Solución Examen 2

2016-2017 Semestre 2

75.557 Álgebra

81.506 Matemáticas I

Fecha 17.06.2017

1. Responded a los siguientes apartados:

a) Hallad el valor, o valores, de x para que el número complejo $(25-xi)^2$ sea imaginario puro.

b) Hallad la raíz siguiente: $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$. Proporcionad el resultado en forma polar.

Solución:

a) Tal como se dice en la página 20 del material impreso, para que sea un número imaginario puro es necesario que la parte real sea 0. Vamos a ver cuál es la parte real de este número complejo. Para ello efectuamos el cuadrado para obtener el número de la forma $a+bi$:

$$(25-xi)^2 = 25^2 - 2\cdot 25x\cdot i + x^2\cdot i^2 = 625-50xi - x^2 = (625-x^2)-50xi$$

Una vez tenemos el número complejo expresado de la forma $a+bi$ imponemos que la parte real es 0 (para que el número sea imaginario puro):

$$625-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 625 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{625} \Leftrightarrow x = \pm 25$$

Por lo tanto, los valores son:

$$x = \pm 25$$

b) Escribimos el complejo $z=-8+8\sqrt{3}i$ en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejos:

$$m = \sqrt{(-8)^2 + 8^2\cdot 3} = \sqrt{64\cdot 4} = 8\cdot 2 = 16$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right) + 180^\circ = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) + 180^\circ = 300^\circ + 180^\circ = 480^\circ = 120^\circ$$

Observemos que sumamos 180º dado que la parte real es negativa y la parte imaginaria del complejo es positiva (apartado 3.4.1 de la página 30 del material impreso).

Tenemos, por lo tanto, que: $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16_{120^\circ}}$

Como que nos piden las raíces cuartas tenemos que hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16_{120^\circ}} = \sqrt[4]{16}_{\frac{120^\circ+360^\circ k}{4}} \quad \text{para k=0, 1, 2, 3}$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[4]{16} = 2$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \frac{120º+360º k}{4}$ para k=0, 1, 2, 3

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 30º$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 30º+90º = 120º$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 30º+180º = 210º$
- Si k=3, tenemos que $\beta_3 = 30º+270º = 300º$

Por lo tanto, las cuatro raíces cuartas del número complejo $z = -8+8\sqrt{3}i$ son (en forma polar):

$2_{30º}\ 2_{120º}\ 2_{210º}\ 2_{300º}$

2. Sean $e_1 = (0,1,7)$, $e_2 = (-1,1,1)$, $e_3 = (2,-1,5)$, $e_4 = (7,-6,0)$ vectores de $\Re^3$.

Sea $E =< e_1, e_2, e_3, e_4 >$. Sea $v = (3,0,18)$.

a) Hallad la dimensión de E y una base A. ¿Pertenece v a E? En caso afirmativo, hallad las coordenadas en la base A.
b) Sea $w_1 = (-1,0,-6)$, $w_2 = (3,-2,4)$. $B = \{w_1, w_2\}$ es una base de E. Calculad la matriz de cambio de base de B a A y la de A a B.

<u>Solución:</u>

a) Calculemos el rango de la matriz de vectores: $rang\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ya que

todos los determinantes de orden 3 son nulos.

Así la dimensión de E es 2 y una base puede estar formada por los dos primeros vectores ya que contienen el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Así pues A={e_1, e_2}.

Para mirar si v pertenece a E resolvemos el sistema: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$

Este sistema tiene solución: x=3, y=-3. Por lo tanto v pertenece a E, y sus coordenadas en la base A son (3, -3).

b) Para hallar la matriz de cambio de base de B a A, llamemosla M, hay que expresar los vectores de la base de B en función de los de la de A.

Vamos, pues, a expresar w_1 en la base A. Para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$ Que tiene solución x=-1, y=1.

Para expresar w_2 en la base A resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ Que tiene solución x=1, y=-3.

Así tenemos que la matriz de cambio de base, M, es:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B podemos calcular directamente la inversa de M:

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{cases}$$

a) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro real a.
b) Resolved el sistema para el caso $a=2$.

Solución:

a) La matriz de coeficientes y la ampliada, A y A', son las siguientes:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \underbrace{2 \quad a \quad 0}_{A} & & & 2a \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculamos det(A) = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 2a-4$$

Que se anula para a=2

$\boxed{\text{CASO } a=2}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \underbrace{2 \quad 2 \quad 0}_{A} & & & 4 \end{array}\right)}_{A'}$$

Se observa que las dos primeras columnas son iguales. Por lo tanto todos los menores que las incluyan valdrán cero. Además, el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0$ también vale cero, por lo tanto rang(*A*')<3. Como que el menor de *A* $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces rang(*A*) = rang(*A*') = 2 < 3 = nº de incógnitas y, por lo tanto, es un SCI con 1 grado de libertad.

$\boxed{\text{CASO } a \neq 2}$. Rang(A)=Rang(A')=3 = nº de incógnitas. Por lo tanto es un SCD.

b) Para el caso *a* = 2 sabemos que se trata de un sistema compatible indeterminado con una incógnita libre y equivalente a

$$\left.\begin{array}{l} x \quad -z = 1-y \\ x \quad = 2-y \end{array}\right\}$$

Por lo tanto si cogemos la incógnita y como parámetro, obtenemos *x* = 2-*y* y *z* = *x*+*y*-1 = = 2-*y*+*y*-1= 1. Así los puntos solución son de la forma $\boxed{(x,y,z) = (2-y,y,1)}$

4. Sea f la aplicación lineal de $\Re^3$ en $\Re^3$ definida por

$$f(x,y,z) = (4x-6y, x-y, -3x+16y+3z).$$

a) Hallad la matriz de f en las bases canónicas.

b) Calculad el polinomio característico de f y los valores propios de f.

c) Estudiad si f diagonaliza.

d) Hallad una base de $\Re^3$ con el número máximo de vectores propios de f.

Solución:

a) Observemos que f(1,0,0)=(4,1,-3), f(0,1,0)=(-6,-1,16) y f(0,0,1)=(0,0,3). Estos vectores imagen ya están expresados en la base canónica. Por lo tanto, poniéndolos por columnas, obtenemos la matriz de f en las bases canónicas (ver Módulo 4, Sección 3).

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 16 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Recordemos el Módulo 4, Sección 7, la definición de polinomio característico de f. Desarrollando el determinante por la tercera columna obtenemos:

$$Q(t)=det(A-tI)=\begin{vmatrix} 4-t & -6 & 0 \\ 1 & -1-t & 0 \\ -3 & 16 & 3-t \end{vmatrix}=(3-t)\begin{vmatrix} 4-t & -6 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix}=$$
$$=(3-t)[(4-t)(-1-t)+6].$$

Operando, obtenemos:

$$Q(t)=(3-t)(t^2-3t+2)=(3-t)(t-2)(t-1)=(3-t)(2-t)(1-t).$$

Las raíces de este polinomio son 1, 2 y 3 con multiplicidad algebraica 1 (ver Módulo 4, Sección 8.1).

Los valores propios de f son el 1, el 2 y el 3, con multiplicidad algebraica 1.

c) Para ver si diagonaliza debemos comprobar que la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados (ver Módulo 4, Sección 8). Siempre que la multiplicidad algebraica es 1, entonces la dimensión del espacio vectorial generado por los correspondientes vectores propios asociados también es 1. Por lo tanto, para los tres valores propios, la multiplicidad de cada valor propio coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por sus vectores propios asociados. Esto quiere decir que f diagonaliza (ver Módulo 4, sección 8).

f diagonaliza porque la multiplicidad algebraica de los tres valores propios 1 coincide con la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores propios asociados.

d) Usamos ahora el Módulo 4, Sección 7, para hallar los vectores propios de f. Encontramos vectores propios de f de valor propio 1. Es decir, buscamos el núcleo de la matriz A-I. O sea, resolvemos el sistema (A-I)X=0:

$$(A-I)X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 16 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 3x-6y = 0, x-2y = 0, -3x + 16y + 2z = 0. La primera y la segunda son la misma ecuación salvo múltiple por constante. De las dos se deduce x = 2y. Sustituyendo en la tercera obtenemos: -6y + 16y + 2z = 0. Por lo tanto, 2z = -10y. O sea, z = -5y. Por lo tanto, los vectores solución son de la forma: (x, y, z) = (2y, y, -5y) = y (2,1, -5). En particular, (2,1, -5) es vector propio de f de valor propio 1

Ahora hallamos vectores propios de f de valor propio 2. Es decir, buscamos el núcleo de A-2I. O sea, resolvemos el sistema (A-2I)X=0:

$$(A-2\mathrm{I})X = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 16 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema 2x-6y = 0, x-3y = 0 y -3x + 16y + z = 0. Semejante a antes, la primera es dos veces la segunda, y por lo tanto, se puede obviar. De la segunda se deduce x = 3y. Sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos: -9y + 16y + z = 0. Por lo tanto, z = -7y. Los vectores solución son de la forma: (x, y, z) = (3y, y, -7y) = y (3,1, -7). En particular, (3,1, -7) es vector propio de f de valor propio 2

Encontramos ahora vectores propios de f de valor propio 3. Es decir, buscamos el núcleo de A-3E. O sea, resolvemos el sistema (A-3E) X = 0:

$$(A-3\mathrm{I})X = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 16 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema x-6y = 0, x-4y = 0 y -3x + 16y = 0. De la primera sale x = 6y y de la segunda x = 4y. Por lo tanto, 6y = 4y y esto implica y = 0. Como x = 6y, entonces x = 0. La variable z es libre. Así, los vectores solución son de la forma: (x, y, z) = (0, 0, z) = z (0, 0, 1). En particular, (0, 0,1) es vector propio de f de valor propio 3.

{(2, 1,- 5), (3, 1, -7), (0, 0, 1)} es una base de R^3 formada por vectores propios de f.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar alguno/s de los siguientes valores:

α	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	300º	315º	345º	360º
sen(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	0