

Presentación

Esta PEC es una introducción a la teoría de grafos que cubre los contenidos estudiados en los 3 primeros módulos de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre funciones y algoritmos, los fundamentos de la teoría de grafos y los problemas de recorridos y conectividades sobre grafos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer los principales conceptos de combinatoria.
- Conocer el concepto de complejidad temporal y espacial de un algoritmo.
- Conocer el concepto de grafo y los diferentes tipos de grafos (grafos orientados, grafos ponderados, pseudografofros, multigrafos, ...).
- Conocer las principales propiedades de los grafos y saber analizarlas.
- Conocer los problemas de conectividad más usuales sobre grafos, los algoritmos que los resuelven y saber aplicarlos en un grafo concreto.
- Ser capaz de representar y analizar un problema en términos de la teoría de grafos.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 25 % = 5 %+10 %+ (5 %+5 %))

- a) En una competición deportiva las camisetas de los deportistas se numeran con un nuevo tipo de dorsal inteligente. Numerar cada camiseta cuesta dos euros por cada dígito que forme parte del número que aparezca en la camiseta. Esto es, por ejemplo el dorsal 6 (un sólo dígito) cuesta 2 euros, el dorsal 34 (dos dígitos) cuesta 4 euros y el dorsal 352 (tres dígitos) cuesta 6 euros. La factura total para numerar las camisetas de todos los deportistas es de 13794 euros. Teniendo en cuenta que se empiezan a repartir los dorsales desde el número 1 y en orden ¿Cuántos deportistas hay en la competición?
- b) Consideremos los 18 primeros números naturales. Esto es, el conjunto $\{1, 2, \dots, 18\}$. Calculad de cuántas maneras distintas pueden elegirse 5 números distintos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, de este conjunto de tal forma que la distancia entre dos cualesquiera de ellos, (distintos), sea al menos 2. Esto es, que $|a_i - a_j| \geq 2$ para todo a_i, a_j con $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, 5\}$.
- c) Sea

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$$

una función. Para cada uno de los siguientes casos, **justificad** cuál es el mayor subconjunto A de \mathbb{R} que puede elegirse como dominio de la función, y después decid, (**también justificando la afirmación**), cuál tiene que ser el subconjunto B de \mathbb{R} que nos permitirá afirmar que f es biyectiva.

- 1) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.
- 2) $f(x) = +\sqrt{2 + 5x}$.

2. (Valoración de un 25 %=5 % +5 % +5 %+5 %+ (2.5 % + 2.5 %))

Responded de manera **justificada** a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Existe algún grafo que sea bipartito completo, con orden 5 y medida 7?
- b) Un grafo tiene 26 vértices y 58 aristas. Hay cinco vértices de grado 4, seis vértices de grado 5 y siete vértices de grado 6. Si el resto de vértices tienen todos el mismo grado. ¿Cuál es este grado?
- c) Usad la teoría de grafos para justificar si es o no posible que cada persona de un grupo de 15 individuos tenga exactamente 3 amigos en ese grupo (suponemos que la relación de amistad es simétrica. Esto es, la amistad surge en los dos sentidos entre dos personas).
- d) ¿Se corresponde la siguiente secuencia de números naturales

$$8, 8, 7, 6, 6, 5, 3, 2, 2, 2, 1$$

con la secuencia gráfica de algún grafo? Justificad la respuesta.

e) Calculad el orden y la medida de los siguientes grafos:

- $C_5 + T_4$.
- $C_5 \times T_4$.

3. (Valoración de un 25 % = 6 % + 6 % + 6 % + 7 %)

Una zona rural tiene una red de carreteras estrechas que une sus 8 granjas, siguiendo la siguiente matriz de adyacencias que indica distancias en km. Siendo la quinta granja (quinta columna/fila) la que tiene una salida a la autopista.

Un ladrón ha robado una cabra en la granja número 1, y quiere huir por la autopista. Pero como no conoce mucho el terreno, sigue el itinerario 1-2-4-6-8-5. El propietario de la granja lo ve y lo persigue, sabiendo que se dirige a la autopista. No obstante, cuando arranca el coche, el ladrón ya ha recorrido 2km y lo ha perdido de vista.

$$A = \begin{bmatrix} - & 4 & 7 & - & - & - & - & - \\ - & - & 1 & 5 & - & - & 9 & - \\ - & - & - & - & - & 5 & - & - \\ 3 & - & - & - & - & 2 & - & - \\ - & - & - & - & - & 6 & 4 & - \\ - & 4 & - & - & - & - & - & 8 \\ - & - & 2 & - & - & - & - & 2 \\ 6 & - & - & - & 7 & - & - & - \end{bmatrix}$$

Responded **de manera justificada** usando las metodologías de los apuntes de clase, las siguientes cuestiones:

- a) Aplica el algoritmo de Floyd para obtener la matriz de distancias entre vértices. A partir de esa matriz ¿Se puede deducir que el sistema de carreteras entre granjas es un grafo conexo?
- b) ¿Qué itinerario deberá seguir el propietario de la granja para llegar a la entrada de la autopista antes que el ladrón? Usa otro algoritmo de los apuntes, que no sea el del apartado anterior para resolverlo.
- c) Siguiendo el camino óptimo, cuando el granjero ha recorrido 10km, al ladrón le faltan 13km para llegar a la autopista. Si ambos mantienen una velocidad constante ¿Le alcanzará?
- d) Ahora, el granjero puede llamar a otro granjero justo antes de arrancar el coche (solo le da tiempo de llamar a uno, y en el tiempo de llamada el ladrón recorre un km más) para que corte un tramo de carretera (una arista del grafo) y recorrer ese tramo en contra dirección. Teniendo en cuenta que solo puede hacer eso con aristas que salgan de o lleguen a las granjas 1 y 5, ¿Qué tramo debe recorrer en contra dirección para llegar cuanto antes a la entrada de la autopista?

4. (Valoración de un 25 %) Cuestionario de evaluación Canvas

Dentro del aula de la asignatura, en el Campus Virtual, encontraréis la herramienta Canvas. En este Canvas hay un cuestionario con diversas preguntas que debéis resolver como último ejercicio de esta PEC.

Leed atentamente las siguientes instrucciones **antes de abrir el cuestionario**:

- Los contenidos que se evalúan en este cuestionario corresponden al módulo “Fundamentos de grafos” y “Recorridos y conectividad”. Es importante que hayáis asimilado estos conocimientos **antes de abrir el cuestionario**.
- El cuestionario estará abierto durante el plazo de la PEC y lo podéis resolver cuando queráis. De todas formas, una vez lo abráis tendréis un **tiempo limitado** para resolverlo (1 hora).
- Importante:** El cuestionario quedará cerrado a las 23:59 de la fecha límite de entrega. Si empezáis a hacerlo después de las 22:59 del último día, ¡tendréis menos de una hora para hacerlo!
- Las respuestas a las preguntas se tienen que introducir directamente en el cuestionario Canvas. No es necesario que las entreguéis junto con el resto de respuestas de la PEC.
- Las preguntas del cuestionario son aleatorias: cada estudiante recibirá un enunciado diferente.
- En algunas preguntas tendrás que introducir la respuesta en un formato específico (p. ej. con los valores ordenados de una determinada forma y sin espacios). Es muy importante **seguir fielmente el formato indicado** a la hora de introducir vuestra respuesta.
- Disponéis de **2 intentos** para resolver el cuestionario. El objetivo de tener dos intentos es poder solventar posibles problemas que hayáis tenido en la realización del cuestionario, ya sean problemas técnicos o bien que hayáis abierto el cuestionario por error. Por tanto, debéis tener en cuenta que:
 - La nota que obtendréis en el cuestionario será la de vuestro último intento.
 - Después del 1^{er} intento, no recibiréis la calificación obtenida ni recibiréis feedback sobre vuestra propuesta de solución. Por lo tanto, no recomendamos usar el 2º intento para intentar mejorar nota, ya que puede ser que obtengáis una nota inferior.
 - Si usáis el 2º intento, el enunciado que encontraréis será diferente del 1^{er} intento.
 - Podéis realizar los dos intentos en días diferentes, siempre que sea dentro del plazo de la PEC. Dispondréis de 1 hora para cada intento.
 - Cada vez que iniciéis el cuestionario contará como un intento, aunque no enviéis la respuesta. Por ejemplo, **si habéis hecho el 1^{er} intento y volvéis a abrir el cuestionario, invalidaréis vuestro 1^{er} intento y os quedaréis con la nota del 2º**.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 1. Conceptos previos: funciones y algoritmos.
- Módulo didáctico 2. Fundamentos de grafos.
- Módulo didáctico 3. Recorridos y conectividad.
- Colección de problemas.

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**. En caso que hayáis consultado recursos externos, es necesario referenciarlos.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC1_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar **antes de las 23:59 del día 27/10/2025**. **No se aceptarán entregas fuera de plazo.**