solucion16-06.pdf

limagod

Álgebra

1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática, Multimedia y Telecomunicación
Universitat Oberta de Catalunya

Álgebra/ Matemáticas I

SOLUCIÓN EXAMEN 16/06/2012

Ejercicio 1:

Realiza los cálculos siguientes:

a) Simplifica la expresión siguiente: $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$

b) Calcula las raíces cuartas del complejo siguiente: $z = 8 + 8\sqrt{3}i$ (proporciona los ángulos en grados y los resultados en forma polar)

Solución:

a) Operamos con la expresión, recordando que $i^2 = -1$:

$$\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-2i+i^2} = \frac{1+2i-1}{1-2i-1} = \frac{2i}{-2i} = -1$$

b) Escribimos el complejo z en forma polar:

$$m = \sqrt{8^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = 16$$

$$\alpha = arctg\frac{8\sqrt{3}}{8} = arctg\sqrt{3} = 60º$$

Tenemos, por tanto, que $z = 8 + 8\sqrt{3}i = 16_{60º}$

Como nos piden las raíces cuartas, debemos hacer:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16_{60}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{60+360k}{4}} \quad \text{para k=0, 1, 2, 3}$$

Esto es, el módulo de las raíces es: $r = \sqrt[4]{16} = 2$

Los argumentos de las raíces son $\beta = \dfrac{60+360k}{4}$ para k=0, 1, 2, 3

- Si k=0, tenemos que $\beta_0 = 15º$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1 = 15º+90º = 105º$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2 = 15º+180º = 195º$
- Si k=3, tenemos que $\beta_3 = 15º+270º = 285º$

Por tanto, las cuatro raíces cuartas del complejo $z = 8 + 8\sqrt{3}i$ son:

$$2_{15º}, 2_{105º}, 2_{195º}, 2_{285º}$$

$$2_{15º}, 2_{105º}, 2_{195º}, 2_{285º}$$

Ejercicio 2:

Sean A, B y C los subespacios vectoriales de R^3 generados por los conjuntos de vectores siguientes:

$A = <(0,1,0),(0,-1,1),(0,a,-a^2)>, \ a \in R$

$B = <(0,-1,0),(0,0,1)>$

$C = <(1,0,2),(0,0,1)>$

a) Encuentra la dimensión de A en función de *a*. Encuentra las dimensiones de B y de C. Encuentra una base para cada subespacio vectorial.

b) Determina si el vector v=(0,3,-1) pertenece o no a A, a B y a C. En caso afirmativo, calcula sus coordenadas en les bases del apartado anterior.

c) Generan A y B el mismo subespacio vectorial? En caso afirmativo, encuentra la matriz de cambio de base de A a B y comprueba el resultado del apartado anterior. Generan B y C el mismo subespacio vectorial? Si es que sí, encuentra la matriz de cambio de base de B a C y comprueba el resultado del apartado anterior.

Solución:

a) Calculamos los rangos de las matrices:

Para A: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -a^2 \end{vmatrix} = 0$ pero encontramos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así la dimensión de A es 2 para a todo *a*. Como base podríamos usar los dos primeros vectores que son linealmente independientes (ya que contienen el menor anterior): $Base-A = \{(0,1,0),(0,-1,1)\}$

Para B: Podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así la dimensión de B es 2 y como base podríamos usar los dos vectores que lo definen: $Base-B = \{(0,-1,0),(0,0,1)\}$

Para C: Podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Así la dimensión de C es 2 y como base también podríamos usar los dos vectores que lo definen: $Base-C = \{(1,0,2),(0,0,1)\}$

b) Per al subespacio A y usando la base encontrada en el apartado a), podemos plantear el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ que nos da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 0=0 \\ x-y=3 \\ y=-1 \end{cases}$ que tiene por solución: x=2, y=-1. Así pues $v \in A$ y sus coordenadas son (2,-1).

Para el subespacio B y usando la base encontrada en el apartado a), podemos plantear el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ que nos da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 0=0 \\ -x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ que tiene por solución: x=-3, y=-1. Así pues $v \in B$ y sus coordenadas son (-3,-1).

Para el subespacio C y usando la base encontrada en el apartado a), podemos plantear el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ que nos da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x=0 \\ 0=3 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ que no tiene solución. Por tanto $v \notin C$.

c) Sabemos del apartado a) que la dimensión de A es 2 y la de B también. Esto no quiere decir que generen el mismo subespacio vectorial. Para comprobar si generan el mismo, como la dimensión de los dos es igual, habrá suficiente con comprobar si una base de A pertenece a B.

Así para (0,1,0) de la base de A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ que nos da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 0=0 \\ -x=1 \\ y=0 \end{cases}$ que tiene solución x=-1, y=0 y por tanto $(0,1,0) \in B$

Así para (0,-1,1) de la base de A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ que nos da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 0=0 \\ -x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ que tiene solución x=1, y=1 y por tanto (0,-1,1) pertenece a B.

Por tanto A y B generan el mismo subespacio vectorial.

Para calcular la matriz de cambio de base de A a B, pondremos los vectores de la base de A como combinación lineal de los de la base de B. Esto lo acabamos de resolver, por tanto:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y podemos comprobar el resultado del apartado anterior haciendo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podemos decir directamente que B y C no generan el mismo subespacio vectorial ya que hemos visto un vector (v) que pertenece a B y no pertenece a C.

Ejercicio 3:

a) Discutid el siguiente sistema según los valores del parámetro *k:*

$$\begin{cases} x+ky=0 \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z+kt=2 \\ x+y+z+t=k \end{cases}$$

b) Resolved el sistema para $k=-4$, en el caso que tenga solución.

Solución:

a) Para discutir el sistema utilizaremos el teorema de Rouché-Frobenius. Necesitamos calcular los rangos de la matriz del sistema (M) y de la matriz ampliada (MA).

$$M=\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } |M|=\begin{vmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-k & k & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1-k)^3$$

Por lo tanto tenemos que el determinante de la matriz M sólo se anula cuando $k=1$.

La matriz *M* tiene rango 4 para todos los valores de *k*, excepto para $k = 1$ que tiene rango 3.

Para $k = 1$ podemos comprobar también que la matriz ampliada tiene rango 4 y la incompatibilidad del sistema por la incoherencia de la dos últimas ecuaciones.

Por lo tanto;

- Para $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado puesto que $rango(M) = rango(MA) = 4$.
- Para $k = 1$ el sistema es incompatible puesto que $3 = rango(M) < rango(MA) = 4$

b) Para $k = -4$, el sistema es compatible determinado. El sistema es:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ x + y - 4z = 1 \\ x + y + z - 4t = 2 \\ x + y + z + t = -4 \end{cases}$$

lo escribimos:

$$\begin{cases} x + y + z + t = -4 \\ x - 4y = 0 \\ x + y - 4z = 1 \\ x + y + z - 4t = 2 \end{cases}$$

Reducimos la matriz por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Sustituimos: 2fila por 2fila – 1fila, 3 fila por 3fila – 1fila, 4fila por 4fila – 1fila

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

Así tenemos:

$$t = \frac{-6}{5}$$

$$z = \frac{-5-t}{5} = \frac{-19}{25}$$

$$y = \frac{-4-t-z}{5} = \frac{-51}{125}$$

$$x = -4-t-z-y = \frac{-204}{125}$$

Ejercicio 4:

Consideremos el polígono P de vértices A(1,0), B(3,0), C(4,2) y D(2,1) y de aristas AB, BC, CD y DA.

a) Calculad las coordenadas del polígono resultante de aplicar a P un escalage uniforme de razón 3 des del punto (1,0).
b) Calculad las coordenadas del trapecio resultante de aplicar a P un giro d ángulo $\pi/4$ (o sea, 45º en sentido antihorario) alrededor del origen.

Solución:

a) Para hacer un escalage des del punto (1,0) primero debemos buscar la translación que convierte el punto (1,0) en el origen. Es la matriz T de la translación de vector (-1,0):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

después tenemos que calcular la matriz E del escalage de razón 3:

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente debemos deshacer la primera translación, es decir, considerar la inversa de T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Multiplicando las tres matrices en el orden que toca (des de la derecha hasta la izquierda) obtenemos:

$$T^{-1} \cdot E \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Por tanto, los transformados de los puntos A(1,0), B(3,0), C(4,2) y D(2,1) son:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sea, son los puntos: A'(1,0), B'(7,0), C'(10,6) y D'(4,3).

b) La matriz del giro de ángulo $\pi/4$ alrededor del origen es

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues, el transformado de A(1,0) es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

El transformado de B(3,0) es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

El transformado de C(4,2) es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El transformado de D(2,1) es:

.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sea los puntos:. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$