y despejando la x se obtiene $x = \frac{-z}{2}$.

Así pues, las soluciones de este sistema son de la forma $\left(x = \dfrac{-z}{2},\ y = \dfrac{4-5z}{2},\ z\right)$.

3. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 | a_1 + a_4 = 0\}.$$

Y sea $v = (1, 2, 3, -1)$.

a) Comprobad que $A = \{(1, 1, 1, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\}$ es una base de E. Demostrad si el vector v pertenece al subespacio E. En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

b) Sean

$$M = \begin{pmatrix} (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ 0 & (a-5)(a-7) & (a-5)(a-7) \\ (a-4)(a-2)a & 0 & (a-9) \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} a(a-2) & (a-9)(a-3) & 0 \\ 0 & a(a-6) & 0 \\ (a-8)(a-1) & 0 & (a-8)(a-4) \end{pmatrix},$$

donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP.
¿Pueden M o N ser matrices de cambio de base de una base B a la base A? ¿Cuáles son las coordenadas de la base B en la base conónica de $\mathbb{R}^4$, para los casos en que M o N lo sean?

Solución

a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumple la condición $a_1+a_4=0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes, ya que contienen el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Así pues, A es una base de E.
Para comprobar si $v \in E$ estudiamos si el siguiente sistema tiene solución [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Que tiene solución $x=1$, $y=1$ y $z=1$. Por tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(1,1,1)$.

b) Como sabemos que E tiene dimensión 3, las matrices de cambio de base en E deberán de ser 3×3. Pero esto no nos descarta ninguna. También sabemos que deben ser invertibles, por tanto, vamos a ver si M y N lo son [Ver módulo 2, sección 4.7]. Podemos calcular el determinante y tenemos:

$$Det(M) = (a-1)(a-3)(a-5)(a-7)(a-9).$$

De forma que para $a = 1,3,5,7,9$ el determinante de M es cero, así para estos valores de a no es matriz de cambio de base en E, para el resto de valores sí.

$$Det(N) = a^2(a-2)(a-4)(a-6)(a-8).$$

De forma que para $a = 0,2,4,6,8$ el determinante de N es cero, así para estos valores de a no es matriz de cambio de base en E, para el resto de valores sí.
Para calcular la base B en cada caso, podemos multiplicar directamente y obtenemos la base B (columnas de la matriz resultado) [Ver módulo 2, sección 4.7].
Para los casos $a = 0,2,4,6,8$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ (a-1)(a-3)+(a-4)(a-2)a & 0 & (a-9) \\ (a-1)(a-3)+(a-4)(a-2)a & (a-5)(a-7) & (a-5)(a-7)+(a-9) \\ -(a-1)(a-3) & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y para los casos $a = 1, 3, 5, 7, 9$:

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot N =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} a(a-2) & (a-9)(a-3) & 0 \\ a(a-2)+(a-8)(a-1) & (a-9)(a-3) & (a-8)(a-4) \\ a(a-2)+(a-8)(a-1) & (a-9)(a-3)+a(a-6) & (a-8)(a-4) \\ -a(a-2) & -(a-9)(a-3) & 0 \end{array} \right)$$

$a=0$	$\left(\begin{array}{rrr} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \\ 3 & 35 & 26 \\ -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$a=1$	$\left(\begin{array}{rrr} -1 & 16 & 0 \\ -1 & 16 & 21 \\ -1 & 11 & 21 \\ 1 & -16 & 0 \end{array}\right)$
$a=2$	$\left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -7 \\ -1 & 15 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$a=3$	$\left(\begin{array}{rrr} 3 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 5 \\ -7 & -9 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$
$a=4$	$\left(\begin{array}{rrr} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$a=5$	$\left(\begin{array}{rrr} 15 & -8 & 0 \\ 3 & -8 & -3 \\ 3 & -13 & -3 \\ -15 & 8 & 0 \end{array}\right)$
$a=6$	$\left(\begin{array}{rrr} 15 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & -3 \\ 15 & -1 & -4 \\ -15 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$a=7$	$\left(\begin{array}{rrr} 35 & -8 & 0 \\ 29 & -8 & -3 \\ 29 & -1 & -3 \\ -35 & 8 & 0 \end{array}\right)$
$a=8$	$\left(\begin{array}{rrr} 35 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & -1 \\ 35 & 3 & 2 \\ -35 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$a=9$	$\left(\begin{array}{rrr} 63 & 0 & 0 \\ 71 & 0 & 5 \\ 71 & 27 & 5 \\ -63 & 0 & 0 \end{array}\right)$

4. Sean $A = (a+1, 1)$, $B = (0, 0)$ y $C = (2a+2, 0)$. Considerad el triángulo ABC formado por estos tres puntos. Sea la matriz:

$$M = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & -2a-2 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Y sea f la transformación afín definida por la matriz M.
Sustituid a por la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC.
Se pide:

a) Calculad las imágenes por f de los tres vértices del triángulo ABC.

b) Demostrad que la transformación f es equivalente a un escalado de razones 2 en el eje x y a en el eje y respecto al punto A seguido de una translación. Determinad el vector de la translación.

c) Calculad qué puntos del plano quedan fijos al aplicar esta transformación f.

Solución

a) Calculamos las imágenes de A, B, C por M usando la notación matricial eficiente del punto 5 del módulo "Transformaciones geométricas":

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2a-2 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 2a+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2a-2 & 2a+2 \\ 2a-2 & a-2 & a-2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las imágenes de los puntos dados: $f(A) = (0, 2a-2)$, $f(B) = (-2a-2, a-2)$ y $f(C) = (2a+2, a-2)$.

$a=0$	$f(A) = (0,-2)$ $f(B) = (-2,-2)$ $f(C) = (2,-2)$	$a=1$	$f(A) = (0,0)$ $f(B) = (-4,-1)$ $f(C) = (4,-1)$
$a=2$	$f(A) = (0,2)$ $f(B) = (-6,0)$ $f(C) = (6,0)$	$a=3$	$f(A) = (0,4)$ $f(B) = (-8,1)$ $f(C) = (8,1)$
$a=4$	$f(A) = (0,6)$ $f(B) = (-10,2)$ $f(C) = (10,2)$	$a=5$	$f(A) = (0,8)$ $f(B) = (-12,3)$ $f(C) = (12,3)$
$a=6$	$f(A) = (0,10)$ $f(B) = (-14,4)$ $f(C) = (14,4)$	$a=7$	$f(A) = (0,12)$ $f(B) = (-16,5)$ $f(C) = (16,5)$
$a=8$	$f(A) = (0,14)$ $f(B) = (-18,6)$ $f(C) = (18,6)$	$a=9$	$f(A) = (0,16)$ $f(B) = (-20,7)$ $f(C) = (20,7)$

b) La matriz del escalado desde el punto $A = (a+1, 1)$ y de razones 2 y a se obtiene multiplicando tres matrices que, de derecha a izquierda son: la matriz de la traslación de vector $(-(a+1), -1)$, la del escalado y la de la traslación de vector $(a+1, 1)$. Corresponden a las aplicaciones que hay que componer según se explica en el punto "4.3 Escalado de un objeto a partir de un punto fijo genérico" del módulo 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(a+1) \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -a-1 \\ 0 & a & -a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de la traslación de vector (r, s) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La composición del escalado con esta traslación sería el producto de las dos matrices (punto "6. Composición de transformaciones" del módulo 5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -a-1 \\ 0 & a & -a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -a-1+r \\ 0 & a & -a+1+s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparamos con la matriz M y vemos que r y s deben cumplir

$$-a - 1 + r = -2a - 2,$$

de donde $r = -a - 1$ y que

$$-a + 1 + s = a - 2,$$

de donde $s = 2a - 3$.

$a = 0$	$(r, s) = (-1, -3)$	$a = 1$	$(r, s) = (-2, -1)$
$a = 2$	$(r, s) = (-3, 1)$	$a = 3$	$(r, s) = (-4, 3)$
$a = 4$	$(r, s) = (-5, 5)$	$a = 5$	$(r, s) = (-6, 7)$
$a = 6$	$(r, s) = (-7, 9)$	$a = 7$	$(r, s) = (-8, 11)$
$a = 8$	$(r, s) = (-9, 13)$	$a = 9$	$(r, s) = (-10, 15)$

c) La condición que deben cumplir los puntos fijos es que $f(x, y) = (x, y)$.
La imagen del punto (x, y) por f es:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2a-2 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2a-2 \\ ay+a-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Necesitamos pues que $(2x - 2a - 2, ay + a - 2) = (x, y)$.
Igualando las dos coordenadas obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 2a - 2 = x \\ ay + a - 2 = y \end{cases}$$

- En el caso $a \neq 1$ despejando las incógnitas x e y obtenemos:

  $$\begin{cases} x = 2a + 2 \\ y = \frac{2-a}{a-1} \end{cases}$$

  Éste es el único punto que queda fijo por la aplicación f, el $(2a + 2, \frac{2-a}{a-1})$.
- En el caso que $a = 1$ el sistema no tiene solución y por lo tanto no hay puntos fijos.

$a = 0$	$(x, y) = (2, -2)$	$a = 1$	no tiene puntos fijos
$a = 2$	$(x, y) = (6, 0)$	$a = 3$	$(x, y) = (8, -1/2)$
$a = 4$	$(x, y) = (10, -2/3)$	$a = 5$	$(x, y) = (12, -3/4)$
$a = 6$	$(x, y) = (14, -4/5)$	$a = 7$	$(x, y) = (16, -5/6)$
$a = 8$	$(x, y) = (18, -6/7)$	$a = 9$	$(x, y) = (20, -7/8)$

EXAMEN 2

1. Responded:

a) Calculad dos números reales c y d, de modo que:

$$c + 5i = \frac{13 + di}{4 - i}$$

b) Resolved la ecuación siguiente: $x^3 + 12 = 0$. Proporcionad sus soluciones complejas en forma binómica y polar.

Solución

a) Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de c y de d.

Utilizamos la propiedad que dice que si dos fracciones son iguales, entonces:

$(c + 5i)(4 - i) = (13 + di)$

Aplicamos la distributiva del producto respecto de la suma:

$4c - ic + 20i + 5 = 13 + di$

Agrupamos, ahora, partes reales y partes imaginarias:

$4c + 5 + (20 - c)i = 13 + di$

Igualamos parte real de un lado con el otro lado e igual hacemos con la parte imaginaria:

$4c + 5 = 13$

$20 - c = d$

Resolvemos el sistema de ecuaciones de manera que las incógnitas son c y d. De la primera ecuación obtenemos que $c = 2$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, obtenemos $d = 18$.

b) Primero despejamos la incógnita: $x = \sqrt[3]{-12}$.

Para hallar las raíces terceras de -12 seguiremos el ejemplo de la página 44 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del Módulo 1.

A continuación escribimos el complejo -12 en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del Módulo 1, sobre la forma polar de los números complejos:

$r = \sqrt{(-12)^2 + (0)^2} = 12$

$\theta = \arctan\left(\frac{0}{-12}\right) = 180°$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0° y en 180°. Como el afijo del punto buscado es $(-12, 0)$, el ángulo está entre el segundo y el tercer cuadrante, es decir, en 180°.

Tal y como se recomienda en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando convertimos un número de forma binómica a forma polar es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número -12 en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(-12,0)$, por lo cual es un número que se encuentra entre el segundo y el tercer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que: $-12 = 12_{180^\circ}$

Como nos piden las raíces cúbicas debemos calcular (observemos que en el apartado 3.6.1, en el ejemplo de la página 44 del Módulo 1, se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de -8):

$\sqrt[3]{-12} = \sqrt[3]{12_{180^\circ}} = \sqrt[3]{12}_{\frac{180^o+360^o k}{3}} \qquad \text{para } k = 0,1,2$

Esto es, el módulo de las raíces es $\sqrt[3]{12}$

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \frac{180^o+360^\circ k}{3}$ para $k = 0,1,2$.

- Si $k=0$, tenemos que $\beta_0 = 60^\circ$
- Si $k=1$, tenemos que $\beta_1 = 180^\circ$
- Si $k=2$, tenemos que $\beta_2 = 300^\circ$

Por tanto, las raíces, en forma polar, pedidas son:

$\sqrt[3]{12}_{60^\circ}, \sqrt[3]{12}_{180^\circ}, \sqrt[3]{12}_{300^\circ}$

Ahora pasamos los números anteriores a forma binómica:

$\sqrt[3]{12}_{60^\circ} = \sqrt[3]{12}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \sqrt[3]{12}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt[3]{12}}{2} + \frac{\sqrt[3]{12}\sqrt{3}}{2}i$

$\sqrt[3]{12}_{180^\circ} = \sqrt[3]{12}(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = \sqrt[3]{12}(-1+0i) = -\sqrt[3]{12}$

$\sqrt[3]{12}_{300^\circ} = \sqrt[3]{12}(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = \sqrt[3]{12}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt[3]{12}}{2} - \frac{\sqrt[3]{12}\sqrt{3}}{2}i$

2. Considerad la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 & 2a+2 \\ 2 & -m & -2m \\ -m & 2 & 2-m \end{pmatrix}$$

donde el parámetro a es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Se pide:

a) Estudiad su rango según los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

b) Determinad la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : (a+1)x + (a+1)y + (2a+2)\,z = 2a+2$$

$$\pi_2 : 2x - my - 2mz = 2 - m$$

$$\pi_3 : -mx + 2y + (2-m)z = -2m$$

según los valores de m (sustituyendo el parámetro a por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC).

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

a) Dado que la matriz A es cuadrada (con 3 filas y 3 columnas), estudiamos su rango utilizando que el rango será 3 solo si el determinante de la matriz es diferente de cero [Ver apuntes módulo 2, apartado 4.5, páginas de la 29 a la 32].

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 2a+2 \\ 2 & -m & -2m \\ -m & 2 & 2-m \end{vmatrix} = (a+1)(m^2+4m+4) = (a+1)(m+2)^2$$

En consecuencia,

- Si $m \neq -2 \;\to\; \text{rg}(A) = 3$.
- Si $m = -2$, entonces $A = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 & 2a+2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y podemos afirmar que $\text{rg}(A) = 1$, ya que $|A| = 0$ y todos los menores de orden 2 son nulos.

b) Recordemos que, el estudio de la posición relativa de tres planos se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema, formado por las tres ecuaciones que definen estos planos [Ver apuntes módulo 3, apartado 8, páginas de la 25 a 31].

$$\left.\begin{aligned} (a+1)x + (a+1)y + (2a+2)\,z &= 2a+2 \\ 2x - my - 2mz &= 2-m \\ -mx + 2y + (2-m)z &= -2m \end{aligned}\right\}$$

Para discutirlo utilizaremos el teorema de Rouché-Fröbenius [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 & 2a+2 \\ 2 & -m & -2m \\ -m & 2 & 2-m \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & a+1 & 2a+2 & 2a+2 \\ 2 & -m & -2m & 2-m \\ -m & 2 & 2-m & -2m \end{array}\right)$$

Utilizando el estudio del rango de la matriz A, del apartado anterior, tenemos que:

- Si $m \neq -2 \;\to \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) = \text{n}^o$ incógnitas y el sistema es compatible determinado. Por lo tanto, podemos afirmar que los tres planos se cortan en un punto.
- Si $m = -2$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 1 \neq \text{n}^o$ incógnitas y el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad. Notemos que las tres ecuaciones de los tres planos son proporcionales, por lo tanto, los tres planos son coincidentes.

3. Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$F = <(-1,1,3),(0,-1,1),(-2,7,\lambda)>, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calculad la dimensión de F en función de λ y una base A para cada caso.

b) Sea $v_1 = (-2a-2, 7a+7, a+1)$, $v_2 = (1, a-1, -a-3)$ donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP. Para el caso $\lambda = 1$, ¿pertenecen v_1 y v_2 a F? Para los que pertenezcan, calculad sus coordenadas en la base A que habéis encontrado en el apartado anterior.

c) Sea $B = \{v_1, v_2\}$ el conjunto formado por los vectores del apartado anterior. ¿Es B una base de F en el caso $\lambda = 1$? Si lo es, calculad la matriz $C_{B\to A}$ de cambio de base de la base B a la base A que habéis encontrado en el primer apartado.

Solución

a) Calculemos el rango de la matriz de los vectores con que está definido F [Ver módulo 2, sección 4.5]. Si calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1$$

Así para $\lambda \neq 1$ tendremos que la dimensión de F es 3, y una base puede ser la formada por los tres vectores que forman el determinante anterior $A = \{(-1,1,3), (0,-1,1), (-2,7,\lambda)\}$. Para $\lambda = 1$ tendremos que el determinante anterior es 0. Pero podemos encontrar un menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ y por tanto la dimensión de F es 2 en este caso. Una base puede ser la formada por los dos vectors que contienen el menor anterior $A = \{(-1,1,3), (0,-1,1)\}$.

b) Para ver si los vectores son de F y calcular sus coordenadas en el caso que lo sean, resolvemos el sistema siguiente para v_1 [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-2 \\ 7a+7 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 2a+2$, $y = -5a-5$. Por tanto, $v_1 \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(2a+2, -5a-5)$.
Para v_2 procedemos de forma análoga resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ -a-3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -1$, $y = -a$. Por tanto, $v_2 \in F$ y sus coordenadas en la base A son $(-1, -a)$.

c) Sabemos que en el caso $\lambda = 1$ la dimensión de F es 2 y tenemos que tanto v_1 como v_2 son de F, además son linealmente independientes (es fácil encontrar un menor 2×2 con determinante distinto de 0). Por tanto B es base de F en el caso $\lambda = 1$.
Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de

B en función de los de A [Ver módulo 2, sección 4.7]. Pero esto es justamente lo que hemos hecho en el apartado anterior. Así la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 2a+2 & -1 \\ -5a-5 & -a \end{pmatrix}$$

4. Sustituid el parámetro a por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:

$$M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 3a+7 & -2 & -2 \\ -4a & a-1 & 2a \\ 8a+12 & -2 & b \end{pmatrix}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal y $M(f|C,C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$.

Se pide:

a) Calculad la expresión que define a la aplicación f en función de las coordenadas en base canónica (x,y,z) de un vector genérico de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculad el valor que debe tener b para que el vector $v = (1,a,3)$ sea un vector propio de f, y encontrad su valor propio asociado.

c) Para el valor de b encontrado en el apartado anterior, calculad el polinomio característico de f. Indicad cuáles son los valores propios de f y cuál sería la forma diagonal de f.

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

a) En el punto "3.Matriz asociada a una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales", la proposición de la página 15 nos indica que dado un vector $u = (x,y,z)$ expresado en la base canónica C, podremos calcular su imagen en base canónica como $f(u) = M(f|C,C) \cdot u$. Por tanto:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3a+7 & -2 & -2 \\ -4a & a-1 & 2a \\ 8a+12 & -2 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Realizando el producto de la matriz por el vector obtenemos:

$$f(x,y,z) = ((3a+7)x - 2y - 2z, -4ax + (a-1)y + 2az, (8a+12)x - 2y + bz).$$

El resultado en función del valor de vuestro IDP es:

$$\begin{array}{ll}
a=0 & f(x,y,z)=(7x-2y-2z,-y,12x-2y+bz) \\
a=1 & f(x,y,z)=(10x-2y-2z,-4x+2z,20x-2y+bz) \\
a=2 & f(x,y,z)=(13x-2y-2z,-8x+y+4z,28x-2y+bz) \\
a=3 & f(x,y,z)=(16x-2y-2z,-12x+2y+6z,36x-2y+bz) \\
a=4 & f(x,y,z)=(19x-2y-2z,-16x+3y+8z,44x-2y+bz) \\
a=5 & f(x,y,z)=(22x-2y-2z,-20x+4y+10z,52x-2y+bz) \\
a=6 & f(x,y,z)=(25x-2y-2z,-24x+5y+12z,60x-2y+bz) \\
a=7 & f(x,y,z)=(28x-2y-2z,-28x+6y+14z,68x-2y+bz) \\
a=8 & f(x,y,z)=(31x-2y-2z,-32x+7y+16z,76x-2y+bz) \\
a=9 & f(x,y,z)=(34x-2y-2z,-36x+8y+18z,84x-2y+bz)
\end{array}$$

b) Para que $v=(1,a,3)\in\mathbb{R}^3$ sea un vector propio de f, el producto de la matriz $M(f|C,C)$ por el vector v debe ser un múltiplo de v. Tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales" debe existir un número $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $f(v)=\lambda\cdot v$. Usando el cálculo de la imagen mediante la matriz asociada a f, la condición se traduce a:

$$M(f|C,C)\cdot v=\begin{pmatrix} 3a+7 & -2 & -2 \\ -4a & a-1 & 2a \\ 8a+12 & -2 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}=\lambda\cdot v$$

$$\begin{pmatrix} 3a+7-2a-6 \\ -4a+(a-1)a+6a \\ 8a+12-2a+3b \end{pmatrix}=\lambda\cdot v$$

$$\begin{pmatrix} a+1 \\ a^2+a \\ 6a+12+3b \end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$$

De esta expresión obtenemos tres ecuaciones:

$$\begin{gathered} a+1=\lambda \\ a^2+a=\lambda\cdot a \\ 6a+12+3b=3\lambda \end{gathered}$$

De la primera tenemos el valor propio $\lambda=a+1$ y podemos comprobar que la segunda ecuación se cumple para ese valor. Por tanto solo necesitamos que se cumpla la tercera. Se trata de aislar la incógnita b en esa ecuación:

$$\begin{gathered} 6a+12+3b=3(a+1) \\ 3b=3a+3-6a-12=-3a-9 \\ b=-a-3 \end{gathered}$$

El resultado en función del valor de vuestro IDP es:

$$\begin{array}{lll}
a=0 & \lambda=1 & b=-3 \\
a=1 & \lambda=2 & b=-4 \\
a=2 & \lambda=3 & b=-5 \\
a=3 & \lambda=4 & b=-6 \\
a=4 & \lambda=5 & b=-7 \\
a=5 & \lambda=6 & b=-8 \\
a=6 & \lambda=7 & b=-9 \\
a=7 & \lambda=8 & b=-10 \\
a=8 & \lambda=9 & b=-11 \\
a=9 & \lambda=10 & b=-12
\end{array}$$

c) El polinomio característico de f es $p(t) = |A - t\mathrm{I}|$, tal como se define en el punto “7.Vectores y valores propios”:

$$p(t) = \begin{vmatrix} 3a+7-t & -2 & -2 \\ -4a & a-1-t & 2a \\ 8a+12 & -2 & -a-3-t \end{vmatrix} = -t^3 + 3(a+1)t^2 + (a+1)^2 t - 3(a+1)^3$$

$$p(t) = (-a-1-t)(a+1-t)(3a+3-t)$$

Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(t) = 0$: $-a-1$, $a+1$ y $3a+3$. La forma diagonal de f es:

$$M(f|B,B) = \begin{pmatrix} -a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3a+3 \end{pmatrix}$$

en la base B de vectores propios. El resultado en función del valor de vuestro IDP es:

$$\begin{array}{lll}
a=0 & p(t) = (-1-t)(1-t)(3-t) & VAPS: -1, 1, 3 \\
a=1 & p(t) = (-2-t)(2-t)(6-t) & VAPS: -2, 2, 6 \\
a=2 & p(t) = (-3-t)(3-t)(9-t) & VAPS: -3, 3, 9 \\
a=3 & p(t) = (-4-t)(4-t)(12-t) & VAPS: -4, 4, 12 \\
a=4 & p(t) = (-5-t)(5-t)(15-t) & VAPS: -5, 5, 15 \\
a=5 & p(t) = (-6-t)(6-t)(18-t) & VAPS: -6, 6, 18 \\
a=6 & p(t) = (-7-t)(7-t)(21-t) & VAPS: -7, 7, 21 \\
a=7 & p(t) = (-8-t)(8-t)(24-t) & VAPS: -8, 8, 24 \\
a=8 & p(t) = (-9-t)(9-t)(27-t) & VAPS: -9, 9, 27 \\
a=9 & p(t) = (-10-t)(10-t)(30-t) & VAPS: -10, 10, 30
\end{array}$$

EXAMEN 3

1. Responded:

a) Hallad el valor de c para que el número complejo $c+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ cumpla que su cuadrado sea igual a su conjugado.

b) Resolved la siguiente ecuación y proporcionad los resultados en forma binómica y polar: $x^3-(1-i)=0$.

Solución

a) Primero calculamos el cuadrado del número dado:

$\left(c+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=c^2+2c\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=c^2+c\sqrt{3}i-\frac{3}{4}$

Ahora agrupamos parte real y parte imaginaria: $c^2+c\sqrt{3}i-\frac{3}{4}=\left(c^2-\frac{3}{4}\right)+c\sqrt{3}i$

Hallamos el conjugado del número dado: $c-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Imponemos la condición que se nos da en el enunciado. Que el cuadrado sea igual al conjugado: $\left(c^2-\frac{3}{4}\right)+c\sqrt{3}i=c-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

E igualamos parte real y parte imaginaria:

$\left.\begin{array}{c} c^2-\frac{3}{4}=c \\ c\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$ De donde podemos afirmar que $c=-\frac{1}{2}$

b) Primero despejamos la incógnita: $x=\sqrt[3]{1-i}$

Para hallar las raíces terceras de $1-i$ seguiremos el ejemplo de la página 44 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del material.

A continuación escribimos el complejo $1-i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del Módulo 1, sobre la forma polar de los números complejos:

$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\theta=\arctan\left(-\frac{1}{1}\right)=315°$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en $135°$ y en $315°$. Como el afijo del punto buscado es $(1,-1)$, el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en $315°$.

Tal y como se recomienda en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando convertimos un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número $1-i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(1,-1)$, por lo cual es un número que se encuentra en el cuarto cuadrante.

Tenemos, por tanto, que: $1-i=\sqrt{2}_{315°}$

Como nos piden las raíces terceras debemos calcular (observemos que en el apartado 3.6.1, en el ejemplo de la página 44 del Módulo 1, se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de -8):

$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}_{315°}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{315^o+360^ok}{3}}\qquad$ para $k=0,1,2$

Esto es, el módulo de las raíces es $\sqrt[6]{2}$

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \frac{315^o+360^\circ k}{3}$ para $k = 0, 1, 2$

- Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 105^\circ$
- Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 225^\circ$
- Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 345^\circ$

Por tanto, las raíces, en forma polar, pedidas son:

$\sqrt[6]{2}_{105^\circ}, \sqrt[6]{2}_{225^\circ}, \sqrt[6]{2}_{345^\circ}$

Ahora pasamos los números anteriores a forma binómica:

$\sqrt[6]{2}_{105^\circ} = \sqrt[6]{2}(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ) = \sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i) = \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} + \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}i$

$\sqrt[6]{2}_{225^\circ} = \sqrt[6]{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = \sqrt[6]{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\frac{\sqrt[6]{2}\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt[6]{2}\sqrt{2}}{2}i$

$\sqrt[6]{2}_{345^\circ} = \sqrt[6]{2}(\cos 345^\circ + i \sin 345^\circ) = \sqrt[6]{2}(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i) = \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4} + \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}i$

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rr} (a+1)x + (a+2)y + 3z = & 1 \\ (a+2)x + (a+1)y - z = & 2 \end{array}\right\}$$

donde el parámetro a es la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Se pide:

a) Determinad los valores de α y β de forma que, al añadir al sistema anterior una tercera ecuación de la forma $(2a+5)x+(2a+1)y+\alpha z = \beta$, el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema inicial.

b) Determinad la solución del sistema dado, tal que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

a) El sistema dado inicialmente:

$$\left.\begin{array}{rr} (a+1)x + (a+2)y + 3z = & 1 \\ (a+2)x + (a+1)y - z = & 2 \end{array}\right\}$$

tiene como matriz de coeficientes y como matriz ampliada las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} a+1 & a+2 & 3 \\ a+2 & a+1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & a+2 & 3 & 1 \\ a+2 & a+1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Observemos que el menor de orden dos que se obtiene considerando la primera y la segunda columna siempre es diferente de cero: $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix} = -2a-3 \neq 0$. Así pues, podemos afirmar que el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada coinciden y son iguales a 2. Dado que el número de incógnitas del sistema es 3, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12] podemos afirmar que el sistema dado es compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1.

A continuación consideramos el sistema resultante de añadir, al sistema anterior, una tercera ecuación de la forma $(2a+5)x + (2a+1)y + \alpha z = \beta$, es decir:

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x + (a+2)y + 3z = \;\; 1 \\ (a+2)x + (a+1)y - z = \;\; 2 \\ (2a+5)x + (2a+1)y + \alpha z = \;\; \beta \end{array}\right\}$$

que tiene como matriz de coeficientes, A, y como matriz ampliada, M, las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a+2 & 3 \\ a+2 & a+1 & -1 \\ 2a+5 & 2a+1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & a+2 & 3 & 1 \\ a+2 & a+1 & -1 & 2 \\ 2a+5 & 2a+1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

Si queremos que este nuevo sistema tenga las mismas soluciones que el sistema inicial, tendremos que buscar los valores de α y β que hacen que el sistema sea compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1.

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes A, considerando su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a+2 & 3 \\ a+2 & a+1 & -1 \\ 2a+5 & 2a+1 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha(2a+3) - (12a+18)$$

Notemos que si $\alpha = -6$, entonces $\mathrm{rg}(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Si calculamos el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & 1 \\ a+2 & a+1 & 2 \\ 2a+5 & 2a+1 & \beta \end{vmatrix} = -\beta(2a+3) + (10a+15)$$

tenemos que para $\beta = 5$ este menor se anula y, por lo tanto, se verifica que $\mathrm{rg}(M) = 2$.

Así pues, si $\alpha = -6$ y $\beta = 5$ se verifica que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) = 2 \neq$ n^o incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado con grado de libertad igual a 1, obteniendo que este sistema y el sistema dado inicialmente tienen las mismas soluciones.

b) Este apartado se puede resolver de varias formas.

Por ejemplo, una manera es, en primer lugar, resolver el sistema de dos ecuaciones dado inicialmente

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x+(a+2)y+3z= \ 1 \\ (a+2)x+(a+1)y-z= \ 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(x=\frac{\left(4a^2+9a+5\right)z+\left(a^2+4a+3\right)}{(a+1)(2a+3)}, y=\frac{-(4a+7)z-a}{2a+3}, z\right)$$

y a continuación imponemos que $x+y+z=a$, es decir:

$$\frac{\left(4a^2+9a+5\right)z+\left(a^2+4a+3\right)}{(a+1)(2a+3)}+\frac{-(4a+7)z-a}{3+2a}+z=a \quad \rightarrow \quad z=\frac{2a^2+3a-3}{2a+1}$$

y sustituyendo este valor de z en las soluciones anteriores, se obtiene la solución que se pide:

$$\left(x=\frac{4a^2+6a-4}{2a+1},\ y=\frac{-4a^2-8a+7}{2a+1},\ z=\frac{2a^2+3a-3}{2a+1}\right).$$

Otra manera de proceder, equivalente a la que acabamos de hacer, es resolver directamente el sistema de tres ecuaciones formado por las dos ecuaciones iniciales más la ecuación $x+y+z=a$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z= \ a \\ (a+1)x+(a+2)y+3z= \ 1 \\ (a+2)x+(a+1)y-z= \ 2 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 18 a la 21] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a+1 & a+2 & 3 & 1 \\ a+2 & a+1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a+2 & -a^2-a+1 \\ 0 & -1 & -a-3 & -a^2-2a+2 \end{array}\right)$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a+2 & -a^2-a+1 \\ 0 & 0 & -2a-1 & -2a^2-3a+3 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2-(a+1)\cdot F1 \rightarrow F2$, $F3-(a+2)\cdot F1 \rightarrow F3$ (2): $F3+F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z= \ a \\ y+(-a+2)\,z= \ -a^2-a+1 \\ (-2a-1)\,z= \ -2a^2-3a+3 \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $z=\frac{2a^2+3a-3}{2a+1}$. Si hacemos la sustitución de este valor de z en la segunda ecuación y despejamos la y obtenemos $y=\frac{-4a^2-8a+7}{2a+1}$. Si sustituimos en la primera ecuación estos valores de y y z se obtiene $x=\frac{4a^2+6a-4}{2a+1}$.

Así pues, la solución de este sistema, en función de los diferentes valores del parámetro a, es:

	$x = \frac{4a^2+6a-4}{2a+1}$,	$y = \frac{-4a^2-8a+7}{2a+1}$,	$z = \frac{2a^2+3a-3}{2a+1}$
Si $a = 0$	$x = -4$	$y = 7$	$z = -3$
Si $a = 1$	$x = 2$	$y = -5/3$	$z = 2/3$
Si $a = 2$	$x = 24/5$	$y = -5$	$z = 11/5$
Si $a = 3$	$x = 50/7$	$y = -53/7$	$z = 24/7$
Si $a = 4$	$x = 28/3$	$y = -89/9$	$z = 41/9$
Si $a = 5$	$x = 126/11$	$y = -133/11$	$z = 62/11$
Si $a = 6$	$x = 176/13$	$y = -185/13$	$z = 87/13$
Si $a = 7$	$x = 78/5$	$y = -49/3$	$z = 116/15$
Si $a = 8$	$x = 300/17$	$y = -313/17$	$z = 149/17$
Si $a = 9$	$x = 374/19$	$y = -389/19$	$z = 186/19$

3. Sean $e_1 = (1, -1, 2)$, $e_2 = (0, 3, -6)$, $e_3 = (1, 0, 0)$ y $e_4 = (0, -4, 8)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sea $E =< e_1, e_2, e_3, e_4 >$. Sea $v = (a + 2, 2a - 2, -4a + 4)$ donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP.

a) Calculad la dimensión de E y una base A. Demostrad si el vector v pertenece al subespacio E. En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

b) Encontrad un vector w de forma que $B = \{v, w\}$ sea una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de la base A a la base B y de la base B a la base A.

Solución

a) Calculemos el rango de la matriz de vectores [Ver módulo 2, sección 4.5]:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 2$$

ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ y los dos menores 3×3 resultado de orlar el menor anterior [Ver módulo 2, sección 4.5] tienen determinante nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Como base podemos usar $A = \{e_1, e_2\}$, ya que contiene el menor 2×2 anterior.
Par ver si $v \in E$ resolvemos el sistema [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-2 \\ -4a+4 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a + 2$ y $y = a$. Por tanto $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a + 2, a)$.

b) Como w podemos usar el vector e_2, ya que es de E y es linealmente independiente de v (es directo encontrar un menor 2×2 con determinante distinto de 0). Así si escogemos $w = e_2$ tenemos directamente que $B = \{v, w\}$ es una base de E.
Comencemos calculando la matriz de cambio de base de la base B a la base A, ya que para calcularla debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A [Ver módulo 2, sección 4.7]. Para v lo hemos calculado en el apartado anterior y w tenemos que es directamente e_2. Así pues la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B \to A} = \begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B calculamos la inversa [Ver módulo 2, sección 4.7 y sección 3.3]:

$$C_{A \to B} = \begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a+2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & a+2 \end{pmatrix}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida en la base canónica por

$$f(x, y) = (x + (b-a)(a+1)x + (a+1)^2(a-b)y, (b-a)x + y + (a-b)(a+1)y).$$

Sustituid el parámetro a por la primera cifra de la derecha de vuestro identificador IDP del campus UOC. Se pide:

a) Calculad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Determinad si f es un isomorfismo.

c) Calculad el polinomio característico de f y los valores propios de f. ¿Podemos determinar si f es diagonalizable conociendo solo sus valores propios?

Solución

Resolvemos el problema para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir a por su valor en los resultados que siguen.

a) Para calcular $M(f|C, C)$, la matriz de f en la base canónica C de $\mathbb{R}^2$, calculamos las imágenes de los dos vectores de la base canónica y los colocamos en columnas, tal como se explica en el punto “3.Matriz asociada a una aplicación lineal” del módulo “Aplicaciones lineales”: $f(1, 0) = (1 + (b-a)(a+1), b-a)$

$f(0, 1) = ((a+1)^2(a-b), 1 + (a-b)(a+1))$

$$M(f|C, C) = \begin{pmatrix} 1 + (b-a)(a+1) & (a+1)^2(a-b) \\ b-a & 1 + (a-b)(a+1) \end{pmatrix}$$

La matriz en función de vuestro IDP será pues:

$$
\begin{array}{ll}
a=0 & M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 1+b & -b \\ b & 1-b \end{pmatrix} \\
a=1 & M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 2b-1 & 4-4b \\ b-1 & 3-2b \end{pmatrix} \\
a=2 & M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 3b-5 & 18-9b \\ b-2 & 7-3b \end{pmatrix} \\
a=3 & M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 4b-11 & 48-16b \\ b-3 & 13-4b \end{pmatrix} \\
a=4 & M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 5b-19 & 100-25b \\ b-4 & 21-5b \end{pmatrix} \\
a=5 & M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 6b-29 & 180-36b \\ b-5 & 31-6b \end{pmatrix} \\
a=6 & M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 7b-41 & 294-49b \\ b-6 & 43-7b \end{pmatrix} \\
a=7 & M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 8b-55 & 448-64b \\ b-7 & 57-8b \end{pmatrix} \\
a=8 & M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 9b-71 & 648-81b \\ b-8 & 73-9b \end{pmatrix} \\
a=9 & M(f|C,C)=\begin{pmatrix} 10b-89 & 900-100b \\ b-9 & 91-10b \end{pmatrix}
\end{array}
$$

b) Como se explica en el apartado “5.Monomorfismos y epimorfismos” una aplicación es un isomorfismo cuando es inyectiva y suprayectiva. Y una manera de saber si la aplicación f es inyectiva y suprayectiva es ver si el rango de su matriz asociada $M(f|C,C)$ es igual a la dimensión del espacio origen y a la del espacio destino. Como este espacio es $\mathbb{R}^2$ en ambos casos, el rango debería ser 2 para que f sea un isomorfismo. Si el determinante de la matriz no es nulo se cumplirá la condición:

$$
\begin{aligned}
&det(M(f|C,C))=\begin{vmatrix} 1+(b-a)(a+1) & (a+1)^2(a-b) \\ b-a & 1+(a-b)(a+1) \end{vmatrix}= \\
&[1+(b-a)(a+1)]\cdot[1+(a-b)(a+1)]-(a+1)^2(a-b)\cdot(b-a)= \\
&[1-(a-b)(a+1)]\cdot[1+(a-b)(a+1)]+(a+1)^2(a-b)^2= \\
&1^2-(a-b)^2(a+1)^2+(a+1)^2(a-b)^2=1
\end{aligned}
$$

Por tanto el rango de $M(f|C,C)$ es 2 y f es un isomorfismo.

c) El polinomio característico de f es $p(t)=|A-t\mathrm{I}|$, tal como se define en el punto “7.Vectores y valores propios”. Para calcularlo, desarrollamos este determinante:

$$p(t)=\begin{vmatrix} 1+(b-a)(a+1)-t & (a+1)^2(a-b) \\ b-a & 1+(a-b)(a+1)-t \end{vmatrix}=$$

$$[1+(b-a)(a+1)-t]\cdot[1+(a-b)(a+1)-t]-(a+1)^2(a-b)\cdot(b-a)=$$

$$[1+(b-a)(a+1)]\cdot[1+(a-b)(a+1)]-t[1+(b-a)(a+1)]-t[1+(a-b)(a+1)]+t^2+(a+1)^2(a-b)^2=$$

$$[1-(a-b)(a+1)]\cdot[1+(a-b)(a+1)]-t-t(b-a)(a+1)-t-t(a-b)(a+1)+t^2+(a+1)^2(a-b)^2=$$

$$1-(a-b)^2(a+1)^2-2t+t(a-b)(a+1)-t(a-b)(a+1)+t^2+(a+1)^2(a-b)^2=$$

$$1-2t+t^2=(t-1)^2$$

Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(t) = 0$: $t = 1$. El único valor propio es 1 y tiene multiplicidad 2.

No podemos determinar si f es diagonalizable solo con estos cálculos porque necesitamos saber si el subespacio de vectores propios de f asociados al valor propio 1 tiene dimensión 2. Si no hay dos vectores propios de f linealmente independientes no podremos diagonalizar la matriz de f.

EXAMEN 1 - 10 enero 2021

1. Hallad el módulo y el argumento del resultado de la operación siguiente: $\frac{4+4i}{1+\sqrt{3}i}$

Solución

Primero de todo multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador para eliminarlo:

$\frac{4+4i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(4+4i)\cdot(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})\cdot(1-i\sqrt{3})} = \frac{4-4i\sqrt{3}+4i-4\sqrt{3}i^2}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 i^2} = \frac{4-4i\sqrt{3}+4i+4\sqrt{3}}{1+3} = \frac{4+4\sqrt{3}+(-4\sqrt{3}+4)i}{4} = \frac{4(1+\sqrt{3})+4(1-\sqrt{3})i}{4} = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$

Por tanto, tenemos que: $\frac{4+4i}{1+i\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$.

A continuación buscamos el módulo y el argumento del número $(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$ tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) = -15^\circ = 345^\circ$

Sabemos que la tangente de un ángulo vale $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ en 345° y en 165°. Como el afijo del punto buscado es $(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$ el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en 345°.

Tenemos, por tanto, que $\frac{4+4i}{1+i\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i = (2\sqrt{2})_{345^\circ}$

2. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} nx+y &= m \\ y &= a \\ nz &= 0 \end{aligned}\right.$$

donde a es la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus.

(a) Discutid el sistema en función de n, m y dad una interpretación geométrica del sistema para cada caso.

(b) Resolved el sistema para $n = 1$ y $m = a$.

Solución

(a) Primero calcularemos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, A:

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = n^2$$

que es cero solo para $n = 0$.

En el caso de $n = 0$, tendremos que la matriz ampliada M es:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que el único menor que puede ser no nulo es el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & a \end{vmatrix}$.

Así pues, para $m = a$, el sistema será compatible indeterminado [rango(A) = rango(M) = 1] y tendremos dos planos coincidentes (el plano $y = a$)

Para $m \neq a$, tendremos un sistema incompatible, [rango$(A) \neq$ rango(M)] que representa dos planos paralelos (el plano $y = a$ y el plano $y = m$)

En el caso de $n \neq 0$, el rango de A será 3, así como también el rango de M, por lo que aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius será un sistema compatible determinado (SCD), que representa 3 planos que se cortan en un punto [ver apuntes módulo 3, apartado 8, páginas de la 25 a 31].

(b) En este caso, el sistema queda como:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \quad\;\; y = a \\ \quad\;\; z = 0 \end{cases}$$

Con el apartado anterior, es un SCD y puede resorverse fácilmente. De la tercera ecuación sacamos $z = 0$, de la segunda $y = a$ y de la primera y la segunda, $x = 0$.

3. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 | a_1 - 2a_3 = 0\}.$$

Y sea $v = (-4, 6, -2, 2)$.

(a) Comprobad que $A = \{(2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base de E. ¿$v \in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sean

$$C_1 = \begin{pmatrix} (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ 0 & (a-5)(a-7) & 0 \\ (a-1)(a-3) & (a-5)(a-7) & a-9 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} a(a-2)(a-4) & a(a-6) & 0 \\ 0 & a(a-6) & a-8 \\ 0 & 0 & a-8 \end{pmatrix}$$

donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP.
¿Pueden C_1 o C_2 ser matrices de cambio de base de una base B a la base A? ¿Cuáles son las bases B para las que lo son?

Solución

(a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumple la condición $a_1 - 2a_3 = 0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes, ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Así pues A es una base de E.
Para ver si $v \in E$ miramos si tiene solución el siguiente sistema [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Que tiene solución $x = -2$, $y = 6$ y $z = 2$. Por tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(-2, 6, 2)$.

(b) Como sabemos que E tiene dimensión 3, las matrices de cambio de base deberán de ser 3×3. Pero esto no nos descarta ninguna. También sabemos que deben ser invertibles, por tanto vamos a ver si C_1 y C_2 lo son [Ver módulo 2, sección 4.7]. Al ser matrices triangulares, podemos multiplicar la diagonal directamente para calcular el determinante: $Det(C_1) = (a-1)(a-3)(a-5)(a-7)(a-9)$. De forma que para $a = 1, 3, 5, 7, 9$ el determinante de C_1 es cero, así para estos valores de a no es matriz de cambio de base, para el resto de valores sí.
$Det(C_2) = a^2(a-2)(a-4)(a-6)(a-8)$. De forma que para $a = 0, 2, 4, 6, 8$ el determinante de C_2 es cero, así para estos valores de a no es matriz de cambio de base, para el resto de valores sí.
Para calcular la base B en cada caso, podemos multiplicar directamente y obtenemos la base B (columnas de la matriz resultado) [Ver módulo 2, sección 4.7].
Para los casos $a = 0, 2, 4, 6, 8$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_1 = \begin{pmatrix} 2(a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ 0 & (a-5)(a-7) & 0 \\ (a-1)(a-3) & 0 & 0 \\ (a-1)(a-3) & (a-5)(a-7) & a-9 \end{pmatrix}$$

y para los casos $a = 1, 3, 5, 7, 9$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_2 = \begin{pmatrix} 2a(a-2)(a-4) & 2a(a-6) & 0 \\ 0 & a(a-6) & a-8 \\ a(a-2)(a-4) & a(a-6) & 0 \\ 0 & 0 & a-8 \end{pmatrix}$$

4. Sean $A = (a, 1)$, $B = (0, 0)$ y $C = (2a, 0)$. Considerad el triángulo ABC formado por estos tres puntos. Sea la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a-3 \\ 0 & -a & 2a-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y sea f la transformación afín definida por la matriz M.
Sustituid a por la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC. Se pide:

(a) Calculad las imágenes por f de los tres vértices del triángulo ABC.

(b) Demostrad que la transformación f es equivalente a un escalado de razones 4 y $-a$ respecto al punto A seguido de una traslación. Determinad el vector de la tranlación.

(c) Calculad qué puntos del plano quedan fijos al aplicar esta transformación f.

Solución

(a) Calculamos las imágenes de A, B, C por M usando la notación matricial eficiente del punto 5 del módulo "Transformaciones geométricas":

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a-3 \\ 0 & -a & 2a-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 & -3a-3 & 5a-3 \\ a-4 & 2a-4 & 2a-4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las imágenes de los puntos dados: $f(A) = (a-3, a-4)$, $f(B) = (-3a-3, 2a-4)$ y $f(C) = (5a-3, 2a-4)$.

(b) La matriz del escalado desde el punto $A = (a, 1)$ y de razón 4 y $-a$ se obtiene multiplicando tres matrices que, de derecha a izquierda son: la matriz de la traslación de vector $(-a, -1)$, la del escalado y la de la traslación de vector $(a, 1)$. Corresponden a las aplicaciones que hay que componer según se explica en el punto "4.3 Escalado de un objeto a partir de un punto fijo genérico".

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a \\ 0 & -a & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de la traslación de vector (r, s) tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La composición del escalado con esta traslación seria el producto de las dos matrices (punto "6. Composición de transformaciones"):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a \\ 0 & -a & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a+r \\ 0 & -a & a+1+s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparamos con la matriz M y vemos que r y s deben cumplir $-3a + r = -3a - 3$, de donde $r = -3$ y que $a + 1 + s = 2a - 4$, de donde $s = a - 5$.

(c) La condición que deben cumplir los puntos fijos es que $f(x,y) = (x,y)$.
La imagen del punto (x,y) por f es:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3a-3 \\ 0 & -a & 2a-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-3a-3 \\ -ya+2a-4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Necesitamos pues que $(4x-3a-3, -ya+2a-4) = (x,y)$.
Igualando las dos coordenadas obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x-3a-3 = x \\ -ya+2a-4 = y \end{cases}$$

Agrupamos los términos con x e y:

$$\begin{cases} 3x = 3a+3 \\ 2a-4 = y+ay = (1+a)\cdot y \end{cases}$$

Y aislando las incógnitas x e y obtenemos:

$$\begin{cases} x = a+1 \\ y = \frac{2a-4}{a+1} \end{cases}$$

Éste es el único punto que queda fijo por la aplicación f, el $(a+1, \frac{2a-4}{a+1})$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- -\ \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN
8 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

   a) Expresad en forma binómica el siguiente número complejo: 2_{90°

   b) Calculad todas las raíces terceras del siguiente número complejo: $\frac{3+3i}{-3+3i}$.

   Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) Para resolver este apartado aplicamos las explicaciones del punto 3.4.2. del módulo impreso, "De la forma polar a binómica":

En 2_{90° tenemos que r = 2 y $\vartheta = 90^\circ$ entonces, 2_{90° = 2·(cos 90º+ i sen90º) = $= 2(0+1\cdot i) = 2i$

Por tanto, la respuesta al ejercicio es: $2_{90^\circ} = 2i$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

De hecho lo que se pide son las raíces terceras de $\frac{3+3i}{-3+3i}$.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{3+3i}{-3+3i} = \frac{(3+3i)\cdot(-3-3i)}{(-3+3i)\cdot(-3-3i)} = \frac{-9-9i-9i+9}{9+9} = \frac{-18i}{18} = -i$$

Para determinar las raíces terceras de $-i$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = arctg\frac{-1}{0} = arctg(-\infty) = 270^\circ$$

(Observemos que, al ser la parte real nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $0-i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto (0, -1), por lo tanto, es un número que se encuentra justamente entre el tercer y cuarto cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $-i=1_{270^\circ}$

Como nos piden las raíces terceras, debemos hacer:

$\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270^\circ+360^\circ k}{3}}$ para k=0, 1,2

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[3]{1}=1$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k=\dfrac{270^\circ+360^\circ k}{3}$ para k=0, 1,2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=90^\circ$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=90^\circ+120^\circ=210^\circ$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=90^\circ+240^\circ=330^\circ$

Por tanto, las tres raíces terceras, en forma polar, son:

$$\boxed{1_{90^\circ}}$$

$$\boxed{1_{210^\circ}}$$

$$\boxed{1_{330^\circ}}$$

2. Sea F un subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por los siguientes vectores:

$$F=\langle(0,0,3,4,1),(0,-1,-b,0,0),(2,0,-b,0,0),(b,b,b-1,0,4)\rangle$$

a) Determinad, en función de b, la dimensión del subespacio F.

b) Para el caso $b=2$ hallad una base de F. ¿Pertenece $v=(0,-4,2,12,-1)$ a F? ¿Cuáles son sus coordenadas en la base que habéis encontrado?

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores.

$$rango\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 3 & -b & -b & b-1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vemos rápidamente que tenemos el menor (usando las filas 1, 2 y 4) siguiente con determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora orlamos (por ejemplo, añadiendo la última fila):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$$

Así el rango de la matriz definida por los vectores es 4 independientemente de b. Por tanto la dimensión de F es siempre 4.

b) En el apartado anterior ya hemos visto que la dimensión de F es siempre 4. Así que como base podemos proponer los 4 vectores con que está definida F en el caso b=2: A={(0, 0, 3, 4, 1), (0, -1, -2, 0, 0), (2, 0, -2, 0, 0), (2, 2, 1, 0, 4)}.

Para ver si v pertenece a F y a la vez calcular sus coordenadas en el caso que pertenezca, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=3, y=2, z=1, t=-1. Por tanto, v pertenece a F y sus coordenadas en la base A son (3,2,1,-1).

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 2a-1 \\ 5x & + & (a-1)y & + & (2a+3)z & = & 3a+2 \\ 3x & + & (a+1)y & + & z & = & 3 \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & a-1 & 2a+3 \\ 3 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2a-1 \\ 5 & a-1 & 2a+3 & 3a+2 \\ 3 & a+1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & a-1 & 2a+3 \\ 3 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = -2a^2 - 6a + 8 = -2(a-1)(a+4)$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -4 \rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{nº incógnitas}$ $\rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = -4 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = -4$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ -5 & -5 & -10 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 275 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{(1)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right) \underset{(2)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-5·F1 y F3=F3-3·F1.

(2) Operaciones: F3=F3-F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 4y - 7z = 7 \\ 2z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 4y - 7z = 7 \\ z = -1/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ y = 7/8 \\ z = -1/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 7/8 \\ y = 7/8 \\ z = -1/2 \end{cases}}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(1,5,-2)=(2,10,-4), f(0,-1,2)=(0,1,-2), f(0,-1,1)=(0,0,0)$$

a) Demostrad que $(1,5,-2),(0,-1,2),(0,-1,1)$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculad una base del subespacio Imagen de f. ¿Es f exhaustiva?

c) Calculad una base del subespacio ker(f) (el núcleo de f). ¿Es f inyectiva?

d) Estudiad si f diagonaliza.

e) Calculad el rango de f^{1000}, es decir, la dimensión de la imagen de f^{1000}.

Resolución:

a) Denominamos $u=(1,5,\text{-}2), v=(0,\text{-}1,2), w=(0,\text{-}1,1)$. El determinante de u, v, w es:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & -1 & -1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}=1.$$

(Se puede hacer usando la regla de Sarrus, o bien desarrollando por la primera fila). Puesto que es distinto de cero, u,v y w son linealmente independientes. Puesto que son tres vectores linealmente independientes de R^3, forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

$u=(1,5,\text{-}2), v=(0,\text{-}1,2), w=(0,\text{-}1,1)$ **son una base de R^3.**

b) Para calcular el subespacio imagen de f es suficiente calcular la imagen de una base de R^3. La imagen de la base u,v,w de R^3 es: $f(u)=(2,10,\text{-}4), f(v)=(0,1,\text{-}2), f(w)=(0,0,0)$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Im}(f)=[f(u),f(v),f(w)]=[(2,10,\text{-}4),(0,1,\text{-}2),(0,0,0)]=[(2,10,\text{-}4),(0,1,\text{-}2)].$$

El tercer vector es nulo y los dos primeros son linealmente independientes. Así el subespacio imagen de f está generado por los dos primeros vectores. Por lo tanto, {f(u),f(v)} es una base de la imagen. Además, f no es exhaustiva ya que la imagen de f tiene dimensión 2 y, en cambio, el espacio de llegada tiene dimensión 3. (Ver Módulo 4, Sección 4.)

$f(u)=(2,10,\text{-}4), f(v)=(0,1,\text{-}2)$ **es una base de la imagen y f no es exhaustiva.**

c) Recordemos que el Teorema de la dimensión dice que dim E=dim Im(f)+dim Ker(f). Puesto que E=R^3 y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del ker (o núcleo) es 1. En particular, f no es inyectiva, porque el ker

(núcleo) es distinto de cero. (Ver Módulo 4, Sección 5.) Puesto que f(w)=0, el vector w=(0,-1,1) es una base del núcleo. Así,

$w=(0,-1,1)$ **es una base del núcleo de f y f no es inyectiva.**

d) Tenemos f(u)=2u. En particular, u es vector propio de f de valor propio 2. Por otra parte, f(v)=-v. Por lo tanto, v es vector propio de f de valor propio -1. Finalmente, f(w)=0. Por lo tanto, w es vector propio de f de valor propio 0. Los tres vectores u, v, w son base de R^3. Por lo tanto, hay una base de R^3 formada por vectores propios de f. Eso significa que f diagonaliza. (Ver Módulo 4, Sección 8.)

f diagonaliza porque hay una base de R^3 formada por vectores propios de f.

e) La matriz de f en la base de vectores propios es la diagonal con valores propios a la diagonal: 2,1,0. Por lo tanto, la matriz de f elevada a cualquier potencia n, en la base de vectores propios, es la matriz diagonal con los valores propios elevados a n en la diagonal, o sea, 2 elevado a n, 1 y 0. El rango sigue siendo 2, pues.

El rango de f^{1000} es 2.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN

15 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:
   a) Expresad en forma polar el siguiente número complejo: $-1+i$
   b) Calculad todas las raíces terceras del siguiente número complejo: $\frac{-27}{i}$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) Para resolver este apartado aplicamos las explicaciones del punto 3.4.1. del módulo impreso, "De la forma binómica a polar". Primero hallamos el módulo:

$$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

A continuación hallamos el argumento:

Como $a=-1>0$ y $b=1$ tenemos

$$\vartheta=arctg\frac{1}{-1}=arctg(-1)=135^{\circ}$$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en 135º y en 315º. Como el afijo del punto buscado es (-1, 1) el ángulo está en el segundo cuadrante, es decir, en 135º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $-1+i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto (-1, 1), por lo tanto, es un número que se encuentra en el segundo cuadrante.

Por tanto, la respuesta es: $-1+i=\sqrt{2}_{135^{\circ}}$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

Se pide determinar las raíces terceras de $\frac{-27}{i}$.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{-27}{i}=\frac{(-27)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{27i}{1}=27i$$

Para determinar las raíces terceras de $27i$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m=\sqrt{0^2+(27)^2}=27$$

$$\alpha=arctg\frac{27}{0}=arctg(\infty)=90^{\circ}$$

(Observemos que, al ser la parte real nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

Tenemos, por tanto, que $27i=27_{90^{\circ}}$

Como nos piden las raíces terceras, debemos hacer:

$\left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{90^{\circ}+360^{\circ}k}{3}}$ para k=0, 1,2

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[3]{27}=3$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k=\dfrac{90^{\circ}+360^{\circ}k}{3}$ para k=0, 1,2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=30^{\circ}$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=30^{\circ}+120^{\circ}=150^{\circ}$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=30^{\circ}+240^{\circ}=270^{\circ}$

Por tanto, las tres raíces terceras, en forma polar, son:

$$\boxed{3_{30^{\circ}}}$$

$$\boxed{3_{150^{\circ}}}$$

$$\boxed{3_{270^{\circ}}}$$

2. Sea F un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$F = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4) | a_1 = 2a_2, a_4 = -2\, a_3 \rangle$$

Y sea $v = (6, 3, -3, 6)$.

a) Comprobad que $A = \{(2,1,0,0),(0,0,1,-2)\}$ es una base de F. ¿Pertenece v a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

b) Sea $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de una base B a la base A. ¿Cuál es la base B?

Resolución:

a) Sabemos que la dimensión de F es 2, así solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a F y que son linealmente independientes.

Primero comprobamos que los vectores de A pertenecen a F comprobando que se cumplen las condiciones $a_1=2a_2$, $a_4=-2a_3$ para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rango\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues, A es una base de F.

Para ver si v pertenece a F miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=3, y=-3 y por tanto v pertenece a F y sus coordenadas en la base A son (3,-3).

b) La matriz de cambio de base de B a A expresa los vectores de la base de B en función de los de la de A. Así pues, si miramos les columnas de la matriz C ya tenemos que los dos vectores de la base B serán:
1·(2,1,0,0)+1·(0,0,1,-2) = (2,1,1,-2)
2·(2,1,0,0)+(-1)·(0,0,1,-2) = (4,2,-1,2)

Por tanto B={(2,1,1,-2), (4,2,-1,2)}.

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x + 4y + (a-1)z = 2a+1 \\ 2x + (a+2)y - z = a \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13].
La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & a-1 & 2a+1 \\ 2 & a+2 & -1 & a \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - 3a + 4 = -(a-1)(a+4)$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -4 \rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{nº incógnitas}$
$\rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = -4 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = -4$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -7 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-3·F1 y F3=F3-2·F1.

(2) Operaciones: F3=F3-F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ -2y+5z = 4 \\ -2z = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ -2y+5z = 4 \\ z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases}}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x,y,z,t) = (z+t, z+t, x+y, x+y)$$

a) Hallad la matriz A de f en las bases canónicas.

b) Calculad una base del subespacio ker(f) (el núcleo de f).

c) Decid si el vector $u = (1,1,1,1)$ es vector propio de f.

d) Encontrad vectores propios de f de valor propio -2.

e) Estudiad si f diagonaliza y hallad una base de $\mathbb{R}^4$ con el número máximo de vectores propios de f.

Resolución:

a) f(1,0,0,0)=(0,0,1,1), f(0,1,0,0)=(0,0,1,1), f(0,0,1,0)=(1,1,0,0) y f(0,0,0,1)=(1,1,0,0). Estos vectores imagen están expresados en la base canónica. Por lo tanto, escribiéndolos por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Para encontrar una base del ker(f) hemos de resolver el sistema A·X=0:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos quedan las ecuaciones z+t=0, z+t=0, x+y=0, x+y=0. Es decir, t=-z, y=-x. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: (x,y,z,t)=(x,-x,z,-z)=x(1,-1,0,0)+z(0,0,1,-1). En particular, una base del ker(f) es la dada por los vectores a=(1,-1,0,0),b=(0,0,1,-1).

Una base del Ker(f) viene dada por a=(1,-1,0,0) y b=(0,0,1,-1).

c) Para comprobar si el vector u es vector propio de f es suficiente multiplicar la matriz A por u y ver si da un múltiplo de u:

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, puesto que A·u=2u, tenemos que el vector u es vector propio de f de valor propio 2.

u es vector propio de f de valor propio 2.

d) Usemos el Módulo 4, Sección 7, para encontrar los vectores propios de f de valor propio -2. Encontremos una base del núcleo de la matriz A-(-2)I=A+2I. O sea, resolvamos el sistema (A+2I)X=0:

$$(A + 2 \cdot I) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 2x+z+t=0, 2y+z+t=0, x+y+2z=0, x+y+2t=0. Restando la segunda ecuación a la primera queda: 2x-2y=0. O sea, x=y. Restando la cuarta ecuación a la tercera queda: 2z-2t=0. O sea, z=t. Sustituyendo z=t en la primera ecuación queda: 2x+t+t=0. O sea 2x=-2t y x=-t. Las soluciones de este sistema son vectores de la forma: (x,y,z,t)=(-t,-t,t,t)=t(-1,-1,1,1). En particular, (-1,-1,1,1) es vector propio de f de valor propio -2.

e) La aplicación lineal f diagonaliza porqué su matriz en las bases canónicas es simétrica (ver Módulo 4, Sección 8).

Los vectores linealmente independientes a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1) generan el núcleo. Por lo tanto, a i b son dos vectores propios de f de valor propio 0. Por otra parte, u=(1,1,1,1) es vector propio de f de valor propio 2 y v=(-1,-1,1,1) es vector propio de valor propio -2. Así:

{a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1), u=(1,1,1,1), v=(-1,-1,1,1)} es una base de R^4 formada por vectores propios de f.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN
19 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:
   a) Hallad el inverso del número complejo siguiente: $2+3i$. Expresad dicho inverso en forma binómica.
   b) Calculad todas las raíces quintas del siguiente número complejo: $\frac{1}{32}$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) El inverso de $2+3i$ es $\frac{1}{2+3i}$ pero hay que expresarlo en forma binómica.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{1}{2+3i}=\frac{1\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)}=\frac{2-3i}{4+9}=\frac{2-3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{(-3)}{13}i$$

Por tanto, la respuesta al ejercicio es: $\frac{1}{2+3i}=\frac{2}{13}+\frac{(-3)}{13}i$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

De hecho lo que se pide son las raíces quintas de $\frac{1}{32}$.

Para determinar las raíces quintas de $\frac{1}{32}$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m=\sqrt{\left(\frac{1}{32}\right)^2+(0)^2}=\frac{1}{32}$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{1/32}=arctg(0)=0^{o}$$

(Observemos que, al ser la parte imaginaria nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0º y en 180º. Como el afijo del punto buscado es (1/32, 0) el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 0º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número 1/32 en el plano complejo. Este número está asociado al punto (1/32, 0), por lo tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{32}\right)_{0^{o}}$

Como nos piden las raíces quintas, debemos hacer:

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right)_{\frac{0^{o}+360^{o}k}{5}}$$ para k=0, 1, 2, 3, 4

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2^5}\right)}=\frac{1}{2}$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k=\frac{0^{o}+360^{o}k}{5}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=0^{o}$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=0^{o}+72^{o}=72^{o}$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=0^{o}+144^{o}=144^{o}$
- Si k=3, tenemos que $\beta_1=0^{o}+216^{o}=216^{o}$
- Si k=4, tenemos que $\beta_2=0^{o}+288^{o}=288^{o}$

Por tanto, las tres raíces de la ecuación, en forma polar, son:

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}_{0^\circ}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}_{72^\circ}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}_{144^\circ}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}_{216^\circ}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}_{288^\circ}}$$

2. Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

   $e_1 = (-1,3,2,0), e_2 = (2,-1,-1,-1), e_3 = (1,2,1,-1), e_4 = (-5,0,1,3)$.

   Sea $F = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$.

   Y sea $v = (-12,1,3,7)$.

   a) Calculad la dimensión de F y una base A. ¿Pertenece v a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

   b) Sean $w_1 = e_1 + e_2, w_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. $B = \{w_1, w_2\}$ es una base de F. Calculad la matriz de cambio de base de B a A.

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & -5\\ 3 & -1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

Encontramos el menor $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix} \neq 0$ y orlando encontramos que todos los determinantes 3x3 son cero. Así la dimensión de F es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores, ya que son linealmente independientes (contienen el menor anterior). Así pues, A={e_1, e_2}.

Para ver si v pertenece a F resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\\ 2 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\ 1\\ 3\\ 7\end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=-2, y=-7. Por tanto, v pertenece a F, y sus coordenadas en la base A son (-2, -7).

b) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A. Así es justamente como tenemos definido el primer vector de la base B. Vamos a calcular la expresión del segundo resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=1, y=-1. Y por tanto las coordenadas de w_2 en la base A son (1,-1).

De manera que la matriz de cambio de base de B a A será:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - (1+2a)z = -6 \\ x + 4y + (a-6)z = -9 \\ -x + (a+1)y + z = 2a+1 \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13]

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1-2a & -6 \\ 1 & 4 & a-6 & -9 \\ -1 & a+1 & 1 & 2a+1 \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = -3a^2 - 7a + 10 = -3(a-1)(a+\frac{10}{3})$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq {}^{-10}/_{3} \rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{nº incógnitas} \rightarrow$ $\boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = \frac{-10}{3} \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = \frac{-10}{3}$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & -7/3 & -17/3 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & -6 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -9 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-F1 y F3=F3+F1.

(2) Operaciones: F3=3·F3-2·F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x + y - z = -6 \\ 3y - 5z = -3 \\ 10z = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 3y - 5z = -3 \\ z = -9/10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = -6 \\ y = -5/2 \\ z = -9/10 \end{cases}$$
$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -22/5 \\ y = -5/2 \\ z = -9/10 \end{cases}}$$

4. Consideremos $A = (2,1), B = (3,1), C = (3,2)$.
   a) Sea f el escalado de razón 3 desde el punto $(1,-2)$. Calculad $f(A), f(B)$ y $f(C)$.
   b) Sea g el giro de ángulo $\alpha = 30°$ en sentido antihorario desde el origen. Calculad $g(A), g(B)$ y $g(C)$.

Resolución:

a) Recordemos el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 3 desde el punto (1,-2) hay que multiplicar por la matriz:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A,B,C, hemos de hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f(A)=(4,7), f(B)=(7,7) y f(C)=(7,10).

b) El Módulo 5, Secciones 3 y 5, dice que la matriz del giro de ángulo $a = 30^o$ en sentido antihorario es:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde denotamos c=cos(a) y s=sin(a), para abreviar. Para encontrar las imágenes de A,B,C multiplicamos:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c-s & 3c-s & 3c-2s \\ c+2s & c+3s & 2c+3s \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

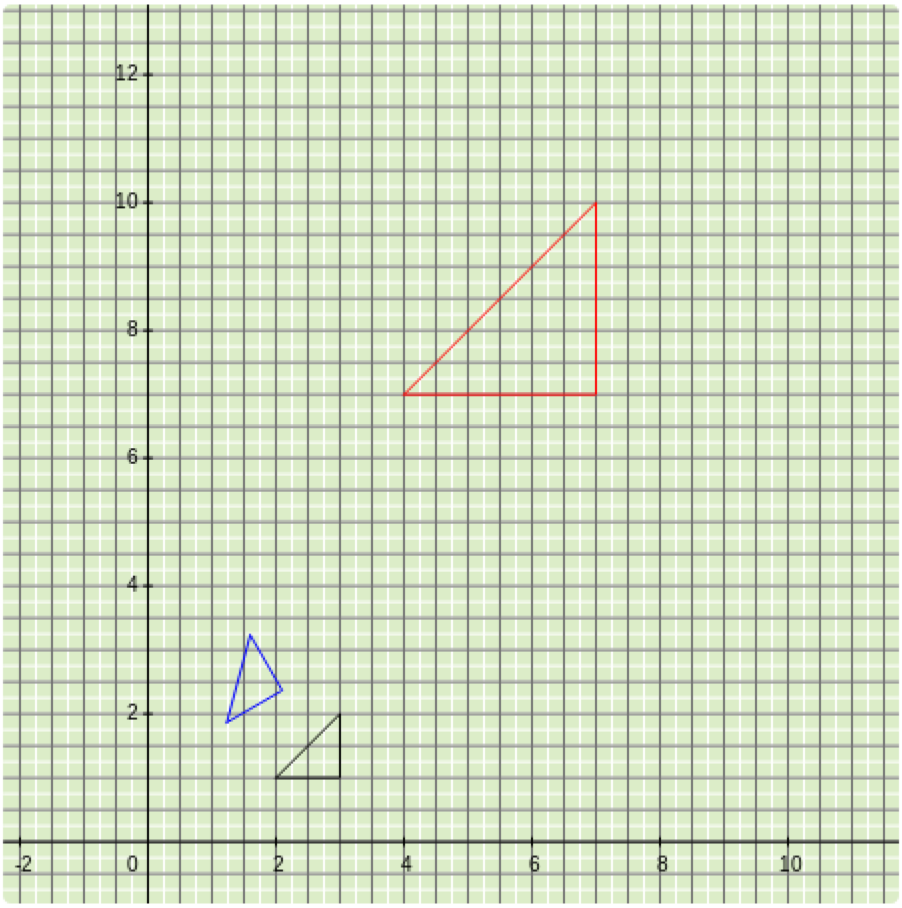
Así g(A)=(2c-s,c+2s), g(B)=(3c-s,c+3s), g(C)=(3c-2s,2c+3s). En el caso en que $a = 30^o$, entonces $\cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin(30^o) = \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$g(A) = (2c-s, c+2s) = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right),$$

$$g(B) = (3c-s, c+3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$$

y

$$g(C) = (3c-2s, 2c+3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2}\right)$$



NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 1 - 11 enero 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:
a) Pasad a forma binómica el siguiente complejo: $\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}}$
b) Calculad todas las raíces cuadradas del siguiente número complejo: $5-6i$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Solución
a) Utilizamos la relación que dice que un número complejo, en forma binaria, $a+bi$, para pasarlo a forma polar tenemos que saber que $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$.

$\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}} \rightarrow 2\sqrt{2}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos(135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin(135°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por tanto, $\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos(135°) + i\sin(135°)\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2+2i$

b) Escribimos el complejo $5-6i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-6}{5}\right) = 310°$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale $\frac{-6}{5}$ en 130^o y en 310^o. Como que el afijo del punto buscado es $(5,-6)$, el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en 310^o. Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, para no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número $(5,-6)$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(5,-6)$, por lo tanto, es un número que se encuentra en el cuarto cuadrante.

Tenemos, por lo tanto, que $5-6i = \sqrt{61}_{310°}$

Como que se nos piden las raíces cuadradas tenemos que hacer (observamos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt{5-6i} = \sqrt{\sqrt{61}_{310°}} = \sqrt[4]{61}_{\frac{310°+360°k}{2}}$ para $k = 0,1$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[4]{61}$

Los argumentos de las raíces cuadradas son $\beta = \frac{310°+360°k}{2}$ para $k = 0,1$

Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 155°$

Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 155° + 180° = 335°$

Por lo tanto, las dos raíces cuadradas del complejo $5-6i$ son:
$\sqrt[4]{61}_{155^\circ}$, $\sqrt[4]{61}_{335^\circ}$

2. Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$F =< (3,\lambda^2,1),(-\lambda^2,0,0),(1,0,-\lambda) >, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calculad la dimensión de F según λ y una base en cada caso.
b) Sea $v=(0,0,-6)$. En el caso $\lambda=0$, ¿$v\in F$? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base que habéis encontrado en el apartado anterior.
c) Sea $B=\{(0,0,-6),(-6,0,-2)\}$. En el caso $\lambda=0$, calculad la matriz de cambio de base de la base B a la base que habéis encontrado para $\lambda=0$ en el primer apartado.

Solución
a) Calculamos el rango de los vectores con los que está definido F.

$$\begin{vmatrix} 3 & -\lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5$$

Así, si $\lambda\neq 0$ la dimensión de F es 3. Es decir, F es $\mathbb{R}^3$. En este caso una base puede ser la formada por los vectores con los que está definido F o la formada por cualesquiera 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes.
Si $\lambda=0$ calculamos el rango:

$$rang\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ya que podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Así, si $\lambda=0$ la dimensión de F es 2 y una base puede ser $A=\{(3,0,1),(1,0,0)\}$.

b) Para ver si $v\in F$ y a la vez calcular sus coordenadas en caso afirmativo, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x=-6$ y $y=18$. Por tanto $v\in F$ y sus coordenadas en la base A son $(-6,18)$.

c) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A. Para el primer vector de B hemos calculado sus coordenadas en A en el apartado anterior. El segundo vector de B vemos que es -2 veces el primero de A (también podríamos resolver un sistema lineal análogo al apartado anterior). Así la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Considerad el plano $\pi : 2x + ky - 2z = 6$ y la recta $r : \left.\begin{array}{r} x + y - z = \quad k \\ kx + 2y - z = 3k \end{array}\right\}$

Se pide:
a) Determinad, razonadamente, para qué valores del parámetro k la recta r no tiene ningún punto en común con el plano π.
b) Para $k = 0$, calculad el punto de corte de la recta r con el plano π.

Solución
a) Recordemos que el estudio de la posición relativa de una recta r (dada por dos ecuaciones) y un plano π se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (Ver apuntes módulo 3, página 32)

$$\left.\begin{array}{r} 2x + ky - 2z = 6 \\ x + y - z = k \\ kx + 2y - z = 3k \end{array}\right\}$$

Cuando este sistema sea incompatible tendremos que la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común.

Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 13].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & k \\ k & 2 & -1 & 3k \end{array}\right)$$

Como el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & k & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 + 3k - 2 = -(k-2)(k-1)$$

- Si $k \neq 2$ y $k \neq 1$ $\rightarrow$ rango$(A) = 3 =$ rango(M) =n^o incógnitas, entonces el sistema es compatible determinado.
- Si $k = 2$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $k = 2$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor, de orden dos no nulo, con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{Sistema incompatible}}.$$
- Si $k = 1$, entonces rango$(A) = 2$, puesto que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $k = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor, de orden dos no nulo, con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{Sistema incompatible}}.$$

Así pues, podemos afirmar que:

$$\boxed{\text{Si } k = 1 \text{ o } k = 2\text{, entonces la recta } r \text{ no tiene ningún punto en común con el plano } \pi}$$

b) Para $k = 0$ el plano π y la recta r tienen por ecuaciones:

$$\pi : 2x - 2z = 6 \qquad\qquad r : \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Sabemos, por el apartado anterior, que para $k = 0$ la recta r corta al plano π en un único punto, es decir, recta y plano tienen un único punto en común, que es el que se obtiene al resolver el sistema compatible determinado formado por las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{2\cdot F2 - F1 \to F2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F3 - F2 \to F3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2z = 6 \\ 2y = -6 \\ -z = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ Solución: } (x = -3, y = -3, z = -6)$$

Así pues, $\boxed{\text{para } k = 0 \text{ la recta } r \text{ corta al plano } \pi \text{ en el punto } (-3, -3, -6)}$.

4. Sean $A = (0, 0)$, $B = (2, 1)$ y $C = (1, 2)$. Sean $D = (3, 2)$ y $E = (1, 4)$.
a) Sea g un giro de ángulo $\alpha \in (0, \pi/2)$ desde el origen en sentido antihorario. Dad la matriz de g.
b) Encontrad α de manera que el triángulo $g(A), g(B), g(C)$ tenga un lado paralelo al eje x.
c) Sea h un escalage de razón λ y desde el punto $P = (a, b)$. Dad la matriz de h.
d) Encontrad la matriz del escalage f tal que $f(B) = D$ y $f(C) = E$.
e) Calculad $f(A)$, donde f es el escalage que se ha encontrado en el apartado anterior.

Solución
a) Para simplificar la notación escribimos $c = \cos(\alpha)$ y $s = \sin(\alpha)$. La matriz del giro g es:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Las imágenes de A, B, C por g son:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2c-s & c-2s \\ 0 & 2s+c & s+2c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el vector $g(B) - g(C) = (c+s, s-c)$. Imponiendo que sea paralelo al eje x, obtenemos $s - c = 0$. O sea, $s = c$. Por lo tanto, la tangente de α es 1. Es decir $\alpha = 45^o$.

c) La matriz del escalage desde el punto $P = (a, b)$ y de razón λ se obtiene multiplicando las tres matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a(1-\lambda) \\ 0 & \lambda & b(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) El punto de intersección de las rectas BD y CE es el $(1, 0)$. Por lo tanto, el escalage tiene que ser desde el punto $P = (1, 0)$. Por otra parte, observamos que $PD = D - P = (3, 2) - (1, 0) = (2, 2)$ y que $PB = B - P = (2, 1) - (1, 0) = (1, 1)$. O sea, $PD = 2PB$. Análogamente, $PE = E - P = (1, 4) - (1, 0) = (0, 4)$ y $PC = C - P = (1, 2) - (1, 0) = (0, 2)$. O sea, $PE = 2PC$. Así, el escalage tiene que ser de razón 2. Concluimos que f es el escalage de razón 2 desde el punto $P = (1, 0)$. La matriz de este escalage es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) La imagen de A por este escalage f se obtiene al multiplicar el vector columna $(0, 0, 1)$ por dicha matriz. Obtenemos $f(A) = (-1, 0)$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 2 - 18 enero 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:
a) Realizad la siguiente operación: $(-2-i)+\sqrt{2}_{45^\circ}$
b) Calculad todas las raíces terceras del siguiente número complejo: $1+i$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Solución
a) Aquí tenemos que sumar dos números complejos, uno en forma polar y otro en forma binómica. Para lo cual operamos con números complejos tal como se dice en la página 20 del material:

$(-2-i)+\sqrt{2}_{45^\circ} = -2-i+1+i = -1$

Para pasar $\sqrt{2}_{45^\circ}$a forma binómica utilizamos la relación que dice que un número complejo, en forma polar, r_α, para pasarlo a forma binaria, tenemos que saber que: $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$.

$r = \sqrt{2}$

$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto, $\sqrt{2}_{45^\circ} = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1+i$

b) Escribimos el complejo $1+i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = 45^\circ$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 1 en 45^o y en 225^o. Como que el afijo del punto buscado es $(1,1)$ el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en 45^o. Cómo se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, para no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, lo primero que hacemos es dibujar el número $1+i$ en el plano complejo. Este número está asociado a su punto $(1,1)$, por lo tanto, es un número que se encuentra en el cuarto cuadrante.

Tenemos, por lo tanto, que $1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}$

Como se nos piden las raíces terceras tenemos que hacer (observamos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material se hace el mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ k}{3}} \qquad \text{para } k = 0,1,2$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[6]{2}$

Los argumentos de las raíces cúbicas son $\beta = \frac{45^\circ + 360^\circ k}{3}$ para $k = 0, 1, 2$

Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 15^\circ$

Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 15^\circ + 120^\circ = 135^\circ$

Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 15^\circ + 240^\circ = 255^\circ$

Por lo tanto, las tres raíces cúbicas del complejo $1 + i$ son:

$\sqrt[6]{2}_{15^\circ}, \sqrt[6]{2}_{135^\circ}, \sqrt[6]{2}_{255^\circ}$

2. Sean $e_1 = (1, 1, 1, 3)$, $e_2 = (1, 0, -1, 0)$ y $e_3 = (0, -2, -4, -6)$ vectores de $\mathbb{R}^4$. Sea $E =< e_1, e_2, e_3 >$. Sea $v = (-1, 1, 3, 3)$.
a) Calculad la dimensión de E y una base A. ¿$v \in E$? En cas afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.
b) Sea $w = e_1 + e_2$. $B = \{v, w\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de la base A a la base B y de la base B a la base A.

Solución
a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 2$$

Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores ya que son linealmente independientes: contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues $A = \{e_1, e_2\}$.
Para ver si $v \in E$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 1$ y $y = -2$. Pot tanto, $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(1, -2)$.
b) Comenzamos por calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A, ya que para calcularla debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A y esto ya lo tenemos (para v lo hemos calculado en el apartado anterior y w está definido directamente com combinación lineal de e_1 y e_2). Así pues la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B \to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B calculemos la inversa:

$$C_{A \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & k & -4 \\ 1 & 3 & 1-k \\ 2 & -1 & 2k+1 \end{pmatrix}$

Se pide:
a) Discutid, razonadamente, el rango de la matriz M en función de los valores de $k \in \mathbb{R}$.
b) Si M es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, resolvedlo siempre que sea compatible determinado con valor de k positivo.

Solución
a) Al ser la matriz M cuadrada de orden 3, estudiamos su rango sabiendo que el rango será tres sólo si el determinante de la matriz es diferente de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & k & -4 \\ 1 & 3 & 1-k \\ 2 & -1 & 2k+1 \end{vmatrix} = -4k^2-4k+24 \;\rightarrow\; -4k^2-4k+24=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} k=2 \\ k=-3 \end{cases}$$

En consecuencia

- Si $k \neq 2$ y $k \neq -3 \;\rightarrow\; \boxed{\text{rango}(M)=3}$.
- Si $k=2$, $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ con $|M|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rango}(M)=2}$.
- Si $k=-3$, $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ con $|M|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rango}(M)=2}$.

b) Si M es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, el sistema asociado es:

$$\left.\begin{aligned} -x+ky &= -4 \\ x+3y &= 1-k \\ 2x-y &= 2k+1 \end{aligned}\right\}$$

Observamos que el sistema tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas, así pues, siempre que el rango de la matriz ampliada M sea tres, el sistema será incompatible, puesto que la matriz de los coeficientes del sistema tiene rango 2, pues sólo tiene dos columnas y tiene el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

En consecuencia, el sistema sólo puede tener solución si $\text{rango}(M)=2$, es decir si $k=2$ o $k=-3$.

Como el enunciado sólo nos pide resolver para k positivo, resolvemos el caso $k=2$.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22].

Si $k=2$, la matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1) $F2+F1 \to F2$ y $F3+2{\cdot}F1 \to F3$

(2) $5{\cdot}F3-3{\cdot}F2 \to F3$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y=-4 \\ 5y=-5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Solución: } \boxed{(x=2, y=-1)}$$

4. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z)=(3x-4y, 2x+z, x-4y-z, 4x-8y-z).$$

a) Calculad la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^4$.
b) Encontrad una base de $\ker(f)$, el subespacio núcleo de f. ¿Es f inyectiva?
c) Encontrad una base de (f), el subespacio imagen de f. ¿Es f exhaustiva?
d) ¿Es posible encontrar una aplicación lineal $g:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composición

$$\mathrm{f}\circ g:\mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \text{ , definida por } (\mathrm{f}\circ g)(v)=f(g(v)) \text{ , } v\in \mathbb{R}^4,$$

sea la identidad? O sea, $(f\circ g)(v)=v$, para todo $v\in^4$?
Indicación: Pensad en el vector v=(0,0,1,0)$\in \mathbb{R}^4$.
e) ¿Es possible encontrar una aplicación $h:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composición

$$\mathrm{h}\circ f:\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3 \text{ , definida por } (\mathrm{h}\circ f)(u)=h(f(u)) \text{ , } u\in \mathbb{R}^3,$$

sea la identidad? O sea, $(h\circ f)(u)=u$, para todo u$\in \mathbb{R}^3$?
Indicación: Pensad en el vector $u=(4,3,-8)\in \mathbb{R}^3$.

Solución
a) Para encontrar A, la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^4$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los ponemos por columnas.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Para encontrar una base del $\ker(f)$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hacemos Gauss, o transformaciones por filas. En la primera transformación permutamos filas 1 y 3. En la segunda hacemos $f_2'=f_2-2f_1$, $f_3'=f_3-3f_1$, $f_4'=f_4-4f_1$.

En la tercera hacemos $f_3' = f_3 - f_2$ y $f_4' = f_4 - f_2$. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nos quedan las ecuaciones: $x - 4y - z = 0$ e $8y + 3z = 0$. O sea, $y = -\frac{3}{8}z$ y $x = 4y + z = -4 \cdot \frac{3}{8}z + z = (-\frac{12}{8} + \frac{8}{8})z = -\frac{4}{8}z$. O sea, $(x, y, z) = (-\frac{4}{8}z, -\frac{3}{8}z, z)$. Sacando factor común: $(x, y, z) = (-\frac{1}{8}z)(4, 3, -8)$. Por lo tanto, una base del núcleo es $\{(4, 3, -8)\}$.

Alternativamente: la primera ecuación nos dice $3x - 4y = 0$. La segunda equación nos dice $2x + z = 0$. Por lo tanto, $z = -2x$. Así, pues, el vector $(4, 3, -8)$ verifica las dos primeras ecuaciones. Pero vemos que también verifica la tercera, $x - 4y - z = 0$ y la quarta $4x - 8y - z = 0$. Eso nos dice que por lo menos hay un vector no nulo del núcleo. Por lo tanto, el rango de A es 2 como mucho. Pero ya vemos que es 2, puesto que el menor 2×2 formado por las dos primeras columnas y las dos primeras filas tiene determinante no nulo. Así, $\ker(f) = [(4, 3, -8)]$ y $\{(4, 3, -8)\}$ es una base del $\ker(f)$.

La aplicación f no es inyectiva puesto que el núcleo es no nulo.
c) Sabemos que $\dim(E) = \dim \ker(f) + \dim(f)$. Como $\dim(E) = 3$ y $\dim \ker(f) = 1$, entonces $\dim(f) = 2$. Además la imagen de f se encuentra calculando las imágenes de una base, por ejemplo, la canónica. Antes hemos visto:

$$(f) = [f(e_1), f(e_2), f(e_3)] = [(3, 2, 1, 4), (-4, 0, -4, -8), (0, 1, -1, -1)].$$

El primer y segundo vectores son linealmente independientes. Así $\{(3, 2, 1, 4), (-4, 0, -4, -8)\}$ forman una base de (f).

La aplicación f no es exhaustiva porque la dimensión de la imagen es 2 y en cambio la dimensión del espacio de llegada es 4.
d) No, no existe una aplicación lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composición $f \circ g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ verifique $(f \circ g)(v) = v$, para todo v $\in \mathbb{R}^4$. Si existiera, tomando el vector $v = (0, 0, 1, 0)$, que no es de la imagen de f, tendríamos $v = (f \circ g)(v) = f(g(v))$ y entonces v sería de la imagen de f, una contradicción.
e) No, no existe una aplicación lineal $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composición $h \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verifique $(h \circ f)(u) = u$, para todo u $\in \mathbb{R}^3$. Si existiera, tomando el vector $u = (4, 3, -8)$, tendríamos $h(f(u)) = h(0) = 0$, ya que $f(u) = 0$ y $h(f(u)) = h(0) = 0$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 3 - 22 enero 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Determinad el número complejo, z, su opuesto, $-z$, y su conjugado, $\bar{z}$, sabiendo que $\frac{1}{z} = i$.

z	$-z$	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$
			i

b) Calculad todas las raíces quintas del siguiente número complejo: $-i$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Solución

a) Para resolver este ejercicio utilizaremos la definición de opuesto de un número complejo que aparece en la página 22, de conjugado de la página 24 del material y el cociente de números complejos.

Partimos de que:

$\frac{1}{z} = i \rightarrow \frac{1}{i} = z$

$z = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$

Por lo tanto.

z	$-z$	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$
$-i$	i	i	i

b) Escribimos el complejo $-i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{0 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{0}\right) = \arctan(-\infty) = 270^\circ$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale ∞ en 90^o y en 270^o. Como que el afijo del punto buscado es $(0, -1)$ el ángulo está entre el tercer y cuarto cuadrante, es decir, en 270^o. Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, en orden a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo cual, el primero que hacemos es dibujar el número $-i$ al plan complejo. Este número está asociado en su punto $(0, -1)$, por lo tanto, es un número que se encuentra entre el tercer y el cuarto cuadrante.

Tenemos, por lo tanto, que $-i = 1_{270^\circ}$

Como que nos piden las raíces quintas tenemos que hacer (observamos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material se hace el mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt[5]{-i} = \sqrt[5]{1_{270^\circ}} = 1_{\frac{270^\circ+360^\circ k}{5}}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

esto es, el módulo de las raíces es: $r = 1$

Los argumentos de las raíces cúbicas son $\beta = \frac{270^\circ+360^\circ k}{5}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Si $k = 0$, tenemos que $\beta_0 = 54^\circ$

Si $k = 1$, tenemos que $\beta_1 = 54^\circ + 72^\circ = 126^\circ$

Si $k = 2$, tenemos que $\beta_2 = 54^\circ + 144^\circ = 198^\circ$

Si $k = 3$, tenemos que $\beta_3 = 54^\circ + 216^\circ = 270^\circ$

Si $k = 4$, tenemos que $\beta_4 = 54^\circ + 288^\circ = 342^\circ$

Por lo tanto, las cinco raíces quintas del complejo $-i$ son:

$1_{54^\circ}, 1_{126^\circ}, 1_{198^\circ}, 1_{270^\circ}, 1_{342^\circ}$

2. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \mathrm{a}_1 + a_3 + a_4 = 0, a_2 = 0\}.$$

Y sea $v = (-4, 0, 1, 3)$.
a) Comprobad que $A = \{(1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ es una base de E. ¿$v \in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.
b) Sea $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de una base B a la base A. ¿Cuál es la base B?

Solución
a) Como sabemos que la dimensión de E es 2, solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectors de A pertenecen a E comprobando que se cumplen las condiciones $a_1+a_3+a_4 = 0$ y $a_2 = 0$ para los dos vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues A es una base de E.
Para ver si $v \in E$ miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -1$ y $y = -3$. Por tanto $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(-1, -3)$.
b) La matriz de cambio de base de B a A expresa los vectores de la base de B en función

de los vectores de A. Así pues, usando las columnas de la matriz $C_{B\to A}$ obtenemos que los dos vectores de la base B son:

$$\begin{aligned} 0\cdot(1,0,-1,0)+3\cdot(1,0,0,-1)&=(3,0,0,-3)\\ 1\cdot(1,0,-1,0)+(-1)\cdot(1,0,0,-1)&=(0,0,-1,1)\end{aligned}$$

Por tanto, $B=\{(3,0,0,-3),(0,0,-1,1)\}$.

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} -x+2y+(k+1)z=0\\ 2x+(k-1)y-3z=0\\ 3x+(k+2)y-3z=0\end{aligned}\right\}$$

Se pide:
a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$.
b) Resolved el sistema para $k=2$. En este caso, razonad si existe alguna solución de este sistema verificando que $x=9$.

Solución
a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & k+1\\ 2 & k-1 & -3\\ 3 & k+2 & -3\end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & k+1 & 0\\ 2 & k-1 & -3 & 0\\ 3 & k+2 & -3 & 0\end{array}\right)$$

Como el sistema es homogéneo (todos los elementos de la última columna de la matriz ampliada son ceros), se tiene que $\text{rango}(A)=\text{rango}(M)$ y, por lo tanto, el sistema siempre será compatible.

Observemos que $\text{rango}(A)\geq 2$, puesto que $\begin{vmatrix} 2 & -3\\ 3 & -3\end{vmatrix}\neq 0$

A continuación, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A para los diferentes valores del parámetro k,

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & k+1\\ 2 & k-1 & -3\\ 3 & k+2 & -3\end{vmatrix}=-k^2+6k-8=-(k-4)(k-2)$$

- Si $k\neq 4$ y $k\neq 2$, entonces $\text{rango}(A)=3=\text{rango}(M)=\text{n}^o$ incógnitas, por lo tanto el sistema es $\boxed{\text{compatible determinado}}$.
- Si $k=4$, $\text{rango}(A)=2=\text{rango}(M)\neq\text{n}^o$ incógnitas $\rightarrow$ $\boxed{\text{Compatible indeterminado}}$.
- Si $k=2$, $\text{rango}(A)=2=\text{rango}(M)\neq\text{n}^o$ incógnitas $\rightarrow$ $\boxed{\text{Compatible indeterminado}}$.

b) Para $k=2$, el sistema homogéneo que se tiene que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} -x+2y+3z=0\\ 2x+y-3z=0\\ 3x+4y-3z=0\end{aligned}\right\}$$

Sabemos, por el apartado anterior, que para $k = 2$ este sistema es compatible indeterminado.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1) $F2 + 2{\cdot}F1 \to F2$ y $F3 + 3{\cdot}F1 \to F3$

(2) $F3 - 2{\cdot}F2 \to F3$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y + 3z = 0 \\ 5y + 3z = 0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene la relación $z = -\frac{5}{3}y$. Si sustituimos en la primera ecuación y despejamos la x obtenemos que $x = -3y$. Así pues, las soluciones de este sistema son de la forma:

$$\boxed{\left(x = -3y,\ y = y,\ z = -\tfrac{5}{3}y\right)}$$

Finalmente, se nos pide razonar si hay alguna solución en que $x = 9$. Observemos que todas las soluciones verifican que $x = -3y$, por lo tanto si $x = 9$ tendremos que $y = -3$ y en consecuencia tendremos que $z = -\frac{5}{3}{\cdot}(-3) = 5$. Así pues, podemos concluir afirmativamente diciendo que sí que hay una solución en que $x = 9$, concretamente la solución $(x = 9,\ y = -3,\ z = 5)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 2y + 2z, 3x + 2y + z).$$

a) Encontrad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
b) ¿Diagonaliza la aplicación f?
c) Encontrad una base del subespacio $\ker(f)$, el núcleo de f.
d) Calculad el polinomio característico de f.
e) Calculad una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga el número máximo de vectores propios de f.

Solución

a) Para encontrar A, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los ponemos por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Puesto que la matriz A de f es simétrica, entonces f diagonaliza.
c) Para calcular una base del $\ker(f)$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por Gauss, o transformaciones por filas. En la primera transformación hacemos $f_2' = f_2 - 2f_1$ y $f_3' = f_3 - 3f_1$. En la segunda transformación sacamos factor común -2 en la segunda fila y -4 en la tercera fila. En la tercera transformación, $f_3' = f_3 - f_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda: $x+2y+3z = 0$ e $y+2z = 0$. O sea, $y = -2z$ y $x = -2y-3z = 4z-3z = z$. Por lo tanto las soluciones son de la forma: $(x, y, z) = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1)$. Una base del $\ker(f)$ es, pues, $\{(1, -2, 1)\}$.

d) Para calcular el polinomio característico de f, calculamos:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 2 & 2-t & 2 \\ 3 & 2 & 1-t \end{vmatrix} =$$
$$-t^3 + 4t^2 + 12t = (0-t)(t^2 - 4t - 12) = (0-t)(6-t)(-2-t).$$

e) Los vectores propios de f de valor propio 0 son los del $\ker(f - 0\mathrm{I})$. O sea, los del $\ker(f)$. Antes hemos visto que $\ker(f)$ está generado por el vector $(1, -2, 1)$.

Para encontrar un vector propio de valor propio 6, buscamos una base del $\ker(f - 6\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 2 & 3 \\ 2 & 2-6 & 2 \\ 3 & 2 & 1-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como antes, haciendo Gauss vemos que una solución es el vector $(1, 1, 1)$.

Para encontrar un vector propio de valor propio -2, buscamos una base del $\ker(f - (-2)\mathrm{I}) = \ker(f + 2\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 2 & 3 \\ 2 & 2+2 & 2 \\ 3 & 2 & 1+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como antes, hacemos Gauss y vemos que una solución es el vector $(1, 0, -1)$. Por lo tanto, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f es $\{(1, -2, 1), (1, 1, 1), (1, 0, -1)\}$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\,\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 1 - 10 junio 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

(a) Expresad en forma binómica el siguiente complejo: $(-4i)^{-1}$

(b) Resolved la ecuación: $(1+i)z = \frac{1-i}{z}$. Proporcionad la solución o las soluciones en forma binómica.

Solución

(a) Tenemos que saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica), recordando que $i^2 = -1$, y agrupamos parte real y parte imaginaria.

$(-4i)^{-1} = \frac{1}{-4i} = \frac{4i}{(-4i)4i} = \frac{4i}{-16i^2} = \frac{4i}{16} = \frac{i}{4}$

Por tanto, la respuesta es: $\frac{1}{4}i$

(b) Seguiremos el ejemplo de la página 16 así como los ejercicios 6 y 7 de la página 49 del material. Tal como haríamos con una ecuación con coeficientes reales, intentaremos aislar la z de esta ecuación.

$(1+i)z = \frac{1-i}{z} \Longleftrightarrow (1+i)z^2 = 1-i \Longleftrightarrow z^2 = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$

Por tanto, tenemos que resolver la ecuación: $z^2 = -i$

Es decir, las soluciones son: $z = \sqrt{-i}$

La solución de la ecuación es, pues, las dos raíces cuadradas de $-i$. Para hallarlas, primero, pasamos $-i$ a forma polar.

Escribimos el complejo $-i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{(-1)^2} = 1$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{0}\right) = \arctan(-\infty) = 270^o$

Tenemos, por tanto, que $-i = 1_{270^o}$

Como nos piden las raíces cuadradas tenemos que hacer lo siguiente (observemos que en el apartado 3.6.1 de la página 43 del material se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt{z} = \sqrt{1_{270^o}} = 1_{\frac{270^o+360^o k}{2}}$ para $k = 0, 1$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = 1$

Los argumentos de las raíces son: $\beta_k = \frac{270^o+360^o k}{2}$ para k=0,1

- Si $k=0$, tenemos que $\beta_0 = 135^o$
- Si $k=1$, tenemos que $\beta_1 = 135^o + 180^o = 315^o$

Por tanto, las dos raíces cuadradas del complejo $-i$, que son las soluciones de la ecuación dada, son: 1_{135^o}, 1_{315^o}

Para pasar estas soluciones a forma binómica solo tenemos que mirar los valores de la tabla y tendremos:

- $1_{135^o} = \cos 135^o + i \sin 135^o = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$
- $1_{315^o} = \cos 315^o + i \sin 315^o = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

2. Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$F = <(\lambda,\lambda,\lambda),(0,\lambda^2,\lambda^2),(\lambda^3,0,\lambda^3),(\lambda^4,\lambda^4,0)>, \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) Calculad la dimensión de F según λ y una base en cada caso.

(b) Sea $v = (-2, 2, 1)$. En el caso $\lambda = 1$, ¿$v \in F$? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base que habéis encontrado en el apartado anterior.

(c) Sea $B = \{(-2,2,1),(0,-1,-1),(-1,0,-1)\}$ una base de F para el caso $\lambda = 1$. Calculad la matriz $C_{B\to A}$ de cambio de base de la base B a la base A que habéis calculado en el primer apartado para $\lambda = 1$.

Solución

(a) Calculamos el rango de los vectores con los que está definido F. Comenzamos con el determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda^3 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda^2 \cdot \lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^6$$

Así, si $\lambda \neq 0$ la dimensión de F es 3. Es decir, F es $\mathbb{R}^3$. En este caso una base puede ser la formada por los vectores con los que está definido F con un valor cualquiera de λ distinto de 0. Por ejemplo, $\lambda = 1$: $A = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$.

Si $\lambda = 0$ todos los vectores de F son 0, de forma que la dimensión de F es 0.

(b) Como en el caso $\lambda = 1$ la dimensión de F es 3, sabemos directamente que $v \in F$. Para calcular sus coordenadas resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = -1$, $y = 3$, $z = -1$. Por tanto, las coordenadas de v en la base A son $(-1, 3, -1)$.

(c) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A. Para el primer vector de B hemos calculado sus coordenadas en A en el apartado anterior. El segundo y tercer vector de B vemos que son directamente el segundo y tercero de A en negativo (también podríamos resolver unos sistemas lineales análogos al del apartado anterior). Así la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Dado el sistema de ecuaciones con parámetros reales a, b, c e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=a \\ -x+2y-z=b \\ x-y+z=c \end{array}\right\}$$

Se pide:

(a) Demostrad que es un sistema compatible determinado para cualquier valor de los parámetros a, b y c.

(b) Resolved por Cramer el sistema dejando las soluciones en función de a, b y c.

(c) Determinad razonadamente qué tienen que cumplir a, b y c para que la solución verifique $x=y=z$.

Solución

(a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & a \\ -1 & 2 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right)$$

Recordad que por el Teorema de Rouché-Fröbenius [ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 13] un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado si:

$$\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(M) = \text{ n.}^o \text{ incógnitas.}$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, independientemente de los valores de a, b y c, entonces también lo será el rango de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1+2-4+1-1 = -1$$

Así pues, como que $|A| \neq 0$ para cualquier valor de a, b y c, podemos afirmar que:

$$\boxed{\text{el sistema siempre es compatible determinado}}.$$

(b) Para calcular la solución del sistema podemos utilizar la regla de Cramer [ver apuntes módulo 3, apartado 7, páginas 23 a 26]:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & -1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a-3b-5c}{-1} = -a+3b+5c$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-b-c}{-1} = b+c$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a+2b+3c}{-1} = a-2b-3c$$

Así pues, la solución del sistema en función de los parámetros a, b y c es:

$$\boxed{x=-a+3b+5c \qquad y=b+c \qquad z=a-2b-3c}.$$

(c) Para determinar qué tienen que cumplir a, b y c para que la solución verifique $x=y=z$, se puede proceder de varias maneras. Por ejemplo, podemos coger el sistema e imponer $x=y=z$ obteniendo:

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z&=a \\ -x+2y-z&=b \\ x-y+z&=c \end{aligned}\right\} \underset{x=y=z}{\Longrightarrow} \left.\begin{aligned} x+x+2x&=a \\ -x+2x-x&=b \\ x-x+x&=c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 4x&=a \\ 0&=b \\ x&=c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 4c&=a \\ 0&=b \end{aligned}\right\}$$

Por lo tanto, si queremos que la solución verifique $x=y=z$, entonces los parámetros tienen que cumplir que $\boxed{a=4c \text{ y } b=0}$.

Otra manera de resolver este apartado, es a partir de la solución encontrada en el apartado anterior. Por el apartado (b) sabemos que la solución del sistema es:

$$x=-a+3b+5c \qquad y=b+c \qquad z=a-2b-3c.$$

Así pues, si se tiene que verificar que $x=y=z$ (es decir, $x=y$, $x=z$ y $y=z$) se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -a+3b+5c&=b+c \\ -a+3b+5c&=a-2b-3c \\ b+c&=a-2b-3c \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} -a+2b+4c&=0 \\ -2a+5b+8c&=0 \\ -a+3b+4c&=0 \end{aligned}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar la solución de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F2-2\cdot F1\to F2 \\ F3-F1\to F3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F3-F2\to F3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{aligned} -a+2b+4c&=0 \\ b&=0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{a=4c \ \text{ y } \ b=0}.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida en las bases canónicas por

$$f(x, y, z, t) = (x + 2z - t, -\lambda y + 2\lambda t, -2x - 3y).$$

Consideremos $\lambda = 1$ en los dos primeros apartados.

(a) Demostrad que f es una aplicación lineal.

(b) Calculad la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y de $\mathbb{R}^3$.

(c) Para los diferentes valores de λ, calculad una base B de $\mathbb{R}^4$ formada por los vectores de la base del núcleo de f y los vectores necesarios de la base canónica hasta completarla. Escribid la matriz de f si usamos la base B en $\mathbb{R}^4$ y la base canónica en $\mathbb{R}^3$.

Solución

(a) f sí que es una aplicación lineal. Para demostrarlo se debe comprobar (como en el ejemplo 1 del punto 2.2 del Módulo 4) que la imagen de la suma de vectores es siempre la suma de sus imágenes:

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$$

$$= ((x_1 + x_2) + 2(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2), -(y_1 + y_2) + 2(t_1 + t_2), -2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2))$$

$$= (x_1 + 2z_1 - t_1 + x_2 + 2z_2 - t_2, -y_1 + 2t_1 - y_2 + 2t_2, -2x_1 - 3y_1 - 2x_2 - 3y_2)$$

$$= (x_1 + 2z_1 - t_1, -y_1 + 2t_1, -2x_1 - 3y_1) + (x_2 + 2z_2 - t_2, -y_2 + 2t_2, -2x_2 - 3y_2)$$

$$= f(x_1, y_1, z_1, t_1) + f(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

Comprobamos también que la imagen del producto de un vector por un escalar siempre es el producto de la imagen por el escalar:

$$f(kx, ky, kz, kt) = (kx + 2kz - kt, -ky + 2kt, -2kx - 3ky)$$

$$= (k(x + 2z - t), k(-y + 2t), k(-2x - 3y))$$

$$= k(x + 2z - t, -y + 2t, -2x - 3y) = k \cdot f(x, y, z, t)$$

(b) Para calcular A, la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^4$, calculamos las imágenes de los cuatro vectores de la base canónica y los colocamos en columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Para calcular una base del $\ker(f)$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 2\lambda \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda ecuación es $-\lambda y + 2\lambda t = 0$. Vemos que aparecen dos casos a tratar:
Si $\lambda \neq 0$, podemos dividir y obtener $y = 2t$. Sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos $-2x - 6t = 0$. Por tanto, $x = -3t$. Sustituyendo en la primera equación $-3t + 2z - t = 0$ de donde $z = 2t$. O sea, $(x, y, z, t) = (-3t, 2t, 2t, t)$. Sacando factor común: $(x, y, z, t) = t(-3, 2, 2, 1)$. Por tanto, una base del núcleo es $\{(-3, 2, 2, 1)\}$.
Para completar una base de $\mathbb{R}^4$ podemos añadir los vectores $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$. Estos cuatro vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base B de $\mathbb{R}^4$. Para obtener la matriz en esta base B de salida podemos multiplicar la matriz A por la matriz de los vectores de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 0$ los vectores del núcleo cumplen $x + 2z - t = 0$ y $-2x - 3y = 0$. Sumándole a esta segunda ecuación el doble de la primera, y aislando la x y la y, obtenemos dos expresiones $x = -2z + t$ y $-3y = -4z + 2t$. Por tanto una base del núcleo es $\{(-2, \frac{4}{3}, 1, 0), (1, -\frac{2}{3}, 0, 1)\}$. Para completar esta base del núcleo hasta tener una base de $\mathbb{R}^4$ podemos añadir los vectores $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, 0)$. Se puede comprobar que el determinante de estos vectores no es nulo. Para obtener la matriz en esta base B de salida podemos multiplicar la matriz A por la matriz de los vectores de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 2 - 13 junio 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

(a) Expresad en forma binómica el inverso del siguiente complejo: $1 - i\sqrt{3}$

(a) ¿Qué valor, o valores, tendrá que tomar m, un número real, para que el número $\frac{5+mi}{3-2i}$ sea un número complejo imaginario puro? Para $m = -5$, expresad el número complejo $5 + mi$ en forma polar..

Solución

(a) El inverso del complejo dado es: $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-1}$. Para hallar su forma binómica multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria (recordemos que $i^2 = -1$):

$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-3i^2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

Por tanto, la respuesta es: $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

(b) Primero miraremos a qué número complejo corresponde la fracción dada. Para esto multiplicaremos y dividiremos por el conjugado del denominador. Posteriormente aplicaremos la definición de número complejo imaginario puro que hay en la página 20 del material.

$\frac{5+mi}{3-2i} = \frac{(5+mi)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{15+10i+3mi+2mi^2}{9-4i^2} = \frac{(15-2m)+(10+3m)i}{9+4} = \frac{15-2m}{13} + \frac{10+3m}{13}i$

La definición de un número complejo imaginario puro es que la parte real tiene que ser nula (ver página 20 del material), por tanto, imponemos que la parte real sea 0:

$\frac{15-2m}{13} = 0 \Longleftrightarrow 15 - 2m = 0 \Longleftrightarrow m = \frac{15}{2}$

Por tanto, el valor solicitado es $m = \frac{15}{2}$

Para expresar el número $5 - 5i$ en forma polar lo haremos tal como se explica en el apartado 3.4, página 27, del material, sobre la forma polar de los números complejos:

$m = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-5}{5}\right) = \arctan(-1) = 315^o$

Tenemos, por tanto, que $5 - 5i = 5\sqrt{2}_{315^o}$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en 135^o y en 315^o. Como el afijo del punto buscado es $(5, -5)$, el ángulo está en el cuarto cuadrante, es decir, en 315^o.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $5-5i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(5,-5)$, por tanto, es un número que se encuentra en el cuarto cuadrante.

2. Sean $e_1=(2,0,2,4)$, $e_2=(0,3,1,1)$, $e_3=(-1,0,-1,-2)$ y $e_4=(0,-6,-2,-2)$ vectores de $\mathbb{R}^4$. Sea $E=<e_1,e_2,e_3,e_4>$. Sea $v=(6,-12,2,8)$.

(a) Calculad la dimensión de E y una base A. ¿$v\in E$? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sea $w=e_2-e_1$. $B=\{v,w\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de la base A a la base B y de la base B a la base A.

Solución

(a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -6\\ 2 & 1 & -1 & -2\\ 4 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}=2$$

Ya que podemos ver directamente que $C_3=\frac{-C_1}{2}$ y $C_4=-2\cdot C_2$. Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores ya que son linealmente independientes: contienen el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}\neq 0$. Así pues $A=\{e_1,e_2\}$.
Para ver si $v\in E$ resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 3\\ 2 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\\ -12\\ 2\\ 8\end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x=3$ y $y=-4$. Por tanto, $v\in E$ y sus coordenadas en la base A son $(3,-4)$.

(b) Comenzamos por calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base A, ya que para calcularla debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A y esto ya lo tenemos (para v lo hemos calculado en el apartado anterior y w está definido directamente como combinación lineal de e_1 y e_2). Así pues la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A}=\begin{pmatrix} 3 & -1\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B calculamos la inversa:

$$C_{A\to B}=\begin{pmatrix} 3 & -1\\ -4 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1\\ -4 & -3\end{pmatrix}$$

3. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real k e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y+(k-2)z=0 \\ 3x+(k+6)y-3z=0 \\ (k+2)x-\quad y+\quad z=0 \end{array}\right\}$$

Se pide:

(a) Calculad para qué valores de k el sistema sólo admite la solución $(x,y,z)=(0,0,0)$.

(b) Para el valor $k\geq 0$ (k positivo o cero) que hace que el sistema sea compatible indeterminado, obtened todas sus soluciones.

(c) Determinad la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $k=-3$.

Solución

(a) Para que un sistema homogéneo de tres incógnitas sólo admita la solución trivial $(x,y,z)=(0,0,0)$ se debe verificar que el rango$(A)=3$ [ver apuntes módulo 3, apartado 5, páginas 17 y 18].

La matriz de coeficientes, A, asociada al sistema es:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & k-2 \\ 3 & k+6 & -3 \\ k+2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si calculamos su determinante se obtiene:

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 5 & k-2 \\ 3 & k+6 & -3 \\ k+2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-k^3-6k^2-9k=-k\cdot(k+3)^2$$

Si $k\neq 0$ y $k\neq -3$, entonces $|A|\neq 0$ y por lo tanto rang$(A)=3$. Así pues,

$$\boxed{\text{Para } k\neq 0 \text{ y } k\neq -3 \text{ el sistema sólo tiene la solución } (x=0,y=0,z=0)}.$$

(b) A partir de los resultados obtenidos en el apartado anterior, podemos afirmar que para $k=0$ el rang$(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\neq 0$ por lo tanto, como que el sistema es homogéneo y tiene tres incógnitas se obtiene:

$$\text{rang}\,(A)=\text{rang}\,(M)=2\neq\ \text{n.}^o\ \text{incógnitas.}$$

es decir, el sistema es compatible indeterminado.

Para resolver este sistema homogéneo compatible indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ 3x+6y-3z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22]:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & -15 & 9 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) $5{\cdot}F2-3{\cdot}F1 \rightarrow F2$ y $5{\cdot}F3-2{\cdot}F1 \rightarrow F3$
(2) $F3+F2 \rightarrow F3$
El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ 15y-9z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+(3z)-2z=0 \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=\frac{-1}{5}z \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\}$$

Así pues, para $k=0$ las soluciones del sistema homogéneo son de la forma:

$$\boxed{\left(x=\frac{-1}{5}z,\ y=\frac{9}{15}z,\ z\right)}.$$

(c) Para $k=-3$ el sistema a considerar es:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-5z=0 \\ 3x+3y-3z=0 \\ -x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, tenemos que los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema son:

$\pi_1 : 5x+5y-5z=0$ $\qquad$ $\pi_2 : 3x+3y-3z=0$ $\qquad$ $\pi_3 : -x-y+z=0$

Si nos fijamos en las ecuaciones que definen los tres planos, podemos observar que son ecuaciones proporcionales y por lo tanto, podemos afirmar que estos tres planos son coincidentes, es decir $\pi_1=\pi_2=\pi_3$.

4. Sea $f:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida en la base canónica por

$$f(x,y,z)=(-11x-7y-7z, a\cdot y, 14x+7y+10z).$$

(a) Calculad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Cuando $a=3$ calculad el polinomio característico desarrollando el determinante por la fila que contenga más ceros. Indicad cuáles son los valores propios de f y calculad una base que contenga el número máximo de vectores propios.

(c) Si $a\neq 3$ y $a\neq -4$ calculad una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga el número máximo de vectores propios de f.

Solución

(a) Para calcular A, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los colocamos en columnas.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -7 & -7 \\ 0 & a & 0 \\ 14 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

(b) Para calcular el polinomio característico de f, desarrollamos el determinante de la matriz por la segunda fila:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -11-t & -7 & -7 \\ 0 & 3-t & 0 \\ 14 & 7 & 10-t \end{vmatrix} =$$
$$(3-t)((-11-t)(10-t) + 14 \cdot 7) = (3-t)(-110 + 11t - 10t + t^2 + 98) =$$
$$(3-t)(t^2 + t - 12) = (3-t)(t-3)(t+4)$$

Los valores propios de f son -4 con multiplicidad 1 y 3 con multiplicidad 2.

Para encontrar un vector propio de valor propio -4 buscamos una base del $\ker(f + 4\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11+4 & -7 & -7 \\ 0 & 3+4 & 0 \\ 14 & 7 & 10+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 14 & 7 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos aislar de la segunda ecuación y ver que $y = 0$. De la primera obtenemos $-7x - 7z = 0$ y por tanto $z = -x$. De la tercera lo mismo. Una solución es el vector $(1, 0, -1)$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio 3 buscamos una base del $\ker(f - 3\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11-3 & -7 & -7 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 14 & 7 & 10-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} -14 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema se reduce a una única ecuación $-14x - 7y - 7z = 0$. Pueden ser generadores del subespacio de soluciones los vectores $(-1, 1, 1)$ y $(0, -1, 1)$ Por tanto, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f es $\{(1, 0, -1), (-1, 1, 1), (0, -1, 1)\}$.

(c) El polinomio característico de f en general será: $\det(A - t\mathrm{I}) = (a - t)(t - 3)(t + 4)$. Los valores propios de f son -4, 3 y a, todos con multiplicidad 1 porque $a \neq 3$ y $a \neq -4$. El vector propio de f correspondiente al valor propio -4 es el que ya hemos encontrado antes, $(1, 0, -1)$, porque de la segunda ecuación se deduce igualmente que $y = 0$ y las otras dos ecuaciones son iguales.

Para encontrar el vector propio de valor propio 3 buscamos una base del $\ker(f - 3\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -14 & -7 & -7 \\ 0 & a-3 & 0 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos aislar de la segunda ecuación $(a - 3)y = 0$ y ver que $y = 0$ dado que $a \neq 3$. Entonces de la primera obtenemos $-14x - 7z = 0$ y por tanto $z = -2x$. La tercera es equivalente. Una solución es el vector $(1, 0, -2)$.

Para encontrar el vector propio de valor propio a buscamos una base del $\ker(f - a\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11-a & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 10-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si sumamos las dos ecuaciones (primera y tercera) obtenemos ésta: $(3 - a)x + (3 - a)z = 0$. Como $a \neq 3$ podemos aislar $z = -x$. Y sustituyendo en la segunda $14x + 7y - (10 - a)x = 0$ de donde $y = \frac{-(4+a)x}{7}$. Una solución es el vector $(1, -\frac{4+a}{7}, -1)$. Por tanto una base con el máximo de vectores propios seria $\{(1, 0, -1), (1, 0, -2), (1, -\frac{4+a}{7}, -1)\}$. Podemos comprobar que el determinante es no nulo porque $a \neq -4$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 3 - 20 junio 2020

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:

(a) Expresad en forma binómica el siguiente complejo: $(3+2i)^{-1}$

(b) ¿Qué valor, o valores, tendrá que tomar n, número real, para que el número $\frac{10+10i}{5+ni}$ sea un número complejo real? Una vez hayáis encontrado el valor, o valores, de n, expresad el número complejo $5+ni$ en forma polar.

Solución

(a) Tenemos que saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica), recordando que $i^2=-1$, y agrupamos parte real y parte imaginaria.
$(3+2i)^{-1} = \frac{1}{3+21} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{3^2-2^2i^2} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
Por tanto, la respuesta es: $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

(b) Primero miraremos a qué número complejo corresponde la fracción dada. Para esto multiplicaremos y dividiremos por el conjugado del denominador. Posteriormente aplicaremos la definición de número complejo real que hay en la página 20 del material:
$\frac{10+10i}{5+ni} = \frac{(10+10i)(5-ni)}{(5+ni)(5-ni)} = \frac{50-10ni+50i-10ni^2}{25-n^2i^2} = \frac{(50+10n)+(50-10n)i}{25+n^2} = \frac{50+10n}{25+n^2} + \frac{50-10n}{25+n^2}i$
La definición de un número complejo real es que la parte imaginaria tiene que ser nula (ver página 20 del material), por tanto, imponemos que la parte imaginaria sea 0:
$\frac{50-10n}{25+n^2} = 0 \Longleftrightarrow 50-10n=0 \Longleftrightarrow 10n=50 \Longleftrightarrow n=5$
Por tanto, el valor solicitado es $n=5$
Para expresar el número $5+5i$ en forma polar lo haremos tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material, sobre la forma polar de los números complejos:
$m = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$\alpha = \arctan\left(\frac{5}{5}\right) = \arctan(1) = 45^o$
Tenemos, por tanto, que $5+5i = 5\sqrt{2}_{45^o}$
NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 1 en 45^o y en 225^o. Como el afijo del punto buscado es $(5,5)$ el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 45^o.

Com se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $5+5i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto $(5,5)$, por tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante.

2. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^5$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \in^5 |a_1+a_2=0, a_2+a_3=0\}.$$

Y sea $v=(-3,3,-3,3,-3)$.

(a) Comprobad que $A=\{(1,-1,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ es una base de E. ¿$v\in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

(b) Sean $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ las matrices de cambio de base de una base B a la base A, y de una base D a la base B respectivamente. ¿Cuál es la base D?

Solución

(a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primero comprobaremos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumplen las condiciones $a_1+a_2=0$ y $a_2+a_3=0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobaremos que son linealmente independientes ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así pues A es una base de E.

Para ver si $v\in E$ miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Que tiene solución $x=-3$, $y=3$ y $z=-3$. Por tanto, $v\in E$ y sus coordenadas en la base A son $(-3,3,-3)$.

(b) Sabemos que:

$$C_{D\to A} = C_{B\to A}\cdot C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O alternativamente, podríamos realizar el procedimiento mostrado a continuación dos veces (para calcular primero la base B y luego la base D).

La matriz de cambio de base de D a A expresa los vectores de la base D en función de los vectores de A. Así, usando las columnas de la matriz $C_{D\to A}$ tenemos que los tres vectores de la base D serán:

$$\begin{aligned}(-1)\cdot(1,-1,1,0,0)+0\cdot(0,0,0,1,0)+(-1)\cdot(0,0,0,0,1)&=(-1,1,-1,0,-1)\\ 0\cdot(1,-1,1,0,0)+(-1)\cdot(0,0,0,1,0)+0\cdot(0,0,0,0,1)&=(0,0,0,-1,0)\\ 0\cdot(1,-1,1,0,0)+(-1)\cdot(0,0,0,1,0)+(-1)\cdot(0,0,0,0,1)&=(0,0,0,-1,-1)\end{aligned}$$

Por tanto, $D=\{(-1,1,-1,0,-1),(0,0,0,-1,0),(0,0,0,-1,-1)\}$.

3. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real m e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{aligned}x-3y+2z&=m\\ x+7y-2z&=1\\ 2x-11y+6z&=2\end{aligned}\right\}$$

Se pide:

(a) Determinad razonadamente el valor de m para el cual el sistema es compatible.

(b) Para este valor de m, obtenido en el apartado anterior, calculad el conjunto de soluciones del sistema.

(c) Determinad la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $m=0$.

Solución

(a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&7&-2\\2&-11&6\end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{rrr|r}1&-3&2&m\\1&7&-2&1\\2&-11&6&2\end{array}\right)$$

Notemos que $|A|=0$, pero A tiene menores de orden 2 no nulos: $\begin{vmatrix}1&-3\\1&7\end{vmatrix}\neq 0$, entonces podemos afirmar que $\operatorname{rang}(A)=2$.
Para que el sistema sea compatible se tiene que verificar que $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(M)$. Por lo tanto, tenemos que calcular el valor del parámetro m que anula el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor, de orden dos no nulo, con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}1&-3&m\\1&7&1\\2&-11&2\end{vmatrix}=25-25m\implies 25-25m=0\implies m=1.$$

Así pues, podemos afirmar:

$$\boxed{\text{Si } m=1\ \to\ \operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(M)\ \to\ \text{Sistema compatible}}.$$

(b) Para $m = 1$, el sistema que se tiene que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=1 \\ x+7y-2z=1 \\ 2x-11y+6z=2 \end{array}\right\}$$

Sabemos por el apartado anterior que para $m = 1$ este sistema es compatible indeterminado.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 19 a la 22] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & 6 & 2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1) $F2 - F1 \to F2$ y $F3 - 2 \cdot F1 \to F3$
(2) $2 \cdot F3 + F2 \to F3$

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=1 \\ 10y-4z=0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene la relación $z = \frac{5}{2}y$. Si hacemos esta sustitución en la primera ecuación y aislamos la x obtenemos que $x = 1 - 2y$. Así pues, las soluciones de este sistema son de la forma:

$$\boxed{\left(x = 1-2y,\ y = y,\ z = \tfrac{5}{2}y\right)}.$$

(c) Para $m = 0$ el sistema a considerar es:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=0 \\ x+7y-2z=1 \\ 2x-11y+6z=2 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, tenemos que los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema son:

$\pi_1 : x - 3y + 2z = 0$ $\qquad$ $\pi_2 : x + 7y - 2z = 1$ $\qquad$ $\pi_3 : 2x - 11y + 6z = 2$

A partir de los resultados obtenidos en el apartado (a), [ver apuntes módulo 3, apartado 8, página 32] podemos afirmar que para $m = 0$ el $\text{rang}(A) = 2$ y el $\text{rang}(M) = 3$, por lo tanto, el sistema es incompatible y esto quiere decir que

$$\boxed{\text{los tres planos no tienen ningún punto en común}}.$$

Comentario: notemos que se puede afinar algo más la conclusión anterior. Si nos fijamos que no hay planos coincidentes (puesto que, no hay ninguna fila proporcional en la matriz M) y además no hay planos paralelos (puesto que, no hay filas proporcionales en la matriz A), podemos afirmar que los tres planos son secantes dos a dos en tres rectas paralelas.

4. Sean $A=(1,-1)$, $B=(4,-1)$, $C=(1,-3)$ y $D=(4,-3)$. Considerad la figura formada por los segmentos AB, BC y CD.

(a) Sea g un giro de ángulo $\alpha \in (0,2\pi)$ desde el origen en sentido antihorario. Calculad la matriz de g.

(b) Usando la matriz anterior, encontrad el ángulo α de manera que el segmento que va de $g(A)$ a $g(B)$ sea paralelo al eje y y el punto $g(B)$ quede en el primer cuadrante. Calculad $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ y $g(D)$.

(c) Sea f un escalado de razón $\frac{1}{3}$ y desde el punto $P=(a,b)$. Calculad la matriz de f y encontrad los valores que deberían tener a y b si queremos que $f(A)=(0,0)$.

Solución

(a) Para simplificar notaciones, denotamos $c=\cos(\alpha)$ y $s=\sin(\alpha)$. La matriz del giro de ángulo α en sentido antihorario y desde el punto $(0,0)$ es la siguiente (Ver el Módulo 5, Sección 3):

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Las imágenes de A,B,C,D por g son:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c+s & 4c+s & c+3s & 4c+3s \\ s-c & 4s-c & s-3c & 4s-3c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el vector $g(B)-g(A)=(4c+s,4s-c)-(c+s,s-c)=(3c,3s)$.
Imponiendo que sea paralelo al eje y, obtenemos $3c=0$. O sea, $c=0$.
Imponiendo que $g(B)=(s,4s)$ esté en el primer cuadrante obtenemos que $s>0$.
Por tanto, $\alpha=90^{\circ}$.
Entonces $s=1$ y, sustituyendo s y c por sus valores en la matriz anterior, obtenemos las imágenes de los puntos dados: $g(A)=(1,1)$, $g(B)=(1,4)$, $g(C)=(3,1)$ y $g(D)=(3,4)$.

(c) La matriz del escalado desde el punto $P=(a,b)$ y de razón $\frac{1}{3}$ se obtiene multiplicando las tres matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2a}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2b}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la imagen de A utilizando la matriz anterior

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2a}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2b}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2a}{3} \\ -\frac{1}{3}+\frac{2b}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si queremos que $f(A) = (0,0)$, igualamos esos puntos. Obtenemos dos ecuaciones: $\frac{1}{3} + \frac{2a}{3} = 0$ $-\frac{1}{3} + \frac{2b}{3} = 0$. Y de ellas podemos deducir que $a = -\frac{1}{2}$ y que $b = \frac{1}{2}$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 3 - 20 juny 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:

(a) Expresseu en forma binòmica el següent complex: $(3+2i)^{-1}$

(b) Quin valor, o valors, haurà de prendre n, nombre real, per a què el nombre $\frac{10+10i}{5+ni}$ sigui un nombre complex real? Un cop hagueu trobat el valor, o valors, de n, expresseu el nombre complex $5+ni$ en forma polar.

Solució

(a) Hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s´explica a l´apartat 3.3.4, pàgina 26, del material sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica), recordant que $i^2 = -1$, i agrupem part real i part imaginària.
$(3+2i)^{-1} = \frac{1}{3+21} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{3^2-2^2i^2} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
Per tant, la resposta és: $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

(b) Primer mirarem a quin nombre complex correspon la fracció donada. Per a això multiplicarem i dividirem pel conjugat del denominador. Posteriorment aplicarem la definició de nombre complex real que hi ha a la pàgina 20 del material:
$\frac{10+10i}{5+ni} = \frac{(10+10i)(5-ni)}{(5+ni)(5-ni)} = \frac{50-10ni+50i-10ni^2}{25-n^2i^2} = \frac{(50+10n)+(50-10n)i}{25+n^2} = \frac{50+10n}{25+n^2} + \frac{50-10n}{25+n^2}i$
La definició d´un nombre complex real és que la part imaginària ha de ser nul·la (veure pàgina 20 del material), per tant, imposem que la part imaginària sigui 0:
$\frac{50-10n}{25+n^2} = 0 \Longleftrightarrow 50 - 10n = 0 \Longleftrightarrow 10n = 50 \Longleftrightarrow n = 5$
Per tant, el valor sol·licitat és $n = 5$

Per expressar el nombre $5+5i$ en forma polar ho farem tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:
$m = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$\alpha = \arctan\left(\frac{5}{5}\right) = \arctan(1) = 45^o$
Tenim, per tant, que $5+5i = 5\sqrt{2}_{45^o}$
NOTA ACLARIDORA: Sabem que la tangent d´un angle val 1 a 45^o i a 225^o. Com l´afix del punt buscat és $(5,5)$ l´angle està al primer quadrant, és a dir, a 45^o.

Com es diu a l´exercici 19 d´autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, de cara a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre $5+5i$ al pla complex. Aquest nombre està associat al punt $(5,5)$, per tant, és un nombre que es troba al primer quadrant.

2. Sigui E un subespai vectorial de dimensió 3 de $\mathbb{R}^5$ definit de la següent forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5 \mid a_1 + a_2 = 0, a_2 + a_3 = 0\}.$$

I sigui $v = (-3, 3, -3, 3, -3)$.

(a) Comproveu que $A = \{(1, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ és una base de E. $v \in E$? En cas afirmatiu calculeu-ne les coordenades en la base A.

(b) Siguin $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ les matrius de canvi de base duna base B a la base A, i duna base D a la base B respectivament. Quina és la base D?

Solució

(a) Com que sabem que la dimensió de E és 3, només cal mirar que els vectors de A pertanyen a E i que són linealment independents. Primer de tot comprovem que els vectors de A pertanyen a E comprovant que es compleixen les condicions $a_1 + a_2 = 0$ i $a_2 + a_3 = 0$ per als tres vectors, cosa que és certa. Seguidament comprovem que són linealment independents ja que contenen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs A és una base de E.
Per veure si $v \in E$ mirem si té solució el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Que té solució $x = -3$, $y = 3$ i $z = -3$. Per tant $v \in E$ i les seves coordenades en la base A són $(-3, 3, -3)$.

(b) Sabem que:

$$C_{D\to A} = C_{B\to A} \cdot C_{D\to B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

També alternativament, podríem realitzar el procediment mostrat a continuació dues vegades (per trobar primer la base B i després la base D).
La matriu de canvi de base de D a A expressa els vectors de la base D en funció dels vectors de A. Així doncs, si agafem les columnes de la matriu $C_{D\to A}$ ja tenim que els tres vectors de la base D seran:

$$(-1) \cdot (1, -1, 1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 0, 0, 1) = (-1, 1, -1, 0, -1)$$
$$0 \cdot (1, -1, 1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, -1, 0)$$
$$0 \cdot (1, -1, 1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, -1, -1)$$

Per tant, $D = \{(-1, 1, -1, 0, -1), (0, 0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1, -1)\}$.

3. Donat el sistema d'equacions amb un paràmetre real m i incògnites x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=m \\ x+7y-2z=1 \\ 2x-11y+6z=2 \end{array}\right\}$$

Es demana:

(a) Determineu raonadament el valor de m per al qual el sistema és compatible.

(b) Per aquest valor de m, obtingut en l'apartat anterior, calculeu el conjunt de solucions del sistema.

(c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascuna de les equacions del sistema quan $m=0$.

Solució

(a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -11 & 6 \end{pmatrix} \qquad M=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & m \\ 1 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

Notem que $|A|=0$, però A té menors d'ordre 2 no nuls: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores podem afirmar que $\operatorname{rang}(A)=2$.
Per a què el sistema sigui compatible s'ha de verificar que $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(M)$. Per tant, hem de calcular el valor del paràmetre m que anul·la el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor, d'ordre dos no nul, amb la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & 7 & 1 \\ 2 & -11 & 2 \end{vmatrix} = 25-25m \implies 25-25m=0 \implies m=1.$$

Així doncs, podem afirmar:

$$\boxed{\text{Si } m=1 \ \rightarrow\ \operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(M) \ \rightarrow\ \text{Sistema Compatible}}.$$

(b) Per $m=1$, el sistema que s'ha de resoldre és:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=1 \\ x+7y-2z=1 \\ 2x-11y+6z=2 \end{array}\right\}$$

Sabem per l'apartat anterior que per $m=1$ aquest sistema és compatible indeterminat.

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22] per determinar les solucions d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & 6 & 2 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operacions: (1) $F2 - F1 \to F2$ i $F3 - 2{\cdot}F1 \to F3$
(2) $2{\cdot}F3 + F2 \to F3$

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 1 \\ 10y - 4z = 0 \end{array}\right\}$$

De la segona equació s'obté la relació $z = \frac{5}{2}y$. Si fem aquesta substitució en la primera equació i aïllem la x obtenim que $x = 1 - 2y$. Així doncs, les solucions d'aquest sistema són de la forma:

$$\boxed{\left(x = 1 - 2y,\ y = y,\ z = \tfrac{5}{2}y\right)}.$$

(c) Per $m = 0$ el sistema a considerar és:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 0 \\ x + 7y - 2z = 1 \\ 2x - 11y + 6z = 2 \end{array}\right\}$$

Per tant, tenim que els tres plans definits per cadascuna de les equacions del sistema són:

$\pi_1 : x - 3y + 2z = 0$ $\qquad$ $\pi_2 : x + 7y - 2z = 1$ $\qquad$ $\pi_3 : 2x - 11y + 6z = 2$

A partir dels resultats obtinguts en l'apartat (a), [veure apunts mòdul 3, apartat 8, pàgina 32] podem afirmar que per $m = 0$ el rang$(A) = 2$ i el rang$(M) = 3$, per tant, el sistema és incompatible i això vol dir que

$$\boxed{\text{els tres plans no tenen cap punt en comú}}.$$

Comentari: Notem que es pot afinar una mica més la conclusió anterior. Si ens fixem que no hi ha plans coincidents (ja que, no hi ha cap fila proporcional en la matriu M) i a més no hi ha plans paral·lels (ja que, no hi ha files proporcionals en la matriu A), podem afirmar que els tres plans són secants dos a dos en tres rectes paral·leles.

4. Siguin $A = (1, -1)$, $B = (4, -1)$, $C = (1, -3)$ i $D = (4, -3)$. Considereu la figura formada pels segments AB, BC i CD.

(a) Sigui g un gir d'angle $\alpha \in (0, 2\pi)$ des de l'origen en sentit antihorari. Doneu la matriu de g.

(b) Fent servir la matriu anterior, trobeu l'angle α de manera que el segment que va de $g(A)$ a $g(B)$ sigui paral·lel a l'eix y i el punt $g(B)$ quedi al primer quadrant. Calculeu $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ i $g(D)$.

(c) Sigui f un escalatge de raó $\frac{1}{3}$ i des del punt $P = (a, b)$. Doneu la matriu de f i trobeu els valors que haurien de tenir a i b si volem que $f(A) = (0, 0)$.

Solució

(a) Per a simplificar notacions, denotem $c = \cos(\alpha)$ i $s = \sin(\alpha)$. La matriu del gir d'angle α en sentit antihorari i des del punt $(0, 0)$ és la següent (Veure Mòdul 5, Secció 3):

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Les imatges de A, B, C, D per g són:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c+s & 4c+s & c+3s & 4c+3s \\ s-c & 4s-c & s-3c & 4s-3c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem el vector $g(B) - g(A) = (4c + s, 4s - c) - (c + s, s - c) = (3c, 3s)$.
Imposant que sigui paral·lel a l'eix y, obtenim $3c = 0$. O sigui, $c = 0$.
Imposant que $g(B) = (s, 4s)$ sigui al primer quadrant obtenim que $s > 0$.
Per tant, $\alpha = 90^{\circ}$.
Llavors $s = 1$ i, substituint s i c pels seus valors a la matriu anterior, obtenim les imatges dels punts donats: $g(A) = (1, 1)$, $g(B) = (1, 4)$, $g(C) = (3, 1)$ i $g(D) = (3, 4)$.

(c) La matriu de l'escalatge des del punt $P = (a, b)$ i de raó $\frac{1}{3}$ s'obté en multiplicar les tres matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2a}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2b}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem la imatge de A utilitzant la matriu anterior

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2a}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2b}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2a}{3} \\ -\frac{1}{3} + \frac{2b}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si volem que $f(A) = (0, 0)$, cal igualar els punts. Obtenim dues equacions: $\frac{1}{3} + \frac{2a}{3} = 0$ i $-\frac{1}{3} + \frac{2b}{3} = 0$. D'elles podem deduir que cal que $a = -\frac{1}{2}$ i que $b = \frac{1}{2}$.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$--\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 1 - 10 juny 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:

(a) Expresseu en forma binòmica el següent complex: $(-4i)^{-1}$

(b) Resoleu l´equació: $(1+i)z = \frac{1-i}{z}$. Proporcioneu la solució o les solucions en forma binòmica.

Solució

(a) Hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s´explica a l´apartat 3.3.4, pàgina 26, del material sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica), recordant que $i^2 = -1$, i agrupem part real i part imaginària.
$(-4i)^{-1} = \frac{1}{-4i} = \frac{4i}{(-4i)4i} = \frac{4i}{-16i^2} = \frac{4i}{16} = \frac{i}{4}$
Per tant, la resposta és: $\frac{1}{4}i$

(b) Seguirem l´exemple de la pàgina 16 així com els exercicis 6 i 7 de la pàgina 49 del material. Tal com faríem amb una equació amb coeficients reals, intentarem aïllar la z d´aquesta equació.
$(1+i)z = \frac{1-i}{z} \Longleftrightarrow (1+i)z^2 = 1-i \Longleftrightarrow z^2 = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$
Per tant, hem de resoldre l ´equació: $z^2 = -i$
És a dir, les solucions són: $z = \sqrt{-i}$
La solució de l´equació és, doncs, les dues arrels quadrades de $-i$. Per trobar-les, primer, passem $-i$ a forma polar.
Escrivim el complex $-i$ en forma polar tal com s ´explica a l ´apartat 3.4, pàgina 27 del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:
$m = \sqrt{(-1)^2} = 1$
$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{0}\right) = \arctan(-\infty) = 270^o$
Tenim, per tant, que $-i = 1_{270^o}$
Com ens demanen les arrels quadrades hem de fer el següent (observem que a l ´apartat 3.6.1 de la pàgina 43 del material es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):
$\sqrt{z} = \sqrt{1_{270^o}} = 1_{\frac{270^o+360^o k}{2}}$ per a $k = 0, 1$
Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 1$
Els arguments de les arrels són: $\beta_k = \frac{270^o+360^o k}{2}$ per a $k = 0, 1$

- Si $k = 0$, tenim que $\beta_0 = 135^o$
- Si $k = 1$, tenim que $\beta_1 = 135^o + 180^o = 315^o$

Per tant, les dues arrels quadrades del complex $-i$, que són les solucions de l ´equació donada, són: 1_{135^o}, 1_{315^o}

Per passar aquestes solucions a forma binòmica només hem de mirar els valors de la taula i tindrem:

- $1_{135^o} = \cos 135^o + i \sin 135^o = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$
- $1_{315^o} = \cos 315^o + i \sin 315^o = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

2. Sigui F el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ definit per:

$$F =< (\lambda, \lambda, \lambda), (0, \lambda^2, \lambda^2), (\lambda^3, 0, \lambda^3), (\lambda^4, \lambda^4, 0) >, \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) Calculeu la dimensió de F segons λ i una base A en cada cas.

(b) Sigui $v = (-2, 2, 1)$. En el cas $\lambda = 1$, $v \in F$? En cas afirmatiu, calculeu-ne les coordenades en la base A que heu trobat en l'apartat anterior.

(c) Sigui $B = \{(-2, 2, 1), (0, -1, -1), (-1, 0, -1)\}$ una base de F per al cas $\lambda = 1$. Calculeu la matriu $C_{B\to A}$ de canvi de base de la base B a la base A que heu trobat en el primer apartat per a $\lambda = 1$.

Solució

(a) Calculem el rang dels vectors amb què està definit F. Comencem amb el determinant:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda^3 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda^2 \cdot \lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^6$$

Així doncs, si $\lambda \neq 0$ llavors la dimensió de F és 3. És a dir, F és $\mathbb{R}^3$. En aquest cas una base pot ser la formada pels tres primers vectors amb què està definit F amb un valor qualsevol de λ diferent de 0. Per exemple, $\lambda = 1$: $A = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

Si $\lambda = 0$ tots els vectors de F són 0, de forma que la dimensió de F és 0.

(b) Com que en el cas $\lambda = 1$ la dimensió de F és 3, sabem directament que $v \in F$. Per a calcular-ne les coordenades resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x = -1$, $y = 3$, $z = -1$. Per tant, les coordenades de v en la base A són $(-1, 3, -1)$.

(c) Per a trobar la matriu de canvi de base de B a A hem dexpressar els vectors de B en funció dels de A. Per al primer vector de B hem trobat les seves coordenades en A a l'apartat anterior. El segon i tercer vectors de B veiem que són directament el segon i tercer de A en negatiu (també podríem resoldre els sistemes lineals anàlegs als de l'apartat anterior). Així doncs la matriu de canvi de base de B a A és:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Donat el sistema d'equacions amb paràmetres reals a, b, c i incògnites x, y, z

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ -x + 2y - z &= b \\ x - y + z &= c \end{aligned}\right\}$$

Es demana:

(a) Demostreu que és un sistema compatible determinat per qualsevol valor d'a, b i c.

(b) Resoleu per Cramer el sistema deixant les solucions en funció d'a, b i c.

(c) Determineu raonadament què han de complir a, b i c per a que la solució verifiqui $x = y = z$.

Solució

(a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & a \\ -1 & 2 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right)$$

Recordeu que pel Teorema de Rouché-Fröbenius [veure apunts mòdul 3, apartat 4, pàgina 13] un sistema d'equacions lineals és compatible determinat si:

$$\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(M) = \text{n. incògnites}.$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, independentment del valors d'a, b i c, aleshores també ho serà el rang de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 2 - 4 + 1 - 1 = -1$$

Així doncs, com que $|A| \neq 0$ per qualsevol valor de a, b i c, podem afirmar que:

$$\boxed{\text{el sistema sempre és compatible determinat}}.$$

(b) Per calcular la solució del sistema podem utilitzar la regla de Cramer [veure apunts mòdul 3, apartat 7, pàgines 23 a 26]:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & -1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a-3b-5c}{-1} = -a+3b+5c$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-b-c}{-1} = b+c$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a+2b+3c}{-1} = a-2b-3c$$

Així doncs, la solució del sistema en funció dels paràmetres a, b i c és:

$$\boxed{x = -a+3b+5c \qquad y = b+c \qquad z = a-2b-3c}.$$

(c) Per determinar què han de complir a, b i c per a que la solució verifiqui $x = y = z$, es pot procedir de diverses maneres. Per exemple, podem agafar el sistema i imposar que $x = y = z$ obtenint:

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z &= a \\ -x+2y-z &= b \\ x-y+z &= c \end{aligned}\right\} \underset{x=y=z}{\Longrightarrow} \left.\begin{aligned} x+x+2x &= a \\ -x+2x-x &= b \\ x-x+x &= c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 4x &= a \\ 0 &= b \\ x &= c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 4c &= a \\ 0 &= b \end{aligned}\right\}$$

Per tant, si volem que la solució verifiqui $x = y = z$, aleshores els paràmetres han de complir que $\boxed{a = 4c \text{ i } b = 0}$.

Una altra manera de resoldre aquest apartat, és a partir de la solució trobada en l'apartat anterior.

Per l'apartat (b) sabem que la solució del sistema és:

$$x = -a+3b+5c \qquad y = b+c \qquad z = a-2b-3c.$$

Així doncs, si s'ha de verificar que $x = y = z$ (és a dir $x = y$, $x = z$ i $y = z$) s'obté el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -a+3b+5c &= b+c \\ -a+3b+5c &= a-2b-3c \\ b+c &= a-2b-3c \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} -a+2b+4c &= 0 \\ -2a+5b+8c &= 0 \\ -a+3b+4c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22] per determinar la solució d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F2-2\cdot F1 \to F2 \\ F3-F1 \to F3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F3-F2 \to F3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} -a+2b+4c=0 \\ b=0 \end{array}\right\} \implies \boxed{a=4c \ \text{ i } \ b=0}.$$

4. Sigui $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació definida en les bases canòniques per

$$f(x,y,z,t) = (x+2z-t, -\lambda y + 2\lambda t, -2x-3y).$$

Considerem $\lambda = 1$ per als dos primers apartats.

(a) Demostreu que f és una aplicació lineal.

(b) Calculeu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^4$ i de $\mathbb{R}^3$.

(c) Per als diferents valors de λ, calculeu una base B de $\mathbb{R}^4$ formada pels vectors de la base del nucli de f i els vectors necessaris de la base canònica fins a completar-la. Escriviu la matriu de f si fem servir la base B a $\mathbb{R}^4$ i la base canònica a $\mathbb{R}^3$.

Solució

(a) f sí que és una aplicació lineal. Per a demostrar-ho cal comprovar (com a l'exemple 1 del punt 2.2 del Mòdul 4) que la imatge de la suma de vectors és sempre la suma de les seves imatges:

$$f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2)$$

$$= ((x_1+x_2)+2(z_1+z_2)-(t_1+t_2), -(y_1+y_2)+2(t_1+t_2), -2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2))$$

$$= (x_1+2z_1-t_1+x_2+2z_2-t_2, -y_1+2t_1-y_2+2t_2, -2x_1-3y_1-2x_2-3y_2)$$

$$= (x_1+2z_1-t_1, -y_1+2t_1, -2x_1-3y_1) + (x_2+2z_2-t_2, -y_2+2t_2, -2x_2-3y_2)$$

$$= f(x_1,y_1,z_1,t_1) + f(x_2,y_2,z_2,t_2)$$

Comprovem també que la imatge del producte d'un vector per un escalar sempre és el producte de la imatge per l'escalar:

$$f(kx,ky,kz,kt) = (kx+2kz-kt, -ky+2kt, -2kx-3ky)$$

$$= (k(x+2z-t), k(-y+2t), k(-2x-3y))$$

$$= k(x+2z-t, -y+2t, -2x-3y) = k\cdot f(x,y,z,t)$$

(b) Per a trobar A, la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^4$, calculem les imatges dels quatre vectors de la base canònica i els posem per columnes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Per a calcular una base del $\ker(f)$ resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 2\lambda \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La segona equació és $-\lambda y + 2\lambda t = 0$. Veiem que apareixen dos casos a tractar: Si $\lambda \neq 0$, podem dividir i obtenir $y = 2t$. Substituïnt a la tercera equació ens diu $-2x - 6t = 0$. Per tant, $x = -3t$. Substituïnt a la primera equació $-3t + 2z - t = 0$ d'on $z = 2t$. O sigui, $(x, y, z, t) = (-3t, 2t, 2t, t)$. Traient factor comú: $(x, y, z, t) = t(-3, 2, 2, 1)$. Per tant, una base del nucli és $\{(-3, 2, 2, 1)\}$.
Per a completar una base de $\mathbb{R}^4$ podem afegir els vectors $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ i $(0, 0, 0, 1)$. Aquests quatre vectors són linealment independents i per tant formen una base B de $\mathbb{R}^4$. Per a obtenir la matriu en aquesta base B de sortida podem multiplicar la matriu A per la matriu dels vectors de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 0$ els vectors del nucli compleixen $x + 2z - t = 0$ i $-2x - 3y = 0$. Sumant-li a aquesta segona equació el doble de la primera, i aïllant la x i la y obtenim dues expressions $x = -2z + t$ i $-3y = -4z + 2t$. Per tant una base del nucli és $\{(-2, \frac{4}{3}, 1, 0), (1, -\frac{2}{3}, 0, 1)\}$. Per a completar aquesta base del nucli a una base de $\mathbb{R}^4$ podem afegir els vectors $(1, 0, 0, 0)$ i $(0, 1, 0, 0)$. Es pot comprovar que el determinant d'aquests vectors no és nul. Per a obtenir la matriu en aquesta base B de sortida podem multiplicar la matriu A per la matriu dels vectors de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 2 - 13 juny 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:

(a) Expresseu en forma binòmica l´invers del següent complex: $1 - i\sqrt{3}$

(b) Quin valor, o valors, haurà de prendre m, un nombre real, per a què el nombre $\frac{5+mi}{3-2i}$ sigui un nombre complex imaginari pur? Per a $m = -5$, expresseu el nombre complex $5 + mi$ en forma polar.

Solució

(a) L´invers del complex donat és: $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-1}$. Per trobar la seva forma binòmica multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s´explica a l´apartat 3.3.4, pàgina 26, del material sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica) i agrupem part real i part imaginària (recordem que $i^2 = -1$):

$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-3i^2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

Per tant, la resposta és: $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

(b) Primer mirarem a quin nombre complex correspon la fracció donada. Per a això multiplicarem i dividirem pel conjugat del denominador. Posteriorment aplicarem la definició de nombre complex imaginari pur que hi ha a la pàgina 20 del material.

$\frac{5+mi}{3-2i} = \frac{(5+mi)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{15+10i+3mi+2mi^2}{9-4i^2} = \frac{(15-2m)+(10+3m)i}{9+4} = \frac{15-2m}{13} + \frac{10+3m}{13}i$

La definició d´un nombre complex imaginari pur és que la part real ha de ser nul·la (veure pàgina 20 del material), per tant, imposem que la part real sigui 0:

$\frac{15-2m}{13} = 0 \Longleftrightarrow 15 - 2m = 0 \Longleftrightarrow m = \frac{15}{2}$

Per tant, el valor sol·licitat és $m = \frac{15}{2}$

Per expressar el nombre $5 - 5i$ en forma polar ho farem tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27, del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$m = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-5}{5}\right) = \arctan(-1) = 315^o$

Tenim, per tant, que $5 - 5i = 5\sqrt{2}_{315^o}$

NOTA ACLARIDORA: Sabem que la tangent d´un angle val -1 a 135^o i a 315^o. Com l´afix del punt buscat és $(5, -5)$, l´angle està al quart quadrant, és a dir, en 315^o.

Com es diu a l´exercici 19 d´autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a polar, és molt important, de cara a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre $5-5i$ al pla complex. Aquest nombre està associat al punt $(5,-5)$, per tant, és un nombre que es troba al quart quadrant.

2. Siguin $e_1 = (2,0,2,4)$, $e_2 = (0,3,1,1)$, $e_3 = (-1,0,-1,-2)$ i $e_4 = (0,-6,-2,-2)$ vectors de $\mathbb{R}^4$. Sigui $E =< e_1, e_2, e_3, e_4 >$. Sigui $v = (6,-12,2,8)$.

(a) Calculeu la dimensió de E i una base A. $v \in E$? En cas afirmatiu, calculeu-ne les coordenades en la base A.

(b) Sigui $w = e_2 - e_1$. $B = \{v, w\}$ és una base de E. Calculeu la matriu de canvi de base de la base A a la base B i de la base B a la base A.

Solució

(a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Ja que podem veure directament que $C_3 = \frac{-C_1}{2}$ i $C_4 = -2 \cdot C_2$. Així la dimensió de E és 2 i una base pot estar formada pels dos primers vectors ja que són linealment independents: contenen el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs $A = \{e_1, e_2\}$.
Per mirar si $v \in E$ resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x = 3$ i $y = -4$. Per tant $v \in E$ i les seves coordenades en la base A són $(3,-4)$.

(b) Comencem per calcular la matriu de canvi de base de la base B a la base A, ja que per calcular-la cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la de A i això ja ho tenim (per a v ho hem calculat a l'apartat anterior i w està definit directament com a combinació lineal de e_1 i e_2). Així doncs la matriu de canvi de base de B a A és:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a calcular la matriu de canvi de base de A a B calculem la inversa:

$$C_{A\to B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Donat el sistema d'equacions amb un paràmetre real k i incògnites x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y+(k-2)z=0 \\ 3x+(k+6)y-3z=0 \\ (k+2)x-\quad y+\quad z=0 \end{array}\right\}$$

Es demana:

(a) Calculeu per a quins valors de k el sistema només admet la solució $(x,y,z)=(0,0,0)$.

(b) Pel valor de $k\geq 0$ (k positiu o zero) que fa compatible indeterminat el sistema, obteniu totes les seves solucions.

(c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascuna de les equacions del sistema quan $k=-3$.

Solució

(a) Per a què un sistema homogeni de tres incògnites només admeti la solució trivial $(x,y,z)=(0,0,0)$ n'hi ha prou en veure que el rang$(A)=3$ [veure apunts mòdul 3, apartat 5, pàgines 17 i 18].

La matriu de coeficients, A, associada al sistema és:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & k-2 \\ 3 & k+6 & -3 \\ k+2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si calculem el seu determinant s'obté:

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 5 & k-2 \\ 3 & k+6 & -3 \\ k+2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-k^3-6k^2-9k=-k\cdot(k+3)^2$$

Si $k\neq 0$ i $k\neq -3$, aleshores $|A|\neq 0$ i per tant rang$(A)=3$. Així doncs,

$$\boxed{\text{Per } k\neq 0 \text{ i } k\neq -3 \text{ el sistema només té la solució } (x=0,y=0,z=0)}.$$

(b) A partir dels resultats obtinguts en l'apartat anterior, podem afirmar que per $k=0$ el rang$(A)=2$, ja que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\neq 0$ i per tant com que el sistema és homogeni i té tres incògnites s'obté: rang$(A)=$ rang$(M)=2\neq$ n. incògnites, és a dir, el sistema és compatible indeterminat.

Per resoldre aquest sistema homogeni compatible indeterminat

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ 3x+6y-3z=0 \\ 2x-\quad y+\quad z=0 \end{array}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & -15 & 9 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) $5{\cdot}F2 - 3{\cdot}F1 \to F2$ i $5{\cdot}F3 - 2{\cdot}F1 \to F3$
(2) $F3 + F2 \to F3$
El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ 15y-9z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+5y-2z=0 \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+(3z)-2z=0 \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=\frac{-1}{5}z \\ y=\frac{9}{15}z \end{array}\right\}$$

Així doncs, per $k = 0$ les solucions del sistema homogeni són de la forma:

$$\boxed{\left(x=\frac{-1}{5}z,\ y=\frac{9}{15}z,\ z\right)}.$$

(c) Per $k = -3$ el sistema a considerar és:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5y-5z=0 \\ 3x+3y-3z=0 \\ -x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

Per tant, tenim que els tres plans definits per cadascuna de les equacions del sistema són:

$\pi_1 : 5x + 5y - 5z = 0$ $\qquad \pi_2 : 3x + 3y - 3z = 0$ $\qquad \pi_3 : -x - y + z = 0$

Si ens fixem en les equacions que defineixen els tres plans, s'observa que són equacions proporcionals i per tant, podem afirmar que aquests tres plans són coincidents, és a dir $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$.

4. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida en la base canònica per

$$f(x, y, z) = (-11x - 7y - 7z, a \cdot y, 14x + 7y + 10z).$$

(a) Trobeu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Quan $a = 3$ calculeu el polinomi característic desenvolupant el determinant per la fila que contingui més zeros. Dieu quins són els valors propis de f i calculeu una base que contingui el nombre màxim de vectors propis.

(c) Si $a \neq 3$ i $a \neq -4$ calculeu una base de $\mathbb{R}^3$ que contingui el nombre màxim de vectors propis de f.

Solució

(a) Per a trobar A, la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$, calculem les imatges dels tres vectors de la base canònica i els posem per columnes.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -7 & -7 \\ 0 & a & 0 \\ 14 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

(b) Per a calcular el polinomi característic de f, desenvolupem el determinant de la matriu per la segona fila:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -11-t & -7 & -7 \\ 0 & 3-t & 0 \\ 14 & 7 & 10-t \end{vmatrix} =$$

$$(3-t)((-11-t)(10-t) + 14 \cdot 7) = (3-t)(-110 + 11t - 10t + t^2 + 98) =$$
$$(3-t)(t^2 + t - 12) = (3-t)(t-3)(t+4)$$

Els valors propis de f són -4 amb multiplicitat 1 i 3 amb multiplicitat 2.

Per a trobar un vector propi de valor propi -4 busquem una base del $\ker(f + 4\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11+4 & -7 & -7 \\ 0 & 3+4 & 0 \\ 14 & 7 & 10+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir:

$$\begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 14 & 7 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podem aïllar de la segona equació i veure que $y = 0$. De la primera obtenim $-7x - 7z = 0$ i per tant $z = -x$. De la tercera el mateix. Una solució és el vector $(1, 0, -1)$.

Per a trobar els vectors propis de valor propi 3 busquem una base del $\ker(f - 3\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11-3 & -7 & -7 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 14 & 7 & 10-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir:

$$\begin{pmatrix} -14 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema es redueix a una única equació $-14x - 7y - 7z = 0$. Poden ser generadors del subespai de solucions els vectors $(-1, 1, 1)$ i $(0, -1, 1)$ Per tant, una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis de f és $\{(1, 0, -1), (-1, 1, 1), (0, -1, 1)\}$.

(c) El polinomi característic de f en general serà: $\det(A - t\mathrm{I}) = (a-t)(t-3)(t+4)$. Els valors propis de f són -4, 3 i a, tots amb multiplicitat 1 perquè $a \neq 3$ i $a \neq -4$. El vector propi de f corresponent al valor propi -4 és el que ja hem trobat abans, $(1, 0, -1)$, perquè de la segona equació es dedueix igualment que $y = 0$ i les altres dues equacions són iguals.

Per a trobar el vector propi de valor propi 3 busquem una base del $\ker(f - 3\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -14 & -7 & -7 \\ 0 & a-3 & 0 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podem aïllar de la segona equació i $(a-3)y = 0$ i veure que $y = 0$ donat que $a \neq 3$. Aleshores de la primera obtenim $-14x - 7z = 0$ i per tant $z = -2x$. La tercera és equivalent. Una solució és el vector $(1, 0, -2)$.

Per a trobar el vector propi de valor propi a busquem una base del $\ker(f - a\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -11-a & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 10-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si sumem les dues equacions (primera i tercera) obtenim aquesta: $(3-a)x + (3-a)z = 0$. Com que $a \neq 3$ podem aïllar $z = -x$. I substituint a la segona $14x + 7y - (10-a)x = 0$ d'on $y = \frac{-(4+a)x}{7}$. Una solució és el vector $(1, -\frac{4+a}{7}, -1)$.
Per tant una base amb el màxim de vectors propis seria $\{(1,0,-1), (1,0,-2), (1, -\frac{4+a}{7}, -1)\}$.
Podem comprovar que el determinant és no nul perquè $a \neq -4$.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$- - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 1 - 11 gener 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:
a) Passeu a forma binòmica el següent complex: $\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}}$
b) Calculeu totes les arrels quadrades del següent nombre complex: $5-6i$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Solució
a) Utilitzem la relació que diu que un nombre complex, en forma binària, $a+bi$, per passar-lo a forma polar hem de saber que $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$.

$\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}} \to 2\sqrt{2}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos(135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin(135°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per tant, $\left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos(135°) + i\sin(135°)\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2+2i$

b) Escrivim el complex $5-6i$ en forma polar tal com s'explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$m = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-6}{5}\right) = 310°$

NOTA ACLARATÒRIA: Sabem que la tangent d'un angle val $\frac{-6}{5}$ en 130^o i en 310^o. Com que l'afix del punt buscat és $(5,-6)$ l´angle està al quart quadrant, és a dir, en 310^o. Com es diu a l'exercici 19 d´autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per la qual cosa, el primer que fem és dibuixar el nombre $5-6i$ al pla complex. Aquest nombre està associat al punt $(5,-6)$, per tant, és un nombre que es troba al quart quadrant.

Tenim, per tant, que $5-6i = \sqrt{61}_{310°}$

Com que ens demanen les arrels quadrades hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt{5-6i} = \sqrt{\sqrt{61}_{310°}} = \sqrt[4]{61}_{\frac{310°+360°k}{2}}$ per a $k = 0,1$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[4]{61}$

Els arguments de les arrels quadrades són $\beta = \frac{310°+360°k}{2}$ per a $k = 0,1$

Si $k = 0$, tenim que $\beta_0 = 155°$

Si $k = 1$, tenim que $\beta_1 = 155° + 180° = 335°$

Per tant, les dues arrels quadrades del complex $5-6i$ són:

$\sqrt[4]{61}_{155^\circ}$, $\sqrt[4]{61}_{335^\circ}$

2. Sigui F el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ definit per:

$$F =< (3,\lambda^2,1), (-\lambda^2,0,0), (1,0,-\lambda) >, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calculeu la dimensió de F segons λ i una base en cada cas.
b) Sigui $v = (0,0,-6)$. En el cas $\lambda = 0$, $v \in F$? En cas afirmatiu, calculeu-ne les coordenades en la base que heu trobat en l'apartat anterior.
c) Sigui $B = \{(0,0,-6),(-6,0,-2)\}$. En el cas $\lambda = 0$, calculeu la matriu de canvi de base de la base B a la base que heu trobat per a $\lambda = 0$ en el primer apartat.

Solució
a) Calculem el rang dels vectors amb que està definit F.

$$\begin{vmatrix} 3 & -\lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5$$

Així doncs, si $\lambda \neq 0$ llavors la dimensió de F és 3. És a dir, F és $\mathbb{R}^3$. En aquest cas una base pot ser la formada pels vectors amb que està definit F o la formada per qualsevols 3 vectors de $\mathbb{R}^3$ linealment independents.
Si $\lambda = 0$ calculem el rang:

$$rang \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ja que podem trobar el menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs, si $\lambda = 0$ llavors la dimensió de F és 2 i una base pot ser $A = \{(3,0,1),(1,0,0)\}$.

b) Per veure si $v \in F$ i a la vegada calcular-ne les coordenades si és el cas, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x = -6$ i $y = 18$. Per tant $v \in F$ i les seves coordenades en la base A són $(-6, 18)$.

c) Per a trobar la matriu de canvi de base de B a A hem d´expressar els vectors de B en funció dels de A. Per al primer vector de B hem trobat les seves coordenades en A a l'apartat anterior. El segon vector de B veiem que és -2 vegades el primer de

A (també podriem resoldre un sistema lineal anàlogament a com hem fet en l'apartat anterior). Així doncs la matriu de canvi de base de B a A és:

$$C = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Considereu el pla $\pi : 2x + ky - 2z = 6$ i la recta $r : \left.\begin{array}{r} x + y - z = k \\ kx + 2y - z = 3k \end{array}\right\}$

Es demana:
a) Determineu, raonadament, per quins valors del paràmetre k la recta r no té cap punt en comú amb el pla π.
b) Per $k = 0$, calculeu el punt de tall de la recta r amb el pla π.

Solució
a) Recordem que, l'estudi de la posició relativa d'una recta r (donada per dues equacions) i un pla π, es pot fer a partir de la discussió del consegüent sistema de 3 equacions i 3 incògnites (Veure apunts mòdul 3, pàgina 32)

$$\left.\begin{array}{r} 2x + ky - 2z = 6 \\ x + y - z = k \\ kx + 2y - z = 3k \end{array}\right\}$$

Quan aquest sistema sigui incompatible tindrem que la recta r i el pla π no tenen cap punt en comú.

Per discutir-lo utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Veure apunts mòdul 3, apartat 4, pàgina 13].

La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & k \\ k & 2 & -1 & 3k \end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & k & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 + 3k - 2 = -(k-2)(k-1)$$

- Si $k \neq 2$ i $k \neq 1$ $\rightarrow$ rang$(A) = 3 =$ rang$(M) =$n^o incògnites, aleshores el sistema és compatible determinat.
- Si $k = 2$, aleshores rang$(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculem, per $k = 2$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor, d'ordre dos no nul, amb la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{Sistema incompatible}}.$$

- Si $k=1$, aleshores $\text{rang}(A)=2$, ja que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculem, per $k=1$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor, d'ordre dos no nul, amb la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \to \ \text{rang}\,(M) = 3 \to \boxed{\text{Sistema incompatible}}.$$

Així doncs, podem afirmar que:

$$\boxed{\text{Si } k=1 \text{ o } k=2, \text{ aleshores la recta } r \text{ no té cap punt en comú amb el pla } \pi}$$

b) Per $k=0$ el pla π i la recta r tenen per equacions:

$$\pi : 2x - 2z = 6 \qquad\qquad r : \left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2y-z=0 \end{array}\right\}$$

Sabem, per l'apartat anterior, que per $k=0$ la recta r talla al pla π en un únic punt, és a dir, recta i pla tenen un únic punt en comú que és el que s'obté al resoldre el sistema compatible determinat format per les tres equacions:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2z=6 \\ x+y-z=0 \\ 2y-z=0 \end{array}\right\}$$

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22] per determinar la solució d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{2\cdot F2-F1\to F2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F3-F2\to F3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2z= \ \ 6 \\ 2y=-6 \\ -z= \ \ 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \ \text{Solució:} \ (x=-3, y=-3, z=-6)$$

Així doncs, $\boxed{\text{per } k=0 \text{ la recta } r \text{ talla al pla } \pi \text{ en el punt } (-3,-3,-6)}$.

4. Siguin $A=(0,0)$, $B=(2,1)$ i $C=(1,2)$. Siguin $D=(3,2)$ i $E=(1,4)$.
a) Sigui g un gir d'angle $\alpha \in (0,\pi/2)$ des de l'origen en sentit antihorari. Doneu la matriu de g.
b) Trobeu α de manera que el triangle $g(A), g(B), g(C)$ tingui un costat paral·lel a l'eix x.
c) Sigui h un escalatge de raó λ i des del punt $P=(a,b)$. Doneu la matriu de h.

d) Trobeu la matriu de l'escalatge f tal que $f(B) = D$ i $f(C) = E$.
e) Calculeu $f(A)$, on f és l'escalatge que heu trobat a l'apartat anterior.

Solució
a) Per simplificar la notació escrivim $c = \cos(\alpha)$ i $s = \sin(\alpha)$. La matriu del gir g és:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Les imatges de A, B, C per g són:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2c - s & c - 2s \\ 0 & 2s + c & s + 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem el vector $g(B) - g(C) = (c + s, s - c)$. Imposant que sigui paral·lel a l'eix x, obtenim $s - c = 0$. O sigui, $s = c$. Per tant, la tangent de α és 1. És a dir $\alpha = 45^{\text{o}}$.
c) La matriu de l'escalatge des del punt $P = (a, b)$ i de raó λ s'obté en multiplicar les tres matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a(1-\lambda) \\ 0 & \lambda & b(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) El punt d'intersecció de les rectes BD i CE és el $(1, 0)$. Per tant, l'escalatge ha de ser des del punt $P = (1, 0)$. D'altra banda, observem que $PD = D - P = (3, 2) - (1, 0) = (2, 2)$ i que $PB = B - P = (2, 1) - (1, 0) = (1, 1)$. O sigui, $PD = 2PB$. Anàlogament, $PE = E - P = (1, 4) - (1, 0) = (0, 4)$ i $PC = C - P = (1, 2) - (1, 0) = (0, 2)$. O sigui, $PE = 2PC$. Per tant, l'escalatge ha de ser de raó 2. Concloem que f ha de ser l'escalatge de raó 2 des del punt $P = (1, 0)$. La matriu d'aquest escalatge és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) La imatge de A per aquest escalatge f s'obté en multiplicar el vector columna $(0, 0, 1)$ per aquesta matriu. Obtenim $f(A) = (-1, 0)$.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\,\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 2 - 18 gener 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:
a) Realitzeu la següent operació: $(-2-i)+\sqrt{2}_{45^\circ}$
b) Calculeu totes les arrels terceres del següent nombre complex: $1+i$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Solució
a) Aquí hem de sumar dos nombres complexos, un en forma polar i un altre en forma binòmica. Per a això operem amb nombres complexos tal com es diu a la pàgina 20 del material:

$(-2-i)+\sqrt{2}_{45^\circ} = -2-i+1+i = -1$

Per passar $\sqrt{2}_{45^\circ}$ a forma binòmica utilitzem la relació que diu que un nombre complex, en forma polar, r_α, per passar-lo a forma binària, hem de saber que: $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$.

$r = \sqrt{2}$

$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per tant, $\sqrt{2}_{45^\circ} = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1+i$

b) Escrivim el complex $1+i$ en forma polar tal com s'explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$m = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = 45^\circ$

NOTA ACLARATÒRIA: Sabem que la tangent d'un angle val 1 en 45^o i en 225^o. Com que l'afix del punt buscat és $(1,1)$ l´angle està al quart quadrant, és a dir, en 45^o. Com es diu a l'exercici 19 d´autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per la qual cosa, el primer que fem és dibuixar el nombre $1+i$ al pla complex. Aquest nombre està associat al punt $(1,1)$, per tant, és un nombre que es troba al quart quadrant.

Tenim, per tant, que $1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}$

Com que ens demanen les arrels terceres hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ k}{3}}$ per a $k = 0,1,2$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[6]{2}$

Els arguments de les arrels cúbiques són $\beta = \frac{45^\circ+360^\circ k}{3}$ per a $k = 0, 1, 2$

Si$k = 0$, tenim que $\beta_0 = 15^\circ$

Si $k = 1$, tenim que $\beta_1 = 15^\circ + 120^\circ = 135^\circ$

Si $k = 2$, tenim que $\beta_2 = 15^\circ + 240^\circ = 255^\circ$

Per tant, les tres arrels cúbiques del complex $1 + i$ són:

$\sqrt[6]{2}_{15^\circ}, \sqrt[6]{2}_{135^\circ}, \sqrt[6]{2}_{255^\circ}$

2. Siguin $e_1 = (1, 1, 1, 3)$, $e_2 = (1, 0, -1, 0)$ i $e_3 = (0, -2, -4, -6)$ vectors de $\mathbb{R}^4$. Sigui $E =< e_1, e_2, e_3 >$. Sigui $v = (-1, 1, 3, 3)$.
a) Calculeu la dimensió de E i una base A. $v \in E$? En cas afirmatiu, calculeu-ne les coordenades en la base A.
b) Sigui $w = e_1 + e_2$. $B = \{v, w\}$ és una base de E. Calculeu la matriu de canvi de base de la base A a la base B i de la base B a la base A.

Solució
a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 2$$

Així la dimensió de E és 2 i una base pot estar formada per els dos primers vectors ja que són linealment independents: contenen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs $A = \{e_1, e_2\}$.
Per mirar si $v \in E$ resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x = 1$ i $y = -2$. Per tant $v \in E$ i les seves coordenades en la base A són $(1, -2)$.

b) Comencem per calcular la matriu de canvi de base de la base B a la base A, ja que per calcular-la cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la de A i això ja ho tenim (per a v ho hem calculat a l'apartat anterior i w està definit directament com a combinació lineal de e_1 i e_2). Així doncs la matriu de canvi de base de B a A és:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcular la matriu de canvi de base de A a B calculem la inversa:

$$C_{A\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} -1 & k & -4 \\ 1 & 3 & 1-k \\ 2 & -1 & 2k+1 \end{pmatrix}$

Es demana:
a) Discutiu, raonadament, el rang de la matriu M en funció dels valors de $k \in \mathbb{R}$.
b) Si M és la matriu ampliada d'un sistema d'equacions, resoleu-lo sempre que sigui compatible determinat amb valor de k positiu.

Solució
a) Com que la matriu M és quadrada d'ordre 3, estudiem el seu rang utilitzant que el rang és tres, només si el determinant de la matriu és diferent de zero.

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & k & -4 \\ 1 & 3 & 1-k \\ 2 & -1 & 2k+1 \end{vmatrix} = -4k^2-4k+24 \;\rightarrow\; -4k^2-4k+24=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} k=2 \\ k=-3 \end{cases}$$

En conseqüència

- Si $k \neq 2$ i $k \neq -3$ $\;\rightarrow\;$ $\boxed{\text{rang}(M)=3}$.
- Si $k=2$, $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ amb $|M|=0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rang}(M)=2}$.
- Si $k=-3$, $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ amb $|M|=0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rang}(M)=2}$.

b) Si M és la matriu ampliada d'un sistema d'equacions, el sistema associat és:

$$\left.\begin{aligned} -x+ky &= -4 \\ x+3y &= 1-k \\ 2x-y &= 2k+1 \end{aligned}\right\}$$

Observem que el sistema té 3 equacions i 2 incògnites, així doncs, sempre que el rang de la matriu ampliada M sigui tres, el sistema serà incompatible, ja que la matriu dels coeficients del sistema té rang 2, doncs només té dues columnes i té el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

En conseqüència, el sistema només pot tenir solució si $\text{rang}(M)=2$, és a dir si $k=2$ o $k=-3$.

Com que l'enunciat només ens demana resoldre per k positiu, resolem el cas $k=2$.

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22].

Si $k=2$, la matriu ampliada del sistema és:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operacions: (1) $F2 + F1 \to F2$ i $F3 + 2{\cdot}F1 \to F3$

(2) $5{\cdot}F3 - 3{\cdot}F2 \to F3$

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = -4 \\ 5y = -5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Solució: } \boxed{(x = 2, y = -1)}$$

4. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z) = (3x - 4y, 2x + z, x - 4y - z, 4x - 8y - z).$$

a) Calculeu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^4$.
b) Trobeu una base de $\ker(f)$, el subespai nucli de f. És f injectiva?
c) Trobeu una base de (f), el subespai imatge de f. És f exhaustiva?
d) És possible trobar una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composició

$$\mathrm{f}{\circ}g : \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \text{ , definida per } (\mathrm{f}{\circ}g)(v) = f(g(v)) \text{ , } v{\in} \mathbb{R}^4,$$

sigui la identitat? O sigui, $(f \circ g)(v) = v$, per a tot v$\in \mathbb{R}^4$?

Indicació: Penseu en el vector v=(0,0,1,0)$\in \mathbb{R}^4$.
e) És possible trobar una aplicació $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composició

$$\mathrm{h}{\circ}f : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3 \text{ , definida per } (\mathrm{h}{\circ}f)(u) = h(f(u)) \text{ , } u{\in} \mathbb{R}^4,$$

sigui la identitat? O sigui, $(h \circ f)(u) = u$, per a tot u $\in \mathbb{R}^4$?

Indicació: Penseu en el vector u=(4,3,-8) $\in \mathbb{R}^4$.

Solució
a) Per a trobar A, la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^4$, calculem les imatges dels tres vectors de la base canònica i els posem per columnes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Per a calcular una base del $\ker(f)$ resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fem Gauss, o transformacions per files. A la primera transformació, permutem files 1 i 3. A la segona fem $f_2' = f_2 - 2f_1$, $f_3' = f_3 - 3f_1$, $f_4' = f_4 - 4f_1$. A la tercera fem $f_3' = f_3 - f_2$ i $f_4' = f_4 - f_2$. Obtenim:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ens queden les equacions: $x - 4y - z = 0$ i $8y + 3z = 0$. O sigui, $y = -\frac{3}{8}z$ i $x = 4y+z = -4\cdot\frac{3}{8}z+z = (-\frac{12}{8}+\frac{8}{8})z = -\frac{4}{8}z$. O sigui, $(x, y, z) = (-\frac{4}{8}z, -\frac{3}{8}z, z)$. Traient factor comú: $(x, y, z) = (-\frac{1}{8}z)(4, 3, -8)$. Per tant, una base del nucli és $\{(4, 3, -8)\}$.

Alternativament: la primera equació ens diu $3x - 4y = 0$. La segona equació ens diu $2x + z = 0$. Per tant, $z = -2x$. Així, doncs, el vector $(4, 3, -8)$ verifica les dues primeres equacions. Però veiem que també verifica la tercera, $x - 4y - z = 0$ i la quarta $4x - 8y - z = 0$. Això ens diu que almenys hi ha un vector no nul del nucli. Per tant, el rang de A com a molt és 2. Però ja veiem que és 2, perquè el menor 2×2 format per les dues primers columnes i les dues primeres files té determinant no nul. Així, $\ker(f) = [(4, 3, -8)]$ i $\{(4, 3, -8)\}$ és una base del $\ker(f)$.

L'aplicació f no és injectiva perquè el nucli és no nul.
c) Sabem que $\dim(E) = \dim\ker(f) + \dim(f)$. Com que $\dim(E) = 3$ i $\dim\ker(f) = 1$, aleshores $\dim(f) = 2$. D'altra banda, la imatge de f es troba calculant les imatges d'una base, per exemple, la canònica. Abans hem vist:

$$(f) = [f(e_1), f(e_2), f(e_3)] = [(3, 2, 1, 4), (-4, 0, -4, -8), (0, 1, -1, -1)].$$

El primer i el segon vectors són linealment independents. Així, $\{(3, 2, 1, 4), (-4, 0, -4, -8)\}$ formen una base de (f).

L'aplicació f no és exhaustiva perquè la dimensió de la imatge és 2 i en canvi la dimensió de l'espai d'arribada és 4.
d) No, no existeix una aplicació lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composició $f \circ g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ verifica $(f \circ g)(v) = v$, per a tot v $\in \mathbb{R}^4$. Si existís, prenent el vector $v = (0, 0, 1, 0)$, que no és de la imatge de f, tindríem $v = (f \circ g)(v) = f(g(v))$ i aleshores v seria de la imatge de f, una contradicció.
e) No, no existeix una aplicació lineal $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composició $h \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verifica $(h \circ f)(u) = u$, per a tot u $\in \mathbb{R}^3$. Si existís, prenent el vector $u = (4, 3, -8)$, tindríem $h(f(u)) = h(0) = 0$, ja que $f(u) = 0$ i $h(f(u)) = h(0) = 0$.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMEN 3 - 22 gener 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:

a) Determineu el nombre complex, z, el seu oposat, $-z$, i el seu conjugat, $\bar{z}$, sabent que $\frac{1}{z} = i$.

z	$-z$	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$
			i

b) Calculeu totes les arrels cinquenes del següent nombre complex: $-i$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Solució

a) Per resoldre aquest exercici utilitzarem la definició d ´oposat d ´un nombre complex que apareix a la pàgina 22, de conjugat de la pàgina 24 del material i el quocient de nombres complexos.

Partim de què:

$\frac{1}{z} = i \rightarrow \frac{1}{i} = z$

$z = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$

Per tant.

z	$-z$	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$
$-i$	i	i	i

b) Escrivim el complex $-i$ en forma polar tal com s'explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$m = \sqrt{0 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\alpha = \arctan\left(\frac{--1}{0}\right) = \arctan(-\infty) = 270°$

NOTA ACLARATÒRIA: Sabem que la tangent d'un angle val ∞ en 90^o i en 270^o. Com que l'afix del punt buscat és $(0, -1)$ l´angle està entre el tercer i quart quadrant, és a dir, en 270^o. Com es diu a l'exercici 19 d´autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocarnos en el resultat, fer un dibuix. Per la qual cosa, el primer que fem és dibuixar el nombre $-i$ al pla complex. Aquest nombre està associat al punt $(0, -1)$, per tant, és un nombre que es troba entre el tercer i el quart quadrant.

Tenim, per tant, que $-i = 1_{270^\circ}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[5]{-i} = \sqrt[5]{1_{270^\circ}} = 1_{\frac{270^\circ+360^\circ k}{5}}$ per a $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 1$

Els arguments de les arrels cúbiques són $\beta = \frac{270^\circ+360^\circ k}{5}$ per a $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Si $k = 0$, tenim que $\beta_0 = 54^\circ$

Si $k = 1$, tenim que $\beta_1 = 54^\circ + 72^\circ = 126^\circ$

Si $k = 2$, tenim que $\beta_2 = 54^\circ + 144^\circ = 198^\circ$

Si $k = 3$, tenim que $\beta_3 = 54^\circ + 216^\circ = 270^\circ$

Si $k = 4$, tenim que $\beta_4 = 54^\circ + 288^\circ = 342^\circ$

Per tant, les cinc arrels cinquenes del complex $-i$ són:

$1_{54^\circ}, 1_{126^\circ}, 1_{198^\circ}, 1_{270^\circ}, 1_{342^\circ}$

2. Sigui E un subespai vectorial de dimensió 2 de $\mathbb{R}^4$ definit de la següent forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \mathrm{a}_1 + a_3 + a_4 = 0, a_2 = 0\}.$$

I sigui $v = (-4, 0, 1, 3)$.
a) Comproveu que $A = \{(1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ és una base de E. $v \in E$? En cas afirmatiu calculeu-ne les coordenades en la base A.
b) Sigui $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matriu de canvi de base duna base B a la base A. Quina és la base B?

Solució
a) Com que sabem que la dimensió de E és 2, només cal mirar que els vectors de A pertanyen a E i que són linealment independents. Primer de tot comprovem que els vectors de A pertanyen a E comprovant que es compleixen les condicions $a_1+a_3+a_4 = 0$ i $a_2 = 0$ per als dos vectors, cosa que és certa. Seguidament comprovem que són linealment independents ja que contenen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs A és una base de E.
Per veure si $v \in E$ mirem si té solució el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Que té solució $x = -1$ i $y = -3$. Per tant $v \in E$ i les seves coordenades en la base A són $(-1, -3)$.
b) La matriu de canvi de base de B a A expressa els vectors de la base de B en funció

dels vectors de A. Així doncs, si agafem les columnes de la matriu $C_{B\to A}$ ja tenim que els dos vectors de la base B seran:

$$\begin{aligned} 0\cdot(1,0,-1,0)+3\cdot(1,0,0,-1) &= (3,0,0,-3) \\ 1\cdot(1,0,-1,0)+(-1)\cdot(1,0,0,-1) &= (0,0,-1,1) \end{aligned}$$

Per tant, $B=\{(3,0,0,-3),(0,0,-1,1)\}$.

3. Considereu el sistema d'equacions lineals homogeni:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y+(k+1)z=0 \\ 2x+(k-1)y-3z=0 \\ 3x+(k+2)y-3z=0 \end{array}\right\}$$

Es demana:
a) Discutiu el sistema pels diferents valors del paràmetre $k\in\mathbb{R}$.
b) Resoleu el sistema per $k=2$. En aquest cas, raoneu si hi ha alguna solució d'aquest sistema en què $x=9$.

Solució
a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & k+1 \\ 2 & k-1 & -3 \\ 3 & k+2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & k+1 & 0 \\ 2 & k-1 & -3 & 0 \\ 3 & k+2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Com que el sistema és homogeni (tots els elements de la última columna de la matriu ampliada són zeros), és clar que $\text{rang}(A)=\text{rang}(M)$ i, per tant, el sistema sempre serà compatible.

Notem que $\text{rang}(A)\geq 2$, ja que $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}\neq 0$

A continuació, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A pels diferents valors del paràmetre k,

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & k+1 \\ 2 & k-1 & -3 \\ 3 & k+2 & -3 \end{vmatrix}=-k^2+6k-8=-(k-4)(k-2)$$

- Si $k\neq 4$ i $k\neq 2$, aleshores $\text{rang}(A)=3=\text{rang}(M)=\text{n}^o$ incògnites, per tant el sistema és $\boxed{\text{compatible determinat}}$.
- Si $k=4$, $\text{rang}(A)=2=\text{rang}(M)\neq\text{n}^o$ incògnites $\rightarrow$ $\boxed{\text{compatible indeterminat}}$.
- Si $k=2$, $\text{rang}(A)=2=\text{rang}(M)\neq\text{n}^o$ incògnites $\rightarrow$ $\boxed{\text{compatible indeterminat}}$.

b) Per $k=2$, el sistema homogeni que s'ha de resoldre és:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y+3z=0 \\ 2x+y-3z=0 \\ 3x+4y-3z=0 \end{array}\right\}$$

Per l'apartat anterior, sabem que per $k = 2$ aquest sistema és compatible indeterminat.

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22] per determinar les solucions d'aquest sistema a partir de la seva matriu ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operacions: (1) $F2 + 2{\cdot}F1 \to F2$ i $F3 + 3{\cdot}F1 \to F3$

(2) $F3 - 2{\cdot}F2 \to F3$

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y + 3z = 0 \\ 5y + 3z = 0 \end{array}\right\}$$

De la segona equació s'obté la relació $z = -\frac{5}{3}y$. Si fem aquesta substitució en la primera equació i aïllem la x obtenim que $x = -3y$. Així doncs, les solucions d'aquest sistema són de la forma:

$$\boxed{\left(x = -3y,\ y = y,\ z = -\tfrac{5}{3}y\right)}$$

Finalment, ens demanen raonar si hi ha alguna solució en què $x = 9$. Doncs, observem que totes les solucions verifiquen que $x = -3y$, per tant si $x = 9$ tindrem que $y = -3$ i en conseqüència tindrem que $z = -\frac{5}{3} \cdot (-3) = 5$. Així doncs, podem concloure, afirmativament, dient que sí que hi ha una solució en què $x = 9$, concretament la solució $(x = 9,\ y = -3,\ z = 5)$.

4. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 2y + 2z, 3x + 2y + z).$$

a) Trobeu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.
b) Diagonalitza l'aplicació f?
c) Trobeu una base del subespai $\ker(f)$, el nucli de f.
d) Calculeu el polinomi característic de f.
e) Calculeu una base de $\mathbb{R}^3$ que contingui el nombre màxim de vectors propis de f.

Solució

a) Per a trobar A, la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$, calculem les imatges dels tres vectors de la base canònica i els posem per columnes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Com que la matriu A de f és simètrica, aleshores f diagonalitza.

c) Per a calcular una base del $\ker(f)$ resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fem Gauss, o transformacions per files. En la primera transformació fem $f_2' = f_2 - 2f_1$ i $f_3' = f_3 - 3f_1$. En la segona transformació traiem factor comú -2 a la segona fila i -4 en la tercera fila. A la tercera transformació, $f_3' = f_3 - f_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ens queda: $x+2y+3z = 0$ i $y+2z = 0$. O sigui, $y = -2z$ i $x = -2y-3z = 4z-3z = z$. Per tant, les solucions són de la forma: $(x, y, z) = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1)$. Una base del $\ker(f)$, és doncs, $\{(1, -2, 1)\}$.

d) Per a calcular el polinomi característic de f, calculem:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 2 & 2-t & 2 \\ 3 & 2 & 1-t \end{vmatrix} =$$
$$-t^3 + 4t^2 + 12t = (0-t)(t^2 - 4t - 12) = (0-t)(6-t)(-2-t).$$

e) Els vectors propis de f de valor propi 0 són els del $\ker(f - 0\mathrm{I})$. O sigui, els del $\ker(f)$. Abans ja hem vist que $\ker(f)$ està generat pel vector $(1, -2, 1)$.

Per a trobar un vector propi de valor propi 6 busquem una base del $\ker(f - 6\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 2 & 3 \\ 2 & 2-6 & 2 \\ 3 & 2 & 1-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com abans, fem Gauss i veiem que una solució és el vector $(1, 1, 1)$.

Per a trobar un vector propi de valor propi -2 busquem una base del $\ker(f - (-2)\mathrm{I}) = \ker(f + 2\mathrm{I})$. O sigui, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 2 & 3 \\ 2 & 2+2 & 2 \\ 3 & 2 & 1+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com abans, fem Gauss i veiem que una solució és el vector $(1, 0, -1)$.

Per tant, una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis de f és $\{(1, -2, 1), (1, 1, 1), (1, 0, -1)\}$.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN

8 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

   a) Expresad en forma binómica el siguiente número complejo: 2_{90°

   b) Calculad todas las raíces terceras del siguiente número complejo: $\frac{3+3i}{-3+3i}$.

   Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) Para resolver este apartado aplicamos las explicaciones del punto 3.4.2. del módulo impreso, "De la forma polar a binómica":

En 2_{90° tenemos que r = 2 y $\vartheta = 90^\circ$ entonces, 2_{90° = 2·(cos 90º+ i sen90º) = $= 2(0+1\cdot i) = 2i$

Por tanto, la respuesta al ejercicio es: $2_{90^\circ} = 2i$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

De hecho lo que se pide son las raíces terceras de $\frac{3+3i}{-3+3i}$.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{3+3i}{-3+3i} = \frac{(3+3i)\cdot(-3-3i)}{(-3+3i)\cdot(-3-3i)} = \frac{-9-9i-9i+9}{9+9} = \frac{-18i}{18} = -i$$

Para determinar las raíces terceras de $-i$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m = \sqrt{0^2+(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = arctg\frac{-1}{0} = arctg(-\infty) = 270^\circ$$

(Observemos que, al ser la parte real nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $0-i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto (0, -1), por lo tanto, es un número que se encuentra justamente entre el tercer y cuarto cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $-i = 1_{270^o}$

Como nos piden las raíces terceras, debemos hacer:

$\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270^o+360^o k}{3}}$ para k=0, 1,2

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[3]{1}=1$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \dfrac{270^o+360^o k}{3}$ para k=0, 1,2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 90^o$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 90^o+120^o = 210^o$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 90^o+240^o = 330^o$

Por tanto, las tres raíces terceras, en forma polar, son:

$$\boxed{1_{90^o}}$$

$$\boxed{1_{210^o}}$$

$$\boxed{1_{330^o}}$$

2. Sea F un subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por los siguientes vectores:

$$F = \langle (0,0,3,4,1), (0,-1,-b,0,0), (2,0,-b,0,0), (b,b,b-1,0,4) \rangle$$

a) Determinad, en función de b, la dimensión del subespacio F.

b) Para el caso $b=2$ hallad una base de F. ¿Pertenece $v=(0,-4,2,12,-1)$ a F? ¿Cuáles son sus coordenadas en la base que habéis encontrado?

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores.

$$rango\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 3 & -b & -b & b-1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vemos rápidamente que tenemos el menor (usando las filas 1, 2 y 4) siguiente con determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora orlamos (por ejemplo, añadiendo la última fila):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$$

Así el rango de la matriz definida por los vectores es 4 independientemente de b. Por tanto la dimensión de F es siempre 4.

b) En el apartado anterior ya hemos visto que la dimensión de F es siempre 4. Así que como base podemos proponer los 4 vectores con que está definida F en el caso b=2: A={(0, 0, 3, 4, 1), (0, -1, -2, 0, 0), (2, 0, -2, 0, 0), (2, 2, 1, 0, 4)}.

Para ver si v pertenece a F y a la vez calcular sus coordenadas en el caso que pertenezca, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=3, y=2, z=1, t=-1. Por tanto, v pertenece a F y sus coordenadas en la base A son (3,2,1,-1).

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2a-1 \\ 5x + (a-1)y + (2a+3)z = 3a+2 \\ 3x + (a+1)y + z = 3 \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & a-1 & 2a+3 \\ 3 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2a-1 \\ 5 & a-1 & 2a+3 & 3a+2 \\ 3 & a+1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & a-1 & 2a+3 \\ 3 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = -2a^2 - 6a + 8 = -2(a-1)(a+4)$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -4 \to \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{nº incógnitas}$ $\to \boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \to \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \to \text{rang}(M) = 2 \to \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = -4 \to \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = -4$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ -5 & -5 & -10 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 275 \neq 0 \to \text{rang}(M) = 3 \to \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{(1)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right) \underset{(2)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-5·F1 y F3=F3-3·F1.

(2) Operaciones: F3=F3-F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 4y - 7z = 7 \\ 2z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 4y - 7z = 7 \\ z = -1/2 \end{cases} \to \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ y = 7/8 \\ z = -1/2 \end{cases}$$

$$\to \boxed{\begin{cases} x = 7/8 \\ y = 7/8 \\ z = -1/2 \end{cases}}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$f(1,5,-2) = (2,10,-4), f(0,-1,2) = (0,1,-2), f(0,-1,1) = (0,0,0)$

a) Demostrad que $(1,5,-2), (0,-1,2), (0,-1,1)$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculad una base del subespacio Imagen de f. ¿Es f exhaustiva?

c) Calculad una base del subespacio ker(f) (el núcleo de f). ¿Es f inyectiva?

d) Estudiad si f diagonaliza.

e) Calculad el rango de f^{1000}, es decir, la dimensión de la imagen de f^{1000}.

Resolución:

a) Denominamos $u = (1,5,-2), v = (0,-1,2), w = (0,-1,1)$. El determinante de u, v, w es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

(Se puede hacer usando la regla de Sarrus, o bien desarrollando por la primera fila). Puesto que es distinto de cero, u,v y w son linealmente independientes. Puesto que son tres vectores linealmente independientes de R^3, forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

$u = (1,5,-2), v = (0,-1,2), w = (0,-1,1)$ **son una base de R^3.**

b) Para calcular el subespacio imagen de f es suficiente calcular la imagen de una base de R^3. La imagen de la base u,v,w de R^3 es: $f(u) = (2,10,-4), f(v) = (0,1,-2), f(w) = (0,0,0)$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Im}(f) = [f(u), f(v), f(w)] = [(2,10,-4),(0,1,-2),(0,0,0)] = [(2,10,-4),(0,1,-2)].$$

El tercer vector es nulo y los dos primeros son linealmente independientes. Así el subespacio imagen de f está generado por los dos primeros vectores. Por lo tanto, {f(u),f(v)} es una base de la imagen. Además, f no es exhaustiva ya que la imagen de f tiene dimensión 2 y, en cambio, el espacio de llegada tiene dimensión 3. (Ver Módulo 4, Sección 4.)

$f(u) = (2,10,-4), f(v) = (0,1,-2)$ **es una base de la imagen y f no es exhaustiva.**

c) Recordemos que el Teorema de la dimensión dice que dim E=dim Im(f)+dim Ker(f). Puesto que E=R^3 y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del ker (o núcleo) es 1. En particular, f no es inyectiva, porque el ker

(núcleo) es distinto de cero. (Ver Módulo 4, Sección 5.) Puesto que f(w)=0, el vector w=(0,-1,1) es una base del núcleo. Así,

$w=(0,-1,1)$ **es una base del núcleo de f y f no es inyectiva.**

d) Tenemos f(u)=2u. En particular, u es vector propio de f de valor propio 2. Por otra parte, f(v)=-v. Por lo tanto, v es vector propio de f de valor propio -1. Finalmente, f(w)=0. Por lo tanto, w es vector propio de f de valor propio 0. Los tres vectores u, v, w son base de R^3. Por lo tanto, hay una base de R^3 formada por vectores propios de f. Eso significa que f diagonaliza. (Ver Módulo 4, Sección 8.)

f diagonaliza porque hay una base de R^3 formada por vectores propios de f.

e) La matriz de f en la base de vectores propios es la diagonal con valores propios a la diagonal: 2,1,0. Por lo tanto, la matriz de f elevada a cualquier potencia n, en la base de vectores propios, es la matriz diagonal con los valores propios elevados a n en la diagonal, o sea, 2 elevado a n, 1 y 0. El rango sigue siendo 2, pues.

El rango de f^{1000} es 2.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN
15 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

   a) Expresad en forma polar el siguiente número complejo: $-1+i$

   b) Calculad todas las raíces terceras del siguiente número complejo: $\frac{-27}{i}$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) Para resolver este apartado aplicamos las explicaciones del punto 3.4.1. del módulo impreso, "De la forma binómica a polar". Primero hallamos el módulo:

$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

A continuación hallamos el argumento:

Como $a = -1 > 0$ y $b = 1$ tenemos

$$\vartheta = arctg\frac{1}{-1} = arctg(-1) = 135^{\circ}$$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en 135º y en 315º. Como el afijo del punto buscado es (-1, 1) el ángulo está en el segundo cuadrante, es decir, en 135º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $-1+i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto (-1, 1), por lo tanto, es un número que se encuentra en el segundo cuadrante.

Por tanto, la respuesta es: $-1+i = \sqrt{2}_{135^{\circ}}$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

Se pide determinar las raíces terceras de $\frac{-27}{i}$.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{-27}{i} = \frac{(-27)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \frac{27i}{1} = 27i$$

Para determinar las raíces terceras de $27i$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m = \sqrt{0^2 + (27)^2} = 27$$

$$\alpha = arctg\frac{27}{0} = arctg(\infty) = 90^{\text{o}}$$

(Observemos que, al ser la parte real nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

Tenemos, por tanto, que $27i = 27_{90^{\text{o}}}$

Como nos piden las raíces terceras, debemos hacer:

$\left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{90^{\text{o}}+360^{\text{o}}k}{3}}$ para k=0, 1,2

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[3]{27} = 3$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k = \dfrac{90^{\text{o}}+360^{\text{o}}k}{3}$ para k=0, 1,2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 30^{\text{o}}$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 30^{\text{o}}+120^{\text{o}} = 150^{\text{o}}$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 30^{\text{o}}+240^{\text{o}} = 270^{\text{o}}$

Por tanto, las tres raíces terceras, en forma polar, son:

$$\boxed{3_{30^{\text{o}}}}$$

$$\boxed{3_{150^{\text{o}}}}$$

$$\boxed{3_{270^{\text{o}}}}$$

2. Sea F un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$F = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4) | a_1 = 2a_2, a_4 = -2\,a_3 \rangle$$

Y sea $v = (6, 3, -3, 6)$.

a) Comprobad que $A = \{(2,1,0,0), (0,0,1,-2)\}$ es una base de F. ¿Pertenece v a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

b) Sea $C_{B \to A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de una base B a la base A. ¿Cuál es la base B?

Resolución:

a) Sabemos que la dimensión de F es 2, así solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a F y que son linealmente independientes.

Primero comprobamos que los vectores de A pertenecen a F comprobando que se cumplen las condiciones $a_1=2a_2$, $a_4=-2a_3$ para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rango \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues, A es una base de F.

Para ver si v pertenece a F miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=3, y=-3 y por tanto v pertenece a F y sus coordenadas en la base A son (3,-3).

b) La matriz de cambio de base de B a A expresa los vectores de la base de B en función de los de la de A. Así pues, si miramos les columnas de la matriz C ya tenemos que los dos vectores de la base B serán:
1·(2,1,0,0)+1·(0,0,1,-2) = (2,1,1,-2)
2·(2,1,0,0)+(-1)·(0,0,1,-2) = (4,2,-1,2)

Por tanto B={(2,1,1,-2), (4,2,-1,2)}.

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x + 4y + (a-1)z = 2a+1 \\ 2x + (a+2)y - z = a \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & a-1 & 2a+1 \\ 2 & a+2 & -1 & a \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - 3a + 4 = -(a-1)(a+4)$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -4 \to \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{nº incógnitas}$ $\to \boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \to \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \text{rang}(M) = 2 \to \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = -4 \to \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = -4$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -7 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \to \text{rang}(M) = 3 \to \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-3·F1 y F3=F3-2·F1.

(2) Operaciones: F3=F3-F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ \quad -2y+5z = 4 \\ \qquad\quad -2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ \quad -2y+5z = 4 \\ \qquad\qquad z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ \qquad\quad y = 1/2 \\ \qquad\quad z = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases}}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x,y,z,t) = (z+t, z+t, x+y, x+y)$$

a) Hallad la matriz A de f en las bases canónicas.

b) Calculad una base del subespacio ker(f) (el núcleo de f).

c) Decid si el vector $u = (1,1,1,1)$ es vector propio de f.

d) Encontrad vectores propios de f de valor propio -2.

e) Estudiad si f diagonaliza y hallad una base de $\mathbb{R}^4$ con el número máximo de vectores propios de f.

Resolución:

a) f(1,0,0,0)=(0,0,1,1), f(0,1,0,0)=(0,0,1,1), f(0,0,1,0)=(1,1,0,0) y f(0,0,0,1)=(1,1,0,0). Estos vectores imagen están expresados en la base canónica. Por lo tanto, escribiéndolos por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Para encontrar una base del ker(f) hemos de resolver el sistema A·X=0:

$$A\cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos quedan las ecuaciones z+t=0, z+t=0, x+y=0, x+y=0. Es decir, t=-z, y=-x. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: (x,y,z,t)=(x,-x,z,-z)=x(1,-1,0,0)+z(0,0,1,-1). En particular, una base del ker(f) es la dada por los vectores a=(1,-1,0,0),b=(0,0,1,-1).

Una base del Ker(f) viene dada por a=(1,-1,0,0) y b=(0,0,1,-1).

c) Para comprobar si el vector u es vector propio de f es suficiente multiplicar la matriz A por u y ver si da un múltiplo de u:

$$A\cdot u=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Así, puesto que A·u=2u, tenemos que el vector u es vector propio de f de valor propio 2.

u es vector propio de f de valor propio 2.

d) Usemos el Módulo 4, Sección 7, para encontrar los vectores propios de f de valor propio -2. Encontremos una base del núcleo de la matriz A-(-2)I=A+2I. O sea, resolvamos el sistema (A+2I)X=0:

$$(A+2\cdot I)\cdot X=\begin{pmatrix}2&0&1&1\\0&2&1&1\\1&1&2&0\\1&1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 2x+z+t=0, 2y+z+t=0, x+y+2z=0, x+y+2t=0. Restando la segunda ecuación a la primera queda: 2x-2y=0. O sea, x=y. Restando la cuarta ecuación a la tercera queda: 2z-2t=0. O sea, z=t. Sustituyendo z=t en la primera ecuación queda: 2x+t+t=0. O sea 2x=-2t y x=-t. Las soluciones de este sistema son vectores de la forma: (x,y,z,t)=(-t,-t,t,t)=t(-1,-1,1,1). En particular, (-1,-1,1,1) es vector propio de f de valor propio -2.

e) La aplicación lineal f diagonaliza porqué su matriz en las bases canónicas es simétrica (ver Módulo 4, Sección 8).

Los vectores linealmente independientes a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1) generan el núcleo. Por lo tanto, a i b son dos vectores propios de f de valor propio 0. Por otra parte, u=(1,1,1,1) es vector propio de f de valor propio 2 y v=(-1,-1,1,1) es vector propio de valor propio -2. Así:

{a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1), u=(1,1,1,1), v=(-1,-1,1,1)} es una base de R^4 formada por vectores propios de f.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN
19 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

   a) Hallad el inverso del número complejo siguiente: $2+3i$. Expresad dicho inverso en forma binómica.

   b) Calculad todas las raíces quintas del siguiente número complejo: $\frac{1}{32}$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) El inverso de $2+3i$ es $\frac{1}{2+3i}$ pero hay que expresarlo en forma binómica.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{1}{2+3i}=\frac{1\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)}=\frac{2-3i}{4+9}=\frac{2-3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{(-3)}{13}i$$

Por tanto, la respuesta al ejercicio es: $\frac{1}{2+3i}=\frac{2}{13}+\frac{(-3)}{13}i$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

De hecho lo que se pide son las raíces quintas de $\frac{1}{32}$.

Para determinar las raíces quintas de $\frac{1}{32}$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m=\sqrt{\left(\frac{1}{32}\right)^2+(0)^2}=\frac{1}{32}$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{1/32}=arctg(0)=0^o$$

(Observemos que, al ser la parte imaginaria nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0º y en 180º. Como el afijo del punto buscado es (1/32, 0) el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 0º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número 1/32 en el plano complejo. Este número está asociado al punto (1/32, 0), por lo tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{32}\right)_{0^o}$

Como nos piden las raíces quintas, debemos hacer:

$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right)_{\frac{0^o+360^o k}{5}}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2^5}\right)}=\frac{1}{2}$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k=\frac{0^o+360^o k}{5}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=0^o$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=0^o+72^o=72^o$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=0^o+144^o=144^o$
- Si k=3, tenemos que $\beta_1=0^o+216^o=216^o$
- Si k=4, tenemos que $\beta_2=0^o+288^o=288^o$

Por tanto, las tres raíces de la ecuación, en forma polar, son:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{0^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{72^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{144^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{216^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{288^\circ}}$$

2. Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

   $e_1 = (-1,3,2,0), e_2 = (2,-1,-1,-1), e_3 = (1,2,1,-1), e_4 = (-5,0,1,3)$.

   Sea $F = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$.

   Y sea $v = (-12,1,3,7)$.

   a) Calculad la dimensión de F y una base A. ¿Pertenece v a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

   b) Sean $w_1 = e_1 + e_2, w_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. $B = \{w_1, w_2\}$ es una base de F. Calculad la matriz de cambio de base de B a A.

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontramos el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ y orlando encontramos que todos los determinantes 3x3 son cero. Así la dimensión de F es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores, ya que son linealmente independientes (contienen el menor anterior). Así pues, A={e_1, e_2}.

Para ver si v pertenece a F resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=-2, y=-7. Por tanto, v pertenece a F, y sus coordenadas en la base A son (-2, -7).

b) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A. Así es justamente como tenemos definido el primer vector de la base B. Vamos a calcular la expresión del segundo resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=1, y=-1. Y por tanto las coordenadas de w_2 en la base A son (1,-1).

De manera que la matriz de cambio de base de B a A será:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - (1+2a)z = -6 \\ x + 4y + (a-6)z = -9 \\ -x + (a+1)y + z = 2a+1 \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13]

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1-2a & -6 \\ 1 & 4 & a-6 & -9 \\ -1 & a+1 & 1 & 2a+1 \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = -3a^2 - 7a + 10 = -3(a-1)(a+\frac{10}{3})$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq {}^{-10}/_{3} \rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{nº incógnitas} \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = \frac{-10}{3} \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = \frac{-10}{3}$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & -7/3 & -17/3 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & -6 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -9 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-F1 y F3=F3+F1.

(2) Operaciones: F3=3·F3-2·F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x + y - z = -6 \\ 3y - 5z = -3 \\ 10z = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 3y - 5z = -3 \\ z = -9/10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = -6 \\ y = -5/2 \\ z = -9/10 \end{cases}$$
$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -22/5 \\ y = -5/2 \\ z = -9/10 \end{cases}}$$

4. Consideremos $A = (2,1), B = (3,1), C = (3,2)$.
   a) Sea f el escalado de razón 3 desde el punto $(1,-2)$. Calculad $f(A), f(B)$ y $f(C)$.
   b) Sea g el giro de ángulo $\alpha = 30°$ en sentido antihorario desde el origen. Calculad $g(A), g(B)$ y $g(C)$.

Resolución:

a) Recordemos el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 3 desde el punto (1,-2) hay que multiplicar por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A,B,C, hemos de hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f(A)=(4,7), f(B)=(7,7) y f(C)=(7,10).

b) El Módulo 5, Secciones 3 y 5, dice que la matriz del giro de ángulo $a = 30^o$ en sentido antihorario es:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde denotamos c=cos(a) y s=sin(a), para abreviar. Para encontrar las imágenes de A,B,C multiplicamos:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c-s & 3c-s & 3c-2s \\ c+2s & c+3s & 2c+3s \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

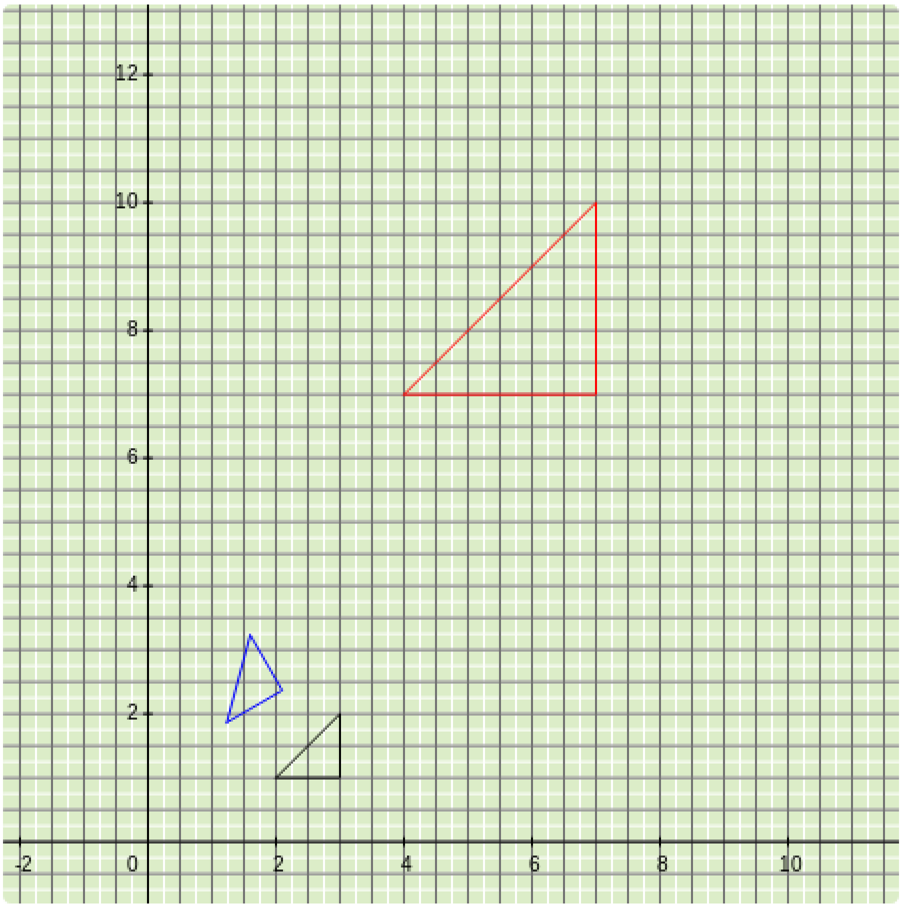
Así g(A)=(2c-s,c+2s), g(B)=(3c-s,c+3s), g(C)=(3c-2s,2c+3s). En el caso en que $a = 30^o$, entonces $\cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin(30^o) = \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$g(A) = (2c-s, c+2s) = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right),$$

$$g(B) = (3c-s, c+3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$$

y

$$g(C) = (3c-2s, 2c+3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2}\right)$$



NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN

8 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

   a) Expresad en forma binómica el siguiente número complejo: 2_{90°

   b) Calculad todas las raíces terceras del siguiente número complejo: $\frac{3+3i}{-3+3i}$.

   Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) Para resolver este apartado aplicamos las explicaciones del punto 3.4.2. del módulo impreso, "De la forma polar a binómica":

En 2_{90° tenemos que r = 2 y $\vartheta = 90^\circ$ entonces, 2_{90° = 2·(cos 90º+ i sen90º) = $= 2(0+1\cdot i) = 2i$

Por tanto, la respuesta al ejercicio es: $2_{90^\circ} = 2i$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

De hecho lo que se pide son las raíces terceras de $\frac{3+3i}{-3+3i}$.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{3+3i}{-3+3i} = \frac{(3+3i)\cdot(-3-3i)}{(-3+3i)\cdot(-3-3i)} = \frac{-9-9i-9i+9}{9+9} = \frac{-18i}{18} = -i$$

Para determinar las raíces terceras de $-i$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m = \sqrt{0^2+(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = arctg\frac{-1}{0} = arctg(-\infty) = 270^\circ$$

(Observemos que, al ser la parte real nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vistas a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $0-i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto (0, -1), por lo tanto, es un número que se encuentra justamente entre el tercer y cuarto cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $-i=1_{270^o}$

Como nos piden las raíces terceras, debemos hacer:

$\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270^o+360^o k}{3}}$ para k=0, 1,2

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[3]{1}=1$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k=\dfrac{270^o+360^o k}{3}$ para k=0, 1,2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=90^o$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=90^o+120^o=210^o$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=90^o+240^o=330^o$

Por tanto, las tres raíces terceras, en forma polar, son:

$$\boxed{1_{90^o}}$$

$$\boxed{1_{210^o}}$$

$$\boxed{1_{330^o}}$$

2. Sea F un subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por los siguientes vectores:

$$F=\langle(0,0,3,4,1),(0,-1,-b,0,0),(2,0,-b,0,0),(b,b,b-1,0,4)\rangle$$

a) Determinad, en función de b, la dimensión del subespacio F.

b) Para el caso $b=2$ hallad una base de F. ¿Pertenece $v=(0,-4,2,12,-1)$ a F? ¿Cuáles son sus coordenadas en la base que habéis encontrado?

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores.

$$rango\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 3 & -b & -b & b-1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vemos rápidamente que tenemos el menor (usando las filas 1, 2 y 4) siguiente con determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora orlamos (por ejemplo, añadiendo la última fila):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$$

Así el rango de la matriz definida por los vectores es 4 independientemente de b. Por tanto la dimensión de F es siempre 4.

b) En el apartado anterior ya hemos visto que la dimensión de F es siempre 4. Así que como base podemos proponer los 4 vectores con que está definida F en el caso b=2: A={(0, 0, 3, 4, 1), (0, -1, -2, 0, 0), (2, 0, -2, 0, 0), (2, 2, 1, 0, 4)}.

Para ver si v pertenece a F y a la vez calcular sus coordenadas en el caso que pertenezca, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=3, y=2, z=1, t=-1. Por tanto, v pertenece a F y sus coordenadas en la base A son (3,2,1,-1).

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2a-1 \\ 5x + (a-1)y + (2a+3)z = 3a+2 \\ 3x + (a+1)y + z = 3 \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & a-1 & 2a+3 \\ 3 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2a-1 \\ 5 & a-1 & 2a+3 & 3a+2 \\ 3 & a+1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & a-1 & 2a+3 \\ 3 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = -2a^2 - 6a + 8 = -2(a-1)(a+4)$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -4 \rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{nº incógnitas}$ $\rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = -4 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = -4$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ -5 & -5 & -10 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 275 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{(1)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right) \underset{(2)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-5·F1 y F3=F3-3·F1.

(2) Operaciones: F3=F3-F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 4y - 7z = 7 \\ 2z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 4y - 7z = 7 \\ z = -1/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ y = 7/8 \\ z = -1/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 7/8 \\ y = 7/8 \\ z = -1/2 \end{cases}}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(1,5,-2)=(2,10,-4), f(0,-1,2)=(0,1,-2), f(0,-1,1)=(0,0,0)$$

a) Demostrad que $(1,5,-2),(0,-1,2),(0,-1,1)$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculad una base del subespacio Imagen de f. ¿Es f exhaustiva?

c) Calculad una base del subespacio ker(f) (el núcleo de f). ¿Es f inyectiva?

d) Estudiad si f diagonaliza.

e) Calculad el rango de f^{1000}, es decir, la dimensión de la imagen de f^{1000}.

Resolución:

a) Denominamos $u=(1,5,-2), v=(0,-1,2), w=(0,-1,1)$. El determinante de u, v, w es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

(Se puede hacer usando la regla de Sarrus, o bien desarrollando por la primera fila). Puesto que es distinto de cero, u,v y w son linealmente independientes. Puesto que son tres vectores linealmente independientes de R^3, forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

$u=(1,5,-2), v=(0,-1,2), w=(0,-1,1)$ **son una base de R^3.**

b) Para calcular el subespacio imagen de f es suficiente calcular la imagen de una base de R^3. La imagen de la base u,v,w de R^3 es: $f(u)=(2,10,-4), f(v)=(0,1,-2), f(w)=(0,0,0)$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Im}(f)=[f(u),f(v),f(w)]=[(2,10,-4),(0,1,-2),(0,0,0)]=[(2,10,-4),(0,1,-2)].$$

El tercer vector es nulo y los dos primeros son linealmente independientes. Así el subespacio imagen de f está generado por los dos primeros vectores. Por lo tanto, {f(u),f(v)} es una base de la imagen. Además, f no es exhaustiva ya que la imagen de f tiene dimensión 2 y, en cambio, el espacio de llegada tiene dimensión 3. (Ver Módulo 4, Sección 4.)

$f(u)=(2,10,-4), f(v)=(0,1,-2)$ **es una base de la imagen y f no es exhaustiva.**

c) Recordemos que el Teorema de la dimensión dice que dim E=dim Im(f)+dim Ker(f). Puesto que E=R^3 y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del ker (o núcleo) es 1. En particular, f no es inyectiva, porque el ker

(núcleo) es distinto de cero. (Ver Módulo 4, Sección 5.) Puesto que f(w)=0, el vector w=(0,-1,1) es una base del núcleo. Así,

$w=(0,\text{-}1,1)$ **es una base del núcleo de f y f no es inyectiva.**

d) Tenemos f(u)=2u. En particular, u es vector propio de f de valor propio 2. Por otra parte, f(v)=-v. Por lo tanto, v es vector propio de f de valor propio -1. Finalmente, f(w)=0. Por lo tanto, w es vector propio de f de valor propio 0. Los tres vectores u, v, w son base de R^3. Por lo tanto, hay una base de R^3 formada por vectores propios de f. Eso significa que f diagonaliza. (Ver Módulo 4, Sección 8.)

f diagonaliza porque hay una base de R^3 formada por vectores propios de f.

e) La matriz de f en la base de vectores propios es la diagonal con valores propios a la diagonal: 2,1,0. Por lo tanto, la matriz de f elevada a cualquier potencia n, en la base de vectores propios, es la matriz diagonal con los valores propios elevados a n en la diagonal, o sea, 2 elevado a n, 1 y 0. El rango sigue siendo 2, pues.

El rango de f^{1000} es 2.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN

15 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:
   a) Expresad en forma polar el siguiente número complejo: $-1+i$
   b) Calculad todas las raíces terceras del siguiente número complejo: $\frac{-27}{i}$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) Para resolver este apartado aplicamos las explicaciones del punto 3.4.1. del módulo impreso, "De la forma binómica a polar". Primero hallamos el módulo:
$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

A continuación hallamos el argumento:

Como $a=-1>0$ y $b=1$ tenemos

$$\vartheta=arctg\frac{1}{-1}=arctg(-1)=135^{\circ}$$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en 135º y en 315º. Como el afijo del punto buscado es (-1, 1) el ángulo está en el segundo cuadrante, es decir, en 135º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $-1+i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto (-1, 1), por lo tanto, es un número que se encuentra en el segundo cuadrante.

Por tanto, la respuesta es: $-1+i=\sqrt{2}_{135^{\circ}}$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

Se pide determinar las raíces terceras de $\frac{-27}{i}$.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{-27}{i}=\frac{(-27)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{27i}{1}=27i$$

Para determinar las raíces terceras de $27i$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m=\sqrt{0^2+(27)^2}=27$$

$$\alpha=arctg\frac{27}{0}=arctg(\infty)=90^o$$

(Observemos que, al ser la parte real nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

Tenemos, por tanto, que $27i=27_{90^o}$

Como nos piden las raíces terceras, debemos hacer:

$\left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{90^o+360^o k}{3}}$ para k=0, 1,2

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[3]{27}=3$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k=\dfrac{90^o+360^o k}{3}$ para k=0, 1,2

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=30^o$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=30^o+120^o=150^o$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=30^o+240^o=270^o$

Por tanto, las tres raíces terceras, en forma polar, son:

$$\boxed{3_{30^o}}$$

$$\boxed{3_{150^o}}$$

$$\boxed{3_{270^o}}$$

2. Sea F un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:

$$F = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4) | a_1 = 2a_2, a_4 = -2\, a_3 \rangle$$

Y sea $v = (6, 3, -3, 6)$.

a) Comprobad que $A = \{(2,1,0,0), (0,0,1,-2)\}$ es una base de F. ¿Pertenece v a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

b) Sea $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de una base B a la base A. ¿Cuál es la base B?

Resolución:

a) Sabemos que la dimensión de F es 2, así solo debemos ver que los vectores de A pertenecen a F y que son linealmente independientes.

Primero comprobamos que los vectores de A pertenecen a F comprobando que se cumplen las condiciones $a_1=2a_2$, $a_4=-2a_3$ para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rango \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues, A es una base de F.

Para ver si v pertenece a F miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=3, y=-3 y por tanto v pertenece a F y sus coordenadas en la base A son (3,-3).

b) La matriz de cambio de base de B a A expresa los vectores de la base de B en función de los de la de A. Así pues, si miramos les columnas de la matriz C ya tenemos que los dos vectores de la base B serán:
1·(2,1,0,0)+1·(0,0,1,-2) = (2,1,1,-2)
2·(2,1,0,0)+(-1)·(0,0,1,-2) = (4,2,-1,2)

Por tanto B={(2,1,1,-2), (4,2,-1,2)}.

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x + 4y + (a-1)z = 2a+1 \\ 2x + (a+2)y - z = a \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13].
La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & a-1 & 2a+1 \\ 2 & a+2 & -1 & a \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - 3a + 4 = -(a-1)(a+4)$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -4 \to \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{nº incógnitas}$ $\to \boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \to \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \text{rang}(M) = 2 \to \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = -4 \to \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = -4$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -7 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \to \text{rang}(M) = 3 \to \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\underbrace{\approx}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{(2)}{\underbrace{\approx}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-3·F1 y F3=F3-2·F1.

(2) Operaciones: F3=F3-F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ -2y+5z = 4 \\ -2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ -2y+5z = 4 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y-2z = -1 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases}}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x,y,z,t) = (z+t, z+t, x+y, x+y)$$

a) Hallad la matriz A de f en las bases canónicas.

b) Calculad una base del subespacio ker(f) (el núcleo de f).

c) Decid si el vector $u = (1,1,1,1)$ es vector propio de f.

d) Encontrad vectores propios de f de valor propio -2.

e) Estudiad si f diagonaliza y hallad una base de $\mathbb{R}^4$ con el número máximo de vectores propios de f.

Resolución:

a) f(1,0,0,0)=(0,0,1,1), f(0,1,0,0)=(0,0,1,1), f(0,0,1,0)=(1,1,0,0) y f(0,0,0,1)=(1,1,0,0). Estos vectores imagen están expresados en la base canónica. Por lo tanto, escribiéndolos por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Para encontrar una base del ker(f) hemos de resolver el sistema A·X=0:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos quedan las ecuaciones z+t=0, z+t=0, x+y=0, x+y=0. Es decir, t=-z, y=-x. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: (x,y,z,t)=(x,-x,z,-z)=x(1,-1,0,0)+z(0,0,1,-1). En particular, una base del ker(f) es la dada por los vectores a=(1,-1,0,0),b=(0,0,1,-1).

Una base del Ker(f) viene dada por a=(1,-1,0,0) y b=(0,0,1,-1).

c) Para comprobar si el vector u es vector propio de f es suficiente multiplicar la matriz A por u y ver si da un múltiplo de u:

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, puesto que A·u=2u, tenemos que el vector u es vector propio de f de valor propio 2.

u es vector propio de f de valor propio 2.

d) Usemos el Módulo 4, Sección 7, para encontrar los vectores propios de f de valor propio -2. Encontremos una base del núcleo de la matriz A-(-2)I=A+2I. O sea, resolvamos el sistema (A+2I)X=0:

$$(A + 2 \cdot I) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 2x+z+t=0, 2y+z+t=0, x+y+2z=0, x+y+2t=0. Restando la segunda ecuación a la primera queda: 2x-2y=0. O sea, x=y. Restando la cuarta ecuación a la tercera queda: 2z-2t=0. O sea, z=t. Sustituyendo z=t en la primera ecuación queda: 2x+t+t=0. O sea 2x=-2t y x=-t. Las soluciones de este sistema son vectores de la forma: (x,y,z,t)=(-t,-t,t,t)=t(-1,-1,1,1). En particular, (-1,-1,1,1) es vector propio de f de valor propio -2.

e) La aplicación lineal f diagonaliza porqué su matriz en las bases canónicas es simétrica (ver Módulo 4, Sección 8).

Los vectores linealmente independientes a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1) generan el núcleo. Por lo tanto, a i b son dos vectores propios de f de valor propio 0. Por otra parte, u=(1,1,1,1) es vector propio de f de valor propio 2 y v=(-1,-1,1,1) es vector propio de valor propio -2. Así:

{a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1), u=(1,1,1,1), v=(-1,-1,1,1)} es una base de R^4 formada por vectores propios de f.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÁLGEBRA

SOLUCIÓN EXAMEN
19 de junio 2019

1. Responded a los siguientes apartados:

   a) Hallad el inverso del número complejo siguiente: $2+3i$. Expresad dicho inverso en forma binómica.

   b) Calculad todas las raíces quintas del siguiente número complejo: $\frac{1}{32}$. Proporcionad las soluciones en forma polar.

Resolución:

a) El inverso de $2+3i$ es $\frac{1}{2+3i}$ pero hay que expresarlo en forma binómica.

Primero de todo debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria

$$\frac{1}{2+3i}=\frac{1\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)}=\frac{2-3i}{4+9}=\frac{2-3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{(-3)}{13}i$$

Por tanto, la respuesta al ejercicio es: $\frac{1}{2+3i}=\frac{2}{13}+\frac{(-3)}{13}i$

b) Miramos el ejercicio de autoevaluación 30 de la página 50 del material impreso.

De hecho lo que se pide son las raíces quintas de $\frac{1}{32}$.

Para determinar las raíces quintas de $\frac{1}{32}$ determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m=\sqrt{\left(\frac{1}{32}\right)^2+(0)^2}=\frac{1}{32}$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{1/32}=arctg(0)=0^{\circ}$$

(Observemos que, al ser la parte imaginaria nula, no hay que sumar ni restar ninguna cantidad, tal como se dice en el apartado 3.4.1 de la página 30 del módulo impreso).

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0º y en 180º. Como el afijo del punto buscado es (1/32, 0) el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 0º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número 1/32 en el plano complejo. Este número está asociado al punto (1/32, 0), por lo tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{32}\right)_{0^{\circ}}$

Como nos piden las raíces quintas, debemos hacer:

$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right)_{\frac{0^{\circ}+360^{\circ}k}{5}}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2^5}\right)}=\frac{1}{2}$ (esto es sobre los reales)

Los argumentos de las raíces son $\beta_k=\frac{0^{\circ}+360^{\circ}k}{5}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=0^{\circ}$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=0^{\circ}+72^{\circ}=72^{\circ}$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=0^{\circ}+144^{\circ}=144^{\circ}$
- Si k=3, tenemos que $\beta_1=0^{\circ}+216^{\circ}=216^{\circ}$
- Si k=4, tenemos que $\beta_2=0^{\circ}+288^{\circ}=288^{\circ}$

Por tanto, las tres raíces de la ecuación, en forma polar, son:

$$\boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{0^{o}}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{72^{o}}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{144^{o}}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{216^{o}}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{288^{o}}}$$

2. Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

   $e_1 = (-1,3,2,0), e_2 = (2,-1,-1,-1), e_3 = (1,2,1,-1), e_4 = (-5,0,1,3)$.

   Sea $F = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$.

   Y sea $v = (-12,1,3,7)$.

   a) Calculad la dimensión de F y una base A. ¿Pertenece v a F? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

   b) Sean $w_1 = e_1 + e_2, w_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. $B = \{w_1, w_2\}$ es una base de F. Calculad la matriz de cambio de base de B a A.

Resolución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontramos el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ y orlando encontramos que todos los determinantes 3x3 son cero. Así la dimensión de F es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores, ya que son linealmente independientes (contienen el menor anterior). Así pues, $A=\{e_1, e_2\}$.

Para ver si v pertenece a F resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=-2, y=-7. Por tanto, v pertenece a F, y sus coordenadas en la base A son (-2, -7).

b) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A. Así es justamente como tenemos definido el primer vector de la base B. Vamos a calcular la expresión del segundo resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=1, y=-1. Y por tanto las coordenadas de w_2 en la base A son (1,-1).

De manera que la matriz de cambio de base de B a A será:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - (1+2a)z = -6 \\ x + 4y + (a-6)z = -9 \\ -x + (a+1)y + z = 2a+1 \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $a = 0$.

Resolución:

a) Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver módulo 3, apartado 4, página 13]

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1-2a & -6 \\ 1 & 4 & a-6 & -9 \\ -1 & a+1 & 1 & 2a+1 \end{array}\right)$$

Ya que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = -3a^2 - 7a + 10 = -3(a-1)(a+\frac{10}{3})$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq {}^{-10}\!/_{3} \rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) =$ nº incógnitas $\rightarrow$ $\boxed{\text{S. Comp. Determinado}}$.
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos, para $a = 1$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminado}}.$$
- Si $a = \frac{-10}{3} \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por otro lado, para $a = \frac{-10}{3}$, la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 no nulo:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & -7/3 & -17/3 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Consideremos la matriz ampliada del sistema para $a = 0$ y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & -6 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -9 \end{array}\right)$$

(1) Operaciones: F2=F2-F1 y F3=F3+F1.

(2) Operaciones: F3=3·F3-2·F2.

De donde se obtiene el sistema y la solución siguiente:

$$\begin{cases} x + y - z = -6 \\ 3y - 5z = -3 \\ 10z = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 3y - 5z = -3 \\ z = -9/10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = -6 \\ y = -5/2 \\ z = -9/10 \end{cases}$$
$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -22/5 \\ y = -5/2 \\ z = -9/10 \end{cases}}$$

4. Consideremos $A = (2,1), B = (3,1), C = (3,2)$.

   a) Sea f el escalado de razón 3 desde el punto $(1,-2)$. Calculad $f(A), f(B)$ y $f(C)$.

   b) Sea g el giro de ángulo $\alpha = 30°$ en sentido antihorario desde el origen. Calculad $g(A), g(B)$ y $g(C)$.

Resolución:

a) Recordemos el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 3 desde el punto (1,-2) hay que multiplicar por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A,B,C, hemos de hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f(A)=(4,7), f(B)=(7,7) y f(C)=(7,10).

b) El Módulo 5, Secciones 3 y 5, dice que la matriz del giro de ángulo $a = 30^o$ en sentido antihorario es:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde denotamos c=cos(a) y s=sin(a), para abreviar. Para encontrar las imágenes de A,B,C multiplicamos:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c-s & 3c-s & 3c-2s \\ c+2s & c+3s & 2c+3s \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

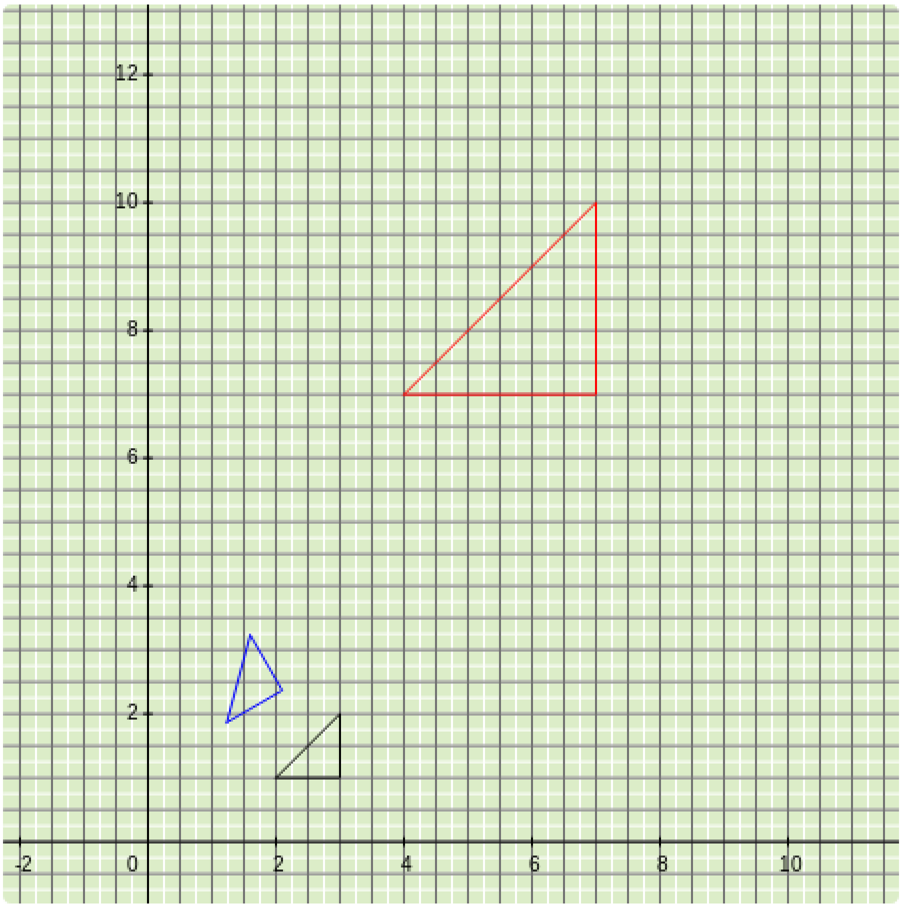
Así g(A)=(2c-s,c+2s), g(B)=(3c-s,c+3s), g(C)=(3c-2s,2c+3s). En el caso en que $a = 30^o$, entonces $\cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin(30^o) = \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$g(A) = (2c-s, c+2s) = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right),$$

$$g(B) = (3c-s, c+3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$$

y

$$g(C) = (3c-2s, 2c+3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2}\right)$$



NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÀLGEBRA

SOLUCIÓ EXAMEN
8 de juny 2019

1. Responeu als apartats següents:

   a) Expresseu en forma binòmica el nombre complex següent: 2_{90°

   b) Calculeu totes les arrels terceres del nombre complex següent: $\frac{3+3i}{-3+3i}$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Resolució:

a) Per resoldre aquest apartat apliquem les explicacions del punt 3.4.2. del mòdul imprès, "De la forma polar a binòmica":

A 2_{90° tenim que r = 2 i $\vartheta = 90^\circ$ llavors, 2_{90° = 2·(cos 90º+ i sin 90º) =

$= 2(0+1\cdot i) = 2i$

Per tant, la resposta a l'exercici és: $2_{90^\circ} = 2i$

b) Mirem l'exercici d'autoavaluació 30 de la pàgina 50 del material imprès.

De fet el que se'ns demana són les arrels terceres de $\frac{3+3i}{-3+3i}$.

Primer de tot hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Per a això multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s'explica en l'apartat 3.3.4, pàgina 26, del material imprès sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica) i agrupem part real i part imaginària:

$$\frac{3+3i}{-3+3i} = \frac{(3+3i)\cdot(-3-3i)}{(-3+3i)\cdot(-3-3i)} = \frac{-9-9i-9i+9}{9+9} = \frac{-18i}{18} = -i$$

Per determinar les arrels terceres de $-i$ anem a determinar primer el mòdul i l'argument d'aquest:

$$m = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = arctg\frac{-1}{0} = arctg(-\infty) = 270^\circ$$

(Observem que, en ser la part real nul·la, no cal sumar ni restar cap quantitat, tal com es diu en l'apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del mòdul imprès).

Com es diu en l'exercici 19 d'autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre $0-i$ en el pla complex. Aquest número està associat al punt (0, -1), per tant, és un nombre que es troba justament entre el tercer i quart quadrant.

Tenim, per tant, que $-i=1_{270^\circ}$

Com que ens demanen les arrels terceres, hem de fer:

$\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270^\circ+360^\circ k}{3}}$ per a k=0, 1,2

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=\sqrt[3]{1}=1$ (això és sobre els reals)

Els arguments de les arrels són $\beta_k=\dfrac{270^\circ+360^\circ k}{3}$ per a k=0, 1,2

- Si k=0, tenim que $\beta_0=90^\circ$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=90^\circ+120^\circ=210^\circ$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=90^\circ+240^\circ=330^\circ$

Per tant, les tres arrels terceres, en forma polar, són:

$$\boxed{1_{90^\circ}}$$

$$\boxed{1_{210^\circ}}$$

$$\boxed{1_{330^\circ}}$$

2. Sigui F un subespai de $\mathbb{R}^5$ generat pels vectors següents:

$$F=\langle(0,0,3,4,1),(0,-1,-b,0,0),(2,0,-b,0,0),(b,b,b-1,0,4)\rangle$$

a) Determineu, en funció de b, la dimensió del subespai F.

b) Per al cas $b=2$ trobeu una base de F. Pertany $v=(0,-4,2,12,-1)$ a F? Quines són les seves coordenades en la base que heu trobat?

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors.

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 3 & -b & -b & b-1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Podem veure ràpidament que tenim el menor (agafant les files 1, 2 i 4) següent amb determinant diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ara orlem (per exemple, afegint la última fila):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$$

Així el rang de la matriu definida pels vectors és 4 independentment de b. Per tant la dimensió de F és sempre 4.

b) En l'apartat anterior ja hem vist que la dimensió de F és sempre 4. Així que com a base podem proposar els 4 vectors amb que esta definit F en el cas b=2: A={(0, 0, 3, 4, 1), (0, -1, -2, 0, 0), (2, 0, -2, 0, 0), (2, 2, 1, 0, 4)}.
Per veure si v pertany a E i a la vegada trobar-ne les coordenades en el cas que hi pertanyi, resolem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=3, y=2, z=1, t=-1. Per tant v pertany a F i les seves coordenades en la base A són (3,2,1,-1).

3. Considereu el sistema d´equacions lineals:

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 2a-1 \\ 5x & + & (a-1)y & + & (2a+3)z & = & 3a+2 \\ 3x & + & (a+1)y & + & z & = & 3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema pels diferents valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculeu les solucions del sistema per $a = 0$.

Resolució:

a) Per discutir-lo utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Veure mòdul 3, apartat 4, pàg. 13]
La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 5 & a-1 & 2a+3\\ 3 & a+1 & 1\end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2a-1\\ 5 & a-1 & 2a+3 & 3a+2\\ 3 & a+1 & 1 & 3\end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 5 & a-1 & 2a+3\\ 3 & a+1 & 1\end{vmatrix}=-2a^2-6a+8=-2(a-1)(a+4)$$

- Si $a\neq 1$ i $a\neq -4\rightarrow \text{rang}(A)=3=\text{rang}(M)=\text{num. incògnites}\rightarrow$ $\boxed{\text{S. Comp. Determinat}}$.
- Si $a=1\rightarrow \text{rang}(A)=2$, ja que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix}\neq 0$. Calculem, per $a=1$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents:
$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 0 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=0\rightarrow \text{rang}(M)=2\rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminat}}.$$
- Si $a=-4\rightarrow \text{rang}(A)=2$, ja que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -5 & -5\end{vmatrix}\neq 0$. Per altra banda, per $a=-4$, la matriu ampliada té un menor d'ordre 3 no nul:
$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & -9\\ -5 & -5 & -10\\ -3 & 1 & 3\end{vmatrix}=275\neq 0\rightarrow \text{rang}(M)=3\rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Considerem la matriu ampliada del sistema quan $a=0$ i apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & -1\\ 5 & -1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 3\end{array}\right)\underbrace{\approx}_{(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -7 & 7\\ 0 & 4 & -5 & 6\end{array}\right)\underbrace{\approx}_{(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -7 & 7\\ 0 & 0 & 2 & -1\end{array}\right)$$

(1) Operacions: F2=F2-5·F1 i F3=F3-3·F1.

(2) Operacions: F3=F3-F2.

D'on s'obté el sistema i la solució següent:

$$\begin{cases}x- y+2z=-1\\ \quad 4y-7z=7\\ \quad\quad 2z=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x- y+2z=-1\\ \quad 4y-7z=7\\ \quad\quad z=-1/2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x- y+2z=-1\\ \quad\quad y=7/8\\ \quad\quad z=-1/2\end{cases}$$

$$\rightarrow\boxed{\begin{cases}x=7/8\\ y=7/8\\ z=-1/2\end{cases}}$$

4. Sigui f l´aplicació lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida per:

$f(1,5,-2)=(2,10,-4), f(0,-1,2)=(0,1,-2), f(0,-1,1)=(0,0,0)$

a) Demostreu que $(1,5,-2),(0,-1,2),(0,-1,1)$ és una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculeu una base del subespai Imatge de f. És f exhaustiva?

c) Calculeu una base del subespai $\ker(f)$ (el nucli de f). És f injectiva?

d) Estudieu si f diagonalitza.

e) Calculeu el rang de f^{1000}, és a dir, la dimensió de la imatge de f^{1000}.

Resolució:

a) Anomenem $u=(1,5,-2), v=(0,-1,2), w=(0,-1,1)$. El determinant de u, v i w és:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

(Es pot fer usant la regla de Sarrus, o bé desenvolupant per la primera fila). Com que és diferent de zero, u,v i w són linealment independents. Com que són tres vectors linealment independents de R^3, formen base (veure Mòdul 2, Secció 4.6).

$u=(1,5,-2), v=(0,-1,2), w=(0,-1,1)$ **són una base de R^3.**

b) Per calcular el subespai imatge de f és suficient calcular la imatge d'una base de R^3. La imatge de la base u,v,w de R^3 és: $f(u)=(2,10,-4), f(v)=(0,1,-2), f(w)=(0,0,0)$. Per tant,

$$\mathrm{Im}(f)=[f(u), f(v), f(w)]=[(2,10,-4),(0,1,-2),(0,0,0)]=[(2,10,-4),(0,1,-2)].$$

El tercer vector és nul i els dos primers són linealment independents. Així el subespai imatge de f està generat pels dos primers vectors. Per tant, {f(u),f(v)} és una base de la imatge. A més, f no és exhaustiva ja que la imatge de f té dimensió 2 i en canvi l'espai d'arribada té dimensió 3. (Veure Mòdul 4, Secció 4.)

$f(u)=(2,10,-4), f(v)=(0,1,-2)$ **és una base de la imatge de f i f no és exhaustiva.**

c) Recordem que el Teorema de la dimensió diu que dim E=dim Im(f)+dim Ker(f). Com que $E=R^3$ i la dimensió de la imatge és 2, deduïm que la dimensió del ker (o nucli) és 1. En particular, f no és injectiva, perquè el ker (nucli) és diferent de zero. (Veure Mòdul 4, Secció 5.) Com que f(w)=0, el vector w=(0,-1,1) és una base del nucli. Així,

$w=(0,-1,1)$ **és una base del nucli de f i f no és injectiva.**

d) Tenim f(u)=2u. En particular, u és vector propi de f de valor propi 2. D'altra banda, f(v)=-v. Per tant, v és vector propi de f de valor propi -1. Finalment, f(w)=0. Per tant, w és vector propi de f de valor propi 0. Els tres vectors u, v, w són base de R^3. Per tant, hi ha una base de R^3 formada per vectors propis de f. Això vol dir que f diagonalitza. (Veure Mòdul 4, Secció 8.)

f diagonalitza perquè hi ha una base de R^3 formada per vectors propis de f.

e) La matriu de f en la base de vectors propis és la matriu diagonal amb valors propis a la diagonal: 2,1,0. Per tant, la matriu de f elevada a qualsevol potència n, en la base de vectors propis, és la matriu diagonal amb els valors propis elevats a n a la diagonal: 2 elevat a n, 1 i 0. El rang segueix sent 2, doncs.

El rang de f^{1000} és 2.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels valors següents:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÀLGEBRA

SOLUCIÓ EXAMEN

15 de juny 2019

1. Responeu als apartats següents:
   a) Expresseu en forma polar el nombre complex següent: $-1+i$
   b) Calculeu totes les arrels terceres del nombre complex següent: $\frac{-27}{i}$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Resolució:

a) Per resoldre aquest apartat apliquem les explicacions del punt 3.4.1. del mòdul imprès, "De la forma binòmica a polar". Primer trobem el mòdul:

$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

A continuació trobem l'argument:

Com que $a=-1>0$ i $b=1$ tenim:

$$\vartheta = arctg\frac{1}{-1}=arctg(-1)=135^{\circ}$$

NOTA ACLARIDORA: Sabem que la tangent d'un angle val -1 a 135º i en 315º. Com l'afix del punt buscat és (-1, 1) l'angle està en el segon quadrant, és a dir, en 135 º.

Com es diu en l'exercici 19 d'autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre complex $-1+i$ en el pla complex. Aquest número està associat al punt (-1, 1), per tant, és un nombre que es troba en el segon quadrant.

Per tant, la resposta es: $-1+i=\sqrt{2}_{135^{\circ}}$

b) Mirem l'exercici d'autoavaluació 30 de la pàgina 50 del material imprès. Es demana determinar les arrels terceres de $\frac{-27}{i}$.

Primer de tot hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Per a això multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s'explica en l'apartat 3.3.4, pàgina 26, del material imprès sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica) i agrupem part real i part imaginària

$$\frac{-27}{i}=\frac{(-27)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{27i}{1}=27i$$

Per determinar les arrels terceres de $27i$ vam determinar primer el mòdul i l'argument d'aquest:

$$m=\sqrt{0^2+(27)^2}=27$$

$$\alpha=arctg\frac{27}{0}=arctg(\infty)=90^{\circ}$$

(Observem que, en ser la part real nul·la, no cal sumar ni restar cap quantitat, tal com es diu en l'apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del mòdul imprès).

Tenim, per tant, que $27i=27_{90^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels terceres, hem de fer:

$\left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{90^{\circ}+360^{\circ}k}{3}}$ per a k=0, 1,2

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=\sqrt[3]{27}=3$ (això és sobre els reals)

Els arguments de les arrels són $\beta_k=\dfrac{90^{\circ}+360^{\circ}k}{3}$ per a k=0, 1,2

- Si k=0, tenim que $\beta_0=30^{\circ}$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=30^{\circ}+120^{\circ}=150^{\circ}$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=30^{\circ}+240^{\circ}=270^{\circ}$

Per tant, les arrels terceres, en forma polar, són:

$$\boxed{3_{30^{\circ}}}$$

$$\boxed{3_{150^{\circ}}}$$

$$\boxed{3_{270^{\circ}}}$$

2. Sigui F un subespai vectorial de dimensió 2 de $\mathbb{R}^4$ definit de la forma següent:

$$F = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4) | a_1 = 2a_2, a_4 = -2\, a_3 \rangle$$

I sigui $v = (6, 3, -3, 6)$.

a) Comproveu que $A = \{(2,1,0,0), (0,0,1,-2)\}$ és una base de F. Pertany v a F? En cas afirmatiu, calculeu les seves coordenades en la base A.

b) Sigui $C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriu de canvi de base d´una base B a la base A. Quina és la base B?

Resolució:

a) Com que sabem que la dimensió de F és 2, només cal mirar que els vectors d'A pertanyen a F i que siguin linealment independents.
Primer de tot comprovem que els vectors de A pertanyen a F comprovant que es compleixen les condicions $a_1=2a_2$, $a_4=-2a_3$ per als dos vectors, cosa que és certa.
Seguidament comprovem que són linealment independents calculant:

$$rang \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs A és una base de F.

Per veure si v pertany a F mirem si té solució el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=3, y=-3 i per tant v pertany a F i les seves coordenades en la base A són (3,-3).

b) La matriu de canvi de base de B a A expressa els vectors de la base de B en funció dels de la d'A. Així doncs, si agafem les columnes de la matriu C ja tenim que els dos vectors de la base B seran:
1·(2,1,0,0)+1·(0,0,1,-2) = (2,1,1,-2)
2·(2,1,0,0)+(-1)·(0,0,1,-2) = (4,2,-1,2)
Per tant B={(2,1,1,-2), (4,2,-1,2)}.

3. Considereu el sistema d´equacions lineals:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x + 4y + (a-1)z = 2a+1 \\ 2x + (a+2)y - z = a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema pels diferents valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculeu les solucions del sistema per $a = 0$.

Resolució:

a) Per discutir-lo utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Veure mòdul 3, apartat 4, pàg. 13]

La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & a-1 & 2a+1 \\ 2 & a+2 & -1 & a \end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a-1 \\ 2 & a+2 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - 3a + 4 = -(a-1)(a+4)$$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -4 \rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{num. incògnites} \rightarrow$ $\boxed{\text{S. Comp. Determinat}}$.
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculem, per $a = 1$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminat}}.$$
- Si $a = -4 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Per altra banda, per $a = -4$, la matriu ampliada té un menor d'ordre 3 no nul:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -7 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Considerem la matriu ampliada del sistema quan $a = 0$ i apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

(1) Operacions: F2=F2-3·F1 i F3=F3-2·F1.

(2) Operacions: F3=F3-F2.

D'on s'obté el sistema i la solució següent:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ -2y + 5z = 4 \\ -2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ -2y + 5z = 4 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases}}$$

4. Sigui f l´aplicació linial de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida per:

$$f(x,y,z,t)=(z+t,z+t,x+y,x+y)$$

a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.

b) Calculeu una base del subespai ker(f) (nucli de f).

c) Digueu si el vector $u=(1,1,1,1)$ és vector propi de f.

d) Trobeu vectors propis de f de valor propi -2.

e) Estudieu si f diagonalitza i trobeu una base de $\mathbb{R}^4$ amb el nombre màxim de vectors propis de f.

Resolució:

a) f(1,0,0,0)=(0,0,1,1), f(0,1,0,0)=(0,0,1,1), f(0,0,1,0)=(1,1,0,0) i f(0,0,0,1)=(1,1,0,0). Aquests vectors imatge estan expressats en la base canònica. Per tant, posant-los per columnes, obtenim la matriu de f en les bases canòniques (veure Mòdul 4, Secció 3).

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

b) Per a trobar una base del ker(f) hem de resoldre el sistema A·X=0:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ens queda el sistema z+t=0, z+t=0, x+y=0, x+y=0. És a dir, t=-z, y=-x. Les solucions d'aquest sistema són els vectors de la forma: (x,y,z,t)=(x,-x,z,-z)=x(1,-1,0,0)+z(0,0,1,-1). En particular, una base del ker(f) és la donada pels vectors a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1).

Una base del Ker(f) ve donada per a=(1,-1,0,0) i b=(0,0,1,-1).

c) Per a comprovar si el vector u és vector propi de f és suficient multiplicar la matriu A per u i veure si dóna un múltiple de u:

$$A\cdot u=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Així, com que A·u=2u, tenim que el vector u és vector propi de f de valor propi 2.

u és vector propi de f de valor propi 2.

d) Usem el Mòdul 4, Secció 7, per a trobar els vectors propis de f de valor propi -2. Trobem una base del nucli de la matriu A-(-2)I=A+2I . O sigui, resolem el sistema (A+2I)X=0:

$$(A+2\cdot I)\cdot X=\begin{pmatrix}2&0&1&1\\0&2&1&1\\1&1&2&0\\1&1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ens queda el sistema 2x+z+t=0, 2y+z+t=0, x+y+2z=0, x+y+2t=0. Restant la segona equació a la primera queda: 2x-2y=0. O sigui, x=y. Restant la quarta equació a la tercera queda: 2z-2t=0. O sigui, z=t. Substituint z=t en la primera equació queda: 2x+t+t=0. O sigui 2x=-2t i x=-t. Les solucions d'aquest sistema són vectors de la forma: (x,y,z,t)=(-t,-t,t,t)=t(-1,-1,1,1). En particular, (-1,-1,1,1) és vector propi de f de valor propi -2.

e) L'aplicació lineal f diagonalitza perquè la seva matriu en les bases canòniques és simètrica (veure Mòdul 4, Secció 8).
Els vectors linealment independents a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1) generen el nucli. Per tant, a i b són dos vectors propis de f de valor propi 0. D'altra banda, u=(1,1,1,1) és vector propi de f de valor propi 2 i v=(-1,-1,1,1) és vector propi de f de valor propi -2. Així:

{a=(1,-1,0,0), b=(0,0,1,-1), u=(1,1,1,1), v=(-1,-1,1,1)} és una base de R^4 formada per vectors propis de f.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels valors següents:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ÀLGEBRA

SOLUCIÓ EXAMEN

19 de juny 2019

1. Responeu als apartats següents:

   a) Trobeu l´invers del nombre complex següent: $2+3i$. Expresseu aquest invers en forma binòmica.

   b) Calculeu totes les arrels cinquenes del nombre complex següent: $\frac{1}{32}$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Resolució:

a) L´invers de $2+3i$ és $\frac{1}{2+3i}$ però cal expresar-lo en forma binòmica.

Primer de tot hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Per a això multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal i com s'explica a l'apartat 3.3.4, pàgina 26, del material imprès sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica) i agrupem part real i part imaginària

$$\frac{1}{2+3i}=\frac{1\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)}=\frac{2-3i}{4+9}=\frac{2-3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{(-3)}{13}i$$

Per tant, la resposta a l'exercici és: $\frac{1}{2+3i}=\frac{2}{13}+\frac{(-3)}{13}i$

b) Mirem l'exercici d'autoavaluació 30 de la pàgina 50 del material imprès. De fet el que es demana són les arrels cinquenes de $\frac{1}{32}$.

Per determinar les arrels cinquenes de $\frac{1}{32}$ determinem primer el mòdul i l´argument d'aquest:

$$m=\sqrt{\left(\frac{1}{32}\right)^2+(0)^2}=\frac{1}{32}$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{1/32}=arctg(0)=0^{\circ}$$

(Observem que, en ser la part imaginària nul·la, no cal sumar ni restar cap quantitat, tal com es diu en l'apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del mòdul imprès).

NOTA ACLARIDORA: Sabem que la tangent d'un angle val 0 en 0º i en 180º. Com l'afix del punt buscat és (1/32, 0) l'angle està en el primer quadrant, és a dir, en 0º.

Com es diu en l'exercici 19 d'autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre 1/32 en el pla complex. Aquest número està associat al punt (1/32, 0), per tant, és un nombre que es troba en el primer quadrant.

Tenim, per tant,que $\frac{1}{32} = \left(\frac{1}{32}\right)_{0^\circ}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes, hem de fer:

$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right)_{\frac{0^\circ+360^\circ k}{5}}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2^5}\right)} = \frac{1}{2}$ (això és sobre els reals)

Els arguments de les arrels són $\beta_k = \frac{0^\circ+360^\circ k}{5}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 0^\circ$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 0^\circ+72^\circ = 72^\circ$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 0^\circ+144^\circ = 144^\circ$
- Si k=3, tenim que $\beta_1 = 0^\circ+216^\circ = 216^\circ$
- Si k=4, tenim que $\beta_2 = 0^\circ+288^\circ = 288^\circ$

Per tant, les tres arrels de l'equació, en forma polar, són:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{0^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{72^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{144^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{216^\circ}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)_{288^\circ}}$$

2. Siguin els vectors de $\mathbb{R}^4$ següents:

   $e_1 = (-1,3,2,0), e_2 = (2,-1,-1,-1), e_3 = (1,2,1,-1), e_4 = (-5,0,1,3)$.

   Sigui $F = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$.

   I sigui $v = (-12,1,3,7)$.

   a) Calculeu la dimensió de F i una base A. Pertany v a F? En cas afirmatiu, calculeu les seves coordenades en la base A.

   b) Siguin $w_1 = e_1 + e_2, w_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. $B = \{w_1, w_2\}$ és una base de F. Calculeu la matriu de canvi de base de B a A.

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trobem el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ i orlant trobem que tots els determinants 3x3 són zero. Així la dimensió de F és 2 i una base pot estar formada per els dos primers vectors ja que son linealment independents (contenen el menor anterior). Així doncs A={e_1, e_2}.
Per mirar si v pertany a F resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=-2, y=-7. Per tant v pertany a E, i les seves coordenades en la base A són (-2, -7).

b) Per trobar la matriu de canvi de base de B a A cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la d'A. Així és justament com tenim definit el primer vector de la base B. Anem a trobar la expressió del segon resolent el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=-1. Per tant les coordenades de w_2 en la base A són (1,-1).
De manera que la matriu de canvi de base de B a A serà:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Considereu el sistema d´equacions lineals:

$$\begin{cases} x + y - (1+2a)z = -6 \\ x + 4y + (a-6)z = -9 \\ -x + (a+1)y + z = 2a+1 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema pels diferents valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculeu les solucions del sistema per $a = 0$

Resolució:

a) Per discutir-lo utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Veure mòdul 3, apartat 4, pàg. 13]

La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1-2a & -6 \\ 1 & 4 & a-6 & -9 \\ -1 & a+1 & 1 & 2a+1 \end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 1 & 4 & a-6 \\ -1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = -3a^2 - 7a + 10 = -3(a-1)(a+\frac{10}{3})$$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq {}^{-10}/_{3} \rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(M) = \text{num. incògnites}$

  $\rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Determinat}}$.

- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculem, per $a = 1$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 2 \rightarrow \boxed{\text{S. Comp. Indeterminat}}.$$

- Si $a = \frac{-10}{3} \rightarrow \text{rang}(A) = 2$, ja que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Per altra banda, per $a = \frac{-10}{3}$, la matriu ampliada té un menor d'ordre 3 no nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & -9 \\ -1 & -7/3 & -17/3 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(M) = 3 \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible}}.$$

b) Considerem la matriu ampliada del sistema quan $a = 0$ i apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & -6 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right) \underbrace{\approx}_{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -9 \end{array}\right)$$

(1) Operacions: F2=F2-F1 i F3=F3+F1.

(2) Operacions: F3=3·F3-2·F2.

D'on s'obté el sistema i la solució següent:

$$\begin{cases} x+\ y-\ \ z\ = -6 \\ \quad 3y-5z\ = -3 \\ \qquad 10z\ = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+\ y-\ \ z\ = -6 \\ \quad 3y-5z\ = -3 \\ \qquad\quad z\ = -9/10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+\ y-\ \ z\ = -6 \\ \qquad\quad y\ = -5/2 \\ \qquad\quad z\ = -9/10 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -22/5 \\ y = -5/2 \\ z = -9/10 \end{cases}}$$

4. Considerem $A = (2,1), B = (3,1), C = (3,2)$.

   a) Sigui f l´escalatge de raó 3 des del punt $(1,-2)$. Calculeu $f(A), f(B)$ i $f(C)$.

   b) Sigui g el gir d´angle $a = 30°$ en sentit antihorari des de l´origen. Calculeu $g(A), g(B)$ i $g(C)$.

Resolució:

a) Recordem el Mòdul 5, Secció 4. Per a trobar la matriu de l'escalatge de raó 3 des del punt (1,-2) cal multiplicar per la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trobar les imatges dels punts A,B,C, hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, f(A)=(4,7), f(B)=(7,7) i f(C)=(7,10).

b) El Mòdul 5, Seccions 3 i 5, diu que la matriu del gir d'angle $a = 30^o$ en sentit antihorari és:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on denotem c=cos(a) i s=sin(a), per abreujar. Per a trobar les imatges de A,B,C multipliquem:

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c-s & 3c-s & 3c-2s \\ c+2s & c+3s & 2c+3s \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

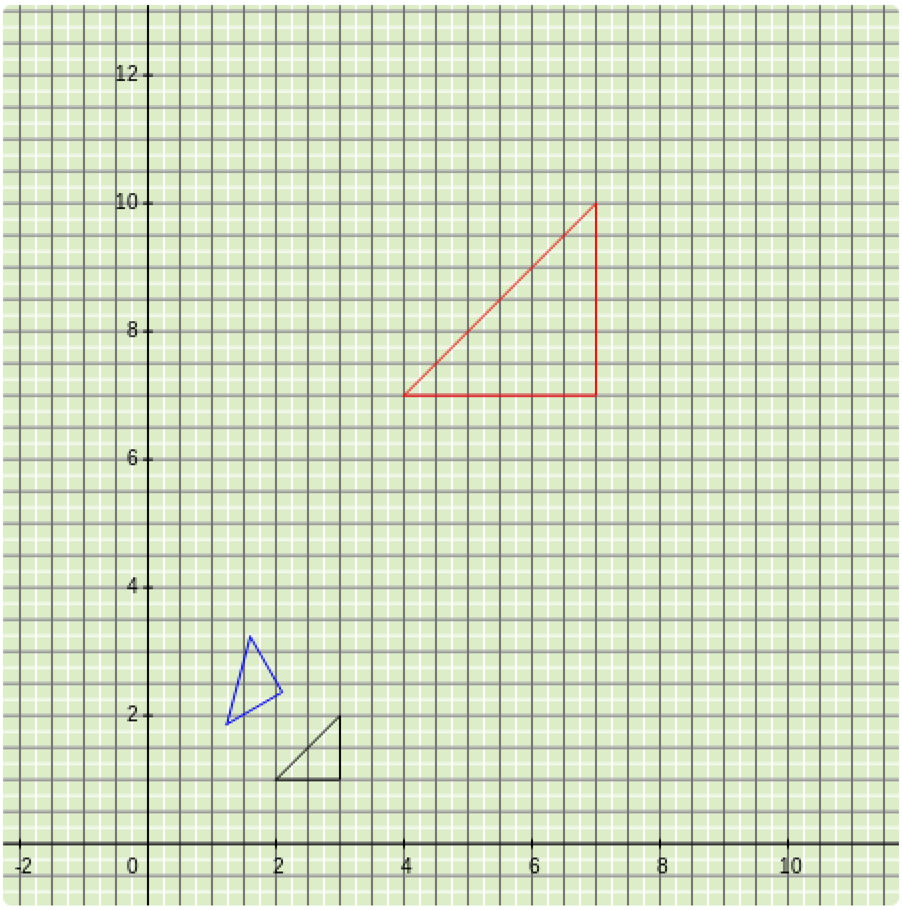
Així g(A)=(2c-s,c+2s), g(B)=(3c-s,c+3s), g(C)=(3c-2s,2c+3s). En el cas en què $a = 30^o$, aleshores $\cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(30^o) = \frac{1}{2}$. Per tant,

$$g(A) = (2c-s, c+2s) = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2} \right),$$

$$g(B) = (3c-s, c+3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2} \right)$$

i

$$g(C) = (3c-2s, 2c+3s) = \left(\frac{3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \right).$$



NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels valors següents:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solución Examen 1

2017-2018 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 09.06.2018

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad en forma polar el siguiente número complejo: $z = \sqrt{3} - i$.

b) Hallad un número complejo, z, sabiendo que una de sus raíces octavas es $-1+i$. Proporcionad el resultado en forma binómica y polar.

Solución:

a) Partimos de un número complejo en forma binómica y queremos pasarlo a polar. Para ello seguiremos el proceso que se dice en la página 30, apartado 3.4.1, del material impreso sobre cómo pasar un número complejo a polar:

Primero calculamos el argumento y luego el módulo:

$$m = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\alpha = arctg\frac{-1}{\sqrt{3}} \underset{(*)}{=} arctg\frac{-\sqrt{3}}{3} = 330^{o}$$

$$(*)\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{(-1)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

(Observemos que, al ser la parte real positiva y la parte imaginaria negativa no hay que sumar ni restar ninguna cantidad).

Por tanto, la respuesta es:

$$\boxed{\sqrt{3} - i = 2_{330^{o}}}$$

b) Expresamos $-1+i$ en forma polar.

Para ello determinamos primero el módulo y el argumento de éste:

$$m = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = arctg\frac{1}{-1} = arctg(-1) = 135^{o}$$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale -1 en 135º y en 315º. Como el afijo del punto buscado es (-1,1) el ángulo está en el segundo cuadrante, es decir, en 135º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número -1+i en el plano complejo. Este número está asociado al punto (-1,1), por lo tanto, es un número que se encuentra en el segundo cuadrante.

Tenemos, por tanto, que $-1+i=\sqrt{2}_{135^\circ}$

Y ahora debemos hacer, tal como se dice en el apartado 3.5 de la página 38 del material impreso sobre el exponencial de un número complejo:

$$z=(-1+i)^8=\left(\sqrt{2}_{135^\circ}\right)^8=16_{8\cdot 135^\circ}=16_{1080^\circ}=16_{3\cdot 360^\circ+0}\underset{(*)}{=}16_{0^\circ}=16\cdot(\cos 0^\circ + i sen 0^\circ)=$$
$$=16\cdot(1+0i)=16$$

(*): Ver página 31 del material impreso en que se habla de que la representación en forma polar no es única.

Por tanto el número buscado es $\boxed{z=16_{0^\circ}=16}$

2. Sean $e_1=(1,1,4), e_2=(0,1,-1), e_3=(1,2,3), e_4=(1,5,0)$ vectores de $\Re^3$.

   Sea $E=<e_1,e_2,e_3,e_4>$. Sea $v=(-2,3,-13)$.

   a. Calculad la dimensión de E y una base A. ¿Pertenece v a E? En caso afirmativo, calculad sus coordenadas en la base A.

   b. Sean $w_1=(2,3,7), w_2=(1,1,4)$. $B=\{w_1,w_2\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de B a A y la de A a B.

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}=2$$

Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Así A={e_1, e_2}.

Para mirar si w pertenece a E resolvemos el sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix}$

Éste sistema tiene solución: x=-2, y=5. Así pues v pertenece a E, y sus coordenadas en la base A son (-2, 5).

b) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A.

Para el vector w_1=(2,3,7) resolvemos el sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Que tiene solución: x=2, y=1.
Para el segundo vector es directo, ya que es el primero de la base A.
De manera que la matriz de cambio de base de B a A será:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B podemos calcular directamente la inversa de la matriz anterior:

$$C_{A\to B} = C_{B\to A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay + t = 1 \\ 2x + (a+2)y + 2z + 3t = 5 \\ x + (a-1)y - z + (a+1)t = -a \\ x + (a+1)y + z + (a+3)t = 4 - a \end{cases}$$

con $a \in \Re$.

a. Discutid el sistema de ecuaciones para los diferentes valores del parámetro.

b. Resolved el sistema para a $a = 0$.

Solución:

a) Tenemos un sistema de 4 ecuaciones y cuatro incógnitas. Para discutir-lo utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius. Calcularemos primero los valores de a que hacen que la matriz A tinga rango máximo, para estos valores el sistema será compatible determinado.

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, A', asociadas al sistema son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & a-1 & -1 & a+1 & -a \\ 1 & a+1 & 1 & a+3 & 4-a \end{array}\right)$$

Simplificamos operando:

F4- F1, F3- F1 , F2-2F1 y en el siguiente paso F4 +F3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -a+2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & a+2 & 3-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -a+2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & a & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+2 & 2-2a \end{array}\right)$$

Estudiamos ara el rango de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -a+2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+2 \end{vmatrix} = (-a+2)(-2)(a+1) + 4 \cdot (a+1)$$

$$= (a+1)(2a-4+4) = (2a)(a+1)$$

$$rango(A) = 4 \Leftrightarrow a \neq 0 \; y \; a \neq -1$$

- Caso I: Si $a \neq 0, -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 4 = rango(A') =$ número de incógnitas y por lo tanto el sistema es **Compatible Determinado**.
- Caso II: Si $a = 0$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ orlamos este menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Calculamos ahora el rango *A'*; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$=0

.

y por tanto tenemos $rango(A) = rango(A') = 3$ así que el sistema es **Compatible Indeterminado** con (4-3=1) **1 grado de libertad.**

- Caso III: Si $a = -1$, la representación matricial es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

La última fila evidencia que el sistema será **Incompatible**.

En resumen:

Si $a \neq 0, -1$, el sistema es Compatible Determinado. Si $a = 0$ el sistema es Compatible Indeterminado con 1 grado de libertad. Si $a = -1$el sistema es Incompatible.

b) Tenemos que hallar la solución para $a = 0$

Podemos resolver directamente el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Hemos simplificado con las siguientes operaciones: 2F3+ F2

$$\begin{cases} x + t = 1 \\ 2y + 2z + t = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 - z \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones serán todos los puntos que cumplan:

$(0,1 - z, z, 1)$

4. Sea f la aplicación lineal de $\Re^3$ en $\Re^3$ definida por:

   $f(1,1,1) = (0,3,0), f(0,-1,0) = (0,2,0), f(1,1,0) = (4,4,0)$

   a. Demostrad que $(1,1,1),(0,-1,0),(1,1,0)$ es una base de $\Re^3$.

   b. Calculad una base del subespacio Imagen de f. ¿Es f exhaustiva?

   c. Calculad una base del subespacio Ker (f), el núcleo de f. ¿Es f inyectiva?

   d. Hallad la matriz de f en la base $(1,1,1),(0,-1,0),(1,1,0)$. ¿Diagonaliza f?

Solución:

a) Denominamos u=(1,1,1), v=(0,-1,0), w=(1,1,0). El determinante de u, v y w es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Puesto que es diferente de cero, u,v y w son linealmente independientes. Puesto que son tres vectores linealmente independientes de R³, forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

b) Para calcular el subespacio imagen es suficiente calcular la imagen de una base de R^3. Sabemos que la imagen de la base u,v,w de R^3 es: f(u)=(0,3,0), f(v)=(0,2,0) y f(w)=(4,4,0). Por lo tanto, Im(f)=<(0,3,0),(0,2,0),(4,4,0)>. Es decir, (0,3,0), (0,2,0), (4,4,0) generan el subespacio imagen. Observemos que el determinante de estos tres vectores es cero.

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

De hecho, es claro que f(u) y f(v) son linealmente dependientes. En cambio, f(u)=(0,3,0) y f(w)=(4,4,0) son linealmente independientes. Por lo tanto, f(u),f(w) son una base de la imagen. Así, f NO es exhaustiva ya que la imagen de f tiene dimensión 2 y en cambio el espacio de llegada tiene dimensión 3. (Ver Módulo 4, Sección 4.)

c) Recordemos que la fórmula de la dimensión dice que dim E=dim Im(f)+dim Nuc(f). Puesto que $E=R^3$ y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del núcleo es 1. Puesto que 2f(u)=3f(v), tenemos que f(2u-3v)=0. Es decir, el vector 2(1,1,1)-3(0,-1,0)=(2,5,2) es una base del núcleo. En particular, f NO es inyectiva. (Ver Módulo 4, Sección 5.)

d) Tenemos f(u)=(-3)v, f(v)=(-2)v y f(w)=4w. En particular, v es vector propio de f de valor propio -2 y w es vector propio de f de valor propio 4. La matriz de f en la base u,v,w es:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es:

$$Q(t) = det(B - tI) = det\begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ -3 & -2-t & 0 \\ 0 & 0 & 4-t \end{pmatrix} = (0-t)(-2-t)(4-t).$$

Por lo tanto, f tiene tres valores propios distintos que son el 0, el -2 y el 4. De aquí se deduce que f diagonaliza. Un vector propio de f de valor propio 0 es el (2,5,2), el vector que genera el núcleo de f. Un vector propio de f de valor propio -2 es el v=(0,-1,0). Un vector propio de f de valor propio 4 es el w=(1,1,0). (Ver Módulo 4, Sección 8.)

NOTA: En la realización del ejercicio puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0º	30º	45º	60º	75º	90º	135º	180º	270º	300º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solución Examen 3

2016-2017 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 21.06.2017

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Hallad la condición que tienen que cumplir x e y para que el número complejo $\dfrac{(x-1)+yi}{(x+1)+yi}$ sea un número imaginario puro.

b) Hallad el módulo y el argumento de $-2+2i$.

Solución:

a) Tal como se dice en la página 20 del material impreso, para que sea un número imaginario puro es necesario que la parte real sea 0. Vamos a ver cuál es la parte real de este número complejo. Para ello efectuamos el cociente para obtener el número de la forma $a+bi$ (ver apartado 3.3., página 20, "Operaciones con números complejos"):

$$\frac{(x-1)+yi}{(x+1)+yi}=$$
$$=\frac{((x-1)+yi)\cdot((x+1)-yi)}{((x+1)+yi)\cdot((x+1)-yi)}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)-(x-1)\cdot yi+(x+1)\cdot yi+y^2}{(x+1)^2+y^2}=$$
$$=\frac{x^2-1-xyi+yi+xyi+yi+y^2}{(x+1)^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2-1)+2yi}{(x+1)^2+y^2}=$$
$$=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i$$

Una vez tenemos el número complejo expresado de la forma $a+bi$ imponemos que la parte real es 0 (para que el número sea imaginario puro):

$$\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

Por lo tanto, la condición es:

$$x^2+y^2=1$$

a) Buscamos el módulo y el argumento del complejo $-2+2i$. Para ello aplicamos las explicaciones del apartado 3.4, página 27, del material impreso.

$$m=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Ahora vamos a por el ángulo. El ángulo del complejo dado es:

$$\alpha = \arctan\frac{2}{-2} + 180^{\circ} = -45^{\circ} + 180^{\circ} = 135^{\circ}$$

Por lo tanto:

$$-2+2i = 2\sqrt{2}_{135^{\circ}}$$

2. Sean E, F y G los subespacios vectoriales de $\Re^3$ generados de la forma siguiente:

$$E = <(2,2,0),(2,4,4),(0,2,a),(b,4,2)>,\ a,b \in \Re$$

$$F = <(-1,-1,0),(0,1,2),(1,0,-2)>$$

$$G = <(2,2,0),(2,4,4)>$$

a) Hallad a y b para que la dimensión de E sea 2 y hallad una base en este caso. Hallad la dimensión de F y de G y hallad también una base.

b) ¿Son F y G el mismo subespacio vectorial? En caso afirmativo, hallad la matriz de cambio de base de la base de G a la base de F que habéis propuesto en el apartado anterior.

Solución:

a) Primero de todo vemos que los dos primeros vectores son linealmente independientes ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ así que ya generan un subespacio vectorial de dimensión 2.

Ahora imponemos que los otros dos vectores sean combinación lineal de estos dos primeros para que la dimensión de E sea 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & a \end{vmatrix} = 4a - 16$$

Por lo tanto, si imponemos que el determinante anterior sea 0 tenemos que *a*=4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & b \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8b - 24$$

Por lo tanto, si imponemos que el determinante anterior sea 0 tenemos que *b*=3.

Como base podremos usar los vectores que contienen el menor que hemos encontrado en primer lugar $A=\{(2,2,0),(2,4,4)\}$

En cuanto a F: Calculamos el rango de los vectores. Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Pero podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así la dimensión de F es 2 y como base podríamos usar los dos vectores que contienen el menor anterior y, por lo tanto, $B=\{(-1,-1,0),(0,1,2)\}$

Respecto G procedemos de manera análoga y encontramos que la dimensión es 2 ya que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ y una base puede ser C={(2,2,0),(2,4,4)}.

b) Para comprobar si son el mismo subespacio vectorial, como la dimensión de los dos espacios es igual, será suficiente con comprobar si una base de G pertenece a F.

Así para (2,2,0) de la base de G planteamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ que tiene solución x=-2, y=0 y, por lo tanto, $(2,2,0) \in F$

Para (2,4,4) de la base de G planteamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$ que tiene solución x=-2, y=2 y, por lo tanto, $(2,4,4) \in F$

Por lo tanto F y G son el mismo subespacio vectorial.

Para calcular la matriz de cambio de base de C a B, pondremos los vectores de la base C como combinación lineal de los de la base B. Esto lo acabamos de resolver, por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales siguiente que depende del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) Estudiad para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible.
b) Resolved el sistema para el caso $\lambda = 1$.

Solución:

a) Estudiamos para qué valores de λ el sistema es incompatible.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(5\lambda+5) = 5\lambda(\lambda+1)$$

CASO I – Si $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -1$

$$Rang\, M = Rang\, \overline{M} = núm.incòg = 3$$

En virtud del teorema de Rouché-Frobënius, en este caso el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

CASO II – Si $\lambda = 0$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad Rang\, M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Rang\, \overline{M} = 3$$

$$Rang\, M \neq Rang\, \overline{M}$$

En virtud del teorema de Rouché-Frobënius el sistema es INCOMPATIBLE

CASO III – $\lambda = -1$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Rang\, M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -5 & 30 \end{vmatrix} = 120 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad Rang\, \overline{M} = 3$$

$Rang\, M = 2 \qquad Rang\, \overline{M} = 3$

$Rang\, M \neq Rang\, \overline{M}$

En virtud del teorema de Rouché-Frobënius el sistema es INCOMPATIBLE

El sistema es incompatible para dos valores del parámetro λ: $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

b) Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ y + z &= 10 \\ 2x - y + 5z &= 30 \end{cases}$$

En este caso el sistema es compatible determinado, tiene una única solución, y el sistema se puede resolver por cualquier método conocido, por ejemplo por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación tenemos 10 z = 60, por lo tanto, $z = 6$
De la segunda ecuación tenemos y + z = 10, por lo tanto, $y = 4$
De la primera ecuación tenemos x + y – z = 0, por lo tanto, $x = 2$

Solución: $\boxed{(x = 2 \ , \quad y = 4 \ , \quad z = 6)}$

4. Consideremos $A=(2,0)$, $B=(2,3)$, $C=(1,3)$.

a) Sea g el giro de ángulo a en sentido antihorario desde el origen de coordenadas. Calculad $g(A), g(B)$ y $g(C)$. Hallad el ángulo a de manera que el segmento $g(B), g(C)$ sea perpendicular al eje x.

b) Sea f el escalado de razón 2 desde el punto $(0,-2)$. Calculad $f(A), f(B)$ y $f(C)$.

<u>Solución:</u>

a) Recordemos el Módulo 5, Sección 3.1. La matriz del giro de ángulo a en sentido antihorario desde el origen es:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\operatorname{sen}(a) & 0 \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar las imágenes de los puntos A,B,C, tenemos que hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\operatorname{sen}(a) & 0 \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(a) & 2\cos(a)-3\operatorname{sen}(a) & \cos(a)-3\operatorname{sen}(a) \\ 2\operatorname{sen}(a) & 2\operatorname{sen}(a)+3\cos(a) & \operatorname{sen}(a)+3\cos(a) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$g(A)=(2\cos(a),2\operatorname{sen}(a)),$$
$$g(B)=(2\cos(a)-3\operatorname{sen}(a),2\operatorname{sen}(a)+3\cos(a))$$
$$g(C)=(\cos(a)-3\operatorname{sen}(a),\operatorname{sen}(a)+3\cos(a))$$

Así, $g(B)-g(C)=(\cos(a),\operatorname{sen}(a))$ y este vector es perpendicular al eje x si al multiplicarlo por el vector (1,0) da 0. Es decir, si $\cos(a)=0$. Es decir, cuando el ángulo es de 90º. Entonces los tres puntos son g(A)=(0,2), g(B)=(-3,2) y g(C)=(-3,1).

b) Recordemos ahora el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 2 desde el punto (0, -2), de derecha a izquierda, primero hacemos la traslación de vector (0, 2), luego hacemos el escalado de razón 2, y luego hacemos la traslación de vector (0, -2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar las imágenes de los puntos A,B,C, tenemos que hacer la multiplicación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, f(A)=(4,2), f(B)=(4,8) y f(C)=(2,8).

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar alguno/s de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	300º	315º	360º
sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	$-\sqrt{3}$	-1	0

Solución Examen 2

2017-2018 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 16.06.2018

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad en forma binómica el siguiente número complejo: $z = 4_{135^o}$

b) Sabemos que el producto de dos números complejos es $2\cdot\sqrt{2}_{75^o}$. Sabiendo que uno de los números es $z = 1 + i$, hallad el otro número. Proporcionad el resultado en forma binómica y polar.

Solución:

a) Partimos de un número complejo en forma polar y queremos pasarlo a binómica. Para ello seguiremos el proceso que se dice en la página 33, apartado 3.4.1, del material impreso sobre cómo pasar un número complejo de binómico a polar:

Primero calculamos el argumento y luego el módulo:

$$z = 4_{135^o} = 4\cdot(\cos 135^o + i sen 135^o) = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

Por tanto, la respuesta es:

$$\boxed{z = 4_{135^o} = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}$$

b) Llamemos w al número buscado. Entonces, según el enunciado del ejercicio, tenemos:

$$\begin{cases} z\cdot w = 2\sqrt{2}_{75^o} \\ z = 1 + i \end{cases}$$

Existen diversas formas de resolver este ejercicio. Aquí se plantea una de ellas, pero no es la única:

Expresamos z en forma polar:

$$m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{1}{1}\right) = arctg(1) = 45^o$$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 1 en 45º y en 225º. Como el afijo del punto buscado es (1,1) el ángulo está en el primer cuadrante, es decir, en 45º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número 1+i en el plano complejo. Este número está asociado al punto (1,1), por lo tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante.

Por tanto: $z = 1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$

Ahora despejamos w del sistema de ecuaciones:

$$w = \frac{2\sqrt{2}_{75^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}} = 2_{30^\circ}$$

Ahora pasamos el número a forma binómica:

$$w = 2_{30^\circ} = 2\cdot(\cos 30^\circ + i sen 30^\circ) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

Por tanto, el número pedido es:

$$\boxed{w = 2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i}$$

2. Dados los conjuntos de vectores de $\Re^3$:

$A = \{(a,3,-5),(0,a^2,7),(0,0,a)\}$, $B = \{(b,1,1),(1,b^2,0),(0,1,0)\}$.

a. Calculad el valor de a para que A y B sean base de $\Re^3$. Si $a = 2$ y $b = 2$, calculad las coordenadas del vector $v = (2,3,-3)$ en cada una de las bases.

b. Calculad la matriz de cambio de base de A a B para $a = 2$ y $b = 2$. Comprobad la coherencia del resultado del apartado anterior viendo que la matriz de cambio de base de A en B transforma efectivamente las coordenadas de v en A a las coordenadas de v en B.

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz de vectores del conjunto A:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & a^2 & 0 \\ -5 & 7 & a \end{vmatrix} = a^4$$

Así para $a \neq 0$ el rango de la matriz es 3 y por tanto son base de R^3.

Hacemos lo mismo para el conjunto B: $\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 1 & b^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$

En este caso no depende del valor de b y siempre son base de R^3.

Para calcular las coordenadas de v en A cuando $a = 2$ resolvemos el siguiente sistema:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ Que tiene solución x=1, y=0, z=1.

Por tanto las coordenadas de v en A cuando $a = 2$ son (1,0,1).

Para calcular las coordenadas de v en B cuando $b = 2$ resolvemos de forma análoga el siguiente sistema:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ Que tiene solución x=-3, y=8, z=-26.

Por tanto las coordenadas de v en B cuando $b = 2$ son (-3,8,-26).

b) Para calcular la matriz de cambio de base C debemos resolver C=B$^{-1}\cdot$A:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 12 & -14 & -4 \\ -40 & 53 & 14 \end{pmatrix}$$

Ahora comprobamos el resultado del apartado anterior y vemos que efectivamente transforma las coordenadas de v en A a las coordenadas de v en B.

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 12 & -14 & -4 \\ -40 & 53 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -26 \end{pmatrix}$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y + 2z + at = 1 \\ x + 2z + 3t = 2 \\ x + y + 4z + 5t = b \end{cases}$$

con a y $b \in \Re$.

a. Discutid el sistema de ecuaciones para los diferentes valores de los parámetros.

b. Resolved el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) Tenemos un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas. Para discutir-lo utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius. Calcularemos primero los valores de a y b que hacen que la matriz A tenga rango máximo,
La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, A', asociadas al sistema son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & b \end{array}\right)$$

Simplificamos operando:

F3- F2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & b-2 \end{array}\right)$$

Estudiemos ahora el rango de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-a) = -2+a \rightarrow el\ deteminant\ es\ 0\ si\ a=2$$

- Caso I: $Si\ a \neq 2 \ \rightarrow\ rango\ A = 3 = rango\ A'$
- Caso II: Si $a = 2$, estudiamos ahora el rango de la matriz *A'* .

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b-2 \end{vmatrix} = -1(b-2-1) = -b+3 \rightarrow Si\ b=3\ el\ determinante\ es\ 0$$

- Caso III: $Si\ a = 2\ y\ b = 3 \ \rightarrow\ rango\ A = 2 = rango\ A'$

$Si\ a \neq 2 \ \rightarrow\ rango\ A = 3 = rango\ A'$ **Sistema Compatible Indeterminado con 1 grado de libertad**
$Si\ a = 2\ y\ b = 3 \ \rightarrow\ rango\ A = 2 = rango\ A'$ **Sistema Compatible indeterminado con 2 grados de libertad**
$Si\ a = 2\ y\ b \neq 3 \ \rightarrow\ rango\ A = 2\ y\ \ rango\ A' = 3$ $\ \mathbf{Sistema\ Incompatible}$

b) Tenemos que encontrar la solución para $a = 0$, como acabamos de ver no hay una única solución ya que tendría un grado de libertad.

Podemos resolver directamente el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 5 & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 5 & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2-b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 5 & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3-b \end{array}\right)$$

Intercambiamos las filas F3, F1, F2

Restamos la primera y la última filas y finalmente sumamos las dos últimas filas.

Así nos quedan las ecuaciones siguientes.

$$\begin{cases} x+y+4z+5t = b \\ \quad y+2z = 1 \\ \quad -2t = 3-b \end{cases}$$

$$t = \frac{3-b}{-2}$$

$y = 1 - 2z$

$x = b - y - 4z - 5t = b - 1 + 2z - 4z - 5\left(\frac{3-b}{-2}\right) = -2z + \frac{13-3b}{2}$

Las soluciones serán todos los puntos que cumplen:

$\left(-2z + \frac{13-3b}{2}, 1 - 2z, z, \frac{3-b}{-2}\right)$

4. Sea f la aplicación lineal de $\Re^4$ en $\Re^4$ definida por:

   $f(x, y, z, t) = (x, 3y, 2z + t, z + 2t)$

   a. Hallad la matriz de f en las bases canónicas.

   b. Calculad el polinomio característico de f y los valores propios de f.

   c. Estudiad si f diagonaliza.

   d. Hallad una base de $\Re^4$ con el número máximo de vectores propios de f.

Solución:

a) f(1,0,0,0)=(1,0,0,0), f(0,1,0,0)=(0,3,0,0), f(0,0,1,0)=(0,0,2,1) y f(0,0,0,1)=(0,0,1,2). Estos vectores imagen están expresados en la base canónica. Por lo tanto, poniéndolos por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Recordemos el Módulo 4, Sección 7, la definición de polinomio característico de f. Desarrollando el determinante por la primera columna y después por la segunda obtenemos:

$$Q(t) = det(A - tI) = det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-t \end{pmatrix} = (1-t)(3-t)det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Operando, obtenemos:

$$Q(t) = (1-t)(3-t)(t^2 - 4t+3) = (1-t)(3-t)(t-1)(t-3) = (1-t)^2(3-t)^2.$$

Las raíces de este polinomio son 1 y 3 con multiplicidad algebraica 2 (ver Módulo 4, Sección 8.1).

Los valores propios de f son el 1 y el 3, con multiplicidad algebraica 2.

c) Para ver si diagonaliza hemos de comprobar que la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados (ver Módulo 4, Sección 8). Para el valor propio 1, hemos de calcular la dimensión dim(Nuc(f-1I)) = 4-rang(A-I). Fijémonos que el rango de (A-I) es justamente 2.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, la dimensión del espacio propio asociado al valor propio 1 es 4-2=2. Análogamente, para el valor propio 3, hemos de calcular dim(Nuc(f-3I))=4-rang(A-3I). Fijémonos que el rango de (A-3I) es justamente 2.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así, la dimensión del espacio propio asociado al valor propio 3 es 4-2=2. Por lo tanto, para los dos valores propios, la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados. Eso significa que f diagonaliza (ver Módulo 4, Sección 8).

f diagonaliza porqué el polinomio característico descompone en factores lineales y la multiplicidad algebraica de los dos valores propios coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores propios asociados.

d) Usemos ahora el Módulo 4, Sección 7, para encontrar los vectores propios de f. Encontremos vectores propios de f de valor propio 1. Es decir, busquemos el núcleo de la matriz A-I . O sea, resolvamos el sistema (A-I)X=0:

$$(A-I)X=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 2y=0, z+t=0. Es decir, y=0 y t=-z. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: (x,y,z,t)=(x,0,z,-z)=x(1,0,0,0)+z(0,0,1,-1). En particular, (1,0,0,0) y (0,0,1,-1) son dos vectores propios de f de valor propio 1 linealmente independientes.

Ahora encontremos vectores propios de f de valor propio 3. Es decir, busquemos el núcleo de A-3I. O sea, resolvamos el sistema (A-3I)X=0:

$$(A-3\mathrm{I})X=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema -2x=0, -z+t=0. Es decir, x=0 y t=z. Las soluciones de este sistema son los vectores de la forma: (x,y,z,t)=(0,y,z,z)=y(0,1,0,0)+z(0,0,1,1). En particular, (0,1,0,0) y (0,0,1,1) son dos vectores propios de f de valor propio 3 linealmente independientes.

(1,0,0,0), (0,0,1,-1), (0,1,0,0,),(0,0,1,1) es una base de R^4 formada por vectores propios de f.

NOTA: En la realización del ejercicio puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0º	30º	45º	60º	75º	90º	135º	180º	270º	300º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

SOLUCIÓ EXAMEN 13 DE GENER DE 2016

Problema 1: Responeu als següents apartats:

a) (1,25 punts) Realitzeu l´operació següent i simplifiqueu el resultat: $\dfrac{1-i}{\overline{3-i}}$.

Proporcioneu el resultat en forma binòmica.

NOTA: Recordeu que $\overline{3-i}$ representa el conjugat de $3-i$.

b) (1,25 punts) Trobeu totes aquestes arrels: $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{i}}$. Proporcioneu el resultat en forma polar.

Solució:

a) Primer trobem $\overline{3-i}$; això és, el conjugat de $3-i$ que és $3+i$. Per tant, el que es demana trobar és: $\dfrac{1-i}{3+i}$

Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador per eliminar-lo:

$$\frac{1-i}{3+i}=\frac{(1-i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)}=\frac{3-i-3i-1}{3^2-i^2}=\frac{2-4i}{9+1}=\frac{2-4i}{10}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

Per tant:

$$\boxed{\frac{1-i}{\overline{3-i}}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i}$$

b) Escrivim el complex $-\dfrac{32}{i}$ en forma polar tal com s'explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

Per a això, primer, multipliquem i dividim per i per eliminar el denominador:

$$-\frac{32}{i}=-\frac{32i}{i^2}=-\frac{32i}{-1}=32i$$

Ara escrivim el complex en forma polar:

$$m=\sqrt{0^2+32^2}=32$$

$$\alpha=arctg\left(\frac{32}{0}\right)=arctg\infty=90^{\circ}$$

Observem que no sumem ni restem cap quantitat donat que la part real del complex és nul·la i la imaginària del complex és positiva (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[5]{-\frac{32}{i}} = \sqrt[5]{32_{90^{o}}}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[5]{32_{90^{o}}} = 2_{\frac{90^{o}+360^{o}k}{5}}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 2$

Los arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{90^{o}+360^{o}k}{5}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 18^{o}$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 18^{o}+72^{o} = 90^{o}$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 18^{o}+144^{o} = 162^{o}$
- Si k=3, tenim que $\beta_1 = 18^{o}+216^{o} = 234^{o}$
- Si k=4, tenim que $\beta_2 = 18^{o}+288^{o} = 306^{o}$

Per tant, les cinc arrels cinquenes del complex $-\dfrac{32}{i}$ són:

$2_{18^{o}}$	$2_{90^{o}}$	$2_{162^{o}}$	$2_{234^{o}}$	$2_{306^{o}}$

Problema 2: Siguin $v_1=(1,0,0,2)$, $v_2=(0,2,0,0)$, $v_3=(2,2,0,4)$, $v_4=(3,1,0,6)$, $v_5=(0,-1,0,0)$ vectors de R^4.

Sigui $V=\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle$. Sigui w=(4,3,0,8)

a) (1,25 punts) Trobeu la dimensió de V i una base A. Pertany w a V? Si és que sí, trobeu les coordenades en la base A.

b) (1,25 punts) Sigui $e_1 = -v_1 - \dfrac{v_2}{2}$ i $e_2 = 4v_1 + 2v_2$. B={e_1, e_2} és una base de V. Trobeu la matriu de canvi de base de B a A.

<u>Solució:</u>

a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així la dimensió de V és 2 i una base pot estar formada per els dos primers vectors ja que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ Així doncs A={v_1, v_2}.

Per mirar si w pertany a V resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=4, y=3/2. Per tant les coordenades de w en la base A són (4, 3/2).

b) Per trobar la matriu de canvi de base de B a A cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la d'A. I en el nostre cas això és justament la definició de la base B. Així tenim que la matriu de canvi de base M és:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3: Sigui el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (m+4)x - y = m+4 \\ 3x + my = m+6 \end{cases}$$

amb $m \in R$.

a) (1,25 punts) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.

b) (1,25 punts) Resoleu el sistema en aquells casos que el sistema sigui compatible.

<u>Solució:</u>

a) La matriu de coeficients, A, la matriu ampliada, A', associades al sistema són:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m+4 & -1 & m+4 \\ 3 & m & m+6 \end{array}\right)$$

$$rang(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m+4 & -1 \\ 3 & m \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m+4 & -1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = (m+4)m + 3 = m^2 + 4\text{m} + 3 = (m+1)(m+3).$$

- Cas I: Si $m \neq -1,-3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2 = rang(A') =$ nombre d'incògnites i per tant el sistema és Compatible Determinat.
- Cas II: Si $m = -1$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

que correspon clarament a un sistema incompatible ja que la primera equació demana $3x - y = 3$, mentre que la segona $3x - y = 5$.

- Cas III: Si $m = -3$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Així doncs tenim que $rang(A) = rang(A') = 1$ i per tant el sistema és Compatible Indeterminat amb (2-1=1) 1 grau de llibertat.

Resumint:

Si $m \neq -1,-3$, el sistema és Compatible Determinat
Si $m = -1$, el sistema és Incompatible.
Si $m = -3$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat

b) Hem de trobar la solució par als cassos I: $m \neq -1,-3$ y III: $m = -3$.

Cas I: $m \neq -1,-3$

Com que la matriu de coeficients es quadrada i $|A| \neq 0$, podem resoldre directament el sistema pel mètode de Crámer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m+4 & -1 \\ m+6 & m \end{vmatrix}}{(m+1)(m+3)} = \frac{m^2 + 4m + m + 6}{(m+1)(m+3)} = \frac{m^2 + 5m + 6}{(m+1)(m+3)} = \frac{(m+2)(m+3)}{(m+1)(m+3)} = \frac{m+2}{m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m+4 & m+4 \\ 3 & m+6 \end{vmatrix}}{(m+1)(m+3)} = \frac{(m+4)(m+6-3)}{(m+1)(m+3)} = \frac{(m+4)(m+3)}{(m+1)(m+3)} = \frac{m+4}{m+1}.$$

Por tant, para a cada valor de $m \neq -1,-3$ el punt solució del sistema és $\left(\frac{m+2}{m+1}, \frac{m+4}{m+1}\right)$.

Cas III: $m = -3$

En aquest cas el sistema queda reduït a una única equació $x - y = 1$, ja que la segona equació resulta ser un múltiple de la primera.

Els punts solució del sistema són de la forma $(x, x-1)$.

Problema 4: Sigui f l'aplicació lineal de R^3 en R^3 definida per f(-1,1,0)=(1,1,1), f(0,1,0)=(1,1,1) i f(1,1,1)=(2,2,2).

a) (0,5 punt) Demostreu que (-1,1,1),(0,1,0) i (1,1,1) són una base de R^3.

b) (0,5 punt) Digueu quina és la dimensió de la imatge de f. És f exhaustiva?

c) (0,5 punt) Digueu quina és la dimensió del nucli de f. És f injectiva?

d) (1 punt) Diagonalitza f? Justifiqueu la resposta.

Solució:

a) Com que són tres vectors de R^3, per veure que són base és suficient provar que són linealment independents. Vegem que el determinant de la matriu que formen és no nul. El determinant de la matriu dels tres vectors (per columnes) és:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2.$$

Per tant, els tres vectors són una base de R^3.

b) Per calcular la dimensió de la imatge de f hem de calcular la dimensió del subespai generat per f(-1,1,0), f(0,1,0) i f(1,1,1), és a dir, la dimensió del subespai generat per (1,1,1),(1,1,1),(2,2,2). Clarament, aquests tres vectors tenen rang 1. Per tant, la dimensió de la imatge de f és 1. En particular, f no és exhaustiva perquè la dimensió de la imatge de f és 1 i en canvi l'espai d'arribada té dimensió 3.

c) Pel Teorema de la dimensió (o fórmula del rang) (veure Apunts Mòdul 5, pàgina 19) tenim que:

$$\dim E = \dim Nuc(f) + \dim Im(f).$$

Però ara E=R^3 i dim Im(f) =1. Per tant, la dimensió del nucli de f és necessàriament 2. Com que el nucli no és zero, f no és injectiva.

d) Anomenem u=(-1,1,0), v=(0,1,0) i w=(1,1,1), per simplificar. Tenim f(u)=f(v). Per tant, f(u-v)=0 i per tant, u-v=(-1,0,0) és el vector propi de f de valor propi 0. També tenim 2f(u)=f(w) o sigui f(2u-w)=0. És a dir, 2u-w=(-3,1,-1) també és vector propi de f de valor propi 0. A més f(w)=2w. És a dir, w és vector propi de f de valor propi 2. Observem que els tres vectors u-v, 2u-w i w són linealment independents ja que el determinant dels tres és no nul.

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

En conclusió, tenim tres vectors, que són el u-v=(-1,0,0), el 2u-w=(-3,1,-1) i el w=(1,1,1), que formen una base de R^3, i que són vectors propis de f. Per tant, hi ha una base de R^3 formada per vectors propis de f. Això vol dir que f diagonalitza.

NOTA: En la realització de l'examen pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

A	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	225º	270º	300º	315º	345º
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	1	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

SOLUCIÓ EXAMEN 16 DE GENER DE 2016

Problema 1: Responeu als següents apartats:

a) (1,25 punts) Realitzeu l´operació següent i simplifica el resultat: $\frac{\overline{3+i}}{2+5i}$.

Proporcioneu el resultat en forma binòmica.

NOTA: Recordeu que $\overline{3+i}$ representa el conjugat de $3+i$.

b) (1,25 punts) Trobeu totes aquestes arrels: $\sqrt[3]{-27}$. Proporcioneu el resultat en forma binòmica i polar.

Solució:

a) Primer trobem $\overline{3+i}$; això és, el conjugat de $3+i$ que és $3-i$. Per tant, el que es demana trobar és: $\frac{3-i}{2+5i}$

Multipliquem i dividim pel conjugat del denominador per eliminar-lo:
$$\frac{3-i}{2+5i}=\frac{(3-i)\cdot(2-5i)}{(2+5i)\cdot(2-5i)}=\frac{6-15i-2i-5}{2^2-(5i)^2}=\frac{1-17i}{4+25}=\frac{1-17i}{29}=\frac{1}{29}-\frac{17}{29}i$$

Per tant:

$$\boxed{\frac{\overline{3+i}}{2+5i}=\frac{1}{29}-\frac{17}{29}i}$$

b) Escrivim el complex -27 en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m=\sqrt{27^2+0^2}=27$$

$$\alpha=arctg\left(\frac{0}{-27}\right)+180^{\circ}=arctg0+180^{\circ}=180^{\circ}$$

Observem que sumem 180º donat que la part real del complex és negativa i la part imaginària és nul·la (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180^{\circ}}}$

Com que ens demanen les arrels terceres hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa això mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$$\sqrt[3]{27_{180^{\circ}}}=3_{\frac{180^{\circ}+360^{\circ}k}{3}}$$ per a k=0, 1, 2

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=3$

Els arguments de les arrels són $\beta=\dfrac{180^\circ+360^\circ k}{3}$ per a k=0, 1, 2

- Si k=0, tenim que $\beta_0=60^\circ$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=60^\circ+120^\circ=180^\circ$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=60^\circ+240^\circ=300^\circ$

Per tant, les tres arrels terceres del complex -27 són:

$$\boxed{3_{60^\circ}=3\cdot(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\boxed{3_{180^\circ}=3\cdot(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=3\cdot(-1+0i)=-3}$$

$$\boxed{3_{300^\circ}=3\cdot(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)=3\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

Problema 2: Siguin A i B els subespais de R^4 següents:

A=$<(0,0,0,a),(a-1,0,0,0),(-1,a-1,0,0),(-1,-1,a-1,0)>$, $a\in R$

B=$<(a,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)>$, $a\in R$

a) (1,25 punts) Trobeu la dimensió d'A i de B en funció d'*a*. Trobeu una base per a cada subespai.
b) (1,25 punts) Si $a=2$ trobeu les coordenades del vector v=(2,0,2,2) en cada un dels subespais. Per a quins valors d'*a* són A i B el mateix espai vectorial?

<u>Solució:</u>

a) Calculem el rang de la matriu de vectors de l'espai A:

$$\begin{vmatrix} 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-a\cdot(a-1)^3$$

Així per $a\neq 0$ i $a\neq 1$ el rang de la matriu és 4 i per tant la dimensió d'A també és 4 i $\{(0,0,0,a),(a-1,0,0,0),(-1,a-1,0,0),(-1,-1,a-1,0)\}$ són base d'A.

Si $a=0$ el rang de la matriu és 3 i per tant la dimensió d'A també. Una base la poden formar els tres vectors no nuls linealment independents: $\{(-1,0,0,0),(-1,-1,0,0),(-1,-1,-1,0)\}$.

Si $a=1$ el rang de la matriu és també 3 i per tant la dimensió d'A també. Una base la poden formar els tres vectors no nuls linealment independents: $\{(0,0,0,1),(-1,0,0,0),(-1,-1,0,0)\}$.

Per a B procedim de forma anàloga:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a$$

Així per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 4 i per tant la dimensió de B també és 4 i $\{(a,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$ són base de B.

Si $a=0$ el rang de la matriu és 3 i per tant la dimensió de B també. Una base la poden formar els tres vectors no nuls linealment independents: $\{(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$.

b) Per a calcular les coordenades de v en A quan $a=2$ resolem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=2, z=2, t=2. Per tant les coordenades de v en A quan $a=2$ són (1,2,2,2).

Per a calcular les coordenades de v en B quan $a=2$ resolem de forma anàloga el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=2, z=0, t=0. Per tant les coordenades de v en B quan $a=2$ són (1,2,0,0).

Hem vist a l'apartat anterior que quant $a \neq 0$ i $a \neq 1$ llavors els espais A i B tenen dimensió 4. Al ser subespais de R^4 de dimensió 4 són els dos R^4, és a dir, el mateix espai.

Si $a=1$ hem vist que A té dimensió 3 i B té dimensió 4 per tant no són el mateix espai vectorial.

Si $a=0$ hem vist que tant A com B tenen dimensió 3. Cal veure si són el mateix subespai. Com que la dimensió és igual, podem veure si un es dins de l'altre i això és suficient veure-ho amb els elements de la base. Recordem les bases trobades:

Base d'A quant $a=0$: $\{(-1,0,0,0),(-1,-1,0,0),(-1,-1,-1,0)\}$.

Base de B quant $a=0$: $\{(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$.

Veiem directament que $(0,0,0,1)$ de la base B no es pot expressar com a combinació lineal d'elements de la base A.

Per tant A i B no són el mateix espai vectorial quant $a=0$.

Problema 3:

a) (1,25 punts) Discutiu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases}(k-1)y+(k^2-1)z=0\\(4k+1)x-y-7z=1\\x+y+z=0\end{cases}$$

en funció dels valors de *k*.

b) (1,25 punts) Resoleu el sistema per a $k=1$.

<u>Solució:</u>

a) Les matrius de coeficients, *A*, i ampliada, *A'*, del sistema són

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & k-1 & k^2-1 & 0\\4k+1 & -1 & -7 & 1\\1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

i es tracta d'estudiar el rang(A) i el rang(A').

Per a determinar els valors de discussió del paràmetre *k* mirem quan el rang(A) és màxim, és a dir 3, que serà quan el seu determinant sigui diferent de zero.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & k-1 & k^2-1\\4k+1 & -1 & -7\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(k-1)\begin{vmatrix}0 & 1 & k+1\\4k+1 & -1 & -7\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$$
$$=(k-1)\big((4k+1)(k+1)-7+(k+1)-(4k+1)\big)=$$
$$=(k-1)(4k^2+2k-6).$$

Quan igualem a zero i resolem l'equació de segon grau obtenim $k=1$ i $k=\frac{-3}{2}$.

Observació: Si el càlcul del determinant es fa sense treure factor comú, aleshores cal aplicar la regla de Ruffini al polinomi $2k^3 - k^2 - 4k + 3$ i veure que té una arrel doble en $k = 1$ i que pot factoritzar com

$2k^3 - k^2 - 4k + 3 = (k-1)^2(2k+3)$

amb el que s'obtenen les mateixes solucions $k = 1$ i $k = \frac{-3}{2}$.

Així doncs:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, aleshores $|A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ que és el nombre d'incògnites i per tant el sistema serà Compatible Determinat.
- Si $k = 1$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$, i com que la primera fila és nul·la la matriu ampliada també tindrà rang 2 i el sistema serà Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir una incògnita indeterminada.

- Si $k = \frac{-3}{2}$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & 0 \\ -5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Com que el menor $\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

Per a calcular el rang de la matriu ampliada podem orlar el menor anterior fent servir la primera fila i la columna dels termes independents.

$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-5}{2} & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-5}{2} \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 \neq 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Incompatible.

En resum:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, el sistema és Compatible Determinat.
- Si $k = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat.
- Si $k = \frac{-3}{2}$ el sistema és Incompatible.

b)El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ i podem prescindir de la primera equació perquè s'ha anul·lat. Passem la tercera equació a la primera i si aliquem el mètode de Gauss (a la segona equació li restem 5 vegades la primera) tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -z \\ 0 & -6 & 1+12z \end{array}\right),$$

i per tant $y = \frac{1+12z}{-6} = -\frac{1}{6} - 2z$

i substituint a la primera equació $x = -y - z = \frac{1}{6} + 2z - z = \frac{1}{6} + z$.

Així doncs els punts solució del sistema d'equacions són els de la forma $\left(\frac{1}{6} + z, -\frac{1}{6} - 2z, z\right)$, amb z indeterminada.

Problema 4: Considerem A=(2,0), B=(1,1), C=(0,1).

a) (1,25 punts) Sigui g el gir de 30º en sentit antihorari. Calculeu g(A), g(B) i g(C).

b) (1,25 punts) Sigui f l'escalatge de raó 2 des del punt (-1,-1). Calculeu f(A),f(B) i f(C).

Solució:

a) La matriu del gir d'angle 30º és:

$$\begin{pmatrix} \cos(30^o) & -\sin(30^o) & 0 \\ \sin(30^o) & \cos(30^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per a trobar les imatges dels punts A,B,C, hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$g(A) = (\sqrt{3}, 1), g(B) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right), g(C) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

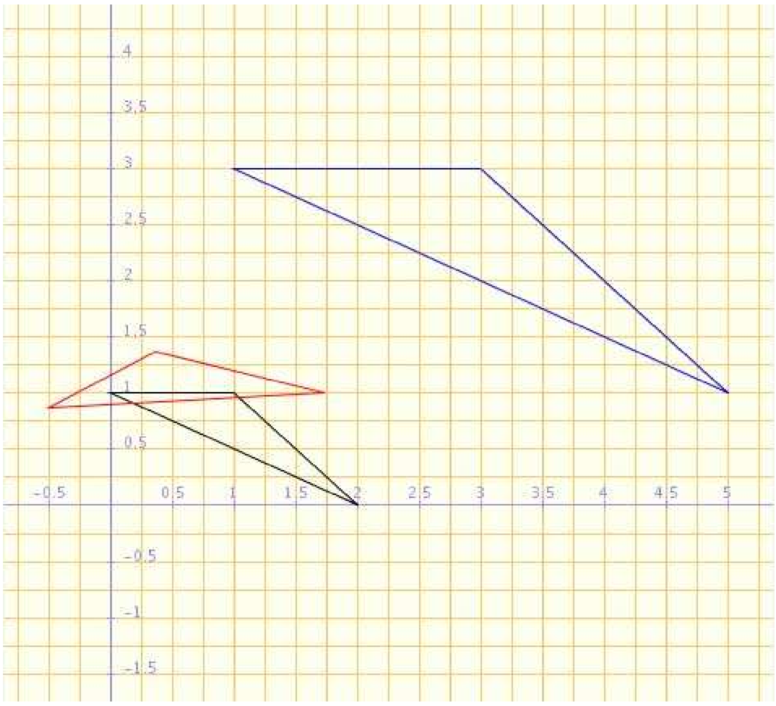
b) Per trobar la matriu de l'escalatge de raó 2, d'esquerra a dreta, fem la translació des del punt (-1,-1), després l'escalatge de raó 2, i després desfem la translació des del punt (-1,-1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trobar les imatges dels punts A,B,C, hem de fer la multiplicació següent:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, f(A)=(5,1), f(B)=(3,3) i f(C)=(1,3).



NOTA: En la realització de l'examen pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

A	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	225º	270º	300º	315º	345º

Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	1	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

SOLUCIÓ EXAMEN 23 GENER 2016

Problema 1: Responeu als següents apartats:

a) (1,25 punts) Siguin els complexos: $z_1 = 2 - i, \quad z_2 = 1 + 3i, \quad z_3 = 7 + 4i$. Calculeu: $\left(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}\right) z_3$. Proporcioneu el resultat en forma binòmica.

NOTA: Recordeu que $\overline{z_1}$ representa el conjugat de z_1.

b) (1,25 punts) Trobeu totes aquestes arrels: $\sqrt[3]{2 - 2i}$. Proporcioneu el resultat en forma binòmica i polar.

Solució:

a) Primer trobem $\overline{z_1}$; això és, el conjugat de z_1 que és $2 + i$.

Ara trobem: $\overline{z_1} \cdot z_2$ que és: $(2 + i) \cdot (1 + 3i) = 2 + 6i + i - 3 = -1 + 7i$

A continuació busquem $\left(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}\right) = -1 - 7i$

I, per últim, calculem:

$$\left(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}\right) z_3 = (-1 - 7i) \cdot (7 + 4i) = -7 - 4i - 49i + 28 = 21 - 53i$$

Per tant:

$$\boxed{\left(\overline{\overline{z_1} \cdot z_2}\right) z_3 = 21 - 53i}$$

b) Escrivim el complex $2 - 2i$ en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{-2}{2}\right) = arctg(-1) = 315^{\circ}$$

Observem que no sumem ni restem cap quantitat donat que la part real del complex és positiva (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[3]{2 - 2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{315^{\circ}}}$

Com que ens demanen les arrels terceres hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$$\sqrt[3]{\sqrt{8}_{315^{\circ}}} = \sqrt{2}_{\frac{315^{\circ} + 360^{\circ}k}{3}} \qquad \text{per a k=0, 1, 2}$$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=\sqrt{2}$

Els arguments de les arrels són $\beta=\dfrac{315^{o}+360^{o}k}{3}$ per a k=0, 1, 2

- Si k=0, tenim que $\beta_0=105^{o}$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=105^{o}+120^{o}=225^{o}$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=105^{o}+240^{o}=345^{o}$

Per tant, les tres arrels terceres del complex $2-2i$ són:

$$\boxed{\sqrt{2}_{60^{o}}=\sqrt{2}\cdot(\cos 105^{o}+i\sin 105^{o})=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)}$$

$$\boxed{\sqrt{2}_{225^{o}}=\sqrt{2}\cdot(\cos 225^{o}+i\sin 225^{o})=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-1-i}$$

$$\boxed{\sqrt{2}_{345^{o}}=\sqrt{2}\cdot(\cos 345^{o}+i\sin 345^{o})=}\boxed{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)}$$

Problema 2: Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 2 de R^4 definits de la següent forma:

$A=\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1+a_2=a_3,\ a_4-a_1=0\}$

$B=\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \mid b_1=b_3,\ b_4=0\}$

I sigui v=(0,5,0,0)

a) (1,25 punts) Comproveu que W={(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0)} és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calculeu les coordenades en la base anterior.

b) (1,25 punts) Trobeu una base de B i justifiqueu que ho és. Pertany v a B? En cas afirmatiu calculeu les coordenades en la base que heu trobat. Són A i B el mateix subespai vectorial de R^4? Justifiqueu la resposta.

<u>**Solució**</u>

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 2, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.

Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions $a_1+a_2=a_3$, $a_4-a_1=0$ per als dos vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs W és una base d'A.

Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que no té solució. Per tant v no pertany a A.

b) Podem proposar com a base de B:

T={(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)}. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base:

Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que es compleixen les condicions $b_1= b_3$, $b_4=0$ per als dos vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs T és una base de B.

Per veure si v pertany a B mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=0,y=5. Per tant les coordenades de v en B en la base que hem trobat són (0,5)

A i B no generen el mateix subespai vectorial de R^4 ja que hi ha vectors (com per exemple el v), que pertanyen a l'un i no a l'altre.

Problema 3: Sigui la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$$

amb $a \in R$.

a) (1,25 punts) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a.

b) (1,25 punts) Discutiu i solucioneu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre *a*.

Solució:

a) Per a calcular el rang de la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ aplicarem transformacions elementals per a triangular la matriu (mètode de Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (a+1)^2 - a^2 \\ 0 & -1 & (a-1)^2 - a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & -1 & -2a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vegada hem fet les següents transformacions:

(1) A la segona fila restar-li la primera
A la tercera fila restar-li la primera

(2) Operar a les files segona i tercera

(3) A la tercera fila sumar-li la segona

Per tant, podem veure que independentment del valor de a, la matriu M és sempre equivalent a una amb tres files no nul·les i per tant $rang(M) = 3$.

b) El sistema $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ té per matriu associada la matriu *M*, quadrada i de rang màxim i igual al nombre d'incògnites. Per tant, per a qualsevol valor del paràmetre a el sistema serà compatible determinat, amb solució única. La solució la podem obtenir aplicant el mètode de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=1, y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2\\ 1 & 1 & (a+1)^2\\ 1 & 1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=0, z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & a-1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=0.$$

Per a qualsevol valor de a la solució del sistema és $\boxed{x=1, y=0,\ z=0}$.

Observació: A la resolució de l'apartat ***b)*** també es podia haver fet servir el mètode de Gauss de manera anàloga al que s'ha fet per a l'apartat ***a)***.

Problema 4: Sigui f l'aplicació de R^3 en R^3 definida per f(x,y,z)=(2y,2x+3y,2z).

a) (0,5 punt) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.

b) (0,5 punt) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.

c) (0,5 punt) Estudieu si f diagonalitza.

d) (1 punt) Trobeu una base de R^3 amb el nombre màxim de vectors propis de f.

Solució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

b) El polinomi característic de f és:

$$Q(t)=det(A-tI)=det\begin{pmatrix}-t & 2 & 0\\ 2 & 3-t & 0\\ 0 & 0 & 2-t\end{pmatrix}.$$

Desenvolupant per l'última columna, obtenim:

$$Q(t)=\det\begin{pmatrix}-t & 2\\ 2 & 3-t\end{pmatrix}(2-t)=[(-t)(3-t)-4](2-t)=(t^2-3t-4)(2-t)=(t-4)(t+1)(2-t).$$

Buscant les arrels del polinomi t^2-3t-4 veiem que són -1 i 4. O sigui, el polinomi característic descompon en el producte de 3 factors reals diferents de grau 1. Els valors propis són -1, 2 i 4, tots tres de multiplicitat algebraica 1 (veure Apunts, mòdul 5, pàgina 28).

c) Com que f té tres valors propis diferents, podem assegurar que f diagonalitza.

d) Trobem vectors propis de f de valor propi -1. És a dir, busquem el nucli de la matriu A-(-1)I=A+I. O sigui, resolem el sistema (A+I)X=0:

$$(A+I)X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

La solució del sistema x+2y=0, 2x+4y=0, 3z=0 és (x,y,z)=(-2y,y,0)=y(-2,1,0).

Ara, trobem vectors propis de f de valor propi 2. És a dir, busquem el nucli de A-2I. O sigui, resolem el sistema (A-2I)X=0:

$$(A-2\mathrm{I})X=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

La solució del sistema -2x+2y=0, 2x+y=0 és (x,y,z)=(0,0,z)=z(0,0,1).

Ara, trobem vectors propis de f de valor propi 4. És a dir, busquem el nucli de A-4I. O sigui, resolem el sistema (A-4I)X=0:

$$(A-4\mathrm{I})X=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

La solució del sistema -4x+2y=0, 2x-y=0, z=0 és (x,y,z)=(x,2x,0)=x(1,2,0).

Tenim que (-2,1,0), (0,0,1), (1,2,0) és una base de R^3 formada per vectors propis de f. Ja sabíem per l'apartat anterior que f diagonalitza i que, per tant, una base d'aquestes havia d'existir.

NOTA: En la realització de l'examen pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

A	0º	30º	45º	60º	90º	105º	180º	225º	270º	300º	315º	345º
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
Tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	0	1	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

Solución Examen 1

2016-2017 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 10.06.2017

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Hallad el valor, o valores, de m para que el número complejo $3-mi$ tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5}+\sqrt{5}i$.

b) Hallad el módulo y el argumento de $\sqrt{3}+i$

Solución:

a) Siguiendo las directrices del apartado 3.4.1 del módulo impreso, página 30, "De la forma binómica a la forma polar", primero hallamos el módulo de los complejos:

$$módulo\,(3-mi)=\sqrt{9+m^2}$$

$$módulo\,(2\sqrt{5}+\sqrt{5}i)=\sqrt{4\cdot 5+5}=5$$

Ahora imponemos que sean iguales:

$$\sqrt{9+m^2}=5$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{9+m^2})^2=5^2$$

$$9+m^2=25\rightarrow m^2=16\rightarrow m=\pm 4$$

Por lo tanto, los valores de m son:

$$m=\pm 4$$

b) Buscamos el módulo y el argumento del complejo $\sqrt{3}+i$. Para ello aplicamos las explicaciones del apartado 3.4, página 27, del material impreso.

$$m=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$$

Ahora vamos a por el ángulo. Para esto utilizamos el ejemplo de la página 30 ("Ejemplo de cálculo de la arcotangente") del módulo impreso. El ángulo del complejo dado es:

$$\alpha=arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=30^{o}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{3}+i=2_{30^{o}}$$

2. Sean A y B dos subespacios vectoriales de dimensión 2 de $\Re^3$ definidos de la siguiente forma:

$$A = < (a_1, a_2, a_3) \mid a_1 + a_2 = a_3 >$$

$$B = < (b_1, b_2, b_3) \mid b_1 - b_2 = b_3 >$$

Y sea $v = (-3,5,2)$

a) Comprobad que $W = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$ es una base de A. ¿Pertenece v a A? En caso afirmativo calculad las coordenadas en la base anterior.

b) Hallad una base de B. ¿Pertenece v a B? En caso afirmativo calculad las coordenadas en la base que habéis encontrado. ¿Son A y B el mismo subespacio vectorial de $\Re^3$? Justificad la respuesta.

Solución:

a) Como sabemos que la dimensión de A es 2, sólo es necesario mirar que los vectores de W pertenecen a A y que son linealmente independientes.

Primero de todo comprobamos que los vectores de W pertenecen a A comprobando que se cumple la condición $a_1+a_2=a_3$ para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues W es una base de A.

Para ver si v pertenece a A miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=-3, y=5 y, por lo tanto, v pertenece a A y sus coordenadas en la base W son (-3,5).

b) Podemos proponer como base de B:

T={(1, 0, 1), (0, 1, -1)}. De forma análoga a como hemos hecho en el apartado anterior podemos probar que es base:

Primero de todo comprobamos que los vectores de T pertenecen a B comprobando que se cumple la condición b_1-b_2=b_3 para los dos vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Así pues T es una base de B.

Para ver si v pertenece a B miramos si tiene solución el siguiente sistema: (también podríamos comprobar si cumple las condiciones).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que no tiene solución, y, por lo tanto v no pertenece a B.

Hemos visto que el vector v pertenece a A pero no a B por lo tanto A y B no son el mismo subespacio vectorial.

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

donde k es un parámetro real.

a) Discutid el sistema según los valores de k.
b) Resolved el sistema para el caso $k = -2$.

Solución:

a) Hacemos Gauss tomando las variables en el orden dado x, y, z, obteniendo la matriz M y M' de los coeficientes y ampliada, respectivamente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{array}\right)$$

Substituimos la segunda fila (F2) por F2-2·F1 y la tercera fila (F3) por F3-F1, donde F1 denota la primera fila. Tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 & k^2-4 \end{array}\right)$$

Ahora es suficiente intercambiar las columnas 2 y 3 para tener la matriz diagonalizada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & k^2-4 \end{array}\right)$$

y podemos pasar a la discusión:

- Para $k \neq 2$ y $k \neq -2$ tenemos $rang\ M = rang\ MA = núm.incog. = 3$ y, por lo tanto, es un sistema compatible determinado.
- Para $k = 2$ tenemos $rang\ M = 2$ i $rang\ MA = núm.incog. = 3$ y, por lo tanto, se trata de un sistema incompatible.
- Para $k = -2$ tenemos $rang\ M = rang\ MA = 2$ y, por lo tanto, es un sistema compatible indeterminado con 3-2 = 1 grados de libertad.

Nota: Análogamente, se puede discutir el rango de *M* a partir del determinante de la matriz. $|M| = 4 - k^2$ o del menor una vez aplicado el primer paso de Gauss, con la igualdad $\begin{vmatrix} 2 & k-2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, que conduce igualmente a los valores $k = 2$ y $k = -2$, para organizar la discusión.

b) Ya hemos visto que para $k = -2$ tenemos un sistema compatible indeterminado y, usando los cálculos del apartado anterior, sabemos que el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Eligiendo z como parámetro se obtiene $y = 2z + \frac{1}{2}$ y $x = y - z = z + \frac{1}{2}$ de donde la solución es:

$$\boxed{(x,y,z) = (z + \frac{1}{2}, 2z + \frac{1}{2}, z)}$$

O alternativamente:

$$\boxed{(x,y,z) = \left(x, 2x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right)}$$

o

$$\boxed{(x,y,z) = \left(\frac{2y+1}{4}, y, \frac{2y-1}{4}\right)}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\Re^3$ en $\Re^3$ definida por

$$f(1,1,0)=(2,2,0),\ f(1,-1,1)=(2,-2,2),\ f(1,0,0)=(0,0,0).$$

a) Demostrad que $\{(1,1,0),(1,-1,1),(1,0,0)\}$ es una base de $\Re^3$.

b) Calculad una base del subespacio Imagen de f. ¿Es f exhaustiva?

c) Calculad una base del subespacio $Ker(f)$, el núcleo de f. ¿Es f inyectiva?

d) ¿Diagonaliza f? Hallad la matriz de f en la base $\{(1,1,0),(1,-1,1),(1,0,0)\}$.

Solución:

a) Llamamos u=(1,1,0), v=(1,-1,1), w=(1,0,0). El determinante de estos tres vectores es:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=1$$

Como que es diferente de cero, los tres vectores u,v y w son linealmente independientes. Como que son tres vectores linealmente independientes de R^3, forman base (ver Módulo 2, Sección 4.6).

b) Para calcular el subespacio imagen es suficiente calcular la imagen de una base, o sea, la imagen de la base u,v,w: f(u)=(2,2,0), f(v)=(2,-2,2) y f(w)=(0,0,0). Por lo tanto, Im(f)=<(2,2,0),(2,-2,2)>. Es decir, (2,2,0), (2,-2,2) generan el subespacio imagen. Además, como que son linealmente independientes, son una base del subespacio Im(f). La aplicación f no es exhaustiva, ya que la dimensión de la Im(f) es 2, mientras que el espacio de llegada (que es R^3) tiene dimensión 3 (ver Módulo 4, sección 4).

c) Recordemos que la fórmula de la dimensión dice que dim E=dim Im(f)+dim Nuc(f). Como que E=R^3 y la dimensión de la imagen es 2, deducimos que la dimensión del núcleo es 1. Por lo tanto, el núcleo está generado por un solo vector no nulo. Por otro lado, f(w)=0. Esto quiere decir que w es vector del núcleo. Concluimos que Nuc(f)=<(1,0,0)>. En particular, f no es inyectiva, porque el núcleo es diferente de cero (ver Módulo 4, sección 5).

d) Tenemos que f(u)=2u. O sea, u es vector propio de f de valor propio 2. Análogamente, f(v)=2v y v es vector propio de f de valor propio 2. Finalmente, f(w)=0. O sea, w es vector propio de f de valor propio 0. Por lo tanto, u,v,w es una base de R^3 formada per VEPS de f. Esto quiere decir que f diagonaliza. De hecho, la matriz de f en esta base es:

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar alguno/s de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	300º	315º	360º
sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	$-\sqrt{3}$	-1	0

Solución Examen 2

2016-2017 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 17.06.2017

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Hallad el valor, o valores, de x para que el número complejo $(25-xi)^2$ sea imaginario puro.

b) Hallad la raíz siguiente: $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$. Proporcionad el resultado en forma polar.

Solución:

a) Tal como se dice en la página 20 del material impreso, para que sea un número imaginario puro es necesario que la parte real sea 0. Vamos a ver cuál es la parte real de este número complejo. Para ello efectuamos el cuadrado para obtener el número de la forma $a+bi$:

$$(25-xi)^2 = 25^2 - 2\cdot 25x\cdot i + x^2\cdot i^2 = 625-50xi-x^2 = (625-x^2)-50xi$$

Una vez tenemos el número complejo expresado de la forma $a+bi$ imponemos que la parte real es 0 (para que el número sea imaginario puro):

$$625-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=625 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{625} \Leftrightarrow x=\pm 25$$

Por lo tanto, los valores son:

$$x=\pm 25$$

b) Escribimos el complejo $z=-8+8\sqrt{3}i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

$$m=\sqrt{(-8)^2+8^2\cdot 3}=\sqrt{64\cdot 4}=8\cdot 2=16$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right)+180^{\circ} = \arctan\left(-\sqrt{3}\right)+180^{\circ} = 300^{\circ}+180^{\circ} = 480^{\circ} = 120^{\circ}$$

Observemos que sumamos 180º dado que la parte real es negativa y la parte imaginaria del complejo es positiva (apartado 3.4.1 de la página 30 del material impreso).

Tenemos, por lo tanto, que: $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}=\sqrt[4]{16_{120^{\circ}}}$

Como que nos piden las raíces cuartas tenemos que hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{16_{120^{\circ}}}=\sqrt[4]{16}_{\frac{120^{\circ}+360^{\circ}k}{4}}$$ para k=0, 1, 2, 3

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[4]{16}=2$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \dfrac{120^o + 360^o k}{4}$ para k=0, 1, 2, 3

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 30^o$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 30^o + 90^o = 120^o$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 30^o + 180^o = 210^o$
- Si k=3, tenemos que $\beta_3 = 30^o + 270^o = 300^o$

Por lo tanto, las cuatro raíces cuartas del número complejo $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ son (en forma polar):

$2_{30^o}\ 2_{120^o}\ 2_{210^o}\ 2_{300^o}$

2. Sean $e_1 = (0,1,7),\ e_2 = (-1,1,1),\ e_3 = (2,-1,5),\ e_4 = (7,-6,0)$ vectores de $\Re^3$.

   Sea $E =< e_1, e_2, e_3, e_4 >$. Sea $v = (3,0,18)$.

a) Hallad la dimensión de E y una base A. ¿Pertenece v a E? En caso afirmativo, hallad las coordenadas en la base A.
b) Sea $w_1 = (-1,0,-6),\ w_2 = (3,-2,4)$. $B = \{w_1, w_2\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de B a A y la de A a B.

<u>Solución:</u>

a) Calculemos el rango de la matriz de vectores: $rang\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ya que

todos los determinantes de orden 3 son nulos.

Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores

ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Así pues A={e1, e2}.

Para mirar si v pertenece a E resolvemos el sistema: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$

Este sistema tiene solución: x=3, y=-3. Por lo tanto v pertenece a E, y sus coordenadas en la base A son (3, -3).

b) Para hallar la matriz de cambio de base de B a A, llamemosla M, hay que expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A.

Vamos, pues, a expresar w_1 en la base A. Para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$ Que tiene solución x=-1, y=1.

Para expresar w_2 en la base A resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ Que tiene solución x=1, y=-3.

Así tenemos que la matriz de cambio de base, M, es:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B podemos calcular directamente la inversa de M:

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro real a.
b) Resolved el sistema para el caso $a=2$.

Solución:

a) La matriz de coeficientes y la ampliada, A y A', son las siguientes:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & a & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3\\1\\2a\end{matrix}\end{array}\right)}_{A'}$$

Calculamos det(A) = 0

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & a & 0\end{vmatrix}=2a-4$$

Que se anula para a=2

$\boxed{\text{CASO } a=2}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3\\1\\4\end{matrix}\end{array}\right)}_{A'}$$

Se observa que las dos primeras columnas son iguales. Por lo tanto todos los menores que las incluyan valdrán cero. Además, el determinante $\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}=0$ también vale cero, por lo tanto rang(*A*')<3. Como que el menor de *A* $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} \neq 0$, entonces rang(*A*) = rang(*A*') = 2 < 3 = nº de incógnitas y, por lo tanto, es un SCI con 1 grado de libertad.

$\boxed{\text{CASO } a \neq 2}$. Rang(A)=Rang(A')=3 = nº de incógnitas. Por lo tanto es un SCD.

b) Para el caso *a* = 2 sabemos que se trata de un sistema compatible indeterminado con una incógnita libre y equivalente a

$$\left.\begin{matrix} x & -z = 1-y\\ x & = 2-y\end{matrix}\right\}$$

Por lo tanto si cogemos la incógnita y como parámetro, obtenemos *x* = 2-*y* y *z* = *x*+*y*-1 = = 2-*y*+*y*-1= 1. Así los puntos solución son de la forma $\boxed{(x,y,z) = (2-y,y,1)}$

4. Sea f la aplicación lineal de $\Re^3$ en $\Re^3$ definida por

$$f(x,y,z) = (4x-6y, x-y, -3x+16y+3z).$$

a) Hallad la matriz de f en las bases canónicas.

b) Calculad el polinomio característico de f y los valores propios de f.

c) Estudiad si f diagonaliza.

d) Hallad una base de $\Re^3$ con el número máximo de vectores propios de f.

Solución:

a) Observemos que f(1,0,0)=(4,1,-3), f(0,1,0)=(-6,-1,16) y f(0,0,1)=(0,0,3). Estos vectores imagen ya están expresados en la base canónica. Por lo tanto, poniéndolos por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 16 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Recordemos el Módulo 4, Sección 7, la definición de polinomio característico de f. Desarrollando el determinante por la tercera columna obtenemos:

$$Q(t)=det(A-tI)=\begin{vmatrix} 4-t & -6 & 0 \\ 1 & -1-t & 0 \\ -3 & 16 & 3-t \end{vmatrix}=(3-t)\begin{vmatrix} 4-t & -6 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix}=$$
$$=(3-t)[(4-t)(-1-t)+6].$$

Operando, obtenemos:

$$Q(t)=(3-t)(t^2-3t+2)=(3-t)(t-2)(t-1)=(3-t)(2-t)(1-t).$$

Las raíces de este polinomio son 1, 2 y 3 con multiplicidad algebraica 1 (ver Módulo 4, Sección 8.1).

Los valores propios de f son el 1, el 2 y el 3, con multiplicidad algebraica 1.

c) Para ver si diagonaliza debemos comprobar que la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados (ver Módulo 4, Sección 8). Siempre que la multiplicidad algebraica es 1, entonces la dimensión del espacio vectorial generado por los correspondientes vectores propios asociados también es 1. Por lo tanto, para los tres valores propios, la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados. Esto quiere decir que f diagonaliza (ver Módulo 4, sección 8).

f diagonaliza porque la multiplicidad algebraica de los tres valores propios 1 coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores propios asociados.

d) Usamos ahora el Módulo 4, Sección 7, para hallar los vectores propios de f. Encontramos vectores propios de f de valor propio 1. Es decir, buscamos el núcleo de la matriz A-I. O sea, resolvemos el sistema (A-I)X=0:

$$(A-I)X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 16 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 3x-6y = 0, x-2y = 0, -3x + 16y + 2z = 0. La primera y la segunda son la misma ecuación salvo múltiple por constante. De las dos se deduce x = 2y. Sustituyendo en la tercera obtenemos: -6y + 16y + 2z = 0. Por lo tanto, 2z = -10y. O sea, z = -5y. Por lo tanto, los vectores solución son de la forma: (x, y, z) = (2y, y, -5y) = y (2,1, -5). En particular, (2,1, -5) es vector propio de f de valor propio 1

Ahora hallamos vectores propios de f de valor propio 2. Es decir, buscamos el núcleo de A-2I. O sea, resolvemos el sistema (A-2I)X=0:

$$(A-2\mathrm{I})X = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 16 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 2x-6y = 0, x-3y = 0 y -3x + 16y + z = 0. Semejante a antes, la primera es dos veces la segunda, y por lo tanto, se puede obviar. De la segunda se deduce x = 3y. Sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos: -9y + 16y + z = 0. Por lo tanto, z = -7y. Los vectores solución son de la forma: (x, y, z) = (3y, y, -7y) = y (3,1, -7). En particular, (3,1, -7) es vector propio de f de valor propio 2

Encontramos ahora vectores propios de f de valor propio 3. Es decir, buscamos el núcleo de A-3E. O sea, resolvemos el sistema (A-3E) X = 0:

$$(A-3\mathrm{I})X = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 16 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema x-6y = 0, x-4y = 0 y -3x + 16y = 0. De la primera sale x = 6y y de la segunda x = 4y. Por lo tanto, 6y = 4y y esto implica y = 0. Como x = 6y, entonces x = 0. La variable z es libre. Así, los vectores solución son de la forma: (x, y, z) = (0, 0, z) = z (0, 0, 1). En particular, (0, 0,1) es vector propio de f de valor propio 3.

{(2, 1,- 5), (3, 1, -7), (0, 0, 1)} es una base de R^3 formada por vectores propios de f.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar alguno/s de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	300º	315º	345º	360º
sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	0

Solución Examen 3

2017-2018 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 20.06.2018

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Expresad en forma polar el siguiente número complejo: $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^4$

b) Hallad la raíz siguiente: $\sqrt[5]{-1}$. Proporcionad el resultado en forma polar.

Solución:

a) Debemos saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material impreso sobre la división de números complejos en forma binómica) y agrupamos parte real y parte imaginaria: $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \dfrac{(1+i)^2}{1-i^2} = \dfrac{1+2i-1}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$

Ahora tenemos:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4 = i^4 = 1$$

Pasamos el número complejo a forma polar:

$$m = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\alpha = arctg\frac{0}{1} = arctg 0 = 0^{\text{o}}$$

(Observemos que, al ser la parte real positiva y la parte imaginaria nula no hay que sumar ninguna cantidad).

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo vale 0 en 0º y en 180º. Como el afijo del punto buscado es (1,0) el ángulo está entre el primer y cuarto cuadrante, es decir, en 0º.

Como se dice en el ejercicio 19 de autoevaluación, cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, de cara a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número 1 en el plano complejo. Este número está asociado al punto (1,0), por lo tanto, es un número que se encuentra entre el primer y el cuarto cuadrante.

Por tanto, la respuesta es:

$$\boxed{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4 = i^4 = 1 = 1_{0^o}}$$

b) Escribimos el complejo $z=-1$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

$$m = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{0}{1}\right) + 180^o = 0^o + 180^o = 180^o$$

Tenemos, por tanto, que $-1 = 1_{180^o}$

Como nos piden las raíces quintas debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{1_{180^o}} = \sqrt[5]{1}_{\frac{180^o+360^o k}{5}} \qquad \text{para k=0, 1, 2, 3, 4}$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[5]{1} = 1$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \dfrac{180^o + 360^o k}{5}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 36^o$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 36^o + 72^o = 108^o$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 36^o + 144^o = 180^o$
- Si k=3, tenemos que $\beta_3 = 36^o + 216^o = 252^o$
- Si k=4, tenemos que $\beta_4 = 36^o + 288^o = 324^o$

Por tanto, las cinco raíces quintas del complejo $z=-1$ son:

$$\boxed{1_{36^o}}\boxed{1_{108^o}}\boxed{1_{180^o}}\boxed{1_{252^o}}\boxed{1_{324^o}}$$

2. Sea E un subespacio de $\Re^3$ generado por los siguientes vectores:

$$E = <(b-1, 0, b+2), (2+2b+b^2, b-1, b+2), (0, 0, b-3)>.$$

a. Determinad, en función de b, la dimensión del subespacio E.

b. Para el caso $b=2$ encontrad una base de E. ¿Pertenece $v=(18,2,2)$ a E? ¿Cuáles son sus coordenadas en la base que habéis encontrado?

Solución:

a) Calculemos el determinante de la matriz de vectores:

$$\begin{vmatrix} b-1 & 2+2b+b^2 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 \\ b+2 & b+2 & b-3 \end{vmatrix} = (b-1)^2(b-3)$$

Así para $b \neq 1$ y $b \neq 3$ tenemos que el determinante que forman los vectores será no nulo y por tanto tendremos el máximo nombre de vectores linealmente independientes. En este caso la dimensión es 3.

Calculamos el rango de los vectores para el caso $b=1$:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto la dimensión de E es 2 en el caso $b=1$

Calculamos el rango de los vectores para el caso $b=3$:

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 17 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto la dimensión de E es 2 en el caso $b=3$

En resumen, la dimensión de E es 3 si $b \neq 1$ y $b \neq 3$; y en los otros casos la dimensión es 2.

b) En el apartado anterior ya hemos visto que para $b=2$ los tres vectores son linealmente independientes. Por tanto podemos usar como base los tres vectores con los cuales E está definido: Base={(1,0,4),(10,1,4),(0,0,-1)}

Para ver si v pertenece a E y a la vez calcular sus coordenadas en el cas que pertenezca, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución: x=-2, y=2, z=-2. Por tanto las coordenadas de v en la base encontrada son (-2,2,-2)

3. Considerad las siguientes rectas de $\Re^3$:

$$r_1\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$s_m\begin{cases} 2y + 2z = m \\ 2x + 3y + (m-2)z = 2 \end{cases}$$

donde m es un parámetro real ($m \in \Re$).

a. Estudiad, según los valores de m, la posición relativa de las dos rectas.

b. Calculad, para aquellos valores de m que tenga sentido, la intersección entre las dos rectas.

Solución:

a) Tenemos un sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas. Para discutir-lo utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius. Calcularemos primero los valores de m que hacen que la matriz A tenga rango máximo.

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, A', asociadas al sistema son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & m \\ 2 & 3 & m-2 & 2 \end{array}\right)$$

Estudiemos ahora el rango de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & m-2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(m-2) - 6 = 2m - 4 - 6 = 2m - 10 = 0$$

$$\rightarrow m = 5$$

$Si\ m = 5$, *el rango A= 2.*

$Si\ m \neq 5$, *el rango A= 3.*

Estudiemos ahora el rango de la matriz ampliada *A'* .

Simplificamos operando:

F2- F1, F4- 2F1 ,
F2+F3, F4+1/2F2
Intercambiamos F3 i F4

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & m \\ 2 & 3 & m-2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & m \\ 0 & 1 & m-4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & m-5 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & m-5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m+2 \end{array}\right)$$

$$|A'| = -2(m-5)(m+2)$$

$Si\ m \neq 5\ i\ m \neq -2$ *el rango A'= 4*

$Si\ m = 5\ o\ m = -2$ *el rango A'= 3*

- $Si\ m = 5$ *el rango A= 2 y el rango A'= 3* por lo consiguiente **Sistema Incompatible** y las dos rectas no se cortan.

- $Si\ m = -2$, *el rango A= 3= rango A'* por consiguiente **Sistema Compatible determinado**, las dos rectas se cortan en un punto.
- $Si\ m \neq 5\ y\ m \neq -2$ *el rango A'= 4* *po*r consiguiente **Sistema Incompatible,** las dos rectas no tienen ningún punto en común.

b) Calculad, para aquellos valores de m que tenga sentido, la intersección entre las dos rectas. Como ya hemos visto en el apartado anterior, las rectas se intersectan cuando $m = -2$.

Utilizaremos la matriz que hemos simplificado por método de GAUSS en el apartado anterior sustituyendo $m = -2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{queda:} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 2 \\ \quad -7z = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto el punto de corte será $(1, \frac{-4}{7}, \frac{-3}{7})$

4. Consideremos $A = (1,0), B = (0,2), C = (-1,1)$.

   a. Sea f el escalado de razón 3 desde el origen. Calculad $f(A), f(B)$ y $f(C)$.

   b. Sea g el giro de ángulo a en sentido antihorario desde el punto $B = (0,2)$. Calculad $g(A), g(B)$ y $g(C)$. Hallad a de manera que el segmento $g(B), g(C)$ sea paralelo al eje y.

Solución:

a) Recordemos el Módulo 5, Sección 4. Para encontrar la matriz del escalado de razón 3 desde el origen hay que multiplicar por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A,B,C, efectuamos la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f(A)=(3,0), f(B)=(0,6) y f(C)=(-3,3).

b) Recordemos el Módulo 5, Sección 3.1. La matriz del giro de ángulo a en sentido antihorario desde el punto B=(0,2) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 2\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) & -2\cos(a)+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar las imágenes de los puntos A,B,C, efectuamos la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 2\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) & -2\cos(a)+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos(a)+2\sin(a) & 0 & -\cos(a)+\sin(a) \\ -2\cos(a)+\sin(a)+2 & 2 & -\cos(a)-\sin(a)+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $g(A)=(\cos(a)+2\sin(a), -2\cos(a)+\sin(a)+2)$,

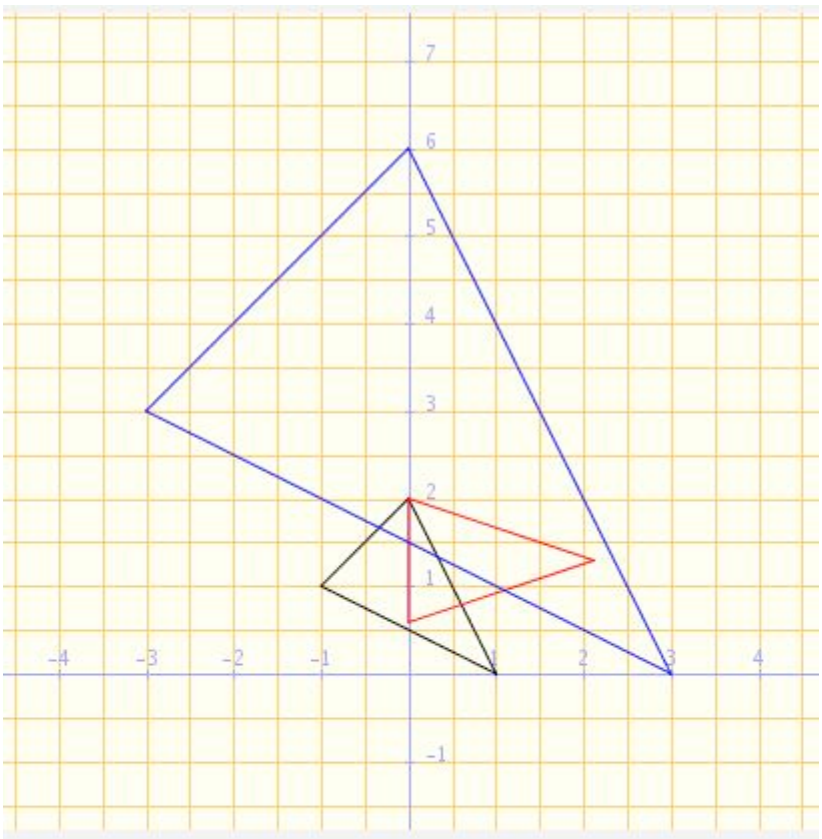
$g(B)=(0,2)$, $g(C)=(-\cos(a)+\sin(a), -\cos(a)-\sin(a)+2)$.

Así, $g(B)-g(C)=(\cos(a)-\sin(a),\cos(a)+\sin(a))$

Este vector es paralelo al eje y si $\cos(a)=\sin(a)$. Es decir, si el ángulo es de 45º.

Entonces los tres puntos son

$g(A)=(3\sqrt{2}/2, 2-\sqrt{2}/2)$, $g(B)=(0,2)$ y $g(C)=(0, 2-\sqrt{2})$



NOTA: En la realización del ejercicio puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

A	0º	30º	45º	60º	75º	90º	135º	180º	270º	300º	315º	330º
Sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercici 1.

a) Expressa, en forma polar, el nombre complex z, el seu oposat i el seu conjugat.

$$z = 1 - \sqrt{3}i$$

b) Calcula les arrels cinquenes del complex següent: $z = i$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

Resolució:

a) Operem amb el nombre z, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2 = -1$:

$z = 1 - \sqrt{3}i$

Argument: $m = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

Mòdul: $\alpha = arctg\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = arctg(-\sqrt{3}) = \dfrac{5\Pi}{3} = 300^o$

$z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300^o}$

Oposat:

$-z = -1 + \sqrt{3}i$

Argument: $m = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

Mòdul: $\alpha = arctg\dfrac{\sqrt{3}}{-1} + 180^o = arctg(-\sqrt{3}) + 180^o = 300^o + 180^o = 480^o = 120^o$

$-z = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120^o}$

Conjugat:

$\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i$

Argument: $m = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

Mòdul: $\alpha = arctg\dfrac{\sqrt{3}}{1} = arctg(\sqrt{3}) = 60^o$

$\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^o}$

Per tant:

$z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300^o}$

$-z = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120^o}$

$\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^o}$

b) Escrivim el complex $z = i$ en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{1}{0}\right) = arctg\infty = 90^o$$

Observem que ni sumem ni restem cap angle ja que la part real i la part imaginària del complex són positives o zero (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 i exemple primer de la página 29 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{90^o}}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{1_{90^o}} = 1_{\frac{90^o + 360^o k}{5}}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 1$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{90^o + 360^o k}{5}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 18^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 18^o + 72^o = 90^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 18^o + 144^o = 162^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 18^o + 216^o = 234^o$
- Si k=4, tenim que $\beta_4 = 18^o + 288^o = 306^o$

Per tant, les cinc arrels cinquenes del complex $z = i$ són:

$$\boxed{1_{18^o} = 1\cdot(\cos 18^o + i\cdot\sin 18^o) = 0{,}951 + 0{,}309i}$$

$$\boxed{1_{90^o} = 1\cdot(\cos 90^o + i\cdot\sin 90^o) = i}$$

$$\boxed{1_{162^o} = 1\cdot(\cos 162^o + i\cdot\sin 162^o) = -0{,}951 + 0{,}309i}$$

$$\boxed{1_{234^o} = 1\cdot(\cos 234^o + i\cdot\sin 234^o) = -0{,}588 - 0{,}809i}$$

$$\boxed{1_{306^o} = 1\cdot(\cos 306^o + i\cdot\sin 306^o) = 0{,}588 - 0{,}809i}$$

Exercici 2.

Donats els conjunts de vectors de R^3:

A=$<(a,0,0),(0,a,0),(0,0,a)>$.

B=$<(a,a,a),(0,a,a),(0,0,a)>$.

a) Trobeu el valor de a per a que A i B siguin base de R^3. Si $a=1$ trobeu les coordenades del vector v=(1,2,3) en cada una de les bases.
b) Calcula la matriu de canvi de base de A a B per $a=1$. Comprova la coherència de l'apartat anterior.

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors de l'espai A:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$$

Així per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 3 i per tant són base de R3.

Fem el mateix per a l'espai B:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{vmatrix} = a^3$$

Així que de nou per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 3 i per tant són base de R3

Així doncs tant A com B quan $a \neq 0$ formen una base de R3.

Per a calcular les coordenades de v en A quan $a=1$ resolem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=2, z=3, ja que és la base canònica. Per tant les coordenades de v en A quan $a=1$

són (1,2,3).

Per a calcular les coordenades de v en B quan $a=1$ resolem de forma anàloga el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=1, y=1, z=1. Per tant les coordenades de v en A quan $a=1$ són (1,1,1).

b) Per trobar la matriu de canvi de base C hem de resoldre:

C=B-1·A

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem primer la inversa de la matriu B

$$B^{-1}=\frac{(adj(B))^t}{|B|}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podem trobar ara ja la matriu de canvi de base.

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Ara comprovem els resultats de l'apartat anterior i veiem que efectivament transforma les coordenades de v en A a les coordenades de v en B.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Exercici 3.

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases}x+ky+k^2z=0\\(4k+1)x-y-7z=1\\x+y+z=0\end{cases}$$ en funció dels valors de k.

b) Resoleu el sistema per a aquells valors de k que fan que el sistema sigui compatible indeterminat

Resolució:

a) Les matrius de coeficients, A, i ampliada, A', del sistema són

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&k&k^2&0\\4k+1&-1&-7&1\\1&1&1&0\end{array}\right)$$

I es tracta d'estudiar els rang(A) i rang(A').

Per a determinar els valors de discussió del paràmetre k mirem quan el rang(A) és màxim, és a dir 3, que serà quan el seu determinant sigui diferent de zero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&k&k^2\\4k+1&-1&-7\\1&1&1\end{vmatrix}=-1+(4k+1)k^2-7k+k^2+7-k(4k+1)$$
$$=4k^3-2k^2-8k+6.$$

$$4k^3-2k^2-8k+6=0$$
$$2k^3-k^2-4k+3=0$$

Si apliquem la regla de Ruffini observem que el polinomi $2k^3-k^2-4k+3$ té una arrel doble en $k=1$ i que pot factoritzar com

$2k^3 - k^2 - 4k + 3 = (k-1)^2(2k+3)$

I per tant les solucions de $2k^3 - k^2 - 4k + 3 = 0$ són $k = 1$ i $k = \frac{-3}{2}$.

Així doncs:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, aleshores $|A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ que és el nombre d'incògnites i per tant el sistema serà Compatible Determinat.
- Si $k = 1$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$, i observem que la tercera equació és la mateixa que la primera i per tant per tant la matriu ampliada també tindrà rang 2 i el sistema serà Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir una incògnita indeterminada.

- Si $k = \frac{-3}{2}$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & \frac{9}{4} & 0 \\ -5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Com que el menor

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2.$$

Per a calcular el rang de la matriu ampliada podem orlar el menor anterior fent servir la primera fila i la columna dels termes independents.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-3}{2} - 1 \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 \neq 2 = rang(A)$$

i per tant el sistema és incompatible.

En resum:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, el sistema és Compatible Determinat.
- Si $k = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat.

- Si $k = \frac{-3}{2}$ el sistema és Incompable.

b) Es tracta de trobar la solució per al cas $k = 1$.

El sistema en forma matricial queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

i podem prescindir de la tercera equació perquè és la mateixa que la primera.
Si apliquem el mètode de Gauss i a la segona equació li restem 5 vegades la primera tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -z \\ 0 & -6 & 1 + 12z \end{array}\right),$$

i per tant

$$y = \frac{1+12z}{-6} = -\frac{1}{6} - 2z$$

i substituint a la primera equació

$$x = -y - z = \frac{1}{6} + 2z - z = \frac{1}{6} + z.$$

Així doncs els punts solució del sistema d'equacions són els de la forma $\left(\frac{1}{6} + z, -\frac{1}{6} - 2z, z\right)$, amb z indeterminada.

Exercici 4.

Sigui $f : R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per
$f(x, y, z) = (3x - 2z, -x + 2y + 2z, 2x - 2z)$.

a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.
b) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.
c) Estudieu si f diagonalitza.
d) Trobeu una base de R^3 amb el nombre màxim de vectors propis de f.

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)

b) El polinomi característic de f és

$$Q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix} 3-t & 0 & -2 \\ -1 & 2-t & 2 \\ 2 & 0 & -2-t \end{vmatrix}=(2-t)\begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ 2 & -2-t \end{vmatrix}=$$

$$(2-t)[(3-t)(-2-t)+4]=(2-t)(t^2-t-2)=(2-t)(2-t)(t+1).$$

Així, Q(t) té arrels -1 i 2 amb multiplicitat 2. Per tant, els valors propis de f són -1 i 2.

c) Per veure si f diagonalitza ens caldrà calcular les dimensions dels espais vectorials generats pels vectors propis corresponents.

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-2 & 0 & -2 \\ -1 & 2-2 & 2 \\ 2 & 0 & -2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(A-(-1)I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+1 & 0 & -2 \\ -1 & 2+1 & 2 \\ 2 & 0 & -2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Una base de solucions del primer sistema és: (0,1,0) i (2,0,1). La dimensió de l'espai generat és 2.

Una base de solucions del segon sistema és: (1,-1,2). La dimensió de l'espai generat és 1.

Així com que la dimensió dels espais generats coincideix amb la dimensió de les multiplicitats, l'aplicació lineal diagonalitza.

d) Un cop calculats els vectors propis dels valors propis 2 i -1 a l'apartat anterior, I com que tenim que {(0,1,0), (2,0,1), (1,-1,-2)} és una base de R^3 formada per 3 vector propis de f i en aquesta base la matriu associada a l'aplicació és:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercici 1.

a) Expressa, en forma polar, el nombre complex z, el seu oposat i el seu conjugat.

$$z = -2 - 2i$$

b) Calcula les arrels sisenes del complex següent: $z = -1$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

Solució:

a) Operem amb el nombre z, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2 = -1$:

$z = -2 - 2i$

Argument: $m = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Mòdul: $\alpha = arctg\frac{-2}{-2} - 180^o = arctg(1) - 180^o = 45^o - 180^o = -135^o = 225^o$

$z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225^o}$

Oposat:

$-z = 2 + 2i$

Argument: $m = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Mòdul: $\alpha = arctg\frac{2}{2} = arctg1 = 45^o$

$-z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45^o}$

Conjugat:

$\bar{z} = -2 + 2i$

Argument: $m = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Mòdul: $\alpha = arctg\frac{2}{-2} + 180^o = arctg(-1) + 180^o = -45^o + 180^o = 135^o$

$\bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135^o}$

Per tant:

$z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225^o}$

$-z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45^o}$

$\bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135^o}$

b) Escrivim el complex $z = -1$ en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{0}{-1}\right) + 180^o = arctg 0 + 180^o = 180^o$$

Observem que podem sumar o restar 180º ja que la part real és positiva i la part imaginària és nul·la, això és, 180º=-180º (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 i exemple segon de la página 29 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^o}}$

Com que ens demanen les arrels sisenes hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{1_{180^o}} = 1_{\frac{180^o + 360^o k}{6}}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4, 5

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 1$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{180^o + 360^o k}{6}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4, 5

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 30^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 30^o + 60^o = 90^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 30^o + 120^o = 150^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 30^o + 180^o = 210^o$
- Si k=4, tenim que $\beta_4 = 30^o + 240^o = 270^o$
- Si k=5, tenim que $\beta_4 = 30^o + 300^o = 330^o$

Per tant, les sis arrels sisenes del complex $z = -1$ són:

$$\boxed{1_{30^o} = 1\cdot(\cos 30^o + i\cdot\sin 30^o) = 0{,}866 + 0{,}5i}$$

$$\boxed{1_{90^o} = 1\cdot(\cos 90^o + i\cdot\sin 90^o) = i}$$

$$\boxed{1_{150^o} = 1\cdot(\cos 150^o + i\cdot\sin 150^o) = -0{,}866 + 0{,}5i}$$

$$\boxed{1_{210^o} = 1\cdot(\cos 210^o + i\cdot\sin 210^o) = -0{,}866 - 0{,}5i}$$

$$\boxed{1_{270^o} = 1\cdot(\cos 270^o + i\cdot\sin 270^o) = -i}$$

$$\boxed{1_{330^o} = 1\cdot(\cos 330^o + i\cdot\sin 330^o) = 0{,}866 - 0{,}5i}$$

Exercici 2.

Siguin $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,2,0)$, $v_3=(1,2,0)$, $v_4=(6,6,0)$, $v_5=(-4,0,0)$ vectors de R^3.

Sigui $V=<v_1, v_2, v_3, v_4, v_5>$. Sigui $w=(-2,-4,0)$

a) Troba la dimensió de V i una base A. Pertany w a V? Si és que sí, troba'n les coordenades en la base A.

b) Sigui $B=\{e_1, e_2\}$ una base de V, on $e_1 = v_1 + v_2$ i $e_2 = v_1 - \frac{1}{2}v_2$. Troba la matriu de canvi de base de B a A.

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ja que trobem el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Així la dimensió de V és 2 i una base pot estar formada per els dos primers vectors ja que contenen el determinant anterior $A=\{v_1, v_2\}$.

Per mirar si w pertany a V resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=-2, y=-1. Per tant les coordenades de w en la base A són (-2, -1).

b) Per trobar la matriu de canvi de base de B a A cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la d'A. I això és justament la definició. Així tenim que la matriu de canvi de base M és:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercici 3.

Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} -x+2y+3z&=2x \\ ay-3z&=2y \\ -x-y+(-a-1)z&=2z \end{aligned}\right\}$$

a) Calculeu els valors del paràmetre a per als quals el sistema té més d'una solució.
b) Resoleu el sistema per als casos $a=-3$ i $a=0$.

Resolució:

a) El sistema plantejat és igual, després de traspassar els termes de la dreta a l'esquera al sistema homogeni

$$\left.\begin{aligned} -3x+2y+3z &= 0 \\ (a-2)y-3z &= 0 \\ -x-y+(-a-3)z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

En tractar-se d'un sistema homogeni, sempre compatible, el sistema tindrà més d'una solució quan el rang de la matriu de coeficients sigui inferior al nombre d'incògnites, 3 en el nostre cas.

La matriu dels coeficients és

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{pmatrix}.$$

Com que

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 2$$

i per tal que el rang(A) es mantingui igual a 2 el que hem de calcular és el valor de a que anul·la el determinant de la matriu A.

Per tant

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{vmatrix} = 3(a-2)(a+3) + 6 + 3(a-2) + 9 = 3a^2 + 6a - 9 = 3(a^2 + 2a - 3)$$

.

Igualant a 0, obtenim

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \left| \begin{array}{l} \boxed{a = 1} \\ \boxed{a = -3} \end{array} \right. .$$

Així doncs, pels valors a=1 i a= -3 el rang és 2 i per tant el sistema té infinites solucions.

El problema també es pot resoldre triangulant per Gauss la matriu A.

b) Cas $a = -3$.

En aquest cas el sistema a resoldre és

$$\left.\begin{array}{rcl} -3x + 2y + 3z & = & 0 \\ -5y - 3z & = & 0 \\ -x - y & = & 0 \end{array}\right\}$$

i sabem que rang(A)=2 i per tant que el sistema és compatible indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir amb una incògnita com a paràmetre.

Com que la primera equació és combinació lineal de la segona i la tercera, resoldrem el sistema directament a partir de les dues darreres equacions i obtenim $x = -y$ i $z = \frac{-5y}{3}$.

Per tant els punts solució del sistema són els de la forma $\boxed{\left(-y,\ y, \frac{-5y}{3}\right)}$.

Cas $a = 0$.

En aquest cas el sistema és compatible determinat i per tant l'única solució és el $\boxed{x = y = z = 0}$.

Exercici 4.

Sigui P el triangle de vèrtexs (0,0), (0,1), (1,1).

a) Sigui G el gir d'angle α radians en sentit antihorari des del punt (2,1). Anomenem $c=\cos(\alpha)$ i $s=\sin(\alpha)$. Sigui Q la imatge de P per G. Calculeu Q en funció de c i s.

b) Hi ha algun angle α de manera que Q tingui alhora dos vèrtexs a la recta $x=y$? Si és que sí, trobeu-lo.

Resolució:

a) Per fer un gir d'angle α des del punt (2,1), primer fem la translació que porta el (1,0) a l'origen *(veure apunts M6, Notació matricial eficient)*: $T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Després fem el gir d'angle α en sentit antihorari:

$$gir=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & -s & 0\\ s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Després desfem la translació: $T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Composant les tres transformacions, obtenim G, el gir d'angle α en sentit antihorari des del punt (2,1):

$$G=T^{-1}\cdot gir\cdot T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -s & 0\\ s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & -s & -2c+s+2\\ s & c & -2s-c+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Calculem Q, la imatge del triangle P pel gir G:

$$\begin{pmatrix}c & -s & -2c+s+2\\ s & c & -2s-c+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2c+s+2 & -2c+2 & -c+2\\ -2s-c+1 & -2s+1 & -s+1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

El triangle Q és el de vèrtexs:

$(-2c+s+2,-2s-c+1),(-2c+2,-2s+1),(-c+2,-s+1)$.

b) Per a que Q tingui alhora dos vèrtexs a la recta $x=y$, hem d'imposar dues de les següents igualtats alhora:

$-2c+s+2=-2s-c+1$,

$-2c+2=-2s+1$,

$-c+2=-s+1$.

Simplificant:

$-c+3s+1=0$,

$2s-2c+1=0$

$c=s+1$.

Si agafem les dues últimes obtenim:
$2s-2(s+1)+1=0; 2s-2s-2+1=0; -1=0$ Impossible!!!.

Si agafem les dues primeres obtenim:
$6s-2c+2=2s-2c+1; 4s+1=0; s=-1/4$

Substituint

$-c+3(-1/4)+1=-c-3/4+1=-c+1/4=0; c=1/4$

Impossible, no hi ha cap angle que ho compleixi!!!.

Ho provem amb la primera i la tercera:

$-c+3s+1=0$ i $c=s+1$.

Substituint: $-s-1+3s+1=0; 2s=0; s=0$

$c=s+1; c=0+1=1$

Així doncs hem trobat: s=0 i c=1

Per tant, per $\alpha = \mathbf{0^o}$,Q té dos vèrtexs en la diagonal x=y.

Exercici 1.

a) Expressa, en forma polar, el nombre complex z, el seu oposat i el seu conjugat.

$$z = -2\sqrt{3} + 2i$$

b) Calcula les arrels quartes del complex següent: $z = 2\sqrt{3} + 2i$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

Resolució:

a) Operem amb el nombre z, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2 = -1$:

$z = -2\sqrt{3} + 2i$

Argument: $m = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

Mòdul: $\alpha = arctg\dfrac{2}{-2\sqrt{3}} + 180^o = arctg(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}) + 180^o = -30^o + 180^o = 150^o$

$z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150^o}$

Oposat:

$-z = 2\sqrt{3} - 2i$

Argument: $m = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$

Mòdul: $\alpha = arctg\dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = arctg(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}) = -30^o = 330^o$

$-z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330^o}$

Conjugat:

$\bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i$

Argument: $m = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$

Mòdul: $\alpha = arctg\dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} - 180^o = arctg(\dfrac{\sqrt{3}}{3}) - 180^o = 30^o - 180^o = -150^o = 210^o$

$\bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210^o}$

Per tant:

$z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150^o}$

$-z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330^o}$

$\bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210^o}$

b) Escrivim el complex $z = 2\sqrt{3} + 2i$ en forma polar *(apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos)*

$$m = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30^o$$

Observem que ni sumem ni restem cap angle ja que la part real i la part imaginària del complex són positives *(apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).*

Tenim, per tant, que $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt[4]{4_{30^o}}$

Com que ens demanen les arrels quartes hem de fer *(observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):*

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4_{30^o}} = \sqrt[4]{4}_{\frac{30^o + 360^o k}{4}}$ per a k=0, 1, 2, 3

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[4]{4}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{30^o + 360^o k}{4}$ per a k=0, 1, 2, 3

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 7^o 30' = 7{,}5^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 7^o 30' + 90^o = 97{,}5^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 7^o 30' + 180^o = 187{,}5^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 7^o 30' + 270^o = 277{,}5^o$

Per tant, les quatre arrels quartes del complex $z = 2\sqrt{3} + 2i$ són:

$$\boxed{\sqrt[4]{4}_{7,5^\circ} = \sqrt[4]{4}\cdot(\cos 7,5^\circ + i\cdot\sin 7,5^\circ) = \sqrt[4]{4}\cdot 0,991 + \sqrt[4]{4}\cdot 0,13 i}$$

$$\boxed{\sqrt[4]{4}_{97,5^\circ} = \sqrt[4]{4}\cdot(\cos 97,5^\circ + i\cdot\sin 97,5^\circ) = -\sqrt[4]{4}\cdot 0,13 + \sqrt[4]{4}\cdot 0,991 i}$$

$$\boxed{\sqrt[4]{4}_{187,5^\circ} = \sqrt[4]{4}\cdot(\cos 187,5^\circ + i\cdot\sin 187,5^\circ) = -\sqrt[4]{4}\cdot 0,991 - \sqrt[4]{4}\cdot 0,13 i}$$

$$\boxed{\sqrt[4]{4}_{277,5^\circ} = \sqrt[4]{4}\cdot(\cos 277,5^\circ + i\cdot\sin 277,5^\circ) = \sqrt[4]{4}\cdot 0,13 - \sqrt[4]{4}\cdot 0,991 i}$$

Exercici 2.

Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 2 de R^5 definits de la següent forma:

$A=\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1=a_4, a_3=0, a_5=0\}$

$B=\{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid b_1=b_3, b_2=0, b_4=0\}$ i sigui v=(0,-2,0,0,0)

a) Comprova que W={(1, 0, 0, 1, 0,), (0, 1, 0, 0, 0)} és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base anterior.

b) Troba una base de B. Pertany v a B? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base que has trobat. Generen A i B el mateix subespai vectorial de R^5? Justifica la teva resposta.

Resolució

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 2, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.

Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions $a_1=a_4$, $a_2=0$ i $a_5=0$ per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs W és una base d'A.

Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=0 y=-2. Per tant v pertany a A i les seves coordenades en la base anterior són (0,-2).

b) Podem proposar com a base de B:

T={(1, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)}. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base:

Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que es compleixen les condicions $b_1=b_3$, $b_2=0$, $b_4=0$ per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Així doncs T és una base de B.

Podem veure directament que v no pertany a B ja que no compleix $b_2=0$

A i B no generen el mateix subespai vectorial de R^5 ja que hi ha vectors (com per exemple el v), que pertanyen a l'un i no a l'altre.

Exercici 3.

Sigui la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \text{ amb } a \in R.$$

a) Calculeu el rang de la matriu *M* en funció dels valors del paràmetre *a*.
b) Discutiu i solucioneu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ segons els valors del paràmetre } a.$$

Resolució:

a) Per a calcular el rang de la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ aplicarem transformacions elementals per a triangular la matriu (mètode de Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (a+1)^2 - a^2 \\ 0 & -1 & (a-1)^2 - a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & -1 & -2a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vegada hem fet les següents transformacions:

(1) A la segona fila restar-li la primera
A la tercera fila restar-li la primera
(2) Operar a les files segona i tercera
(3) A la tercera fila sumar-li la segona

Per tant, podem veure que independentment del valor de a, la matriu M és sempre equivalent a una amb tres files no nul·les i per tant $rang(M) = 3$.

b) El sistema $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ té per matriu associada la matriu M, quadrada i de rang màxim i igual al nombre d'incògnites. Per tant, per a qualsevol valor del paràmetre a el sistema serà compatible determinat, amb solució única. La solució la podem obtenir aplicant el mètode de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 1, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & (a+1)^2 \\ 1 & 1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 0, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 0.$$

Per a qualsevol valor de a la solució del sistema és $\boxed{x = 1, y = 0,\ z = 0}$.

Observació: A la resolució de l'apartat b) també es podia haver fet servir el mètode de Gauss de manera anàloga al que s'ha fet per a l'apartat a).

Exercici 4.

Sigui $f : R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per
$f(x, y, z) = (3x, -3x + 2y + 2z, -2z)$.

a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.
b) Trobeu una base del nucli de f. És f injectiva?
c) Trobeu una base de la imatge de f. És f exhaustiva?

d) Digueu si f diagonalitza i, si és possible, trobeu una base de R^3 formada per vectors propis de f .

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)

b) El nucli de f es troba resolent el sistema $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. O sigui, $3x=0$ i $-2z=0$ Per tant, $x=z=0$ a més com $-3x+2y+2z=0$, tenim que $y=0$. O sigui, el nucli de f està generat pel vector $(0,0,0)$. En particular, com que el nucli és el vector zero, f és injectiva.

c) La imatge de f està generada per les columnes de la matriu A. Aplicant el teorema de la dimensió *(Mòdul 4 pàgina 19)*, tenim que $\dim R^3 = \dim Ker(f)+\dim \mathrm{Im}(f)$ donat que $\dim Ker(f)=0$, llavors la $\dim \mathrm{Im}(f)=3$ així una base de la imatge de f és els vectors de la imatge $I\mathrm{m}(f) = <(3,-3,0),(0,2,0),(0,2,-2)>$. Així la imatge de f és tot R^3, deduïm que f és exhaustiva.

d) Per veure si la matriu diagonalitza, calcularem el seu polinomi característic:

$$Q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ -3 & 2-t & 2 \\ 0 & 0 & -2-t \end{vmatrix}=(3-t)\begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ 0 & -2-t \end{vmatrix}=(3-t)(2-t)(-2-t)$$

donat que tenim 3 valors propis diferents, la matriu diagonalitza *(veure apunts M5, Teorema de diagonalització).*

Com que $f(0,1,0)=(0,2,0)=2\cdot(0,1,0)$ tenim que el vector $(0,1,0)$ és vectors propi de f de valor propi 2.

$$(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Una base de solucions del sistema és: $(1,-3,0)$.

$$(A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Una base de solucions del sistema és: $(0,-1,2)$.

Observem que $(0,1,0),(1,-3,0),(0,-1,2)$ formen una base de R^3 de vectors propis de f. Això vol dir que la matriu de f en aquesta base és diagonal amb elements diagonals 2, 3 i -2. Per tant, f diagonalitza.

SOLUCIÓ EXAMEN 16/06/2012

Exercici 1:

Realitzeu els següents càlculs:

a) Simplifiqueu l'expressió següent: $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$

b) Calculeu les arrels quartes del nombre complex: $z = 8 + 8\sqrt{3}i$ (proporcioneu els angles en graus i els resultats en forma polar)

Resolució:

a) Operem amb l'expressió, recordant que $i^2 = -1$:

$$\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-2i+i^2} = \frac{1+2i-1}{1-2i-1} = \frac{2i}{-2i} = -1$$

b) Escrivim el complex z en forma polar:

$$m = \sqrt{8^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = 16$$

$$\alpha = arctg\frac{8\sqrt{3}}{8} = arctg\sqrt{3} = 60^{\circ}$$

Tenim, per tant, que $z = 8 + 8\sqrt{3}i = 16_{60^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels quartes, hem de:

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16_{60}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{60+360k}{4}}$ per a k=0, 1, 2, 3

El mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[4]{16} = 2$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{60+360k}{4}$ per a k=0, 1, 2, 3

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 15^{\circ}$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 15^{\circ}+90^{\circ} = 105^{\circ}$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 15^{\circ}+180^{\circ} = 195^{\circ}$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 15^{\circ}+270^{\circ} = 285^{\circ}$

Per tant, les quatre arrels quartes del nombre complex $z = 8 + 8\sqrt{3}i$ són:

$$2_{15^{\circ}}, 2_{105^{\circ}}, 2_{195^{\circ}}, 2_{285^{\circ}}$$

Exercici 2:

Siguin A, B i C els subespais vectorials de R^3 generats pels conjunts de vectors següents:

$$A = <(0,1,0),(0,-1,1),(0,a,-a^2)>,\ a \in R$$

$$B = <(0,-1,0),(0,0,1)>$$

$$C = <(1,0,2),(0,0,1)>$$

a) Trobeu la dimensió d'A en funció d'a. Trobeu les dimensions de B i de C. Trobeu una base per cada subespai vectorial.

b) Determineu si el vector v=(0,3,-1) pertany o no a A, a B i a C. En cas que hi pertanyi, calculeu-ne les coordenades en les bases de l'apartat anterior.

c) Generen A i B el mateix subespai vectorial? En cas afirmatiu, trobeu la matriu de canvi de base d'A a B i comproveu el resultat de l'apartat anterior. Generen B i C el mateix subespai vectorial? Si és que sí, trobeu la matriu de canvi de base de B a C i comproveu el resultat de l'apartat anterior.

Resolució:

a) Calculem els rangs de les matrius:

Per A: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -a^2 \end{vmatrix} = 0$ però trobem el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió d'A és 2 per a tot a. Com a base podríem usar els dos primers vectors que són linealment independents (ja que contenen el menor anterior): $Base-A = \{(0,1,0),(0,-1,1)\}$

Per B: Podem trobar el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió de B és 2 i com a base podríem usar els dos vectors amb els quals està definit: $Base-B = \{(0,-1,0),(0,0,1)\}$

Per C: Podem trobar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió de C és 2 i com a base també podríem usar els dos vectors amb els quals està definit: $Base-C = \{(1,0,2),(0,0,1)\}$

b) Per al subespai A i usant la base trobada en l'apartat a), podem plantejar el sistema:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 0 \\ x - y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ que té per solució: x=2, y=-1. Així doncs $v \in A$ i les seves coordenades són (2,-1).

Per al subespai B i usant la base trobada en l'apartat a), podem plantejar el sistema:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 0 \\ -x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ que té per solució: x=-3, y=-1. Així doncs $v \in B$ i les seves coordenades són (-3,-1).

Per al subespai C i usant la base trobada en l'apartat a), podem plantejar el sistema:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 3 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ que no té solució. Per tant $v \notin C$.

c) Sabem de l'apartat a) que la dimensió d'A és 2 i la de B també. Això no vol dir que generin el mateix subespai vectorial. Per comprovar si generen el mateix, com que la dimensió dels dos és igual, n'hi haurà prou amb comprovar si una base d'A pertany a B.

Així per a (0,1,0) de la base d'A:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 0 \\ -x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ que té solució x=-1, y=0 i per tant $(0,1,0) \in B$

Així per a (0,-1,1) de la base d'A:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 0 \\ -x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ que té solució x=1, y=1 i per tant $(0,1,1) \in B$

Per tant A i B generen el mateix subespai vectorial.

Per a calcular la matriu de canvi de base d'A a B, posarem els vectors de la base d'A com a combinació lineal dels de la base de B. Això ho acabem de resoldre, per tant:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I podem comprovar el resultat de l'apartat anterior fent:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podem dir directament que B i C no generen el mateix subespai vectorial ja que hem vist un vector (v) que pertany a B i no pertany a C.

Exercici 3:

a) Discutiu el sistema següent segons els valors del paràmetre k:

$$\begin{cases} x+ky=0 \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z+kt=2 \\ x+y+z+t=k \end{cases}$$

b) Resoleu el sistema per a $k=-4$, en cas que tingui solució.

Resolució:

a) Per discutir el sistema utilitzarem el teorema de Rouché-Frobenius. Necessitem calcular els rangs de la matriu del sistema (M) i de la matriu ampliada (MA).

$$M=\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } |M|=\begin{vmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-k & k & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1-k)^3$$

Per tant tenim que el determinant de la matriu M només s'anul.la quan $k=1$.

La matriu M té rang 4 per a tots els valors de k, llevat de per a $k=1$ que té rang 3.

Per al $k=1$ podem comprovar també que la matriu ampliada té rang 4 i la incompatibilitat del sistema per la incoherència de les dues darreres equacions.

Per tant;

- Per a $k\neq 1$ el sistema és compatible determinat ja que $rang(M)=rang(MA)=4$.
- Per a $k=1$ el sistema és incompatible ja que $3=rang(M)<rang(MA)=4$

b) Per a $k=-4$, el sistema és compatible determinat. El sistema és:

$$\begin{cases} x-4y=0 \\ x+y-4z=1 \\ x+y+z-4t=2 \\ x+y+z+t=-4 \end{cases}$$

l'escrivim:

$$\begin{cases} x+y+z+t=-4 \\ x-4y=0 \\ x+y-4z=1 \\ x+y+z-4t=2 \end{cases}$$

Reduïm la matriu per Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Substituïm: 2fila per 2fila – 1fila, 3 fila per 3fila – 1fila, 4fila per 4fila – 1fila

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

Així tenim:

$t = \frac{-6}{5}$

$z = \frac{-5-t}{5} = \frac{-19}{25}$

$y = \frac{-4-t-z}{5} = \frac{-51}{125}$

$x = -4-t-z-y = \frac{-204}{125}$

Exercici4:

Considerem el polígon P de vèrtexs A(1,0), B(3,0), C(4,2) i D(2,1) i d'arestes AB, BC, CD i DA.

a) Calculeu les coordenades del polígon resultant d'aplicar a P un escalatge uniforme de raó 3 des del punt (1,0).
b) Calculeu les coordenades del trapezi resultant d'aplicar a P un gir d'angle $\pi/4$ (o sigui, 45º en sentit antihorari) al voltant de l'origen.

Resolució:

a) Per a fer un escalatge des del punt (1,0) primer cal buscar la translació que converteixi el punt (1,0) en l'origen. És la matriu T de la translació de vector (-1,0):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Després cal calcular la matriu E de l'escalatge de raó 3:

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment cal desfer la primera translació, és a dir, considerar la inversa de T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Multiplicant les tres matrius amb l'ordre que toca (des de la dreta fins a l'esquerra) obtenim :

$$T^{-1} \cdot E \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Per tant, els transformats dels punts A(1,0), B(3,0), C(4,2) i D(2,1) són:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sigui, són els punts: A'(1,0), B'(7,0), C'(10,6) i D'(4,3).

b) La matriu del gir d'angle gir d'angle $\pi/4$ al voltant de l'origen és

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores el transformat de A(1,0) és:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

El transformat de B(3,0) és:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

El transformat de C(4,2) és:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El transformat de D(2,1) és:

.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sigui els punts:. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

SOLUCIÓ EXAMEN 20/06/2012

Exercici 1:

Realitzeu els càlculs següents:

a) Simplifiqueu l'expressió següent: $\dfrac{i^3}{(1+i)^2}$

b) Calculeu les arrels sextes del nombre complex: $z = 4 + 4\sqrt{3}i$ (proporcioneu els angles en graus i els resultats en forma polar)

Resolució:

a) Operem amb l'expressió, recordant que $i^2 = -1$:

$$\frac{i^3}{(1+i)^2} = \frac{i^2 \cdot i}{(1+2i+i^2)} = \frac{(-1)\cdot i}{(1+2i-1)} = \frac{-i}{2i} = -\tfrac{1}{2}$$

b) Escrivim el complex z en forma polar:

$$m = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$$

$$\alpha = arctg\,\frac{4\sqrt{3}}{4} = arctg\sqrt{3} = 60^{o}$$

Tenim per tant: $z = 4 + 4\sqrt{3}i = 8_{60^o}$

Com que ens demanen les arrels sisenes:

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{8_{60}} = \left(\sqrt{8}\right)_{\frac{60+360k}{6}} = \left(\sqrt{2^3}\right)_{\frac{60+360k}{6}}$$ per k=0, 1, 2, 3, 4, 5

El mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{3/6} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{60+360k}{6}$ per k=0, 1, 2, 3, 4, 5

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 10^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 10^o + 60^o = 70^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 10^o + 120^o = 130^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 10^o + 180^o = 190^o$
- Si k=4, tenim que $\beta_2 = 10^o + 240^o = 250^o$

- Si k=5, tenim que $\beta_3 = 10^o + 300^o = 310^o$

Així doncs, les arrels sextes del nombre complex $z = 4 + 4\sqrt{3}i$ són:

$$\sqrt{2}_{10^o}, \sqrt{2}_{70^o}, \sqrt{2}_{130^o}, \sqrt{2}_{190^o}, \sqrt{2}_{250^o}, \sqrt{2}_{310^o}$$

Exercici 2

Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 3 de R^6 definits de la següent forma:

$A=\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \mid a_1=a_4, a_2=2\cdot a_5, a_6=0\}$

$B=\{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) \mid b_1=b_4, 2\cdot b_2=b_6, b_5=0\}$

I sigui v=(0,0,3,0,0,0)

a) Comprova que W={(1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 0, 0)} és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base anterior.

b) Troba una base de B. Pertany v a B? En cas afirmatiu calcula'n es coordenades en la base que has trobat.

c) Generen A i B el mateix subespai vectorial de R^6? Justifica la teva resposta.

Resolució

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 3, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.

Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions a1=a4, a2=2·a5, a6=0 per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Així doncs W és una base d'A.

Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podriem comprovar si compleix les condicions)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0 \\ z=3 \\ x+z=0 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases}$$ que té solució x=-3, y=0, z=3.

Per tant v per tant a A i les seves coordenades en la base anterior són (-3,0,3).

b) Podem proposar com a base de B:

T={(1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 0, 0, 0)}. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base:

Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que es compleixen les condicions a1=a4, 2·a2=a6, a5=0 per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Així doncs T és una base d'B.

Per veure si v pertany a B mirem si té solució el següent sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ x = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$ que té solució x=0, y=0, z=3.

Per tant v per tant a B i les seves coordenades en la base anterior són (0,0,3).

b) Per veure si A i B generen el mateix subespai vectorial de R^6, com que els dos tenen dimensió 3, cal veure si un està contingut en l'altre. Això ho podem comprovar mirant la condició pels elements de la base.

Si comencem per (0, 2, 0, 0, 1, 0) que és d'A, ja veiem directament que no pertany a B ja que no compleix la condició a5=0.

Per tant A i B no generen el mateix subespai vectorial de R^6.

Exercici 3

Discutiu i resoleu, quan sigui possible, el següent sistema d'equacions lineals per als diferents valors del paràmetre $a \in R$.

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & az & = & a+1 \end{cases}.$$

Resolució:

La matriu del sistema és:

$$A|A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & a & a+1 \end{array}\right)$$

Estudiem el rang de la matriu *A*. Com que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, aleshores $rang\ A \geq 2$. Per a veure quan el rang pot ser 3, calculem el determinant d'*A* i obtenim $|A| = 3a - 15$ que només s'anul.la pel valor *a* = 5.

- Cas I. $a \neq 5 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ A = 3 = rang\ A' \Rightarrow SCD$

I si el resolem pel mètode de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ a+1 & -3 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3a + 3a + 3 - a - 1 - 27}{3a - 15} = \frac{5a - 25}{3a - 15}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & a+1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a + 1 - 27 + 6a + 6 - 3a}{3a - 15} = \frac{4a - 20}{3a - 15}$$

I per tant la solució única té la forma: $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$ per a cada valor que donem al paràmetre $a \neq 5$.

- Cas II. $a = 5 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rang\ A = 2$

Per a calcular el rang de la matriu ampliada orlem el menor diferent de zero que tenim a la matriu *A* i mirem si s'anul.la el determinant.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang\ A' = 2 = rang\ A \Rightarrow SCI$ amb 3-2=1 grau de llibertat (z)

Per a la resolució, una vegada anul.lada la 3a equació i passant la incògnita z als termes independents, obtenim el següent sistema d'equacions equivalent

$\begin{cases} 2x & - & y & = & 3-z \\ x & + & y & = & 3z \end{cases}$ que ens porta a la solució $x=\dfrac{3+2z}{3}, y=\dfrac{7z-3}{3}, z=z$.

Exercici 4

Sigui $f: R^3 \rightarrow R^2$l'aplicació lineal definida per
$f(x,y,z) = (2x+y, y-z)$

a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.
b) Trobeu una base del Nucli de f. És f injectiva?
c) Trobeu una base de la Imatge de f. És f exhaustiva?
d) Trobeu l'antiimatge del vector (1,1).

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és :

.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Una base del Nucli de f és: (1,-2,-2). La funció no és injectiva
c) Una base de la Imatge de f és: (2,0), (1,1). La funció és exhaustiva
d) El conjunt de vectors que formen l' antiimatge del vector (1,1) són de la forma (x,y,z) = (0,1,0)+λ(-1/2, 1, 1).

SOLUCIÓ EXAMEN 23/06/2012

Exercici 1:

Realitzeu els càlculs següents:

a) Simplifiqueu l'expressió següent: $\dfrac{(2-i)\cdot(1-2i)^2}{2+i}$

b) Calculeu les arrels cinquenes del nombre complex següent: $z=16\sqrt{3}-16i$ (proporcioneu els angles en graus i els resultats en forma polar)

Resolució:

a) Operem l'expressió, recordant que $i^2=-1$:

$$\frac{(2-i)\cdot(1-2i)^2}{2+i}=\frac{(2-i)\cdot(1-4i+4i^2)}{2+i}=\frac{(2-i)\cdot(1-4i-4)}{2+i}=\frac{(2-i)\cdot(-3-4i)}{2+i}=$$
$$=\frac{(-6-8i+3i+4i^2)}{2+i}=\frac{(-6-8i+3i-4)}{2+i}=\frac{-10-5i}{2+i}=\frac{(-5)\cdot(2+i)}{(2+i)}=-5$$

b) Escrivim el nombre complex z en forma polar:

$$m=\sqrt{\left(6\cdot\sqrt{3}\right)^2+\left(-16\right)^2}=\sqrt{768+256}=\sqrt{1024}=32$$
$$\alpha=arctg\frac{-16}{16\sqrt{3}}=arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=30^{\circ}$$

Tenim, per tant, que $z=16\sqrt{3}-16i=32_{30^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels quintes hem de fer l'arrel:

$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{32_{30}}=\left(\sqrt{32}\right)_{\frac{30+360k}{5}}$ per k=0, 1, 2, 3, 4

El mòdul de les arrels és: $r=\sqrt[5]{32}=2$

Els arguments de les arrels són $\beta=\dfrac{30+360k}{5}$ per k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, llavors $\beta_0=6^{\circ}$
- Si k=1, llavors $\beta_1=6^{\circ}+72^{\circ}=78^{\circ}$
- Si k=2, llavors $\beta_2=6^{\circ}+144^{\circ}=150^{\circ}$

- Si k=3, llavors $\beta_3 = 6^o + 216^o = 222^o$
- Si k=4, llavors $\beta_3 = 6^o + 288^o = 294^o$

Per tant, les cinc arrels cinquenes del nombre complex $z = 16\sqrt{3} - 16i$ són:

$$2_{6^o}, 2_{78^o}, 2_{150}, 2_{222^o}, 2_{294^o}$$

Exercici 2:

Sigui E el subespai vectorial de R^6 generat pel conjunt de vectors següent:

E={(*b*-*ab*, 0, 0, 0, 0, 0), (2*b*, 1-*a*, 0, 0, 0, 0), (3*b*, 3, 1-*a*, 0, 0, 0), (4*b*, 4, 4, 1-*a*, 0, 0), (5*b*, 5, 5, 5, 1-*a*, 0), (6*b*, 6, 6, 6, 6, 1-*a*)}, $a, b \in R$. Sigui *v*=(1,1,1,1,1,0)

a) Calcula la dimensió d'E en funció d'*a* i *b*.

b) Per al cas *a*=1 i *b*=1, troba una base de l'espai vectorial. Pertany *v* a E en aquest cas? En cas afirmatiu troba les seves coordenades en la base anterior.

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu:

$$rang\begin{pmatrix} b-ab & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Calculem el determinant 6x6:

$$\begin{vmatrix} b-ab & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} 1-a & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = b \cdot (1-a)^6$$

Així doncs si $b \neq 0$ i $a \neq 1$ llavors la dimensió d'E és 6.

Si *b*=0, llavors calculem el rang de la matriu:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$ per a la qual cosa calculem el determinant:

$$\begin{vmatrix} 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^5$$

Així doncs si b=0 i $a \neq 1$ llavors el rang d'E és 5.

Si b=0 i a=1 tenim

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$ ja que podem trobar el menor 4x4 amb determinant diferent de zero: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$

Per tant la dimensió d'E és 4

Ara queda el cas a=1 i $b \neq 0$. Volem calcular el rang:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$ ja que podem trobar el menor 5x5 amb determinant diferent de zero: $\begin{vmatrix} 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 720b \neq 0$

Així resumint tenim:

Si $b \neq 0$ i $a \neq 1$ llavors la dimensió d'E és 6.

Si b=0 i $a \neq 1$ o bé a=1 i $b \neq 0$ llavors la dimensió d'E és 5.

Si b=0 i a=1 llavors la dimensió d'E és 4.

b) En el cas a=1 i b=1 sabem per l'apartat anterior que la dimensió d'E és 5.

Tenim que E està definit pels vectors:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que podem trobar el menor 5x5 amb determinant diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

Llavors els vectors {(2,0,0,0,0,0), (3,3,0,0,0,0), (4,4,4,0,0,0), (5,5,5,5,0,0), (6,6,6,6,6,0)} són linealment independents perquè contenen el menor anterior i són base d'E quan a=1 i b=1

Mirem si v pertany a E en aquest cas plantejant el sistema amb la base trobada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2x+3y+4z+5t+6k=1 \\ 3y+4z+5t+6k=1 \\ 4z+5t+6k=1 \\ 5t+6k=1 \\ 6k=1 \\ 0=0 \end{cases}$$

Que té solució x=0, y=0 , z=0, t=0, k=1/6.

Per tant v pertany a E i les seves coordenades en la base anterior són (0,0,0,0,1/6).

Exercici 3:

a) Discutiu el sistema següent segons els valors del paràmetre *a:*

$$\begin{cases} x-2y+z=a^2 \\ (2-a)x+(2a-4)y+(4-2a)z=5 \\ (a+1)x-(a+1)y+(a+1)z=a+1 \end{cases}$$

b) Resoleu el sistema per a $a=0$, en cas que tingui solució.

Resolució:

a) Es tracta d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites. Per discutir-lo utilitzarem el teorema de Rouché-Frobenius. Calcularem primer els valors de *a* que fan que *M* tingui rang màxim (és a dir, rang(*M*)=3). Per aquests valors el sistema serà compatible determinat.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2-a & 2a-4 & 4-2a \\ a+1 & -a-1 & a+1 \end{pmatrix}, \qquad MA=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a^2 \\ 2-a & 2a-4 & 4-2a & 5 \\ a+1 & -a-1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = -(a+1)(2-a) = 0$ si $a = -1$ o $a = 2$.

La matriu M té rang 3 per a tots els valors de a, llevat de per a $a = -1, 2$. Així per $a \neq -1, 2$ tenim $rang(M) = rang(MA) = 3$ i el sistema serà **COMPATIBLE DETERMINAT.**

Per a $a = -1$,

$$rang(M) = rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ i } rang(MA) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Així el sistema és **COMPATIBLE INDETERMINAT AMB 1 GRAU DE LLIBERTAT.**

Per a $a = 2$,

$$rang(M) = rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \text{ i } rang(MA) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

Així el sistema és **INCOMPATIBLE.**

Resumint:

- Per a $a \neq -1, 2$ el sistema és **COMPATIBLE DETERMINAT.**
- Per a $a = -1$ el sistema és **COMPATIBLE INDETERMINAT AMB 1 GRAU DE LLIBERTAT.**
- Per a $a = 2$ el sistema és **INCOMPATIBLE.**

b) Per a $a = 0$, fem la reducció de Gauss de la matriu ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Substituïm la 2fila per 2fila -2*(1fila) i la 3fila per 3fila-(1fila) i obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intercanviem la 2fila i la 3fila i tenim la reducció de Gauss de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Així la solució del sistema és

$$z = \frac{5}{2}$$
$$y = 1$$
$$x = -z + 2y = -\frac{5}{2} + 2 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Exercici 4:
Sigui $f: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z) = (2x, 3y, x + y + z) \quad .$$

a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.
b) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.
c) Estudieu si f diagonalitza.
d) En el cas en que f diagonalitza, trobeu una base formada per vector propis.

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) El polinomi característic de f és:

$$q(t) = (2-t)(3-t)(1-t)$$

Els valors propis de f són, per tant, el 2,el 3 i l'1, tots amb multiplicitat algebraica 1.

c) Tenim que el polinomi característic descomposa en factors lineals.
Com que la multiplicitat algebraica és 1, automàticament, la multiplicitat geomètrica també és 1. Per tant, el polinomi característic descomposa en factors lineals i les multiplicitats algebraiques i geomètriques de cada valor propi coincideixen. D'aquí es dedueix que f diagonalitza.

d) Per trobar els vectors propi de f de valors propis 2, 3 i 1cal resoldre els sistemes d'equacions lineals: (A-2I)X=0 i (A-3I)X=0 i (A-I)X=0 .
O sigui:

$$(A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El subespai de solucions del primer sistema és: < (1,0,1)>.

El subespai de solucions del segon sistema és: <(0,2,1)>.

El subespai de solucions del tercer sistema és: <(0,0,1)>.

Per tant, una base formada per vector propis de f és :

<(1,0,1), (0,2,1),(0,0,1)>

Àlgebra/ Matemàtiques I

EXAMEN 11-06-2011

1.-Realitza els càlculs següents:

a) Troba tots els valors d'*a* per a que la següent igualtat sigui certa:

$$6_{\frac{\pi}{6}rad} = \frac{\sqrt{3}+i}{i}\cdot(-a+3i)$$

b) Resol l'equació següent proporcionant totes les solucions en forma polar (els arguments els pots posar en graus o en radians):

$$x^3 + 64 = 0$$

Resolució:

a) D'una banda tenim: $6_{\frac{\pi}{6}rad} = 6(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\cdot\sin(\frac{\pi}{6})) = 6(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}) = 3\sqrt{3} + 3\cdot i$

De l'altra:

$$\frac{\sqrt{3}+i}{i}\cdot(3i-a) = \frac{(\sqrt{3}+i)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}\cdot(3i-a) = \frac{1-\sqrt{3}\cdot i}{1}\cdot(3i-a) =$$
$$= (1-\sqrt{3}\cdot i)\cdot(3i-a) = (3\sqrt{3}-a) + (a\sqrt{3}+3)i$$

Si ara igualem les parts reals i les parts imaginàries tenim: $3\sqrt{3} - a = 3\sqrt{3}$ i $a\sqrt{3} + 3 = 3$ d'on obtenim que l'única solució és a=0

b) $x^3 + 64 = 0 \Rightarrow x^3 = -64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-64}$ Si ara passem a polar:

$x = \sqrt[3]{-64} \Rightarrow x = \sqrt[3]{64_{180^\circ}} = 4_{(180^\circ + 360^\circ\cdot k)/3}$ i per tant, fent k=0,1,2 trobem que les tres solucions són: $4_{60^\circ}, 4_{180^\circ}, 4_{300^\circ}$

2.- Siguin A i B els subespais de R^3 generat pels conjunts de vectors següents:

$A = \langle (0,0,1),(0,1,1),(0,1,-a) \rangle,\ a \in R$

$B = \langle (0,1,-3),(0,4,4) \rangle$

a) Troba la dimensió de A en funció d'*a*. Troba la dimensió de B. Troba una base per cada subespai.

b) Determina si els vectors v=(0,-5,1) i w=(1,0,-3) pertanyen o no a A i a B. En cas que hi pertanyin, calcula'n les coordenades en les bases de l'apartat anterior.

Resolució:

a) Calculem els rang de les matrius:

Per A: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 0$ però trobem el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió d'A és 2 independentment d'*a*. Com a base podríem usar els dos primers vectors que són linealment independents (contenen el menor anterior): $Base - A = \{(0,0,1),(0,1,1)\}$

Per B: Tenim el menor $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió de B és 2 i com a base podríem usar els dos vectors amb que està definit: $Base - B = \{(0,1,-3),(0,4,4)\}$

b) Per al vector v=(0,-5,1) i el subespai A tenim el sistema

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 0 \\ y = -5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ que té per solució: x=6, y=-5. Així doncs $v \in A$ i les seves coordenades són (6,-5).

Per al vector v=(0,-5,1) i el subespai B tenim el sistema

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 0 \\ x + 4y = -5 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$ que té per solució: x=-3/2, y=-7/8. Així doncs $v \in B$ i les seves coordenades són (-3/2,-7/8).

Per al vector w=(1,0,-3) i el subespai A tenim que $w \notin A$. Això ho podem veure plantejant el sistema:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 1 \\ y = 0 \\ x + y = -3 \end{cases}$ que ja veiem que és incompatible.

Per al vector w=(1,0,-3) i el subespai B tenim que $w \notin B$. Això ho podem veure plantejant el sistema:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 0 = 1 \\ x + 4y = 0 \\ -3x + 4y = -3 \end{cases}$ que ja veiem que és incompatible.

3.-Discutiu i resoleu, quan sigui possible, el següent sistema d'equacions lineals per als diferents valors del paràmetre $m \in R$.

$$\begin{cases} x + my + 3z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \\ mx - y + z = 0 \end{cases}.$$

Resolució.

La matriu del sistema és

$$A \mid A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \\ m & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Observem primer que el sistema és homogeni per tant $rang\, A = rang\, A'$ amb el que serà compatible per a qualsevol valor $m \in R$.

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rang A \geq 2$.

Per a veure si el rang de la matriu de coeficients és 3 orlem el menor no nul d'ordre 2 i estudiem quan s'anul·la el determinant. Hi ha dues possibilitats:

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ 0 & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -(m+1)(1-m) = (m+1)(m-1)$$

Àlgebra/ Matemàtiques I

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ -1-m & 0 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = (m+1)(m+3).$$

Observem que els dos determinants només s'anul·len simultàniament quan $m=-1$. Per tant tenim:

- Cas I. $m \neq -1 \Rightarrow rang\ A = 3 = rang\ A' \Rightarrow SCD$ i la solució única és $(0,0,0)$.
- Cas II $m=-1 \Rightarrow rang\ A = 2 = rang\ A' \Rightarrow SCI$ amb 3-2=1 grau de llibertat (y).

En aquest cas, el sistema queda, després d'eliminar la 3a i 4a equacions i traspassar la incògnita "y" al terme independent obtenim:

$\begin{cases} x + 3z = y \\ -x + z = y \end{cases}$ que té solució $x = -\dfrac{y}{2}, z = \dfrac{y}{2}$ i $y = y$.

4.-Considerem el polígon P de vèrtexs A(0,0), B(2,5), C(-1,1), D(-3,2) i E(-3,-2) i d'arestes AB, BC, CD , DE i EA.

a) Calculeu els vèrtexs del polígon resultant d'aplicar a P un escalatge de raó 3 horitzontal i raó 2 vertical, des del punt (1,-1).

b) ¿Quins valors han de prendre $\cos(\alpha)$ i $\sin(\alpha)$ per a que el vèrtex C' del polígon resultant d'aplicar a P un gir d'angle α radians en sentit antihorari al voltant de l'origen sigui $C'(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})$?

Resolució:

a) Per fer un escalatge des del punt (1,-1) primer cal buscar la translació que converteixi el punt (1,-1) en l'origen. És la translació de vector (-1,1):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Després cal calcular la matriu E de l'escalatge de raó 3 horitzontal i 2 vertical:

$$E=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Finalment cal desfer la primera translació, és a dir, considerar la inversa de T:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Multiplicant les tres matrius, de dreta a esquerra, obtenim :

$$T^{-1}\cdot E\cdot T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Per tant, els transformats de A(0,0), B(2,5), C(-1,1), D(-3,2), E(-3,-2) són:

$$\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&-1&-3&-3\\0&5&1&2&-2\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&-5&-11&-11\\1&11&3&5&-3\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

O sigui, són els punts: (-2,1), (4,11), (-5,3), (-11,5) i (-11,-3).

b) La matriu del gir d'angle α al voltant de l'origen és

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)&0\\\sin(\alpha)&\cos(\alpha)&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b&0\\b&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Aleshores els transformats de A(0,0), B(2,5), C(-1,1), D(-3,2), E(-3,-2) són:

$$\begin{pmatrix}a&-b&0\\b&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1&-3&-3\\0&5&1&2&-2\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2a-5b&-a-b&-3a-2b&-3a+2b\\0&5a+2b&a-b&2a-3b&-2a-3b\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

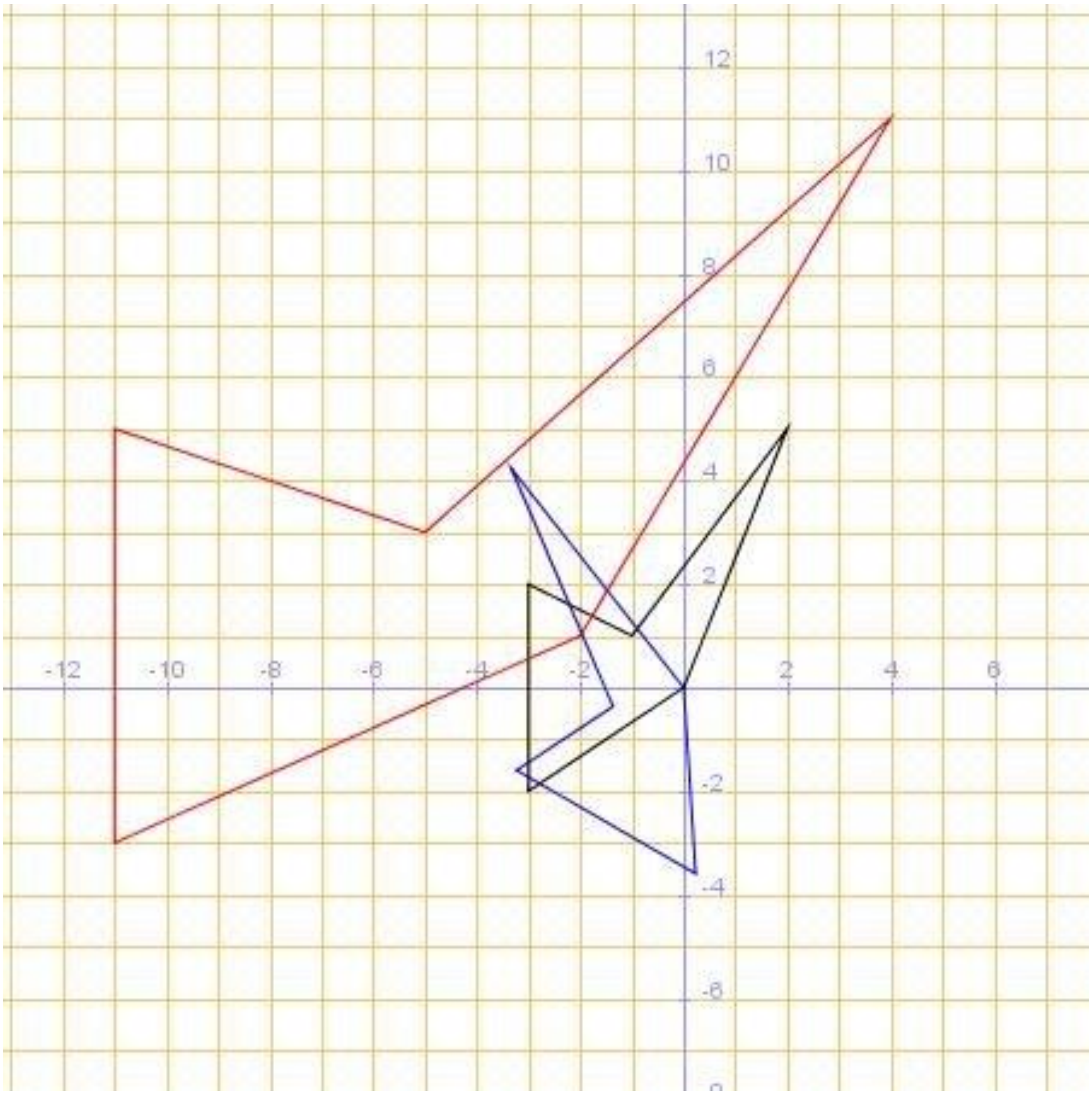
Imposant que C' sigui el punt $C'(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})$ obtenim que:

$$-a-b=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};a-b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Restant les dues equacions obtenim que -2a=-1. O sigui: $a=\frac{1}{2}$. Per tant $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Així:

$\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$ i $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i per tant $\alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$.

Àlgebra/ Matemàtiques I



Àlgebra/ Matemàtiques I

EXAMEN 18-06-2011

1. Realitza els càlculs següents:

   a) Escriu, en forma polar (els arguments els pots posar en graus o en radians), l'oposat i el conjugat del nombre complex $z = \sqrt{3} - \sqrt{3} \times i$

   b) Escriu en forma binòmica els següents nombres complexos: $4_{45^\circ}, 3_{\frac{p}{3} rad}$

   c) Resol l'equació següent proporcionant totes les solucions en forma polar (els arguments els pots posar en graus o en radians):

$$x^4 - 625 = 0$$

Solució:

a) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot i$ Llavors $-z = -\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot i = \sqrt{6}_{135^\circ}$ i $\bar{z} = \sqrt{3} + \sqrt{3} \times i = \sqrt{6}_{45^\circ}$

b) $4_{45^\circ} = 4 \cdot (\cos(45^\circ) + i \cdot \sin(45^\circ)) = 4 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot i$

$$3_{\frac{\pi}{3} rad} = 3 \cdot (\cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3})) = 3 \cdot (\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

c) $x^4 - 625 = 0 \Rightarrow x^4 = 625 \Rightarrow x = \sqrt[4]{625}$ Si ara passem a polar:

$x = \sqrt[4]{625} \Rightarrow x = \sqrt[4]{625_{0^\circ}} = 5_{(0^\circ + 360^\circ \cdot k)/4}$ i, per tant, fent k=0,1,2,3 trobem que les quatre solucions són: $5_{0^\circ}, 5_{90^\circ}, 5_{180^\circ}, 5_{270^\circ}$

2. Sigui S el subespai de R^3 generat pel conjunt de vectors següent:

$$S = \langle ((1+a) \cdot b, b, b), (0, 1+a, 0), (0, 0, 1+a) \rangle, \; a, b \in R$$

   a) Determina en funció d'*a* i *b* la dimensió del subespai S.

   b) En el cas *a*=0 i *b*=1, determina les coordenades del vector v=(2,1,0) en S.

Solució:

a) Primer calculem el rang de la matriu:

$$\begin{vmatrix} (1+a)\cdot b & 0 & 0 \\ b & 1+a & 0 \\ b & 0 & 1+a \end{vmatrix} = b\cdot \begin{vmatrix} (1+a) & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & 0 \\ 1 & 0 & 1+a \end{vmatrix} = b\cdot(1+a)^3$$

Així tindrem que per $b \neq 0$ i $a \neq -1$ la dimensió de S serà 3 ja que el determinant serà no nul i tindrem el màxim nombre de vectors linealment independents.

- Si $b \neq 0$ però a=-1 tindrem el sistema $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que té dimensió 1 ja que $b \neq 0$.

- Si *b*=0 llavors tindrem el sistema $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$ amb dos casos: $a \neq -1$ on tindrem rang 2 (ja que podem trobar el menor $\begin{vmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1+a \end{vmatrix} \neq 0$ en aquest cas) o el cas a=-1 on tindrem que tots els vectors són zero i per tant la dimensió de S serà 0.

b) En el cas *a*=0 i *b*=1 tindrem el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i per tant busquem un vector (x,y,z) tal que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Això ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$ que resolent-lo trobem el vector (2,-1,-2)

Nota: Per a trobar v en les coordenades de S, també es podria haver calculat la inversa de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i aplicar-la al vector v.

3. Discutiu i resoleu, quan sigui possible, el següent sistema d'equacions lineals per als diferents valors del paràmetre $a \in R$.

$$\begin{cases} x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & (a-1)z & = & a \end{cases}$$

Solució.

La matriu del sistema és:

$$A \mid A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & a-1 & a \end{array} \right)$$

Estudiem el rang de la matriu *A*. Com que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, aleshores $rang\ A \geq 2$.

Per a veure quan el rang pot ser 3, calculem el determinant d'*A* i obtenim $|A| = 3a - 18$ que només s'anul·la pel valor *a* = 6.

• Cas I. $a \neq 6 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ A = 3 = rang\ A' \Rightarrow SCD$

I si el resolem pel mètode de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ a & -3 & a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3a - 3 + 6a - 4a - 27}{3a - 18} = \frac{5a - 30}{3a - 18} = \frac{5(a-6)}{3(a-6)} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & a & a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4a - 27 + 3a - 3a + 3}{3a - 18} = \frac{4a - 24}{3a - 18} = \frac{4(a-6)}{3(a-6)} = \frac{4}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -3 & a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a-9-9+2a}{3a-18}=\frac{3a-18}{3a-18}=1$$

I per tant la solució única té és: $\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},1\right)$ independent del valor que donem al paràmetre $a\neq 6$.

- Cas II. $a=6\Rightarrow |A|=0\Rightarrow rang\ A=2$

Per a calcular el rang de la matriu ampliada orlem el menor diferent de zero que tenim a la matriu *A* i mirem si s'anul·la el determinant.

$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 6\end{vmatrix}=0\Rightarrow rang\ A'=2=rang\ A\Rightarrow SCI$ amb 3-2=1 grau de llibertat (z)

Per a la resolució, una vegada anul·lada la 3a equació i passant la incògnita z als termes independents, obtenim el següent sistema d'equacions equivalent

$\begin{cases}x-2y=3-4z\\ x+y=3z\end{cases}$ que ens porta a la solució $x=\frac{3+2z}{3}, y=\frac{7z-3}{3}, z=z$.

4. Sigui $f:R^3\rightarrow R^2$ l'aplicació lineal definida per

$f(x,y,z)=(z,x+2y-z)$.

a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques i digueu quin rang té.
b) Trobeu la dimensió i una base del Nucli de f. És f injectiva?
c) Trobeu la dimensió i una base de la Imatge de f. És f exhaustiva?
d) Trobeu el conjunt d'antiimatges del vector (3,4).

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és : $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

i té rang 2.

b) Com que el rang de A és 2, la dimensió del nucli de f és 3-2=1. Per tant, una base del nucli estarà formada per un vector no nul que sigui solució del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base del nucli de f és doncs:{(2,-1,0)}. L'aplicació f no és injectiva perquè el nucli és diferent de zero.

c) Com que el rang de A és 2, la dimensió de la imatge de f és 2, o sigui, tot l'espai R^2. Una base de la imatge de f és doncs la {(1,0),(0,1)}. L'aplicació f és exhaustiva perquè la imatge té dimensió 2.

d) Per a trobar la antiimatge del vector (3,4) cal resoldre el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Ens queda: z=3 i x+2y-z=4. O sigui, x+2y=7. Per tant, x=7-2y. O sigui, les solucions són punts (x,y,z)=(7-2y,y,3)=(7,0,3)+(-2y,y,0)=(7,0,3)+y(-2,1,0). Per tant, el conjunt d'antiimatges és la recta que passa pel punt (7,0,3) i de vector director (-2,1,0).

Àlgebra/ Matemàtiques I

EXAMEN 22/6/2011

1. Realitza els càlculs següents:

   a) Demostra que si $z=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i)$ llavors $z^9=z$.

   b) Escriu en forma binòmica els següents nombres complexos: $4_{135^o}, 3_{\frac{2\pi}{3}rad}$

   c) Resol l'equació següent proporcionant totes les solucions en forma polar (els arguments els pots posar en graus o en radians):

$$x^5-243=0$$

Solució:

a) Sí, és veritat. Anem a fer la potència de z que ens demanen, per això primer passem z a polars:

$z=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i)=1_{\frac{\pi}{4}}$ i ara substituïm a l'equació:

$z^9=(1_{\frac{\pi}{4}})^9=1_{\frac{\pi}{4}\cdot 9}=1_{\frac{9\pi}{4}}=1_{\frac{8\pi+\pi}{4}}=1_{2\pi+\frac{\pi}{4}}=1_{\frac{\pi}{4}}=z$. Observem que coincideix amb el que es diu a l'enunciat.

b) $4_{135^o}=4\cdot(\cos(135^o)+i\cdot\sin(135^o))=4\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot i$

$$3_{\frac{2\pi}{3}rad}=3\cdot(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\cdot\sin(\frac{2\pi}{3}))=3\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2})=-3\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\cdot i$$

c) $x^5-243=0\Rightarrow x^5=243\Rightarrow x=\sqrt[5]{243}$ Si ara passem a polar:

$x=\sqrt[5]{243}\Rightarrow x=\sqrt[5]{243_{0^o}}=3_{(0^o+360^o\cdot k)/5}$ i, per tant, fent k=0,1,2,3,4 trobem que les cinc solucions són: $3_{0^o},3_{72^o},3_{144^o},3_{216^o},3_{288^o}$

2. Siguin A i B els subespais de R^3 generat pels conjunts de vectors següents:

   $A = <(a,0,0),(-1,0,1),(0,0,1)>$, $a \in R$

   $B = <(1,0,-3),(2,0,2)>$

   a) Troba la dimensió de A en funció d'*a*. Troba la dimensió de B. Troba una base per cada subespai.

   b) Determina si els vectors v=(-4,0,1) i w=(0,1,-3) pertanyen o no a A i a B. En cas que hi pertanyin, calcula'n les coordenades en les bases de l'apartat anterior.

<u>Solució:</u>

a) Calculem els rang de les matrius:

Per A: $\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ però trobem el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió d'A és 2 independentment d'*a*. Com a base podríem usar el segon i tercer vectors que són linealment independents (contenen el menor anterior):
$Base - A = \{(-1,0,1),(0,0,1)\}$

Per B: Tenim el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió de B és 2 i com a base podríem usar els dos vectors amb que està definit: $Base - B = \{(1,0,-3),(2,0,2)\}$

b) Per al vector v=(-4,0,1) i el subespai A tenim el sistema

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} -x = -4 \\ 0 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ que té per solució: x=4, y=-3. Així doncs $v \in A$ i les seves coordenades són (4,-3).

Per al vector v=(-4,0,1) i el subespai B tenim el sistema

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 0 = 0 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$ que té per solució: x=-5/4, y=-11/8. Així doncs $v \in B$ i les seves coordenades són (--5/4,-11/8).

Per al vector w=(0,1,-3) i el subespai A tenim que $w \notin A$. Això ho podem veure plantejant el sistema:

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} -x = 0 \\ 0 = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$ que ja veiem que és incompatible.

Per al vector w=(0,1,-3) i el subespai B tenim que $w \notin B$. Això ho podem veure plantejant el sistema:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ que ens dona el sistema d'equacions $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 0 = 1 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases}$ que ja veiem que és incompatible.

3. Discutiu i resoleu, quan sigui possible, el següent sistema d'equacions lineals per als diferents valors del paràmetre $a \in R$.

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & = & 7 \\ 4x & + & y & = & 2 \\ x & + & ay & = & -5 \\ -x & + & 8y & = & 1-6a \end{cases}$$

<u>Resolució.</u>

La matriu del sistema és

$$A|A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & a & -5 \\ -1 & 8 & 1-6a \end{array}\right).$$

Com que $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \Rightarrow rang\ A = 2$ independentment del valor d'*a*.

Per a calcular el rang de la matriu ampliada orlem aquest menor amb les diferents possibilitats i estudiem quan s'anul·len:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & a & -5 \end{vmatrix} = -15+28a-4-7-6a-40 = 22a-66 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 8 & 1-6a \end{vmatrix} = 3-18a+224+4+7-48+8-48a = -66a+198 = 0 \Leftrightarrow a = 3.$$

Així doncs, tenim:

- Cas I. $a \neq 3 \Rightarrow rang\ A' = 3 \neq rang\ A = 2 \Rightarrow SI$
- Cas II $a = 3 \Rightarrow rang\ A' = 2 = rang\ A \Rightarrow SCD$

I en aquest últim cas la resolució, una vegada eliminades, per exemple, la 1a i la 2a equacions obtenim:

$\begin{cases} x + 3y = -5 \\ -x + 8y = -17 \end{cases}$ que té solució $x = 1$ i $y = -2$.

4. Sigui $f : R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per $f(x, y, z) = (-9x - 2z, 100x + y + 20z, 55x + 12z)$.

   a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.

   b) Calculeu el polinomi característic i els valors propis de f.

   c) Estudieu si f diagonalitza.

   d) En el cas en que f diagonalitza, trobeu una base formada per vectors propis.

<u>Resolució:</u>

a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -2 \\ 100 & 1 & 20 \\ 55 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

b) Com que el polinomi característic de f és

$$Q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix}-9-t & 0 & -2\\ 100 & 1-t & 20\\ 55 & 0 & 12-t\end{vmatrix}=(1-t)\begin{vmatrix}-9-t & -2\\ 55 & 12-t\end{vmatrix}=$$

$$(1-t)(t^2-3t+2)=(1-t)(t-1)(t-2)=(1-t)^2(2-t)$$

Els valors propis de f són 1 amb multiplicitat algebraica 2, i 2 amb multiplicitat algebraica 1.

c) La multiplicitat geomètrica del valor propi 1 és:

$$\dim(Nucli(A-I))=3-rang(A-I)=3-rang\begin{pmatrix}-10 & 0 & -2\\ 100 & 0 & 20\\ 55 & 0 & 11\end{pmatrix}=3-1=2\,.$$

Per tant la multiplicitat algebraica i la multiplicitat geomètrica per al valor propi 1 coincideixen. Per al valor propi 2, com que l'exponent de (2-t) en el polinomi característic és 1, automàticament la multiplicitat algebraica coincideix amb la multiplicitat geomètrica. Es compleixen, doncs, les dues condicions per a que f sigui diagonalitzable: que el polinomi característic de f descomposi en termes lineals i que les multiplicitats geomètriques i algebraiques coincideixin per a tot valor propi.

d) Per trobar els vectors propis de f de valor propi 1 i 2 cal resoldre els sistemes d'equacions lineals: (A-I)X=0 i (A-2I)X=0. O sigui:

$$(A-I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 0 & -2\\ 100 & 0 & 20\\ 55 & 0 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};(A-2I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 0 & -2\\ 100 & -1 & 20\\ 55 & 0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Les solucions són els subespais: $<(1,0,-5), (0,1,0)>$ i $<(-2,20,11)>$, respectivament. La base formada per vector propis de f és doncs.

{(1,0,-5), (0,1,0),(-2,20,11)}.

Solució examen 1

1.

a) Realitza la següent operació amb nombres complexos, expressant el resultat en forma binòmica.

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}$$

b) Calcula les arrels cinquenes del complex següent: $z=\sqrt[5]{10+10i}$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

Solució:

a) Operem amb l´expressió, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2=-1$:

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}=\frac{2-3i-3-2i}{3+2i-2-i}=\frac{-1-5i}{1+i}=\frac{(-1-5i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{-1-5i+i+5i^2}{2}=$$
$$=\frac{-6-4i}{2}=-3-2i$$

Per tant:

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}=-3-2i$$

b) Escrivim el complex $z´=10+10i$ en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m=\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$
$$\alpha=arctg\left(\frac{10}{10}\right)=arctg1=45^{o}$$

Observem que ni sumem ni restem cap angle donat que la part real i la part imaginària del complex són positives (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $z=\sqrt[5]{10+10i}=\sqrt[5]{(10\sqrt{2})_{45^{o}}}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{10\sqrt{2}_{45}}=\left(\sqrt[10]{200}\right)_{\frac{45^{o}+360^{o}k}{5}}$$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=\sqrt[10]{200}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{45^\circ + 360^\circ k}{5}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 9^\circ$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 9^\circ + 72^\circ = 81^\circ$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 9^\circ + 144^\circ = 153^\circ$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 9^\circ + 216^\circ = 225^\circ$
- Si k=4, tenim que $\beta_4 = 9^\circ + 288^\circ = 297^\circ$

Per tant, les cinc arrels cinquenes del complex $z = \sqrt[5]{10+10i}$ són:

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{9^\circ} = 1{,}6777 + 0{,}26573i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{81^\circ} = 0{,}26573 + 1{,}6777i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{153^\circ} = -1{,}5135 + 0{,}77117i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{225^\circ} = -1{,}2011 - 1{,}2011i}$$

$$\boxed{\sqrt[10]{200}_{297^\circ} = 0{,}77117 - 1{,}5135i}$$

2.

Sigui E un subespai de R^3 generat pels següents vectors:

E=< $(a+1, 0, -8)$, $(7, a-1, a)$, $(0, 0, a-1)$ >.

a) Determina en funció d'*a* la dimensió del subespai E.
b) Per al cas $a = 0$ troba una base d'E. Pertany v=(1,0,1) a E? Quines són les seves coordenades en la base que has trobat?

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 7 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ -8 & a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} a+1 & 7 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-1)(a+1) = (a-1)^2(a+1)$$

Així per $a \neq -1$ i $a \neq 1$ tenim que el determinant que formen els vectors serà no nul i per tant tindrem el màxim nombre de vectors linealment independents. En aquest cas la dimensió és 3.

Cas $a=-1$ Podem trobar un menor d'ordre 2 diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Per tant tenim 2 vectors linealment independents i això implica que l'espai generat per E és de dimensió 2.

Cas $a=1$ Podem trobar un menor d'ordre 2 diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Per tant tenim 2 vectors linealment independents i això implica que l'espai generat per E és de dimensió 2.

b) En l'apartat anterior ja hem vist que per $a=0$ els tres vectors són linealment independents. Per tant podem usar com a base els tres vectors amb els quals E està definit: Base={(1,0,-8),(7,-1,0),(0,0,-1)}

Per veure si v pertany a E i a la vegada trobar-ne les coordenades en el cas que hi pertanyi, resolem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=1, y=0, z=-9. Per tant les coordenades de v en la base trobada són (1,0,-9)

3.

Sigui la matriu *A* definida per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k+3 & k+1 \\ 1 & 1 & k+2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{on } k \in \mathbb{R}$$

a) Calculeu el rang de la matriu *A* en funció del paràmetre real *k*.
b) Discutiu i solucioneu el sistema homogeni

$$A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolució:

a)

Per a estudiar el rang(A) podem fer-ho bé per transformacions elementals successives que simplifiquin la matriu (mètode de Gauss) o bé càlcul de determinants buscant el major menor no nul (en funció del paràmetre real k). Per la dimensió de la matriu començarem primer pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k+3 & k+1 \\ 1 & 1 & k+2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & k+1 \\ 0 & 2 & k+1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim^{(2)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & -2k & -2k \end{pmatrix}$$

(1) Restant a la segona fila 2 vegades la primera
    Restant a la tercera fila la primera

    Restant a la quarta fila 3 vegades la primera

(2) Restant a la tercera fila la segona
    Restant a la quarta fila 2 vegades la segona

Amb això tenim que el rang(M) serà com a mínim de 2 ja que tenim dues files no nules (les dues primeres). Per a estudiar com, en funció dels valors del paràmetre k, pot augmentar o no el rang, mirem quan s'anul.la el menor format per les dues darrerres files i les dues darreres columnes.

$$\begin{vmatrix} 0 & -k \\ -2k & -2k \end{vmatrix} = -2k^2.$$

Per tant aquest menor s'anul.larà si i només si k = 0.

Per tant, si $k \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 4$ ja que les dues darreres files seran independents i ampliaran el rang 2 de les dues primeres.

I si $k = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ ja que les dues darreres files s'anul.len.

En resum:

- Si $k \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 4$.
- Si $k = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

b) Per tractar-se d'un sistema homogeni serà sempre compatible. Ara bé cal veure si la solució és la trivial (0,0,0,0) o bé es tracta d'un sistema compatible indeterminat.

- Si $k \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 4$ que coincideix amb el nombre d'incògnites i per tant el sistema és SCD i la solució serà (0,0,0,0).

- Si $k = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ i per tant com que és menor que el nombre d'incògnites (4) tenim que el sistema serà Compatible Indeterminat amb (4-2=2) 2 graus de llibertat.

De l'apartat anterior, de la matriu reduïda tenim que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ és el menor que ens garanteix el rang, podem eliminar les equacions tercera i quarta (per ser combinació lineal de les dues primeres) i traspassant els termes de z, t i u al terme independent obtenim el següent sistema equivalent:

$$\begin{cases} x - y & = & -z \\ 2y & = & -z - t \end{cases}.$$

Utilitzant z i t com a incògnites indeterminades, podem expressar y i x en termes de z i t, i obtenim

y = (-z-t)/2

x = y-z = (-z-t)/2 -z= (-3z-t)/2.

En resum:

- Si $k \neq 0$ el sistema és SCD i la solució és (0,0,0,0).

- Si $k=0$ el sistema és SCI amb 2 g.ll. i la solució és de la forma $\left(\frac{-3z-t}{2},\frac{-z-t}{2},z,t\right)$.

4.

Sigui P el quadrat de vèrtexs (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1).

a) Sigui *G* el gir de 45º en sentit antihorari des del punt (0,1). Sigui Q la imatge de P per *G*. Calculeu Q.

b) Sigui *E* l'escalatge uniforme de raó *a* des del punt (0,0). Sigui R la imatge de Q per *E*. Trobeu *a* de manera que un costat de R estigui damunt la recta $x=2$.

Resolució:

Per fer un gir de 45º des del punt (0,1), primer fem la translació que porta el (0,1) a l'origen (veure apunts M6, Notació matricial eficient): $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Després fem el gir de 45ª en sentit antihorari: $gir=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Després desfem la translació: $T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Composant les tres transformacions, obtenim G, el gir de 45º en sentit antihorari des del punt (0,1):

$$G=T^{-1}\cdot gir\,T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&1-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Calculem Q, la imatge del quadrat P pel gir G:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1-\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El quadrat Q és el de vèrtexs: $(\sqrt{2},1),(0,1),(0,1-\sqrt{2}),(\sqrt{2},1-\sqrt{2})$.

b) La matriu de E, l'escalatge uniforme de raó a des de l'origen és $E = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

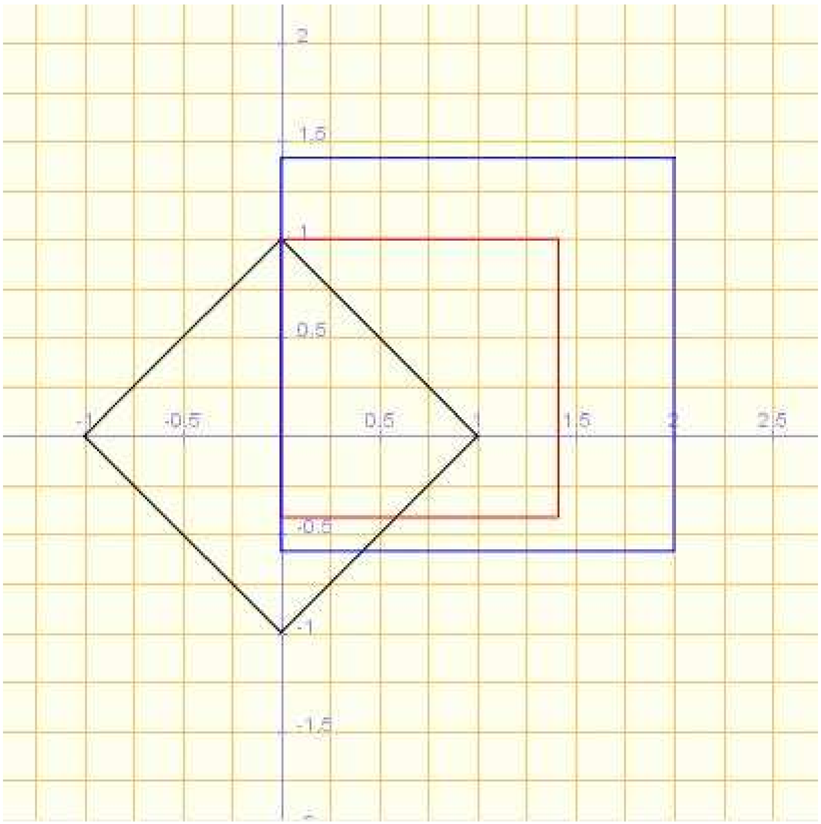
Per a obtenir R, la imatge del quadrat Q per l'escalatge E fem:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1-\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & 0 & 0 & a\sqrt{2} \\ a & a & a(1-\sqrt{2}) & a(1-\sqrt{2}) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R té vèrtexs $(a\sqrt{2},a)$, $(0,a)$, $(0,a(1-\sqrt{2}))$, $(a\sqrt{2},a(1-\sqrt{2}))$. L'única manera possible que un costat de R estigui damunt la recta $x=2$ es que $a\sqrt{2}=2$. O sigui,

$$\boxed{a = 2/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}/\sqrt{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}}$$

En el dibuix fet amb la Wiris, en negre tenim P, en vermell Q i en blau R.


2
1.5
1
0.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
-0.5
-1
-1.5

Solució examen 2

1.

a) Realitza la següent operació amb nombres complexos, expressant el resultat en forma binòmica.

$$\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-(3/2)i}$$

b) Calcula totes les arrels de l'equació següent: $x^5+32=0$ (proporciona els resultats en forma polar i binòmica)

Solució:

a) Operem amb l'expressió, recordant, tal com s'explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2=-1$:

$$\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-(3/2)i}=\frac{4+4i-1+1-2i-1}{\frac{2-3i}{2}}=\frac{2\cdot(3+2i)}{2-3i}=\frac{2\cdot(3+2i)\cdot(2+3i)}{(2-3i)\cdot(2+3i)}=\frac{2\cdot(6+9i+4i-6)}{4+9}=2i$$

Per tant:

$$\boxed{\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-(3/2)i}=2i}$$

b) Primer aïllem la incògnita:

$$x^5+32=0\rightarrow x^5=-32\rightarrow x=\sqrt[5]{-32}$$

Escrivim el complex z=-32 en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m=\sqrt{(-32)^2}=32$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{-32}+180^{\circ}=arctg0+180^{\circ}=180^{\circ}$$

Observem que sumem 180º donat que la part real del complex és negativa i la part imaginària és 0 (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès). De fer, donat que la part imaginària és 0 podríem sumar o restar 180º, l'angle és el mateix.

Tenim, per tant, que $z=32_{180^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels cinquenes, hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{32_{180^o}}=2_{\frac{180^o+360^o k}{5}}=2_{36^o+72^o k}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4

Els arguments de les arrels són:

- Si k=0, tenim que $\beta_0=36^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=36^o+72^o=108^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=36^o+144^o=180^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3=36^o+216^o=252^o$
- Si k=4, tenim que $\beta_4=36^o+288^o=324^o$

Per tant, les cinc arrels de l'equació $x^5+32=0$ són:

$$2_{36^o}=1{,}618+1{,}1756i$$

$$2_{108^o}=-0{,}618+1{,}9021i$$

$$2_{180^o}=-2$$

$$2_{252^o}=-0{,}61803-1{,}9021i$$

$$2_{324^o}=1{,}618-1{,}1756i$$

2.

Donats els conjunts de vectors de R^3:

A=<$(1,0,0),(1,a,0),(1,1,a)$>.

B=<$(1,1,1),(0,a,1),(0,0,a)$>.

a) Trobeu el valor de *a* per a que A i B siguin base de R^3. Si $a=1$ trobeu les coordenades del vector v=(2,0,1) en cada una de les bases.
b) Calcula la matriu de canvi de base de A a B per $a=1$. Comprova la coherència de l'apartat anterior.

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors de l'espai A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^2$$

Així per $a\neq 0$ el rang de la matriu és 3 i per tant són base de R^3.

Fem el mateix per a l'espai B:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2$$

Així que de nou per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 3 i per tant són base de R^3

Així doncs tant A com B quan $a \neq 0$ formen una base de R^3.

Per a calcular les coordenades de v en A quan $a = 1$ resolem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=2, y=-1, z=1. Per tant les coordenades de v en A quan $a = 1$ són (2,-1,1).

Per a calcular les coordenades de v en B quan $a = 1$ resolem de forma anàloga el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que té solució x=2, y=-2, z=1. Per tant les coordenades de v en A quan $a = 1$ són (2,-2,1).

b) Per trobar la matriu de canvi de base C hem de resoldre:

$C=B^{-1}\cdot A$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem primer la inversa de la matriu B

$$B^{-1} = \frac{(adj(B))^t}{|B|}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podem trobar ara ja la matriu de canvi de base.

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara comprovem els resultats de l'apartat anterior i veiem que efectivament transforma les coordenades de v en A a les coordenades de v en B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.

Discutiu i resoleu,quan sigui possible,el següent sistema d'equacions lineals per als diferents valors del paràmetre $a \in R$.

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & =1 \\ x & +(a+1)y & -z & =-1 \\ -x & +y & -2z & =-2 \end{cases}$$

Resolució:

Per a discutir el sistema d'equacions lineals hem d'estudiar, si A és la matriu de coeficients i A' és la matriu ampliada, els rang(A) i rang(A'), segons els valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

Tenim

$$A|A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right),$$

Observem que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ i per tant el rang(A) és com a mínim 2.

Rang(A)=3 només si el determinant d'A és diferent de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4(a+1)+1+1+(a+1)+2+2 = -3a+3$$

que només s'anul.la pel cas a=1.

Per tant, tenim la següent discussió:

Cas I: Si $a \neq 1 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A^{'})$ que és el nombre d'incògnites i per tant el sistema és SCD.

Per a trobar la solució podem aplicar la regla de Cramer i tenim:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3a+3} = \frac{0}{-3a+3} = 0,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-3a+3} = \frac{0}{-3a+3} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3a+3} = \frac{-3a+3}{-3a+3} = 1.$$

Per tant, en tots els casos obtenim com a solució única (0, 0, 1), independentment del valor del paràmetre *a*.

Cas II: Si $a = 1 \Rightarrow rang(A) = 2$ i hem d'estudiar el rang(A'). Quan substituïm el valor d'*a* tenim les següents matrius:

$A|A^{'} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$ i podem observar que les dues darreres columnes són coincidents i per tant rang(A')=rang(A)=2 i el sistema serà SCI amb (3-2=1) 1 grau de llibertat.

Per a trobar la solució, resolem el sistema format, per exemple, per les dues primeres equacions.

Restant a la segona equació dues vegades la primera: -3y = 3-3z o sigui y = z-1 i substituint a la primera ecuació i aïllant, x = z-1-2(z-1)=-z+1=1-z. Per tant els punts solució són de la forma $(1 - z, z - 1, z)$.

En resum:

- Cas I: $a \neq 1$, SCD amb solució $(0,0,1)$.
- Cas II: $a = 1$, SCI amb 1 g.ll i solució $(1-z, z-1, z)$.

4

Sigui $f: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per $f(1,1,1)=(3,3,3)$, $f(0,1,1)=(2,2,2)$ i $f(0,0,1)=(0,0,0)$

a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.

b) Trobeu una base del nucli de f. És f injectiva?

c) Trobeu una base de la imatge de f. És f exhaustiva?

d) Digueu si f diagonalitza i, si és possible, trobeu una base de R^3 formada per vectors propis de f.

Resolució:

a) Tenim que $(1,0,0)=(1,1,1)-(0,1,1)$. Per linealitat,

$$f(1,0,0)=f(1,1,1)-f(0,1,1)=(3,3,3)-(2,2,2)=(1,1,1).$$

D'altra banda, $(0,1,0)=(0,1,1)-(0,0,1)$. Per tant,

$$f(0,1,0)=f(0,1,1)-f(0,0,1)=(2,2,2)-(0,0,0)=(2,2,2)$$

A més a més, $f(0,0,1)=(0,0,0)$. Així, la matriu de f en les bases canòniques és:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}.$$

c) El nucli de f es troba resolent el sistema $\begin{pmatrix}1&2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

O sigui, $x+2y=0$. Per tant, $x=-2y$ i $(x,y,z)=(-2y,y,z)=y(-2,1,0)+z(0,0,1)$. O sigui, el nucli de f està generat pels vectors $(-2,1,0)$ i $(0,0,1)$. En particular, com que el nucli no és zero, f no és injectiva.

d) La imatge de f està generada per les columnes de la matriu A. Per tant, una base de la imatge de f és: $(1,1,1)$. Com que la imatge de f no és tot R^3, deduïm que f no és exhaustiva.

e) Com que $f(-2,1,0)=(0,0,0)=0\cdot(-2,1,0)$ i $f(0,0,1)=(0,0,0)=0\cdot(0,0,1)$, tenim que els vectors $(-2,1,0)$ i $(0,0,1)$ són vectors propis de f de valor propi 0. Com que $f(1,1,1)=(3,3,3)=3\cdot(1,1,1)$, tenim que el vector $(1,1,1)$ és vector propi de f

de valor propi 3. Observem que $(-2,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$ formen una base de R^3 de vectors propis de f. Això vol dir que la matriu de f en aquesta base és diagonal amb elements diagonals 0, 0 i 3. Per tant, f diagonalitza.

Solució examen 3 bis

1.

a) Realitza la següent operació amb nombres complexos, expressant el resultat en forma binòmica.

$$\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)$$

b) Calcula totes les arrels de l'equació següent: $x^6+1=0$ (proporciona els resultats en forma binòmica i polar)

Solució:

a) Fem el producte dels complexos, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2=-1$:

$$\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)=\frac{(1+2i)\cdot(2+i)}{2-i}+\frac{(1-2i)\cdot(2-i)}{2+i}=\frac{(1+2i)\cdot(2+i)^2}{(2-i)\cdot(2+i)}+$$
$$+\frac{(1-2i)\cdot(2-i)^2}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{(1+2i)\cdot(4+4i-1)+(1-2i)\cdot(4-4i-1)}{4+1}=$$
$$=\frac{(1+2i)\cdot(3+4i)+(1-2i)\cdot(3-4i)}{5}=\frac{3+4i+6i-8+3-4i-6i-8}{5}=\frac{-10}{5}=-2$$

Per tant:

$$\boxed{\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)=-2}$$

b) Primer aïllem la incògnita de l´equació:

$$x^6+1=0\to x^6=-1\to x=\sqrt[6]{-1}$$

Escrivim el complex z=-1 en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m=\sqrt{(-1)^2}=1$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{-1}+180^{\circ}=arctg0+180^{\circ}=180^{\circ}$$

Observem que sumem 180º donat que la part real del complex és negativa i la part imaginària és 0 (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès). De fet, donat que la part imaginària és 0 podríem sumar o restar 180º, l´angle és el mateix.

Tenim, per tant, que $z=1_{180^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels sisenes, hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[6]{z}=\sqrt[6]{1_{180^o}}=1_{\frac{180^o+360^o k}{6}}=2_{30^o+60^o k}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4, 5

Els arguments de les arrels són:

- Si k=0, tenim que $\beta_0=30^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1=30^o+60^o=90^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2=30^o+120^o=150^o$
- Si k=3, tenim que $\beta_3=30^o+180^o=210^o$
- Si k=4, tenim que $\beta_4=30^o+240^o=270^o$
- Si k=5, tenim que $\beta_5=30^o+300^o=330^o$

Per tant, les sis arrels de l´equació $x^6+1=0$ són:

$$1_{30^o}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=0{,}866+0{,}5i$$

$$1_{90^o}=i$$

$$1_{150^o}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=-0{,}866+0{,}5i$$

$$1_{210^o}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=-0{,}866-0{,}5i$$

$$1_{270^o}=-i$$

$$1_{330^o}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=0{,}866-0{,}5i$$

2.

Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 3 de R^5 definits de la següent forma:

A={(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) | a_1=a_4, a_5=0}

B={(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) | b_1=b_3, b_4=0}

I sigui v=(0,0,-2,0,0)

a) Comprova que W={(1, 0, 0, 1, 0,), (0, 2, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0)} és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base anterior.

b) Troba una base de B. Pertany v a B? En cas afirmatiu calcula'n es coordenades en la base que has trobat. Generen A i B el mateix subespai vectorial de R^5? Justifica la teva resposta.

Solució

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 3, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.

Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions a1=a4, a5=0 per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Així doncs W és una base d'A.

Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0 \\ z=-2 \\ x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$ que té solució x=2, y=0, z=-2.

Per tant v pertany a A i les seves coordenades en la base anterior són (2,0,-2).

b) Podem proposar com a base de B:

T={(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)}. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base:

Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que es compleixen les condicions b1=b3, b4=0 per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

Així doncs T és una base de B.

Podem veure directament que v no pertany a B ja que no compleix b1=b3

A i B no generen el mateix subespai vectorial de R5 ja que hi ha vectors (com per exemple el v), que pertanyen a l'un i no a l'altre.

3.

Considereu els següents plans de R^3

$$\pi_1: 2x + (m-2)y + z = m-2,$$

$$\pi_2: (m+2)x + 10y + 4z = 11$$

$$\pi_3: x + y + z = 2,$$

on *m* és un paràmetre real ($m \in R$)

a) Estudieu, segons els valors de *m*, la posició relativa dels tres plans.
b) Calculeu, per a aquells valors de *m* que tingui sentit, els punts, rectes o plans intersecció dels tres plans π_1, π_2, π_3.

Resolució:

a)

Per a estudiar la posició relativa plantegem la matriu 3x4 corresponent al sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites format pels tres plans, per tal d'estudiar si té o no solució i denotem per A i A' la matriu de coeficients i la matriu ampliada, respectivament, i reordenem les files per dificultat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & m-2 & 1 & m-2 \\ m+2 & 10 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, ja tenim que rang(A) ≥ 2. Per tant el rang(A) només valdrà 3 quan el determinant de la matriu A sigui diferent de 0.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \\ m+2 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 4(m-2) + 20 + m + 2 - (m-2)(m+2) - 10 - 8 = -m^2 + 5m = -m(m-5)$, que només s'anul.la quan $m = 0$ o $m = 5$.

Per tant:

- Cas I: Si $m \neq 0{,}5 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ aleshores el sistema és SCD i per tant els tres plans s'intersecten en un punt.

- Cas II: Si $m = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ i anem a calcular el rang(A').

En substituir el valor de *m*, el rang(A') només depèn del determinant obtingut a partir d'orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ amb la tercera fila i el terme independent.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 16 - 4 - 4 + 8 - 22 = 5 \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 > 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és incompatible, és a dir que els tres plans no tenen cap punt en comú.

- Cas III: Si $m = 5 \Rightarrow rang(A) = 2$ i anem a calcular el rang(A').

Com abans, en substituir el valor de *m*, el rang(A') només depèn del determinant obtingut a partir d'orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ amb la tercera fila i el terme independent.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 16 + 21 - 14 - 12 - 22 = 0 \Rightarrow rang(A') = 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir que els tres plans s'intersecten en una recta.

En resum:

- Si $m \neq 0,5$ els tres plans es tallen en un punt
- Si $m = 0$ els tres plans no tenen cap punt en comú
- Si $m = 5$ els tres plans s'intersecten en una recta

b)

Pel que s'ha vist a l'apartat anterior, es tracta de trobar el punt intersecció en el cas $m \neq 0,5$ i la recta intersecció en el cas $m = 5$.

- Cas $m \neq 0,5$

El corresponent sistema és SCD i el resoldrem pel mètode de Cramer, en funció dels valors del paràmetre *m*.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m-2 & m-2 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{8(m-2)+10(m-2)+11-11(m-2)-20-4(m-2)}{-m(m-5)} = \frac{3m-15}{-m(m-5)} = \frac{3(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{-3}{m},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \\ m+2 & 11 & 4 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{4(m-2)+22+2(m+2)-(m+2)(m-2)-11-16}{-m(m-5)} = \frac{-m^2+6m-5}{-m(m-5)} = \frac{-(m-1)(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{m-1}{m},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m-2 & m-2 \\ m+2 & 10 & 11 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{11(m-2)+40+(m+2)(m-2)-2(m+2)(m-2)-10(m-2)-22}{-m(m-5)} = \frac{-m^2+m+20}{-m(m-5)} = \frac{-(m+4)(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{m+4}{m}.$$

Per tant el punt intersecció és $\left(\frac{-3}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m+4}{m}\right)$, per als diferents valors de $m \neq 0,5$.

- Cas $m = 5$

Com hem vist a l'apartat anterior, en aquest cas els tres plans s'intersecten en una recta que és la formada per la intersecció de dos d'ells, per exemple el primer i el tercer. Així doncs la recta resulta de la resolució del sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x+y+z & = & 2 \\ 2x+3y+z & = & 3 \end{cases}$$

o equivalentment (restant a la segona equació dues vegades la primera)

$$\begin{cases} x+y+z & = & 2 \\ y-z & = & -1 \end{cases}.$$

Aillant de la segona tenim y = z-1 i substituint a la primera x = 2-y-z = 2-z+1-z = 3-2z.

Per tant els punts de la recta són de la forma $(3-2z, z-1, z) = (3,-1,0) + \langle(-2,1,1)\rangle$. És a dir, és la recta que passa pel punt $(3,-1,0)$ i que té vector director $(-2,1,1)$.

Resumint:

- Cas $m \neq 0,5$, els tres plans es tallen en el punt $\left(\frac{-3}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m+4}{m}\right)$
- Cas $m = 5$, els tres plans tenen per intersecció la recta $(3-2z, z-1, z) = (3,-1,0) + \langle(-2,1,1)\rangle$

4. Sigui $f : R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x,y,z) = (2x+2z, 5x+y+10z, -x-z).$$

a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.
b) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.
c) Estudieu si f diagonalitza.
d) Trobeu una base de R^3 amb el nombre màxim de vectors propis de f.

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)

b) El polinomi característic de f és

$$Q(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix}2-t & 0 & 2\\ 5 & 1-t & 10\\ -1 & 0 & -1-t\end{vmatrix}=(1-t)\begin{vmatrix}2-t & 2\\ -1 & -1-t\end{vmatrix}=$$

$$(1-t)[(2-t)(-1-t)+2]=(1-t)(t^2-t)=t(1-t)(t-1)=(0-t)(1-t)^2$$

Fixem-nos que el polinomi característic descomposa completament en tres factors reals de grau 1. Els valors propis són 0 (amb multiplicitat algebraica 1) i 1 (amb multiplicitat algebraica 2) *(veure apunts M5, Teorema de diagonalització.)*

c) Per veure si diagonalitza cal veure si hi ha 2 VEPS linealment independents de valor propi 1. Per a això és suficient calcular la dimensió de l'espai de vectors propis de valor propi 1:

$$\dim(Nuc(A-1\cdot I))=3-rang\,(A-1\cdot I\,)=$$

$$3-rang\begin{pmatrix}2-1 & 0 & 2\\ 5 & 1-1 & 10\\ -1 & 0 & -1-1\end{pmatrix}=3-rang\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 10\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}=3-1=2$$

Per tant, f diagonalitza (*veure apunts M5, Teorema de diagonalització.)*

d) Per trobar els vectors propis de f de valor propi 0 i 1 cal resoldre els sistemes d'equacions lineals: (A-0·I)X=0 i (A-1·I)X=0. O sigui:

$$(A-0I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 10\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$$

$$(A-1I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 10\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Una base de solucions del primer sistema és: (1,5,-1).

Una base de solucions del segon sistema és: (0,1,0), (2,0,-1).

Una base formada per vector propis de f és {(1,5,-1), (0,1,0),(2,0,-1)}.

Solució examen 3

1.

a) Realitza la següent operació amb nombres complexos, expressant el resultat en forma binòmica.

$$\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)$$

b) Calcula totes les arrels de l'equació següent: $x^6+1=0$ (proporciona els resultats en forma binòmica i polar)

Resolució:

a) Fem el producte dels complexos, recordant, tal com s´explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2=-1$:

$$\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)=\frac{(1+2i)\cdot(2+i)}{2-i}+\frac{(1-2i)\cdot(2-i)}{2+i}=\frac{(1+2i)\cdot(2+i)^2}{(2-i)\cdot(2+i)}+$$

$$+\frac{(1-2i)\cdot(2-i)^2}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{(1+2i)\cdot(4+4i-1)+(1-2i)\cdot(4-4i-1)}{4+1}=$$

$$=\frac{(1+2i)\cdot(3+4i)+(1-2i)\cdot(3-4i)}{5}=\frac{3+4i+6i-8+3-4i-6i-8}{5}=\frac{-10}{5}=-2$$

Per tant:

$$\boxed{\frac{1+2i}{2-i}\cdot(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}\cdot(2-i)=-2}$$

b) Primer aïllem la incògnita de l´equació:

$$x^6+1=0\rightarrow x^6=-1\rightarrow x=\sqrt[6]{-1}$$

Escrivim el complex z=-1 en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m=\sqrt{(-1)^2}=1$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{-1}+180^{\circ}=arctg0+180^{\circ}=180^{\circ}$$

Observem que sumem 180º donat que la part real del complex és negativa i la part imaginària és 0 (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès). De fet, donat que la part imaginària és 0 podríem sumar o restar 180º, l´angle és el mateix.

Tenim, per tant, que $z=1_{180^{\circ}}$

Com que ens demanen les arrels sisenes, hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{1_{180^\circ}} = 1_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{6}} = 1_{30^\circ+60^\circ k}$ per a k=0, 1, 2, 3, 4, 5

Els arguments de les arrels són:

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 30^\circ$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 30^\circ + 180^\circ = 210^\circ$
- Si k=4, tenim que $\beta_4 = 30^\circ + 240^\circ = 270^\circ$
- Si k=5, tenim que $\beta_5 = 30^\circ + 300^\circ = 330^\circ$

Per tant, les sis arrels de l´equació $x^6 + 1 = 0$ són:

$$1_{30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = 0{,}866 + 0{,}5i$$

$$1_{90^\circ} = i$$

$$1_{150^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = -0{,}866 + 0{,}5i$$

$$1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = -0{,}866 - 0{,}5i$$

$$1_{270^\circ} = -i$$

$$1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = 0{,}866 - 0{,}5i$$

2.

Siguin A i B dos subespais vectorials de dimensió 3 de R^5 definits de la següent forma:

$A=\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1=a_4, a_5=0\}$

$B=\{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid b_1=b_3, b_4=0\}$

I sigui v=(0,0,-2,0,0)

a) Comprova que W={(1, 0, 0, 1, 0,), (0, 2, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0)} és una base d'A. Pertany v a A? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base anterior.

b) Troba una base de B. Pertany v a B? En cas afirmatiu calcula'n les coordenades en la base que has trobat. Generen A i B el mateix subespai vectorial de R^5? Justifica la teva resposta.

Resolució

a) Com que sabem que la dimensió d'A és 3, només cal mirar que els vectors de W pertanyen a A i que són linealment independents.

Primer de tot comprovem que els vectors de W pertanyen a A comprovant que es compleixen les condicions a1=a4, a5=0 per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Així doncs W és una base d'A.

Per veure si v pertany a A mirem si té solució el següent sistema: (també podríem comprovar si compleix les condicions)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que ens dóna el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0 \\ z=-2 \\ x+z=0 \\ 0=0 \end{cases}$$ que té solució x=2, y=0, z=-2.

Per tant v pertany a A i les seves coordenades en la base anterior són (2,0,-2).

b) Podem proposar com a base de B:

T={(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)}. De forma anàloga a com hem fet a l'apartat anterior podem provar que és base:

Primer de tot comprovem que els vectors de T pertanyen a B comprovant que es compleixen les condicions b1=b3, b4=0 per a tots tres vectors, cosa que és certa.

Seguidament comprovem que són linealment independents:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Ja que podem trobar el menor 3x3 amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Així doncs T és una base de B.

Podem veure directament que v no pertany a B ja que no compleix b1=b3

A i B no generen el mateix subespai vectorial de R5 ja que hi ha vectors (com per exemple el v), que pertanyen a l'un i no a l'altre.

3.

Considereu els següents plans de R^3

$$\pi_1: 2x + (m-2)y + z = m-2,$$

$$\pi_2: (m+2)x + 10y + 4z = 11$$

$$\pi_3: x + y + z = 2,$$

on *m* és un paràmetre real ($m \in R$)

a) Estudieu, segons els valors de *m*, la posició relativa dels tres plans.
b) Calculeu, per a aquells valors de *m* que tingui sentit, els punts, rectes o plans intersecció dels tres plans π_1, π_2, π_3.

Resolució:

a)

Per a estudiar la posició relativa plantegem la matriu 3x4 corresponent al sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites format pels tres plans, per tal d'estudiar si té o no solució i denotem per A i A' la matriu de coeficients i la matriu ampliada, respectivament, i reordenem les files per dificultat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & m-2 & 1 & m-2 \\ m+2 & 10 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, ja tenim que rang(A) ≥ 2. Per tant el rang(A) només valdrà 3 quan el determinant de la matriu A sigui diferent de 0.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \\ m+2 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 4(m-2) + 20 + m + 2 - (m-2)(m+2) - 10 - 8 = -m^2 + 5m = -m(m-5)$, que només s'anul.la quan $m = 0$ o $m = 5$.

Per tant:

- Cas I: Si $m \neq 0{,}5 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ aleshores el sistema és SCD i per tant els tres plans s'intersecten en un punt.

- Cas II: Si $m = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ i anem a calcular el rang(A').

En substituir el valor de *m*, el rang(A') només depèn del determinant obtingut a partir d'orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ amb la tercera fila i el terme independent.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 16 - 4 - 4 + 8 - 22 = 5 \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 > 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és incompatible, és a dir que els tres plans no tenen cap punt en comú.

- Cas III: Si $m = 5 \Rightarrow rang(A) = 2$ i anem a calcular el rang(A').

Com abans, en substituir el valor de *m*, el rang(A') només depèn del determinant obtingut a partir d'orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ amb la tercera fila i el terme independent.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 16 + 21 - 14 - 12 - 22 = 0 \Rightarrow rang(A') = 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir que els tres plans s'intersecten en una recta.

En resum:

- Si $m \neq 0,5$ els tres plans es tallen en un punt
- Si $m = 0$ els tres plans no tenen cap punt en comú
- Si $m = 5$ els tres plans s'intersecten en una recta

b)

Pel que s'ha vist a l'apartat anterior, es tracta de trobar el punt intersecció en el cas $m \neq 0,5$ i la recta intersecció en el cas $m = 5$.

- Cas $m \neq 0,5$

El corresponent sistema és SCD i el resoldrem pel mètode de Cramer, en funció dels valors del paràmetre *m.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m-2 & m-2 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{8(m-2)+10(m-2)+11-11(m-2)-20-4(m-2)}{-m(m-5)} = \frac{3m-15}{-m(m-5)} = \frac{3(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{-3}{m},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m-2 & 1 \\ m+2 & 11 & 4 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{4(m-2)+22+2(m+2)-(m+2)(m-2)-11-16}{-m(m-5)} = \frac{-m^2+6m-5}{-m(m-5)} = \frac{-(m-1)(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{m-1}{m},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m-2 & m-2 \\ m+2 & 10 & 11 \end{vmatrix}}{-m(m-5)} = \frac{11(m-2)+40+(m+2)(m-2)-2(m+2)(m-2)-10(m-2)-22}{-m(m-5)} = \frac{-m^2+m+20}{-m(m-5)} = \frac{-(m+4)(m-5)}{-m(m-5)} = \frac{m+4}{m}.$$

Per tant el punt intersecció és $\left(\frac{-3}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m+4}{m}\right)$, per als diferents valors de $m \neq 0,5$.

- Cas $m = 5$

Com hem vist a l'apartat anterior, en aquest cas els tres plans s'intersecten en una recta que és la formada per la intersecció de dos d'ells, per exemple el primer i el tercer. Així doncs la recta resulta de la resolució del sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+3y+z &= 3 \end{cases}$$

o equivalentment (restant a la segona equació dues vegades la primera)

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ y-z &= -1 \end{cases}.$$

Aïllant de la segona tenim y = z-1 i substituint a la primera x = 2-y-z = 2-z+1-z = 3-2z.

Per tant els punts de la recta són de la forma $(3-2z, z-1, z) = (3,-1,0) + \langle(-2,1,1)\rangle$. És a dir, és la recta que passa pel punt $(3,-1,0)$ i que té vector director $(-2,1,1)$.

Resumint:

- Cas $m \neq 0,5$, els tres plans es tallen en el punt $\left(\frac{-3}{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{m+4}{m}\right)$
- Cas $m = 5$, els tres plans tenen per intersecció la recta $(3-2z, z-1, z) = (3,-1,0) + \langle(-2,1,1)\rangle$

4. Sigui $f: R^3 \to R^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x,y,z) = (2x+2z, 5x+y+10z, -x-z).$$

a) Trobeu la matriu A de f en les bases canòniques.

b) Calculeu el polinomi característic de f i els valors propis de f.

Resolució:

a) La matriu de f en les bases canòniques és: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(Veure apunts M5, Matriu associada a una aplicació lineal.)

b) El polinomi característic de f és

$$Q(t) = \det(A-tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 2 \\ 5 & 1-t & 10 \\ -1 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ -1 & -1-t \end{vmatrix} =$$

$$(1-t)[(2-t)(-1-t)+2] = (1-t)(t^2-t) = t(1-t)(t-1) = (0-t)(1-t)^2$$

Fixem-nos que el polinomi característic descomposa completament en tres factors reals de grau 1. Els valors propis són 0 (amb multiplicitat algebraica 1) i 1 (amb multiplicitat algebraica 2) *(veure apunts M5, Teorema de diagonalització.)*