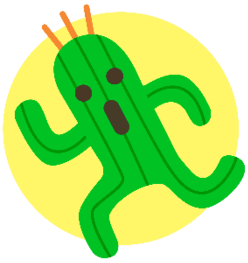
Análisis matemático sin espinas

(2) Límites & Continuidad



v0.2 24_25 S1

Aprende sin espinas con @carlos_cactus

Sócrates se equivocaba. El conocimiento no es lo único que crece al compartirse: La alegría también.

A la inspiración del bucle_infinito,
al Cibergrupo y al tHash_A, por su amistad,
y sobre todo, a quienes dicen "pero quiero"
cuando sienten "no puedo".

¡Un saludo sin espinas!
:D

Y si quieres saber más:
¡Encuéntrame en Telegram como @carlos_cactus o habla con Espinito, el bot Sin Espinas, en @GestionSinEsinasBot.

Únete a la comunidad de Telegram Sin Espinas y no te pierdas nada!

Deja de preocuparte por aprobar y ¡Aprende sin Espinas!

Contenido

1. LÍMITES

1.1 NOTACIÓN E INTUICIÓN

El cálculo de límites permite estudiar el comportamiento de una función en el entorno de un punto de su dominio o bien cuando el valor del dominio evaluado (x) tiende al infinito.

Se denota por:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Se lee "límite de la función f(x) cuando x tiende al valor a".

O bien:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

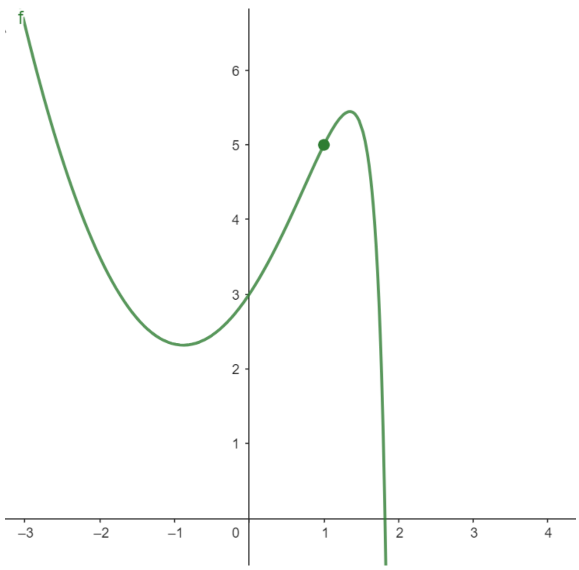
Se lee "límite de la función f(x) cuando x tiende a menos infinito".

El límite expresa la tendencia de la IMAGEN de la función en el entorno del punto de abscisa en que se ha calculado. Es, por tanto, relativo al valor (o tendencia del valor) x.

Fundamentalmente, se distinguen dos tipos de límites:
- límite de una función en un punto
- límite de una función en el infinito

La tabla de valores de la función $f(x) = \frac{x^3-6}{x-2}$ y su gráfica permiten ver cuál es la tendencia de la imagen de la función en el entorno de x = 1, que es y = 5.

x	f(x)
0.99	4.9799...
0.9999	4.999979...
0.999	4.99799...
1.00	5
1.00001	5.000019...
1.0001	5.000199...
1.001	5.001998...
1.001	5.001998...
1.01	5.01989

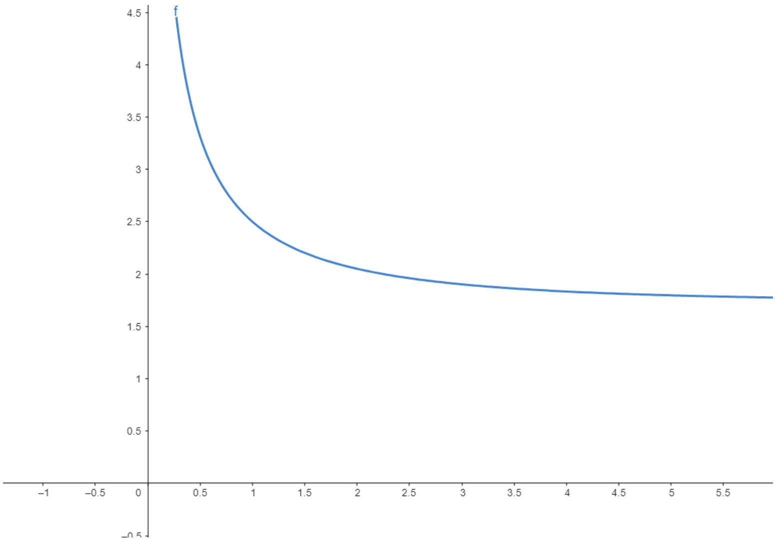


A partir de la idea de "entorno local" de un punto de abscisa, se definirán los denominados "límites laterales" a ese punto.

EJEMPLO

La tabla de valores de la función $f(x) = \frac{2x+3}{x+\sqrt{x}}$ es, para valores grandes de x:

$\mathbf{x}$	$\mathbf{f(x)}$
1000	1.941601179 …
2000	1.957723961 …
3000	1.965121946 …
4000	1.969607766 …
5000	1.972701783 …
6000	1.975002823 …
7000	1.976801277 …
8000	1.978257409 …
9000	1.979467909 …
10000	1.980495049 …



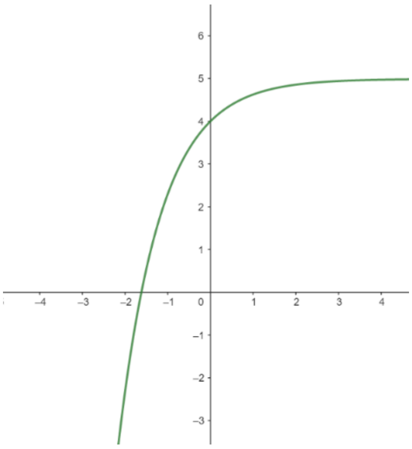
Se observa una tendencia ASINTÓTICA (e medida que x tiende al infinito) hacia un valor que no llega a alcanzarse ni siquiera para magnitudes tremendamente grandes de x, en este caso, 2.

1.2 LÍMITES LATERALES

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0} -e^{-x} + 5 = 4$$

Se observa:



La función adopta valores cercanos a 4 tanto por la izquierda de x = 0 como por la derecha y adopta el valor 4 en x = 0. O sea:

$$\lim_{x \to 0-} -e^{-x} + 5 = 4^{-}$$

$$\lim_{x \to 0+} -e^{-x} + 5 = 4^{+}$$

$$f(0) = 4$$

Se distingue el límite de una función f(x) cuando x tiende a un valor a por la izquierda:

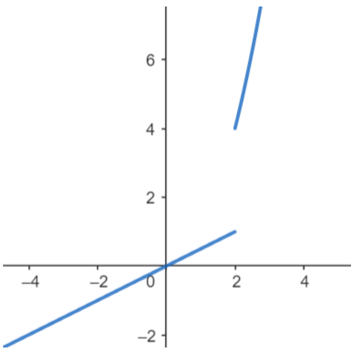
$$\lim_{x \to a^{-}} f(x)$$

Y el límite de una función f(x) cuando x tiende a un valor a por la izquierda:

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x)$$

Esta noción da lugar al concepto de LÍMITES LATERALES.

EJEMPLO



Se considera la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si\ x \leq 2 \\ x^2 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Los límites laterales son:

$$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2^{+}} f(x) = 4$$

La discrepancia de los límites laterales en un punto es suficiente para que el límite de la función en ese punto no exista, o sea, no esté definido:

$$\lim_{x \to a^{-}} f(x) \neq \lim_{x \to a^{+}} f(x) \to \nexists \lim_{x \to a} f(x)$$

Por tanto, para que exista el límite de una función en un punto, es NECESARIO que sus límites laterales COINCIDAN.

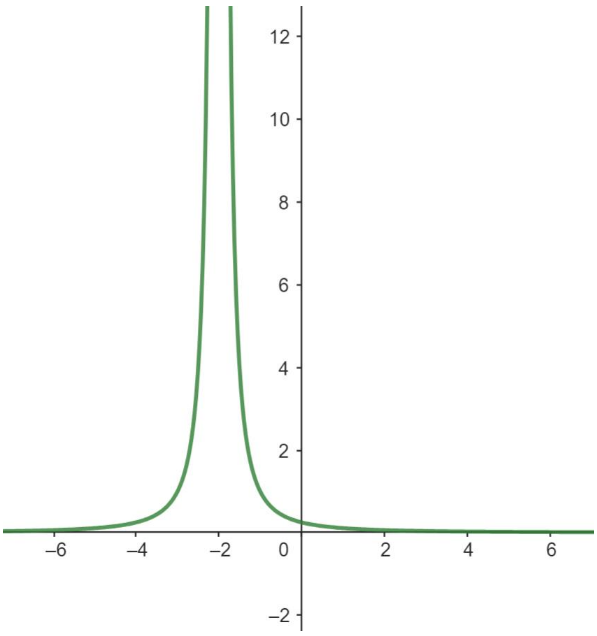
1.3 LÍMITE INFINITO EN UN PUNTO

El límite de una función en un punto puede ser un número real o bien infinito.

Si en torno a un punto de abscisa x, que sea punto de acumulación de f(x), considerado en un intervalo $(x-a, x+a)$ se observa que, para cualquier valor y=k existen imágenes de la función mayores que k, se dice que el límite de f(x) en x = a es infinito:

$$\forall k > 0, a > 0 \mid x \in (x-a, x+a), \exists f(x) > k \rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Es decir:



$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$$

Y lo mismo ocurre para valores inferiores a k con límites hacia -∞ en x = a.

1.1 LÍMITE EN EL INFINITO

Dada una función, se puede calcular su límite en un punto x = a o bien su límite L cuando x tiende a infinito.

A su vez, el límite en el infinito puede ser un número real L o bien infinito:

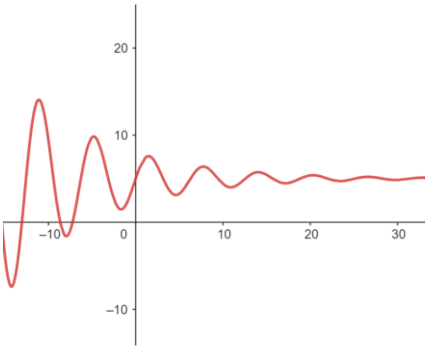
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$$

Una función f(x) tiene límite un límite real $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $+\infty$ si se cumple lo siguiente:

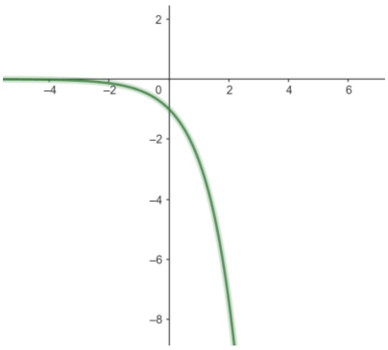
$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \lambda \ \text{ tal que si } x > \lambda \text{ entonces } f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Donde ε es un escalar que define un intervalo en torno del cual se acumula la imagen de f a medida que x tiende a infinito.

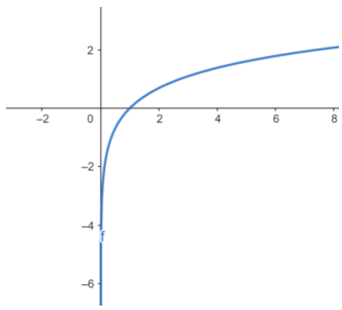
EJEMPLO



$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{10}} \cdot 3 \cdot \sin(x) + 5 = 5$$



$$\lim_{x \to +\infty} -e^{x} = -\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} \ln|x| = +\infty$$

En cambio, existen funciones ACOTADAS, en tanto que su rango se encuentra definido en un intervalo de números reales. En este curso, se ven las funciones acotadas $\sin(x)$ y $\cos(x)$ que son trigonométricas y periódicas, cuya imagen oscila en el intervalo [-1,1].

$$\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin(x)$$

$$\nexists \lim_{x \to +\infty} \cos(x)$$

Esto será relevante para calcular el límite de tipo $0 \cdot acotada$

1.2 OPERACIONES CON INFINITOS ∞ Y 0

⟶ Se considera escalar $k \in \mathbb{R}$

Opuesto infinito:
$$-(+\infty) = -\infty$$
$$-(-\infty) = +\infty$$

Suma y resta con escalar:
$$+\infty \pm k = +\infty$$
$$-\infty \pm k = -\infty$$

Suma y resta de infinitos:
$$+\infty + \infty = +\infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$
$$+\infty - \infty \to IND$$

Producto entre infinitos:
$$\infty \cdot \infty = \infty$$
$$-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$$
$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

Producto por escalar:
$$+\infty \cdot k = \begin{cases} +\infty & si\ k > 0 \\ -\infty & si\ k < 0 \end{cases}$$
$$-\infty \cdot k = \begin{cases} +\infty & si\ k < 0 \\ -\infty & si\ k > 0 \end{cases}$$
$$0 \cdot (\pm\infty) \to IND$$

Cocientes:

1. $\frac{\infty}{\infty} \to IND$
2. $\frac{0}{0} \to IND$
3. $\frac{0}{\pm\infty} = 0$
4. $\frac{0}{k} = 0, k \neq 0$
5. $\frac{+\infty}{k} = \begin{cases} +\infty & si\ k > 0 \\ -\infty & si\ k < 0 \end{cases}$
6. $\frac{-\infty}{k} = \begin{cases} -\infty & si\ k > 0 \\ +\infty & si\ k < 0 \end{cases}$
7. $\frac{k}{0} = \begin{cases} +\infty & si\ k > 0 \\ -\infty & si\ k < 0 \end{cases}$
8. $\frac{k}{+\infty} = 0^+$
9. $\frac{k}{-\infty} = 0^-$
10. $\frac{+\infty}{0} = +\infty$
11. $\frac{-\infty}{0} = -\infty$

Potencia:

1. $1^{\infty} \to IND$
2. $0^{0} \to IND$
3. $\infty^{0} \to IND$
4. $\infty^{k} = \begin{cases} \infty & si\ k > 0 \\ 0 & si\ k < 0 \end{cases}$
5. $0^{k} = \begin{cases} 0 & si\ k > 0 \\ \infty & si\ k < 0 \end{cases}$

$$ya\ que\ 0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0} = \infty$$

6. $k^{0} = 1$
7. $0^{\infty} = 0$
8. $k^{+\infty} = \infty\ si\ |k| > 1$
9. $k^{+\infty} = 0\ si\ 0 < |k| < 1$
10. $k^{-\infty} = 0\ si\ |k| > 1$
11. $k^{-\infty} = \infty\ si\ 0 < |k| < 1$
12. $\infty^{\infty} = \infty$
13. $\infty^{-\infty} = 0$

1.3 ÁLGEBRA DE LÍMITES

Se cumple, para los límites en un punto:

$$\lim_{x \to a} k = k$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Para funciones racionales:

$$Si\ \lim_{x \to a} g(x) \neq 0 \to \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

$$Si\ \lim_{x \to a} g(x) = 0\ y \lim_{x \to a} g(x) = 0\ \to \frac{0}{0} IND \to \exists \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\ si$$

$$si\ \lim_{x \to a} f(x) = L \to \lim_{x \to a} (|f(x)|) = |L|$$

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Para los límites en el infinito, se cumplen las mismas propiedades:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)\pm\lim_{x\to\pm\infty}g(x)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(k\cdot f(x))=k\cdot\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to\pm\infty}g(x)$$

$$Si\ \lim_{x\to\pm\infty}g(x)\neq 0\to\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to\pm\infty}f(x)}{\lim_{x\to\pm\infty}g(x)}$$

$$si\ \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=L\to\lim_{x\to\pm\infty}(|f(x)|)=|L|$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(-x)$$

1.4 CÁLCULO DE LÍMITES

a) Límite de funciones polinómica

Si una función f(x) es polinómica, para calcular su límite cuando x tiende a un valor a:

$$si\ f(x)\ es\ polinómica\to\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

Basta con evaluar su imagen f(a) en ese punto.
EJEMPLO

$$f(x)=\frac{x^3}{2}-2x$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=\frac{(-1)^3}{2}-2\cdot(-1)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

Límite de funciones racionales

El límite de un cociente de polinomios es la evaluación del cociente siempre y cuando el denominador no sea nulo (en cuyo caso, se encuentra una indeterminación):

$$si\ q(a)\neq 0\to\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}$$

EJEMPLO

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-10x+4}{x^2+3x-6}=\frac{2(2)^2-10(2)+4}{(2)^2+3(2)-6}=\frac{-8}{4}=-2$$

b) Límite de funciones radicales

Si una función se puede escribir como la raíz de un polinomio, su límite cuando x tiende a un valor a resulta de evaluar la raíz en ese valor a.
Solo hay una restricción: en el caso de las raíces de índice par, el radicando (el argumento dentro de la raíz) debe ser necesariamente positivo cuando se evalúa en x = a. De lo contrario, el límite no es un número real. O sea:

$$si\ \sqrt[n]{p(a)} \notin \mathbb{C} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{p(x)} = \sqrt[n]{p(a)}$$

EJEMPLO

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - x}{2}$$

Se desea conocer $\underset{x \to 3}{lim} f(x)$
Se evalúa si para x = 3 se cumple $\sqrt{x+1} \notin \mathbb{C}$:

$$\sqrt{4+1} \notin \mathbb{C}$$

Se evalúa $f(3)$ para conocer el límite:

$$\underset{x \to 3}{lim} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - x}{2} = \frac{\sqrt{4} - 3}{2} = -\frac{1}{2}$$

1.5 INDETERMINACIONES

Se conoce como indeterminación una expresión cuyo valor no es computable de forma unívoca, para las cuales no hay un resultado definido o hay múltiples resultados igual de compatibles.

Devuelven MATH ERROR en la calculadora.

Se denotan usando → en lugar de = ya que realmente no corresponden con un resultado, sino con una idea de indefinición.

En este curso, son relevantes los siguientes 7 tipos de indeterminaciones:

$\frac{\infty}{\infty} \rightarrow IND$	$\infty \cdot 0 \rightarrow IND$	$\infty - \infty \rightarrow IND$	$\frac{0}{0} \rightarrow IND$	$0^0 \rightarrow IND$	$1^\infty \rightarrow IND$	$\infty^0 \rightarrow IND$

Diferentes escenarios de partida pueden conducir a indeterminaciones del mismo tipo.
Muchas de las estrategias para gestionar las indeterminaciones se basan en aplicar transformaciones sobre las expresiones que dan lugar a cierto tipo de indeterminación Hasta convertirlas en otras expresiones que den lugar a otro tipo de indeterminación más asequible de gestionar.

a) Indeterminación ∞ / ∞

Aparece en 2 casos:

- **CASO 1:** Límite de cocientes de polinomios.
  EJEMPLO

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 + 6x^2}{5x^3 - x^2} = \frac{\infty}{\infty} \to IND$$

  Se resuelve mediante:

  - Órdenes de infinitud

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 + 6x^2}{5x^3 - x^2} = \infty \; ya\ que\ el\ numerador\ tiene\ mayor\ grado$$

  - Divdir cada término de la expresión racional entre la variable de mayor grado:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 + 6x^2}{5x^3 - x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4} + \frac{6x^2}{x^4}}{\frac{5x^3}{x^4} - \frac{x^2}{x^4}} = \frac{3+0}{0-0} = \infty$$

  - Regla de L'Hôpital → Derivadas scuesivas hasta encontrar una expresión polinómica no racional.

- **CASO 2:** Límite de funciones exponenciales.
  EJEMPLO

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4^{x+2} + 2^x}{6^{x-2}} = \frac{\infty}{\infty} \to IND$$

  Se resuelve mediante:
  - Divdir cada término de la expresión racional entre el término con variables en el exponente que presente mayor base:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4^{x+2} + 2^x}{6^{x-2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4^x \cdot 4^2 + 2^x}{6^x \cdot 6^{-2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4^x \cdot 4^2}{6^x} + \frac{2^x}{6^x}}{\frac{6^x \cdot 6^{-2}}{6^x}} = \frac{0+0}{36} = 0$$

    EJEMPLO

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3^{x+2} + 2^x}{3^{x-2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3^{x+2} + 2^x}{3^{x-2}} = \frac{3^x \cdot 3^2 + 2^x}{3^x \cdot 3^{-2}} = \frac{\frac{3^x \cdot 3^2}{3^x} + \frac{2^x}{3^x}}{\frac{3^x \cdot 3^{-2}}{3^x}} = \frac{9+0}{\frac{1}{9}} = 81$$

  - Regla de L'Hôpital

b) Teorema de Órdenes de infinitud

El teorema de órdenes de infinitud permite simplificar el cálculo de límites de funciones que se puedan escribir como cocientes de otras funciones.

- Si el grado del polinomio numerador es mayor que el del polinomio denominador, el límite tiende a infinito (de acuerdo con el signo del coeficiente director del numerador)
- si el grado del polinomio denominador es mayor que el del polinomio numerador, el límite tiende a 0.
- Si tanto numerador como denominador presentan el mismo grado, el límite resulta del cociente de coeficientes directores (el del numerador entre el denominador).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} (IND) = \begin{cases} \pm\infty & si\ grado\ (f(x)) > grad\ o(g(x)) \\ 0 & si\ grado\ (f(x)) < grad\ o(g(x)) \\ \frac{a}{b} & si\ grado(f(x)) = \text{grado}(g(x)) \end{cases}$$

$$a = coeficiente\ director\ de\ f(x), b = coefieicnte\ director\ de\ g(x)$$

Esto puede generalizarse a cocientes entre funciones exponenciales, polinómicas y logarítimcas, de modo que:

- Las funciones exponenciales tienen por límite infinitos de un orden superior al que se asocia a las funciones polinómicas.
- Las funciones polinómicas tienen por límite infinitos de un orden superior al que se asocia a las funciones logarítimicas.

Una lista de precedencia útil oara operar puede ser, con $x \to \infty$:

$$\ln(x) \ll \sqrt[n]{x} \ll \sqrt[n-1]{x} \ll x \ll x^{n+1} \ll 2^x \ll e^x \ll 3^x$$

El orden de infinitud solo considera la MAGNITUD involucrada, es decir, el tamaño de la tasa de variación asinótica en una expresión y no el signo del infinito.

EJEMPLO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - x + 2}{x - 5} = \frac{\infty}{\infty}\ (IND)\ = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 2}{x - 5} = \frac{-\infty}{\infty}\ (IND)\ = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 5}{x^3 + 2x^2 - x + 2} = \frac{\infty}{\infty} (IND)\ = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 5}{7x + 2} = \frac{\infty}{\infty} (IND) = \frac{1}{7}$$

EJEMPLO con logaritmos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^{40})}{x^6} = \frac{\infty}{\infty} \to IND$$

Por órdenes de infinitud, se ve:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^{40})}{x^6} = 0$$

Ya que el orden del infinito que se ve en el argumento del logaritmo es infinitamente menor que el orden del infinito que se asocia al polinomio denominador.

EJEMPLO con exponenciales

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^{6000}} = \frac{\infty}{\infty} \to IND$$

Por órdenes de infinitud, se ve:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^{6000}} = \infty$$

Ya que el orden del infinito que se asocia al exponencial del numerador es infinitamente mayor que el orden del infinito que se asocia al polinomio denominador.

EJEMPLO con radicales

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^7 - 3x^4 + 3}}{x^3 + 8x^2} = \frac{\infty}{\infty} \to IND$$

- El grado del numerador es $\frac{7}{2}$
- El grado del denominador es 3

Como $\frac{7}{2} > 3$ se alcanza, por órdenes de infinitud:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^7 - 3x^4 + 3}}{x^3 + 8x^2} = \infty$$

c) Indeterminación $\infty - \infty$

Con independencia del origen de esta indeterminación, la estrategia es operar con el objetivo de alcanzar otro tipo de indeterminación: ya sea $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$

EJEMPLO $\infty - \infty$ asociada a resta de funciones racionales

Se desea:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}\right)$$

Sustituyendo la variable por infinito, se alcanza la indeterminación:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}\right) = \infty - \infty \to \mathrm{IND}$$

Se aprovecha:

- La identidad notable suma por diferencia
- El producto por el conjugado de la expresión radical

Se ve:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x} = \left(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}\right)\frac{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}}$$

En el numerador, mediante suma por diferencia:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2 + x}\right)^2}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}1} = \frac{x^2 - 2 - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}1}$$

$$f(x) = \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}} \to \lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \to IND$$

Se alcanza otro tipo de indeterminación.
Dividiendo entre variable de mayor grado numerador y denominador:

$$f(x) = \frac{-\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}} = \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

Se alcanza:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{-1 - 0}{\sqrt{1 - 0} + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{1}{2}$$

EJEMPLO

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x+2}-\sqrt{x^3+1}\right)=\infty-\infty\to \text{IND}$$

Ahora:

$$f(x)=\left(x\sqrt{x+2}-\sqrt{x^3+1}\right)\cdot\frac{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\frac{x^2(x+2)-(x^3+1)}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}$$

$$f(x)=\frac{x^2(x+2)-(x^3+1)}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\frac{x^3+2x^2-x^3-1}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\frac{2x^2-1}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\frac{\infty}{\infty}\to IND$$

Se sortea el nuevo tipo de indeterminación por órdenes de infinitud:

- Numerador de grado 2 (se ve x^2)
- Denominador de grado $\frac{3}{2}$ (se ve $\sqrt{x^3}=x^{3/2}$)

O sea, mayor grado en el numerador:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\infty$$

d) Indeterminación 0/0

Se ve en el cálculo de límites de funciones racionales:

CASO 1: Sin radicales

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0} \longrightarrow \text{IND}$$

Se sortea factorizando numerador y denominador:

	1	-1	-4	4
2		2	2	-4
	1	1	-2	0
-2		-2	2	
	1	-1	0	

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x+2)(x-1)$$

	1	-1	-2
2		2	2
-1	1	1	0
-1		-1	
	1	0	

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x-1)}{(x-2) \cdot (x+1)} = \frac{4}{3}$$

CASO 2: Con radicales

Un caso particular es aquel en que se ven funciones con radicales, puesto que se puede aprovechar el **PRODUCTO POR EL CONJUGADO** de la expresión radical para encontrar una expresión equivalente de la función racional de la cual se desea calcular el límite.

El conjugado de un binomio a + b es a – b: basta con cambiar de signo uno y solo uno de los 2 términos.

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 3} \frac{4x^2 - 36}{\sqrt{x+1} - 2} = \frac{4 \cdot 3^2 - 36}{\sqrt{x+1} - 2} = \frac{0}{0} \to IND$$

Se observa $\sqrt{x+1} - 2$ cuyo conjugado es $\sqrt{x+1} + 2$. Se aprovecha suma por diferencia y la reciprocidad entre la raíz y elevar al cuadrado:

$$\frac{4x^2 - 36}{\sqrt{x+1} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{(4x^2 - 36)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - (2)^2} = \frac{(4x^2 - 36)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{x + 1 - 4}$$

Ahora ya se pueden factorizar numerador y denominador:

$$\frac{4\cdot(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}$$

Y se simplifica, de modo que la expresión racional desaparece y, con ella, la posibilidad de la indeterminación $\frac{0}{0}$:

$$4\cdot(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)$$

Se alcanza:

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x^2-36}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\left[4\cdot(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\right]=4\cdot(3+3)\left(\sqrt{3+1}+2\right)=96$$

CASO 3: Cociente de funciones en general

Regla de L'Hôpital → Calcular derivadas sucesivas de numerador y de denominador que reemplazan los términos del cociente original, hasta encontrar una expresión cuyo límite no sea indeterminación.

EJEMPLO

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\sin x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se deriva la función numerador:

$$\frac{d}{dx}(1-e^x)=0-1\cdot e^x\cdot 1=-e^x$$

Se deriva la función denominador:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

Ahora se calcula el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{\cos x}=\frac{-e^0}{\cos 0}=-\frac{1}{1}=-1$$

EJEMPLO
La regla de L'Hôpital se puede aplicar a cualquier caso en que se vean funciones racionales:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{(0) - \text{sen}(0)}{(0)^3} = \frac{0}{0}$$

Se deriva numerador:

$$\frac{d}{dx}(x - \sin x) = 1 - \cos x$$

Se deriva denominador:

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Se intenta calcular el límite de nuevo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1 - \cos(0)}{3 \cdot 0^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Se deriva de nuevo:

$$\frac{d}{dx}(1 - \cos x) = -1 \cdot (-\sin x) = \sin x$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$$

Se intenta calcular el límite de nuevo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{\sin(0)}{6 \cdot (0)} = \frac{0}{0}$$

Se deriva por tercera vez:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(6x) = 6$$

Se intenta calcular el límite de nuevo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{\cos(0)}{6} = \frac{1}{6}$$

e) Indeterminación $\infty \cdot 0$

Se observa en el cálculo de límite en el infinito de un producto de funciones. La estrategia se basa en escribir un producto como un cociente y así reducir el caso a otro caso conocido, aprovechando la propiedad del inverso:

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

O sea:

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot \frac{1}{1/g(x)} = \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

Es decir:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \cdot \infty \to IND$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) \cdot \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = 0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$$

O bien:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty \cdot 0 \to IND$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) \cdot \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \infty \cdot \frac{1}{\frac{1}{0}} = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

EJEMPLO

$$\lim_{x \to \infty} (x+9) \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{5x^4 + 7x^3}} = \infty \cdot 0$$

Se resuelve operando la expresión para encontrar un cociente de polinomios cuyo límite devuelva una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o bien $\infty \cdot \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \left[(x+9) \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{5x^4 + 7x^3}} \right] = \lim_{x \to \infty} \sqrt[4]{\frac{(x+9)^4}{5x^4 + 7x^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{5}} \; por\ órdenes\ de\ infinitud$$

También se puede optar por dividir entre la potencia de mayor grado cada término de la expresión, en lugar de aplicar órdenes de infinitud. En ese caso, hay que evaluar CUIDADOSAMENTE el GRADO de expresiones con radicales:

$$En \sqrt[4]{\frac{(x+9)^4}{5x^4 + 7x^3}} \, la\ variable\ de\ grado\ máximo\ es\ x, todo\ se\ ve\ dentro\ de\ una\ raíz\ cuarta$$

EJEMPLO

$$\lim_{x\to\infty}(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}=\infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}=\sqrt{\frac{(x+7)^2}{4x^2+3}}=\sqrt{\frac{x^2+14x+49}{4x^2+3}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+14x+49}{4x^2+3}}=\sqrt{\frac{1+\frac{14}{x}+\frac{49}{x^2}}{4+\frac{3}{x^2}}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

Se divide entre x, ya que la variable de mayor grado x^2 se ve dentro de una raíz cuadrada.

EJEMPLO

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\infty\cdot\left(e^{\frac{1}{\infty}}-1\right)=\infty\cdot(e^0-1)=\infty\cdot(1-1)=\infty\cdot 0\to IND$$

Se reescribe:

$$x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$$

Se calcula el límite:

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\frac{1}{\frac{1}{\infty}}\left(e^{\frac{1}{\infty}}-1\right)=\frac{1}{0}\cdot(e^0-1)=\frac{1}{0}\cdot(1-1)=\frac{0}{0}$$

f) Indeterminación 1^∞ para potencia de funciones

EJEMPLO

$$L=\lim_{x\to 8}(-x+9)^{\frac{-x-5}{x-8}}$$

Se aprovecha:

$$L=\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}(f(x))^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

Se observa:

$$\lim_{x\to 8}(-x+9)=1$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{-x-5}{x-8}=\frac{-13}{0}=-\infty$$

Se alcanza:

$$L=1^{-\infty}\to IND$$

Para sortear la indeterminación, se aprovecha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

De manera que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}\right)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to+\infty} g(x)}$$

Se desea, por tanto, determinar también f(x) y g(x):

- Se tiene: $-x+9$ que se desea ver como $1+\frac{1}{f(x)}$
- Se reescribe: $-x+9=\ -x+8+1=1+(-x+8)$
- Se deduce f(x): $1+\frac{1}{f(x)}=1+(-x+8)\to\frac{1}{f(x)}=-x+8\to f(x)=\frac{1}{-x+8}$
- Se deduce g(x): $\frac{-x-5}{x-8}=f(x)\cdot g(x)$

$$g(x)=\frac{\frac{-x-5}{x-8}}{f(x)}=\frac{\frac{-x-5}{x-8}}{\frac{1}{-x+8}}=\frac{-x-5}{x-8}:\frac{1}{-x+8}=\frac{-x-5}{x-8}\cdot\frac{-x+8}{1}=(-1)\cdot\left(\frac{-x-5}{x-8}\cdot\frac{x-8}{1}\right)$$

$$g(x)=x+5$$

Y se alcanza:

$$L=\lim_{x\to 8}(-x+9)^{\frac{-x-5}{x-8}}=\lim_{x\to 8}\left[\left(1+(-x+8)\right)^{\frac{1}{-x+8}}\right]^{x+5}=e^{\lim_{x\to 8}(x+5)}=e^{13}$$

g) Indeterminaciones 1^{∞}, $\infty^{0}, 0^{0}$: estategia exponencial/logaritmo

Se considera el cálculo de un límite L que da lugar a $1^{\infty} \rightarrow IND$
Se parte de:

$$L = 1^{\infty}$$

Tomando logaritmo en ambos miembros:

$$\ln(L) = \ln(1^{\infty})$$

$$\ln(L) = \infty \cdot \ln(1)$$

$$\ln(L) = \infty \cdot 0 \rightarrow IND$$

Y se alcanza $\infty \cdot 0$ que se resuelve aplicando la estrategia del inverso $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ para alcanzar $\frac{0}{0}$.

Se considera el cálculo de un límite L que da lugar a $\infty^{0} \rightarrow IND$
Se parte de:

$$L = \infty^{0}$$

Tomando logaritmo en ambos miembros:

$$\ln(L) = \ln(\infty^{0})$$

$$\ln(L) = 0 \cdot \ln(\infty)$$

$$\ln(L) = 0 \cdot \infty \rightarrow IND$$

Y se alcanza de nuevo $\infty \cdot 0$ que se resuelve aplicando la estrategia del inverso $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ para alcanzar $\frac{0}{0}$.

Se considera el cálculo de un límite L que da lugar a $\infty^{0} \rightarrow IND$

Se parte de:

$$L = 0^{0}$$

Tomando logaritmo en ambos miembros:

$$\ln(L) = \ln(0^{0})$$

$$\ln(L) = 0 \cdot \ln(0)$$

$$\ln(L) = 0 \cdot (-\infty) \rightarrow IND$$

Nótese que:
$\ln(0) \rightarrow -\infty$ ya que $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} \rightarrow 0$

EJEMPLO

Ante el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x-2}$$

Se aplica el límite de la potencia y por órdenes de infinitud:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty} x-2} = \left(\frac{1}{1}\right)^{\infty} = 1^{\infty} \to IND$$

Se aspira ahora a expresar la indeterminación como $0\cdot\infty$.

Se asigna:

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x-2}$$

Tomando logaritmos:

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x-2}\right)$$

$$\ln(L) = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x-2}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[(x-2)\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)\right]$$

Se ve el límite de un producto, que es el producto de límites. Para el segundo factor, por órdenes de infinitud:

$$\ln(L) = \lim_{x\to\infty}\left[(x-2)\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)\right] = \infty\cdot\ln(1)$$

$$\ln(L) = \infty\cdot 0$$

Ahora ya se puede aplicar la estrategia del inverso para alcanzar $\frac{0}{0}$:

- Se reemprende desde:

$$\ln(L) = \lim_{x\to\infty}\left[(x-2)\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)\right]$$

- Se reescribe el producto:

$$\ln(L) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{1}{(x-2)}}\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)\right]$$

- Se calcula el límite:

$$\ln(L) = \frac{1}{0}\ln(1) = \frac{1}{0}\cdot 0 = \frac{0}{0}$$

A partir de $\frac{0}{0}$ se puede aplicar L'Hôpital para ver el límite L:

- Se reemprende desde:

$$\ln(L) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{1}{(x-2)}}\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)\right]$$

$$\ln(L) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{1}{(x-2)}}\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

- Derivando cada función:

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{x+3}{x+2}\right)}\cdot\left[\frac{1\cdot(x+2)-(x+3)\cdot 1}{(x-2)^2}\right] = \frac{-1}{(x+3)(x+2)}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

- Se alcanza:

$$\ln(L) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)}{\frac{1}{(x-2)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{(x+3)(x+2)}}{\frac{-1}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)^2}{(x+3)(x+2)}$$

$$\ln(L) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4-4x}{x^2+5x+6} = 1$$

Por tanto:

$$\ln(L) = 1 \to L = e$$

Donde

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x-2} = e$$

h) Caso 0^∞ (no es indeterminación)

EJEMPLO

Se considera, para una expresión arbitraria A: $A = \mathbf{0}^\infty$

Se toma logaritmo:

$$ln(A) = \ln(\mathbf{0}^\infty)$$
$$ln(A) = \infty\cdot\ln(0)$$
$$ln(A) = \infty\cdot -\infty$$

Ya que $e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty}$. De lo cual:

$$ln(A) = -\infty$$

Deshaciendo el logaritmo:

$$e^{ln(A)} = e^{-\infty}$$
$$A = e^{-\infty}$$

Por tanto, el límite es:

$$\lim_{x\to\infty} A = \lim_{x\to\infty} e^{-\infty} = 0$$

1.1 Criterio 0 · acotada

El criterio “0 · función acotada” leído como “cero por función acotada” permite sortear el inconveniente que supone la imposibilidad de calcular ciertos límites finitos o bien aligerar la complejidad de su cálculo.

Se basa en una idea muy sencilla: el producto de cualquier número por 0 resulta 0.

Para aplicarlo, tan solo hace falta encontrar un producto de 2 funciones una de las cuales tenga por límite 0 en un punto x=a y la otra de las cuales sea una función acotada en el entorno del punto x=a en el cual se desea conocer el límite.

Se denomina función acotada a aquella cuya imagen adopta valores exclusivamente en un rango finito de y en torno de un punto x=a, denominado “punto de acumulación”.

Es especialmente estratégico este criterio a la hora de calcular límites de productos de funciones que incluyan funciones trigonométricas periódicas como $\sin(x)$ y $\cos(x)$.

EJEMPLO

$$\lim_{x\to 7}\left[\sin(-9x^2+144x-567)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2-14x+49}\right)+\cos\left(x^2+2x-63\right)\cdot(x+7)\right]$$

Se observa una estructura de la forma:

$$\lim_{x\to 7}[f(x)\cdot \mathrm{g(x)}+\mathrm{h(x)}\cdot t(x)]$$

Con:

$$f(x)=\sin(-9x^2+144x-567)$$

$$g(x)=\cos\left(\frac{1}{x^2-14x+49}\right)$$

$$h(x)=\cos(x^2+2x-63)$$

$$t(x)=(x+7)$$

En x = 7, para cada función, se ve:

$$f(7)=\sin(-9\cdot 7^2+144\cdot 7-567)=\sin(0)=0$$

$$g(7)=\cos\left(\frac{1}{7^2-14\cdot 7+49}\right)=\cos\left(\frac{1}{0}\right)\to no\ definido; pero\ debe\ estar\ en\ [-1,1]$$

Como se observa $f(x)\cdot \mathrm{g(x)}$ con f(7) = 0 y g(x) es PERIÓDICA en todo su dominio, estará acotada también en x=7, de modo que se puede aplicar 0 · acotada.

Es decir:

$$h(7) = \cos(7^2 + 2 \cdot 7 - 63) = \cos(0) = 1$$

$$t(7) = (7 + 7) = 14$$

O sea:

$$L = \lim_{x \to 7} [f(x) \cdot \mathrm{g(x)} + \mathrm{h(x)} \cdot t(x)]$$

$$\underbrace{\underbrace{\lim_{x \to 7} f(x)}_{0} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 7} g(x)}_{acotada}}_{0} + \underbrace{\lim_{x \to 7} h(x)}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 7} t(x)}_{14}$$

$$L = [0 + 1 \cdot 14] = 14$$

2. CONTINUIDAD

2.1. Definición de continuidad en un punto

Una función es continua en un punto x = a si y solo si existe su límite en ese punto y coincide con su imagen:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \to f(x)\ es\ continua\ en\ x = a$$

Si se cumple que $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en todos los puntos x ∈ A, se dice que es continua en el conjunto A.

2.2. Propiedades de la continuidad

Dadas dos funciones $f, g: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en un punto $x = a \in A$, y un escalar $k \in \mathbb{R}$, se cumple:

- $f + g$ es continua en x = a
- $f \cdot g$ es continua en x = a
- $f + g$ es continua en x = a
- $k \cdot f$ es continua en x = a
- $\frac{f}{g}$ es continua em x = a si $g(a) \neq 0$
- $f\big(g(x)\big)$ es continua solo si f además de ser continua en x = a lo es en $g((a))$.

2.3. Tipos de discontinuidad

a) Discontinuidad de tipo evitable

Se identifica si los límites laterales de la función en un punto coinciden, pero el valor de la función en ese punto no es igual al valor del límite, ya sea por cualquiera de 2 situaciones posibles:

- Cuando la imagen de la función no está definida en x = a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L\ pero\ \nexists f(a)$$

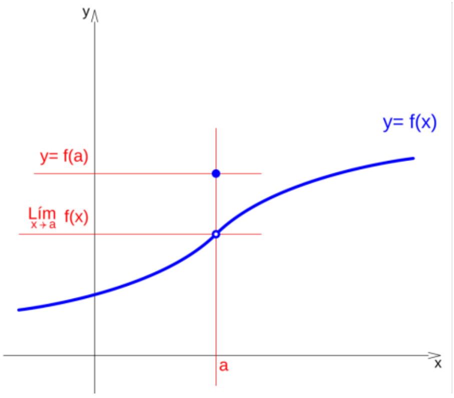
- Cuando la imagen de la función en x = a no coincide con sus límites allí:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L\ pero\ f(a) \neq L$$

En todo caso, requiere la coincidencia de los límites laterales en el punto evaluado x = a:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

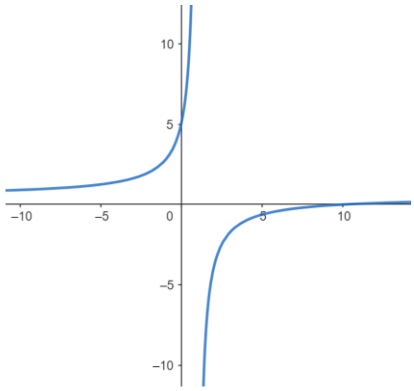
EJEMPLO
Función definida a trozos en que no existe el límite de f(x) en el punto que presenta la discontinuidad:



$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 2, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

EJEMPLO

Función para la cual no existe el límite en ese punto por no estar definida en el punto de la discontinuidad:



$$f(x) = \frac{(x-3)\left(\frac{x}{2} - 5\right)}{x^2 - 2x - 3}$$

Presenta una asíntota vertical en x = -1, de modo que:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$$

Además, se observa en x=3:

$$f(3) = \frac{(3-3)\left(\frac{3}{2} - 5\right)}{3^2 - 2 \cdot 3 - 3} = \frac{0}{0} \to IND$$

Pero el carácter evitable de la discontinuidad se ve factorizando el denominador:

$$f(x) = \frac{(x-3)\left(\frac{x}{2} - 5\right)}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-3)\left(\frac{x}{2} - 5\right)}{(x-3)(x+1)} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 5\right)}{(x+1)}$$

En x = 3 hay una discontinuidad evitable, en tanto que en x = 3 los límites laterales coinciden, pero la imagen no está definida en ese punto:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \frac{\left(\frac{3^-}{2} - 5\right)}{(3^- + 1)} = \frac{\frac{7^-}{2}}{4^-} = \frac{7}{8}$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{\left(\frac{3^+}{2} - 5\right)}{(3^+ + 1)} = \frac{\frac{7^+}{2}}{4^+} = \frac{7}{8}$$

$$f(3) = \frac{0}{0} \to IND$$

b) Discontinuidad de salto finito

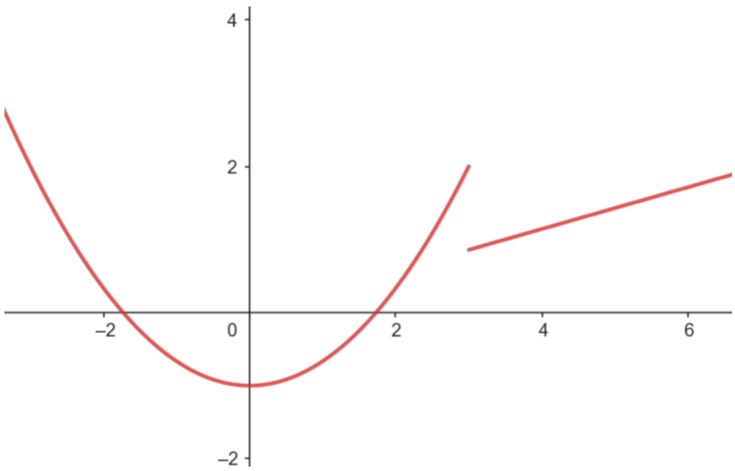
Se da en un punto x = a cuando los límites laterales de la función son finitos, pero no coinciden entre ellos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b \neq \lim_{x \to a^-} f(x) = c, con\ b \neq c \to \nexists \lim_{x \to a} f(x)$$

Se dan en casos muy diversos:

- Funciones definidas a trozos (en el límite entre una y otra definición)
- Funciones con valor absoluto como $\frac{|x|}{x}$
- Funciones de tipo "step" como "Heavy side", signo(x) o parte entera $\lfloor x \rfloor$
- Funciones trigonométricas con dominio acotado: $\tan(x)\ con\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

EJEMPLO:



La función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} - 1, & x \leq 3 \\ \frac{2}{7}x, & x > 3 \end{cases}$$

Presenta una discrepancia entre sus límites laterales en x = 3 ya que:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{6}{7}$$

Por tanto, muestra una discontinuidad de salto finito en x = 3.

c) Discontinuidad asintótica

Se da en un punto x = a cuando los límites laterales de la función son infinitos, pero no coinciden entre ellos:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \neq \lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty \rightarrow \nexists \lim_{x\to a} f(x)$$

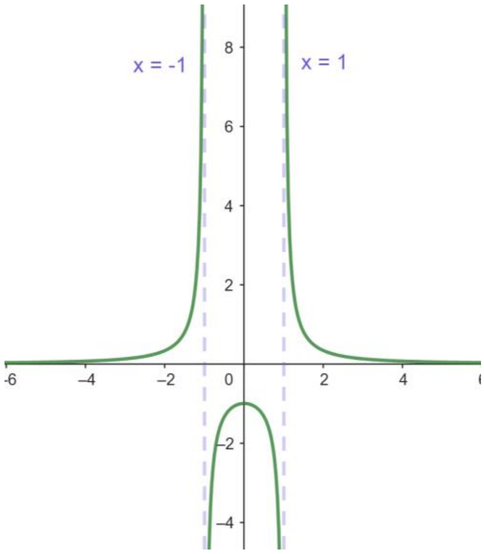
EJEMPLO

La función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Presenta 2 asíntotas verticales:

- En x = -1
- En x = 1



En x = -1 se cumple:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$

En x = 1 se cumple:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

2.1 Cálculo de asíntotas

Se distinguen 3 tipo de asíntota:

- **Asíntota vertical**
  f(x) tiene una asíntota vertical en x = si:

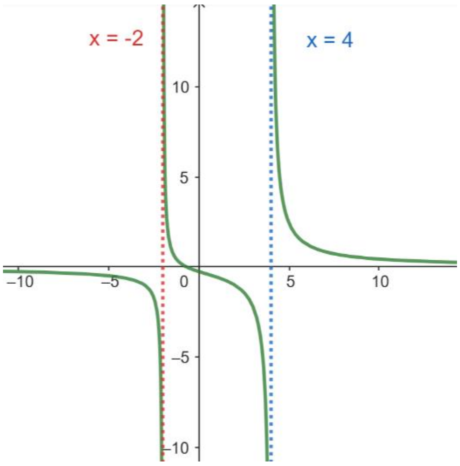
$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

  Para ello, al menos uno de los 2 límites laterales en x = a debe ser infinito.

  La asíntota se ve con independencia de si en el entorno de x=a, el límite por la izquierda tiene el mismo signo que el límite por la derecha.

  Basta con que alguno de los límites laterales en x = a tiendan a infinito para que se vea la asíntota vertical.

Se ven asíntotas verticales en funciones racionales en aquellos puntos de abscisa que anulan el denominador.



EJEMPLO

$$f(x) = \frac{3x+2}{(x-4)(x+2)}$$

Se ve x = -2 y x = 4 como asíntota vertical:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$$

- **Asíntota horizontal:**

  f(x) tiene una asíntota horizontal en y = a siempre que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

Es excluyente respecto la asíntota oblicua. Si se ve asíntota horizontal se descarta que haya asíntota oblicua.

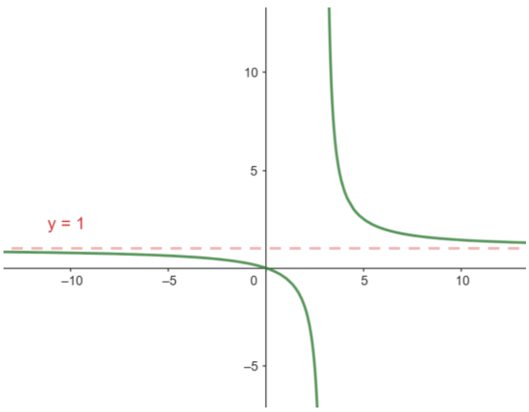
Se distingue la asíntota horizontal por la izquierda en y=b:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Y la asíntota horizontal por la derecha en y=b:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

EJEMPLO



$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x}$$

Se ve:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Y la asíntota horizontal es y = 1

- **Oblicua:**

  La asíntota oblicua responde a la ecuación de una recta:
  $$y = mx + n$$
  Donde la pendiente m es:
  $$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$
  Y la ordenada en el origen es:
  $$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

EJEMPLO

La función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 4}$$

Presenta una asíntota oblicua y = x – 4

Se calcula:

$$y = mx + n$$

Donde:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 8x + 15}{x - 4}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 8x + 15}{x(x - 4)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 4x}$$

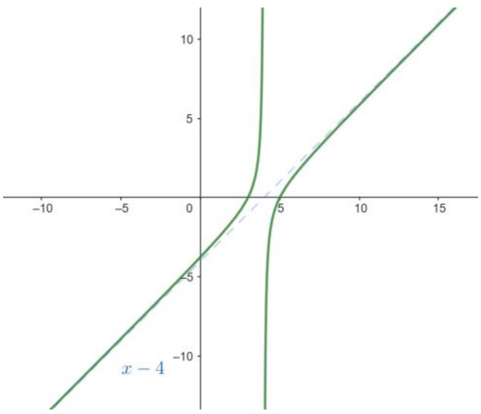
$$m = 1$$

Y n es:

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 8x + 15}{x - 4} - 1 \cdot x \right)$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 8x + 15}{x - 4} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 8x + 15 - (x - 4)x}{x - 4} \right)$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 8x + 15 - x^2 + 4x}{x - 4} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-4x + 15}{x - 4} \right) = -4$$



La asíntota oblicua es:

$$y = 1 \cdot x - 4$$