

solucion20-06.pdf



limagod



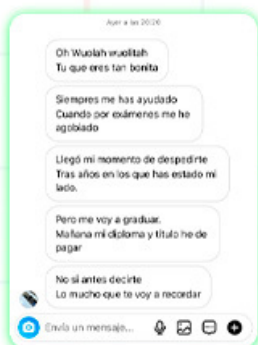
Álgebra



1º Grado en Ingeniería Informática



Facultad de Informática, Multimedia y Telecomunicación
Universitat Oberta de Catalunya



**Que no te escriban poemas de amor
cuando terminen la carrera**



*(a nosotros por
suerte nos pasa)*

WUOLAH

Que no te escriban poemas de amor
cuando terminen la carrera ▶▶▶▶▶▶



WUOLAH

(a nosotros por suerte nos pasa)

Álgebra/ Matemáticas I

SOLUCIÓN EXAMEN 20/06/2012

Ejercicio 1.

Realiza los cálculos siguientes:

a) Simplifica la expresión siguiente: $\frac{i^3}{(1+i)^2}$

b) Calcula las raíces sextas del complejo siguiente: $z = 4 + 4\sqrt{3}i$ (proporciona los ángulos en grados y los resultados en forma polar)

Solución:

a) Operamos con la expresión, recordando que $i^2 = -1$:

$$\frac{i^3}{(1+i)^2} = \frac{i^2 \cdot i}{(1+2i+i^2)} = \frac{(-1) \cdot i}{(1+2i-1)} = \frac{-i}{2i} = -\frac{1}{2}$$

b) Escribimos el complejo z en forma polar:

$$m = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$$

$$\alpha = \arctg \frac{4\sqrt{3}}{4} = \arctg \sqrt{3} = 60^\circ$$

Tenemos, por tanto, que $z = 4 + 4\sqrt{3}i = 8_{60^\circ}$

Como nos piden las raíces sextas, debemos hacer:

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{8_{60}} = \left(\sqrt[6]{8}\right)_{\frac{60+360k}{6}} = \left(\sqrt[6]{2^3}\right)_{\frac{60+360k}{6}} \quad \text{para } k=0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \frac{60+360k}{6}$ para $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k=0$, tenemos que $\beta_0 = 10^\circ$
- Si $k=1$, tenemos que $\beta_1 = 10^\circ + 60^\circ = 70^\circ$
- Si $k=2$, tenemos que $\beta_2 = 10^\circ + 120^\circ = 130^\circ$
- Si $k=3$, tenemos que $\beta_3 = 10^\circ + 180^\circ = 190^\circ$
- Si $k=4$, tenemos que $\beta_4 = 10^\circ + 240^\circ = 250^\circ$

WUOLAH

No si antes decirte
Lo mucho que te voy a recordar

Pero me voy a graduar.
Mañana mi diploma y título he de pagar

Llegó mi momento de despedirte
Tras años en los que has estado mi lado.

Siempre me has ayudado
Cuando por exámenes me he agobiado

Oh Wuolah wuoliah
Tu que eres tan bonita

Álgebra/ Matemáticas I

- Si $k=5$, tenemos que $\beta_3 = 10^\circ + 300^\circ = 310^\circ$

Por tanto, las seis raíces sextas del complejo $z = 4 + 4\sqrt{3}i$ son:

$$\sqrt{2}_{10^\circ}, \sqrt{2}_{70^\circ}, \sqrt{2}_{130^\circ}, \sqrt{2}_{190^\circ}, \sqrt{2}_{250^\circ}, \sqrt{2}_{310^\circ}$$

Ejercicio 2

Sean A y B dos subespacios vectoriales de dimensión 3 de \mathbb{R}^6 definidos de la siguiente forma:

$$A = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \mid a_1 = a_4, a_2 = 2 \cdot a_5, a_6 = 0\}$$

$$B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) \mid b_1 = b_4, 2 \cdot b_2 = b_6, b_5 = 0\}$$

Y sea $v = (0, 0, 3, 0, 0, 0)$

a) Comprueba que $W = \{(1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 0, 0)\}$ es una base de A. Pertenece v a A? En caso afirmativo calcula sus coordenadas en la base anterior.

b) Encuentra una base de B. Pertenece v a B? En caso afirmativo calcula sus coordenadas en la base que has encontrado.

c) Generan A y B el mismo subespacio vectorial de \mathbb{R}^6 ? Justifica tu respuesta.

Solución

a) Como sabemos que la dimensión de A es 3, solo tenemos que mirar que los vectores de W pertenezcan a A y que sean linealmente independientes.

Primero comprobamos que los vectores de W pertenezcan a A comprobando que se cumplan las condiciones $a_1 = a_4$, $a_2 = 2 \cdot a_5$, $a_6 = 0$ para los tres vectores, cosa que es cierta.

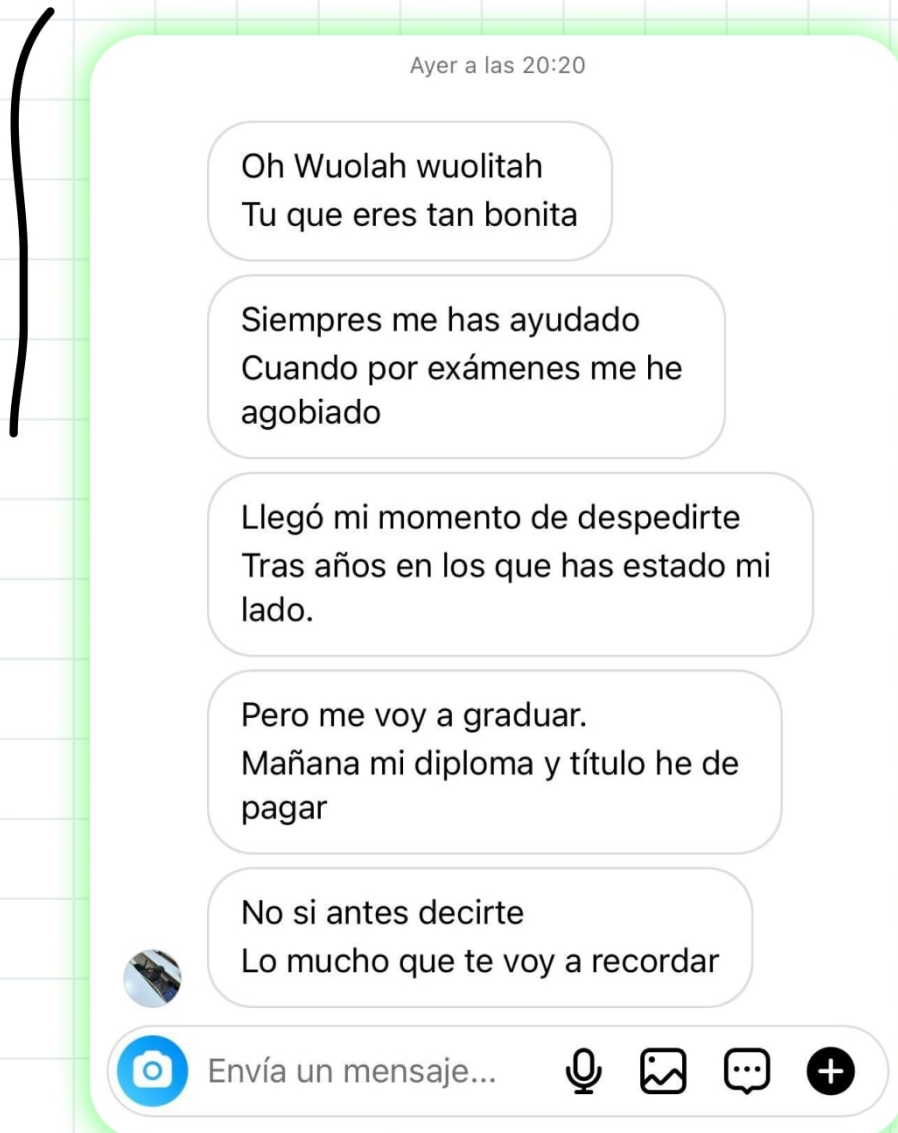
Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ya que podemos encontrar el menor 3x3 con determinante diferente de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

**Que no te escriban poemas de amor
cuando terminen la carrera ▶▶▶▶▶▶▶▶**
(a nosotros por suerte nos pasa) 😊

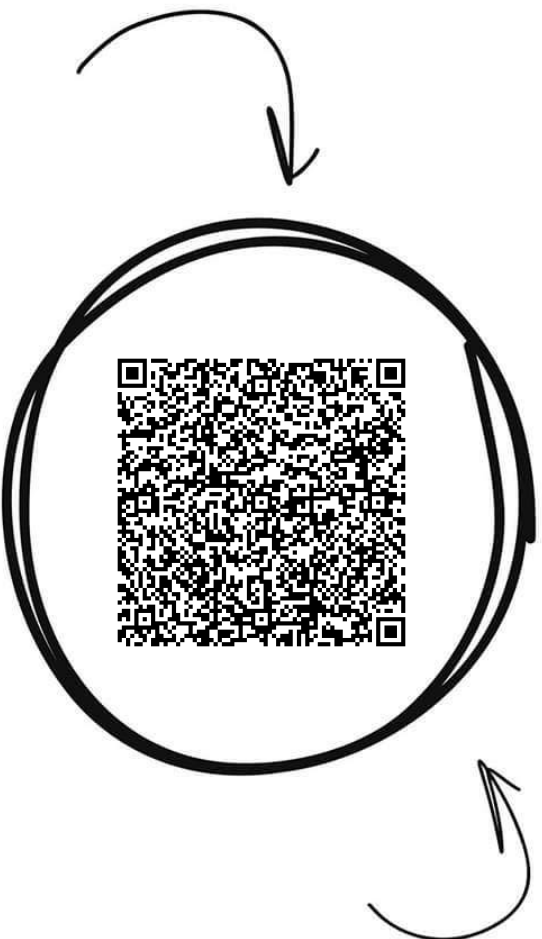


WUOLAH

Álgebra



Comparte estos flyers en tu clase y consigue más dinero y recompensas



Banco de apuntes de la UOC

- 1** Imprime esta hoja
- 2** Recorta por la mitad
- 3** Coloca en un lugar visible para que tus compis puedan escanar y acceder a apuntes

- 4** Llévate dinero por cada descarga de los documentos descargados a través de tu QR

MUOLAH



Álgebra/ Matemáticas I

Así pues W es una base de A .

Para ver si v pertenece a A miramos si tiene solución el siguiente sistema: (también podríamos comprobar si cumple las condiciones)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que nos da el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0 \\ z=3 \\ x+z=0 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases} \text{ que tiene solución } x=-3, y=0, z=3.$$

Por tanto v pertenece a A y sus coordenadas en la base anterior son $(-3,0,3)$.

b) Podemos proponer como base de B :

$T=\{(1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 0, 0, 0)\}$. De forma análoga a como hemos hecho en el apartado anterior, podemos probar que es base:

Primero comprobamos que los vectores de T pertenecen a B comprobando que se cumplen las condiciones $a_1=a_4$, $2 \cdot a_2=a_6$, $a_5=0$ para todos tres vectores, cosa que es cierta.

Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ya que podemos encontrar el menor 3×3 con determinante diferente de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Así pues T es una base de B .

Que no te escriban poemas de amor
cuando terminen la carrera ▶▶▶▶▶▶



WUOLAH

(a nosotros por suerte nos pasa)

Álgebra/ Matemáticas I

Per ver si v pertenece a B miramos si tiene solución el siguiente sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=3 \\ x=0 \\ 0=0 \\ 2y=0 \end{cases} \text{ que tiene solución } x=0, y=0, z=3.$$

Por tanto v pertenece a B y sus coordenadas en la base anterior son (0,0,3).

b) Para ver si A y B generan el mismo subespacio vectorial de \mathbb{R}^6 , como que los dos tienen dimensión 3, hace falta ver si uno está contenido en el otro. Esto lo podemos comprobar mirando la condición para los elementos de la base.

Si empezamos por (0, 2, 0, 0, 1, 0) que es de A, ya vemos directamente que no pertenece a B ya que no cumple la condición $a_5=0$.

Por tanto A y B no generan el mismo subespacio vectorial de \mathbb{R}^6 .

Ejercicio 3

Discutid y resolved, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 3z = 0 \\ 3x - 3y + az = a+1 \end{cases}$$

Solución:

La matriz del sistema es:

$$A|A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & a & a+1 \end{array} \right)$$

WUOLAH

Álgebra/ Matemáticas I

Estudiamos el rango de la matriz A . Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, entonces $\text{rang } A \geq 2$. Para ver cuando el rango puede ser 3, calculamos el determinante de A y obtenemos $|A| = 3a - 15$ que sólo se anula para el valor $a = 5$.

- Caso I. $a \neq 5 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3 = \text{rang } A' \Rightarrow \text{SCD}$

! si resolvemos el sistema por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ a+1 & -3 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3a + 3a + 3 - a - 1 - 27}{3a - 15} = \frac{5a - 25}{3a - 15}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & a+1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a+1 - 27 + 6a + 6 - 3a}{3a - 15} = \frac{4a - 20}{3a - 15}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & a+1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a + 2 - 9 - 9 + a + 1}{3a - 15} = \frac{3a - 15}{3a - 15} = 1$$

! por lo tanto la solución única es $\left(\frac{5a-25}{3a-15}, \frac{4a-20}{3a-15}, 1 \right)$ para cada valor que demos al parámetro $a \neq 5$.

- Caso II. $a = 5 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2$

Para calcular el rango de la matriz ampliada orlamos el menor distinto de cero que tenemos en la matriz A y miramos si se anula el determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang } A' = 2 = \text{rang } A \Rightarrow \text{SCI con } 3-2=1 \text{ grado de libertad (z)}$$

Para la resolución, una vez anulada la 3ª ecuación y pasando la incògnita z al término independiente, obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente

Álgebra/ Matemáticas I

$$\begin{cases} 2x - y = 3 - z \\ x + y = 3z \end{cases} \text{ que tiene solución } x = \frac{3+2z}{3}, y = \frac{7z-3}{3}, z = z.$$

Ejercicio 4

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (2x + y, y - z)$$

- a) Encontrad la matriz de f en las bases canónicas.
- b) Encontrad una base del Núcleo de f . Es f inyectiva?
- c) Encontrad una base de la Imagen de f . Es f exhaustiva?
- d) Encontrad la antiimagen del vector $(1,1)$.

Solución:

- a) La matriz de f en las bases canónicas es :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- b) Una base del Núcleo de f es: $(1, -2, -2)$. La función no es inyectiva
- c) Una base de la Imagen de f es: $(2,0)$, $(1,1)$. La función es exhaustiva
- d) El conjunto de vectores que forman la antiimagen del vector $(1,1)$ son de la forma $(x,y,z) = (0,1,0) + \lambda(-1/2, 1, 1)$.



WUOLAH

No si antes decirte
Lo mucho que te voy a recordar

Pero me voy a graduar.
Mañana mi diploma y título he de pagar

Llegó mi momento de despedirte
Tras años en los que has estado mi
lado.

Siempre me has ayudado
Cuando por exámenes me he
agobiado

Oh Wuolah wuoliah
Tu que eres tan bonita