Grafos sin espinas

(2&3) Fundamentos de grafos & Recorridos

V 0.6 2024_10_13

Aprende sin espinas
con @carlos_cactus

Este documento solo pertenece a la voluntad de ser compartido.
Sócrates se equivocaba. El conocimiento no es lo único que crece al compartirse:
La alegría también.

A la inspiración del bucle_infinito,
al Cibergrupo y al tHash_A, por su amistad,
y sobre todo, a quienes dicen "pero quiero"
cuando sienten "no puedo".

¡Un saludo sin espinas!
@carlos_cactus :D

Y si quieres saber más:
¡Encuéntrame en Telegram como @carlos_cactus o habla con Espinito, el bot Sin Espinas, en @GestionSinEspinasBot.

Únete a la comunidad de Telegram Sin Espinas y no te pierdas nada!

Deja de preocuparte por aprobar y ¡Aprende sin Espinas!

Índice

1. FUNDAMENTOS DE GRAFOS

1.1. CARACTERIZACIÓN

1.1.1. Concepto de Grafo

Un grafo G está formado por 2 conjuntos de objetos:
- Un conjunto de vértices V no nulo y finito.
- Un conjunto de aristas E.

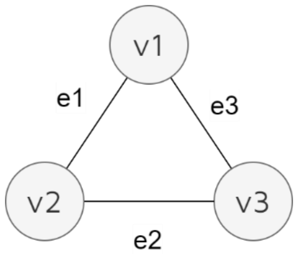
El grafo G se define mediante la relación entre ambos conjuntos V y E.

Habitualmente, se denota el conjunto de aristas por E (del inglés, *edge*, representados por segmentos) mientras que se reserva A para el conjunto de arcos (aristas dirigidas, del inglés, *arc*, representados como flechas orientadas).

El conjunto de vértices V debe ser finito y NO NULO, es decir, no puede estar vacío.

Un grafo G se denota por el par ordenado: G = (V,E)
También se puede escribir: G(V,E)

EJEMPLO
Se tiene el grafo G:



V = { v1, v2, v3 }
E = { e1, e2, e3 }

Nótese que, a su vez, el conjunto de aristas E está formado por parejas de vértices que resultan del producto cartesiano de V x V, es decir, de unos vértices con otros dentro del conjunto dado.

E = { e1, e2, e3 } = {{v1,v2},{v2,v3},{v3,v1}}

Es decir: e1 = {v1,v2} e2 = {v2,v3} e3 = {v3,v1}

¡Esta web va MUY BIEN para dibujar grafos!... excepto cuando hay lazos o aristas múltiples.

Así que yo utilizo diagrams.net : P

Cuando se representan en el plano, la posición de los vértices no es significativa, tan solo es relevante su composición topológica, es decir, las relaciones entre vértices y aristas.

1.1.2. Definición de vértice

Un vértice es la unidad fundamental que integra un grafo.
Son los extremos de las aristas.

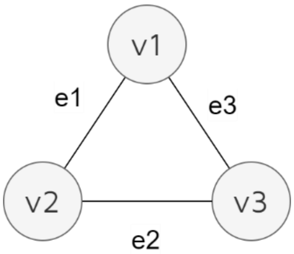
1.1.3. Definición de arista

Cada arista e ∈ E se define como un par ordenado $(v_1, v_2) \in V \times V$ que la define a través del producto cartesiano de los 2 vértices del conjunto V que une y tiene por extremos.

EJEMPLO

En el caso anterior:

e1 = (v1,v2)
e2 = (v2, v3)
e3 = (v1,v3)



1.1.4. Propiedades y clasificación de vértices

a) Grado de un vértice g(v) en grafos no dirigidos

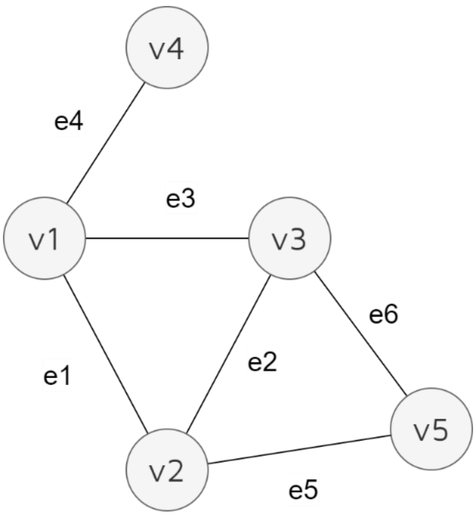
El grado de un vértice $v \in V$ es igual al número de aristas que lo tienen como extremo, es decir, el número de aristas que INCIDEN sobre él y se denota por g(v).

Coincide, por tanto, con el número de vecinos de un vértice.
El grado g(v) nunca puede exceder el ORDEN n (número de vértices) del grafo al que pertenece:

$$0 \leq \ g(v) \leq n - 1$$

Un vértice de grado 0 g(v) = 0 es un vértice AISLADO.

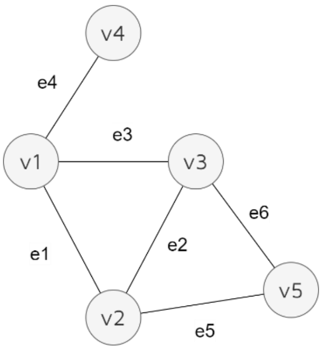
EJEMPLO



Los grados de los vértices de G son:
g(v1) = g(v2) = g(v3) = 3
g(v5) = 2
g(v4) = 1

Además, se define:
- El grado MÁXIMO de G como Δ(G) como el MAYOR de entre sus grados.
- El grado MÍNIMO de G como δ(G) como el MENOR de entre sus grados.

EJEMPLO



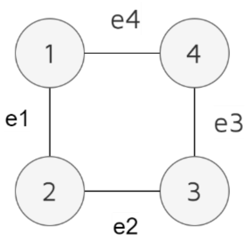
Entonces, en G:
Δ(G) = g(v1) = g(v2) = g(v3) = 3
δ(G) = g(v4) = 1

b) Adyacencia de vértices (vértices vecinos u ≈ v o incidentes)

Dos vértices son adyacentes si están conectados por una arista:

$$v1\ y\ v2\ son\ VECINOS: \ v1, v2\ \in V \Leftrightarrow \exists\ e \in E\ |\ e = (v1, v2) \in V \times V$$

EJEMPLO

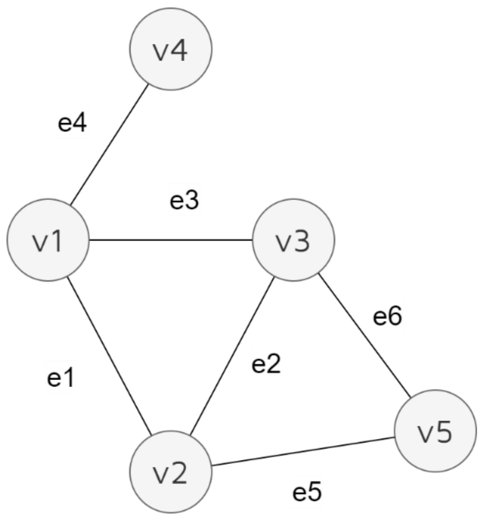


1 y 2 son vértices vecinos ya que existe e1.
3 y 1 NO SON vértices vecinos ya que no hay arista que los conecte.

La adyacencia de vértices u y v se denota como u ≈ v.
Se dice que 2 o más vértices son incidentes si están conectados por una arista, es decir, si son vecinos.

c) Vértice par e impar

Se define:
- Un vértice es PAR si tiene grado par (inciden sobre él un número par de aristas).
- Un vértice es IMPAR si tiene grado impar (inciden sobre él un número impar de aristas).



EJEMPLO
En el grafo G:
v5 es un vértice PAR (inciden sobre él 2 aristas).
v2 es un vértice IMPAR (inciden sobre él 3 aristas).

1.1.5. Propiedades y clasificación de aristas

a) Aristas adyacentes

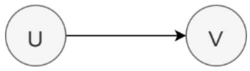
Se dice que 2 o más aristas son adyacentes si comparten uno de sus extremos.
En caso de que compartan ambos, no se trata de aristas adyacentes, sino de aristas múltiples.

b) Orientación: Aristas y arcos

Se distinguen 2 tipos de aristas, según estén o no estén dirigidas, es decir:

- Para una arista no dirigida {a,b} se tiene un conjunto de 2 puntos de modo que:
$$\{a,b\} = \{b,a\}$$
- Para una arista dirigida o ARCO se tiene un PAR ORDENADO de 2 puntos de modo que:
$$(a,b) \neq (b,a)$$

Tipos de aristas según su orientación:

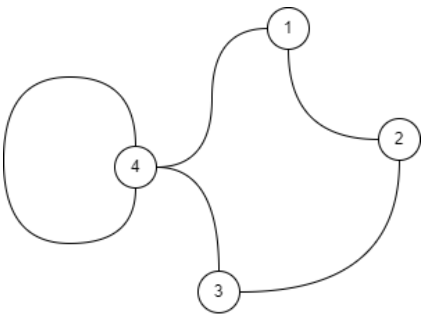
Tipo de arista	¿Está orientada?	Se representa	Se escribe, entre u y v
Arista (edge)	No orientada	Segmento 	{u,v} conjunto
Arco (arc)	Sí orientada	Flecha 	(u,v) para ordenado

La notación <a,b> es sinónimo de (a,b) es decir, sirve para el ARCO (arista dirigida), pero no se utiliza en este manual.

c) Lazo o bucle

Si una arista incide sobre el mismo vértice del que sale, entonces se denomina lazo o bucle.
Los bucles caracterizan a los PSEUDOGRAFOS y los distinguen de los GRAFOS SIMPLES.

Una LAZO o BUCLE es una arista de la forma e = {v,v} es decir, incide sobre el mismo vértice del que sale: tiene por ambos extremos el mismo vértice.

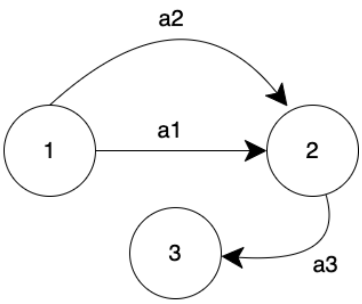


Por ejemplo, en el grafo G* se observa una arista que sale del nodo 4 e incide en él.

La arista que sale y regrea al vértice 4 es un LAZO o BUCLE.

d) Aristas múltiples

Dos o más aristas son MÚLTIPLES si conectan los 2 mismos vértices.
La presencia de aristas múltiples caracteriza un grafo como MULTIGRAFO.



En el grafo G7 se observa que la arista a1 y la arista a2 conectan los mismos 2 vértices:

a1 = (v1,v2)
a2 = (v1,v2)

1.1.6. Propiedades de grafos simples

I. Orden de un grafo n = |V| = #V

El orden n del grafo G es su número de vértices. Corresponde con el cardinal del conjunto V. Es decir:

$$Orden\ de\ G = n = |V| = nº\ de\ vértices$$

Por definición, el conjunto de vértices V de un grafo G = (V,E) no puede ser nulo. Por tanto:

$$n \geq 1$$

En el caso anterior: Orden de G* = |V| = #V = 3

II. Grado máximo Δ(v) de un grafo

Se cumple, para todo grafo simple G = (V,E), la relación entre su orden n (número de vértices) y el grado máximo de sus vértices:

$$0 \leq g(v) \leq n - 1$$

Esta desigualdad permite, por ejemplo, descartar secuencias de grados incompatibles con la construcción de un grafo.

III. Medida de un grafo |E| = m

La medida de un grafo, denotada por |E| o bien m, es su número de aristas, coincide con el cardinal del conjunto #E y se calcula a partir de la suma de los GRADOS DE LOS VÉRTICES según:

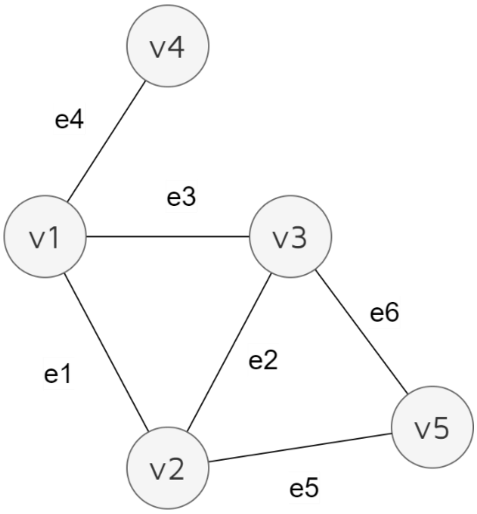
$$Medida = m = |E| = nº\ de\ aristas = \frac{\sum g(v)}{2}$$

El recuento de grados considera CADA ARISTA 2 VECES, lo cual se compensa dividiendo entre 2.
Por definición, el conjunto E de aristas de un grafo simple g = (V,E) sí puede ser nulo. Por tanto:

$$m \geq 0$$

EJEMPLO

Cálculo de la medida de un grafo simple:



El grafo G presenta 6 aristas: E = { e1,e2,e3,e4,e5,e6 }.

Es decir #E = |E| = 6.

Su lista de grados es:

$g(v_1) = 3$

$g(v_2) = 3$

$g(v_3) = 3$

$g(v_4) = 1$

$g(v_5) = 2$

Por tanto:

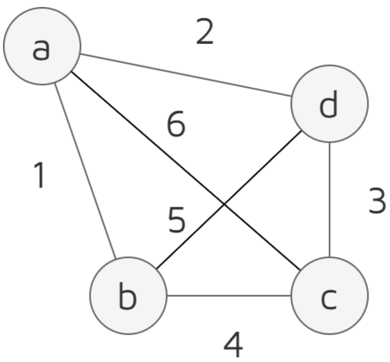
$$m = |E| = \frac{\sum g(v)}{2} = \frac{3+3+3+1+2}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

IV. Medida máxima de un grafo simple

El número máximo de aristas se alcanza para un grafo cuando cada vértice está conectado a cada otro. Es decir, el número máximo de aristas es:

$$m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

EJEMPLO



Cálculo del número máximo de aristas de un grafo simple:

Se considera un grafo completo de orden 4 (cada vértice es de grado 3). Se tiene:

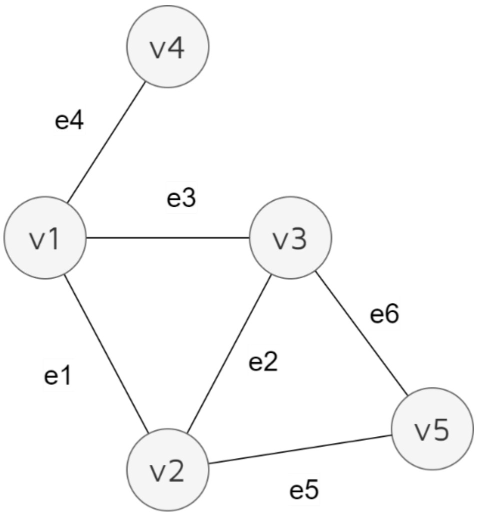
$$m = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot (4-1)}{2} = \frac{12}{6} = 6$$

No puede haber un grafo SIMPLE con más aristas, ya que cada vértice está conectado a cada otro.

V. Secuencia de grados

Una **secuencia de grados** es una serie no necesariamente ordenada de números enteros no negativos (es decir, puede haber vértices de grado 0 AISLADOS), que definen los grados de un grafo.

EJEMPLO



La secuencia 3,3,3,1,2 es compatible con los grados del grafo G.

Se observa:
$g(v_1) = 3$
$g(v_2) = 3$
$g(v_3) = 3$
$g(v_4) = 1$
$g(v_5) = 2$

EJEMPLO

Una secuencia como 1,2,3,5 es incompatible con la construcción de un grafo simple: para que haya 5 aristas incidentes en un solo vértice, deben proceder de 5 vértices distintos, mientras que en la secuencia solo hay 4 números, de modo que el orden n debería ser 4, lo cual impide la existencia de la quinta arista.

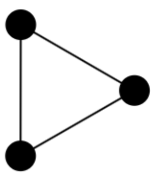
VI. Regularidad

Un grafo es REGULAR si TODOS sus vértices son del mismo grado.
Se denominan grafos r-regulares, donde r es el grado común a TODOS los vértices.

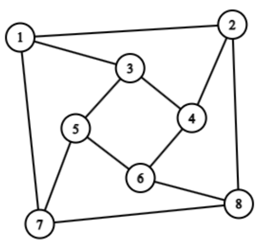
EJEMPLO

Grafo 1-regular

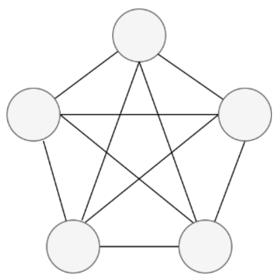
Grafo 2-regular



Grafo 3-regular



Grafo 4-regular



Todos los grafos r-regulares con r > 2 son CÍCLICOS.

VII. Fórmula de los grados

Todo grafo simple G cumple la fórmula de los grados de Euler, que relaciona la suma de los grados de cada vértice con su medida m (su número de aristas).

Es habitual que se lea de varias formas:

$$\sum_{v\in V}^{k} g(v) = 2 \cdot m = 2 \cdot |A| = 2 \cdot \#A$$

La suma de los grados de un grafo simple equivale al doble del número de aristas que tiene.

EJEMPLO

A partir de la secuencia de grados 2,3,3,1,1,2 se desea conocer el número de aristas del grafo asociado, cuya representación se desconoce.

Basta con aplicar la fórmula de los grados:

$$m = |A| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V}^{k} g(v) = \frac{1}{2}(3+3+2+2+1+1) = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6\, aristas$$

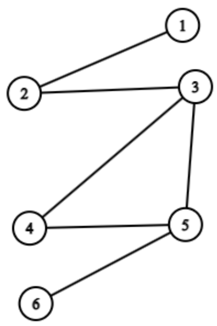
VIII. Número de vértices de grado impar

Todo grafo G = (V,E) contiene, necesariamente, un NÚMERO PAR de vértices de grado IMPAR.

EJEMPLO

El grafo G tiene por grados:

$$g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3, g(4) = 2, g(5) = 3, g(6) = 1$$



Entonces, escribiendo el conjunto de vértices V como la unión de los conjuntos de los vértices de grado PAR P = {2,4} con el conjunto de vértices de grado IMPAR S = {1,3,5,6} se DEBE cumplir que $|S| \in impar$.

Se puede demostrar para cualquier grafo G viendo su conjunto de vértices V como unión de 2 conjuntos de vértices: los de grado par P y los de grado impar S:

$$V = P \cup S$$

A partir de la fórmula de los grados, para un grafo de orden n y medida m:

$$2 \cdot m = \sum_{v \in V}^{n} g_n(v) = \sum_{v \in P}^{i} g_i(v) + \sum_{v \in S}^{j} g_j(v)$$

Siendo #V = n, #P = i y #S = j, que es el cardinal que se desea caracterizar.

Como P solo contiene vértices de grado PAR, la suma de sus grados es la suma de i números PARES de forma 2k (siendo k un entero no negativo compatible con la construcción del grafo):

$$\sum_{v \in P}^{i} g_i(v) = \sum_{v \in P}^{i} i \cdot 2k$$

En S solo hay vértices de grado IMPAR, cuya suma de grados es la suma de j números IMPARES de la forma 2k + 1 (siendo k un entero no negativo compatible con la construcción del grafo):

$$\sum_{v \in S}^{j} g_j(v) = \sum_{v \in S}^{j} j \cdot (2k + 1)$$

Entonces, por propiedades del sumatorio:

$$2 \cdot m = 2 \cdot \left(\sum_{v \in P}^{i} i \cdot 2k + \sum_{v \in S}^{j} i \cdot 2k \right) + \sum_{v \in S}^{j} 1$$

Pero se nota que $\sum_{v \in S}^{j} 1 = |S|$ ya que suma 1 por cada vértice impar. Entonces:

$$2 \cdot m = 2 \cdot \left(\sum_{v \in P}^{i} i \cdot 2k + \sum_{v \in S}^{j} i \cdot 2k \right) + |S|$$

De lo cual:

$$|S| = \underbrace{2m}_{es\ par} \underbrace{- 2 \cdot \left(\sum_{v \in P}^{i} i \cdot 2k + \sum_{v \in S}^{j} i \cdot 2k \right)}_{es\ par}$$

Y la resta de 2 números pares resulta siempre en otro número par. Por tanto, el NÚMERO DE VÉRTICES DE GRADO IMPAR ES SIEMPRE PAR.

1.1.7. Subestructura de un grafo

a) Concepto de subgrafo generado (o subgrafo inducido)

Se considera un grafo G = (V,E).

Se selecciona un subconjunto V' del conjunto de vértices V y un subconjunto E' de aristas de E. Se identifica entonces $\langle G' \rangle$ como SUBGRAFO GENERADO o INDUCIDO por el conjunto V' en G si se cumple:

- $V' \subseteq V$ Es decir, todo vértice de $\langle G' \rangle$ se encuentra en G.
- $E' = \{\{u,v\} \in E \; y \; u,v \in V\}$ Es decir, toda arista de $\langle G' \rangle$ se encuentra en G.

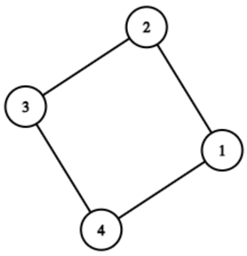
Es decir, un subgrafo $\langle G' \rangle$ está integrado por un subconjunto V' de los vértices V del grafo G y un subconjunto E' de las aristas E que los conectan en G.

En general, vértices no adyacentes en G NUNCA serán adyacentes en su subgrafo generado $\langle G' \rangle$, ya que $E' \subseteq E$. O sea, en el subgrafo inducido $\langle G' \rangle$ no tienen cabida aristas distintas de las que hay en el grafo G.

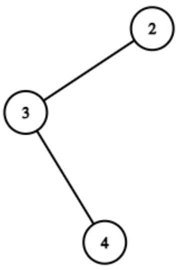
En particular, vértices adyacentes en G PUEDEN ser no adyacentes en su subgrafo $\langle G' \rangle$, en el caso que la artista que los une no haya sido seleccionada $E' \subset E$. O sea, que en el subgrafo $\langle G' \rangle$ se puede ver la ausencia de aristas presentes en el grafo G.

Las aristas que hay en E' se denominan ARISTAS PERSISTENTES entre el grafo G y el subgrafo $\langle G' \rangle$ generado por V' en

EJEMPLO
Subgrafo generado



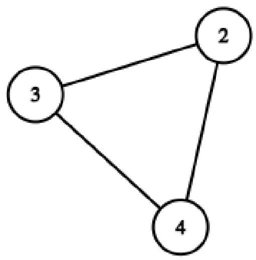
Se tiene el grafo G definido por:
$V = \{1,2,3,4\}$
$E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}$



Se considera el subgrafo $\langle G' \rangle$ inducido por {1,2,3} en G:
$V' = \{2,3,4\}$
$E' = \{\{2,3\},\{3,4\}\}$

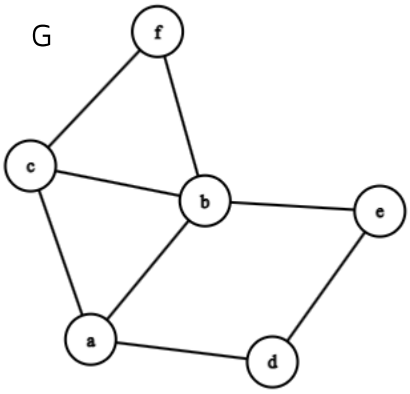
Por ejemplo, el siguiente grafo G* NO ES SUBGRAFO de G:
$V' = \{2,3,4\}$
$E'' = \{\{2,3\},\{3,4\},\{2,4\}\}$

Ya que la arista {2,4} no pertenece al conjunto E de G.

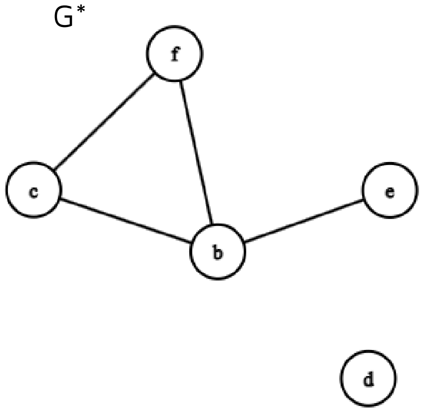


EJEMPLO

G



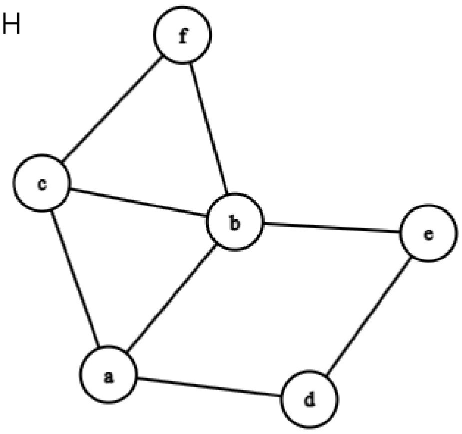
G*



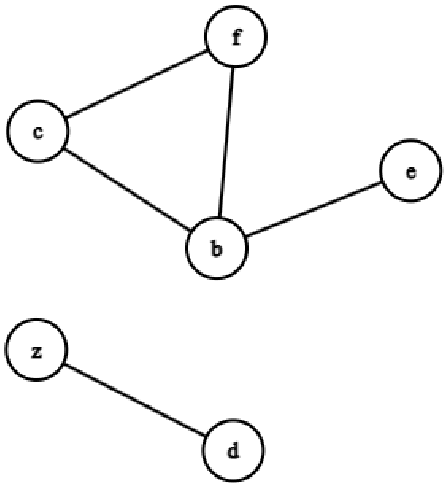
El grafo $\langle G *\rangle$ es subgrafo inducido por V del grafo G*, ya que todos sus vértices se encuentran en V y todas sus aristas en E, aunque no se encuentren en el subgrafo $\langle G *\rangle$ todas las aristas de E ni todos los vértices de V.

Sin embargo, el grafo $\langle H *\rangle$ no es subgrafo inducido de H ya que el vértice z no se encuentra en su conjunto de vértices ni la arista {z,d} está en el conjunto de aristas original.

H



$\langle H *\rangle$



b) Subgrafo de expansión (o subgrafo GENERADOR)

Un subgrafo G’ generado o inducido en G de la forma G’ = (V,E) satisface:

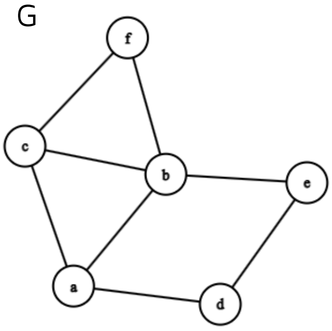
$$V' = V \text{ } y \text{ } E' \subseteq E$$

Un subgrafo GENERADOR o subgrafo DE EXPANSIÓN de G, denotado por G’, es un caso particular de subgrafo inducido. Se define como G’ = (V’,E’) de acuerdo con:

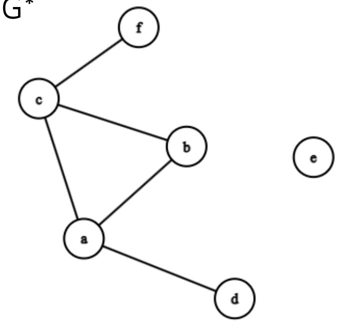
- $V' = V$ Es decir, G’ presenta EXACTAMENTE LOS MISMOS VÉRTICES que G.
- $E' \subseteq E$ Es decir, toda arista de G’ se encuentra en G.

EJEMPLO

G



G*



El grafo G* es grafo generador de G ya que presenta el mismo conjunto de vértices y TODAS las aristas presentes en el subgrafo generador G* se observan en el grafo G.

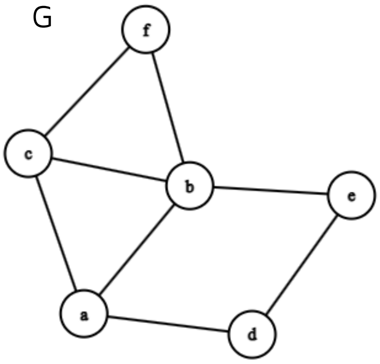
c) Grado de vértice de subgrafo

El grado de un vértice v de un subgrafo G’ inducido de G o generador se denota por $g_{G'}(v)$.

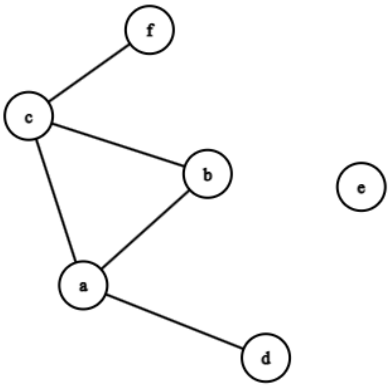
EJEMPLO

En el grafo G se ve g(b) = 4
Sin embargo, en el subgrafo H generador de G se observa que $g_H(b) = 2$

G

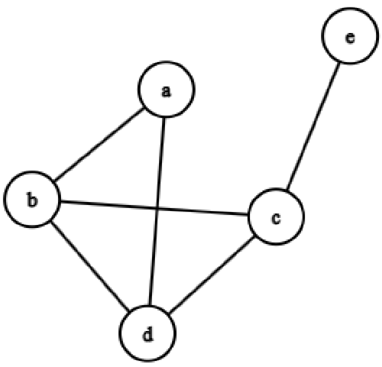


H



1.2. Clasificación de grafos simples

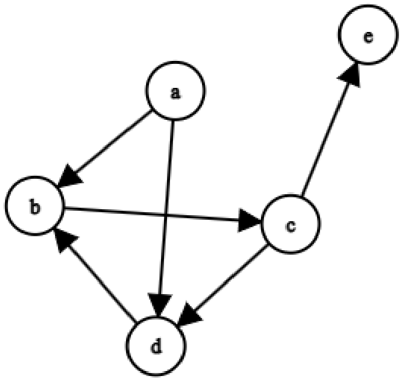
1.2.1. Grafo simple



Un grafo es simple si no contiene ninguna arista múltiple ni ningún bucle.

Dos o más aristas son múltiples si conectan los mismos 2 vértices entre sí.

Un bucle o lazo es una arista cuyos 2 extremos son el mismo vértice.



El grafo G es simple, pues no contiene lazos ni arcos múltiples.

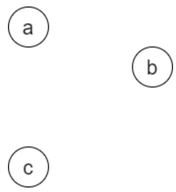
Un grafo simple PUEDE ESTAR ORIENTADO (o sea, ser DIRIGIDO).

9.2.1. Grafo nulo Nn

Un grafo es NULO N_n de orden $n \geq 1$ cuando no aristas.

Se define como $N_n = (V,\emptyset)$ mediante:
- El orden n (n vértices)
- La medida m = 0 aristas.

EJEMPLO



Grafo NULO de orden 3, denotado por N_3

9.2.2. Grafo trivial T_0 y T_1

Un grafo es trivial si tiene 0 aristas.
Puede tener 0 o bien 1 vértices.
Por tanto, solo hay 2 grafos triviales:

El grafo trivial de orden 0 $\quad T_0 = (\emptyset,\emptyset)$
El grafo trivial de orden 1 $\quad T_0 = (V,\emptyset)$ con #V = 1

EJEMPLO
El grafo trivial de 1 vértice corresponde con el grafo nulo de orden 1: $T_1 = N_1$

9.2.3. Grafo ciclo C_n

El grafo ciclo de orden n (necesariamente con $n \geq 3$) se denota por C_n y se define como C_n = (V,E) de acuerdo con:

$$V = \{v_1, v_2, \dots v_{n-1}, v_n\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$$

Formalmente:

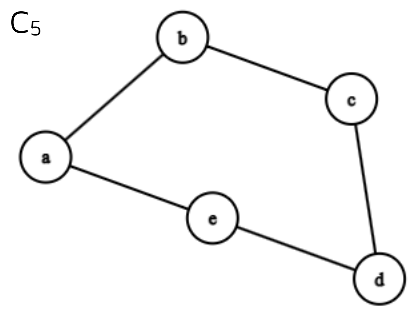
$$E = \{\{v_i, v_{i+1}\}: i = 1,2, \dots n-1\} \cup \{v_n, v_1\}$$

Es decir, es un camino simple cerrado sobre sí mismo, de modo que en su recorrido no se repite vértice alguno, excepto el primero, que conecta con el último.
Nótese que su orden n y su medida m coinciden:

$$n_{C_n} = m_{C_n}$$

La supresión de cualquier arista del grafo ciclo C_n da lugar al grafo trayecto T_n.
La adición de una arista entre los extremos del grafo trayecto T_n da lugar al grafo ciclo C_n.
La adición de un vértice de grado n – 1 lo convierte en el grafo RUEDA R_{n+1}

EJEMPLO



Grafo ciclo:

El grafo G se trata del ciclo de orden 5 denotado por C_5.

9.2.4. Grafo trayecto T_n

El grafo trayecto de orden n (necesariamente con n ≥ 2) se denota por T_n y se define como T_n = (V,E) de acuerdo con:

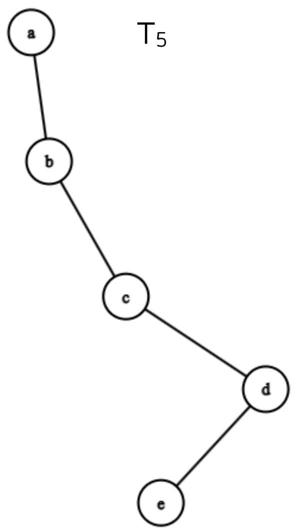
$$V = \{v_1, v_2, \dots v_{n-1}, v_n\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots \{v_{n-1}, v_n\}\}$$

Formalmente:

$$E = \{\{v_i, v_{i+1}\}: i = 1,2, \dots n-1\}$$

La supresión de cualquier arista del grafo ciclo C_n da lugar al grafo trayecto T_n.
La adición de una arista entre los extremos del grafo trayecto T_n da lugar al grafo ciclo C_n.

EJEMPLO



Grafo trayecto:
El grafo que se presenta es el trayecto de orden 5 denotado por T_5.

9.2.5. Grafo completo

a) Concepto de grafo completo

Un grafo K_n es COMPLETO de orden n si alberga todas las aristas posibles.
Se define K_n = (V,E) de acuerdo con:

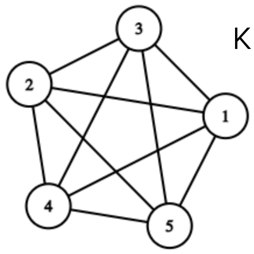
- Orden n = |V| vértices.
- MEDIDA (número de aristas) de un grafo COMPLETO de n vértices K_n es:

$$|E| = Medida = \frac{n(n-1)}{2}$$

O lo que es lo mismo:

$$|E| = Medida = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}$$

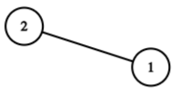
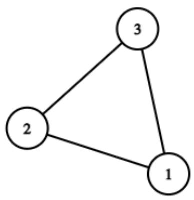
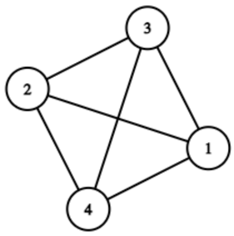
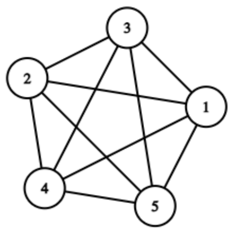
EJEMPLO
Por ejemplo, el grafo G es COMPLETO de orden 5, es decir, K_5:



K_5

b) Propiedades de grafos completos

Si se analiza el número de aristas y el grado en función del número de vértices u ORDEN de los primeros grafos completos, se observa:

Grafo		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Representación						
Número de vértices	n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
Número de aristas	$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$	0	1	3	6	10
Grado	$n-1$	0	1	2	3	4

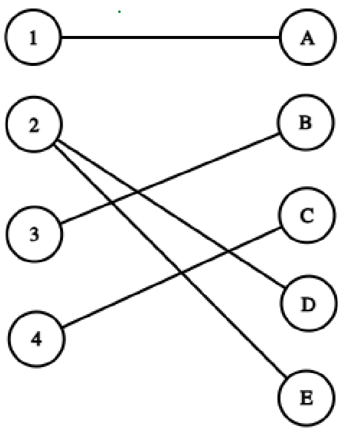
9.2.6. Grafo bipartito

a) Definición de grafo bipartito

Un grafo G=(V,E) es bipartito o bipartido si cumple simultáneamente 2 condiciones:

- Su conjunto de vértices V se puede obtener como la unión DISYUNTA de otros dos conjuntos V_1 y V_2.

- Sus aristas SOLO conectan elementos de V_1 con elementos de V_2, es decir, NO CONECTAN elementos de V_1 entre ellos ni elementos de V_2 entre ellos.



Es decir:

$$V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$$
$$\{u, v\} \in E, u \in V_1 \Leftrightarrow v \in V_2$$

EJEMPLO

El grafo G es BIPARTIDO, pues sus vértices se pueden observar como la unión disjunta de V_1 = {1,2,3,4} y V_2 = {A,B,C,D,E}.

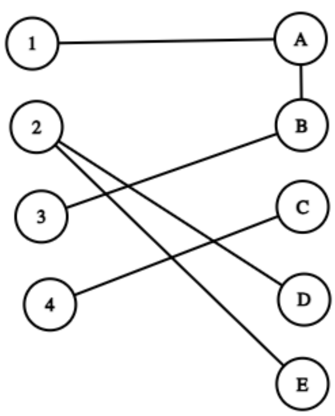
Además, no hay aristas que conecten elementos de V_1 entre ellos ni de V_2 entre ellos.

EJEMPLO

El grafo H NO ES bipartido para los mismos conjuntos V_1 y V_2 que G, ya que existe una arista entre vértices de V_2.

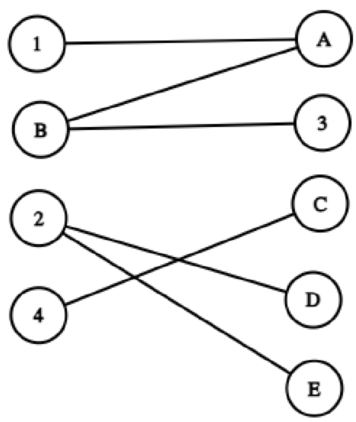
Para considerar H bipartido, los conjuntos V_1 y V_2 deberían modificarse como (visto en H'):

H



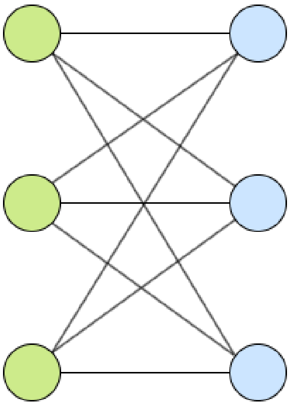
V_1' = {1,B,2,4} y V_2' = {A,3,C,D,E}, que NO SON los conjuntos presentados inicialmente, y que dotan al grafo H' resultante de carácter bipartito:

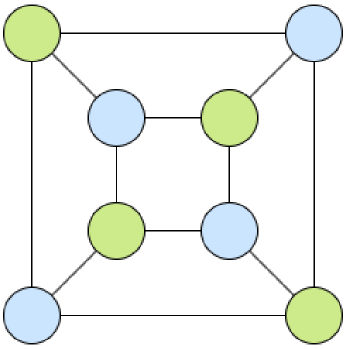
H'



b) Ciclos en grafos bipartitos

En un grafo bipartito SOLO HAY CICLOS DE LONGITUD PAR.





O lo que es lo mismo, NINGUNO DE SUS CICLOS tiene LONGITUD IMPAR.

En un grafo bipartito, vértices vecinos pertenecen a particiones de V distintas. Si un ciclo fuera de longitud IMPAR, sus extremos, que serían de particiones distintas, estarían conectados.

c) Grafo bipartito completo $K_{n,m}$

Un grafo bipartito completo $K_{n.m}$ es un grafo bipartito G = (V,E) de modo que:

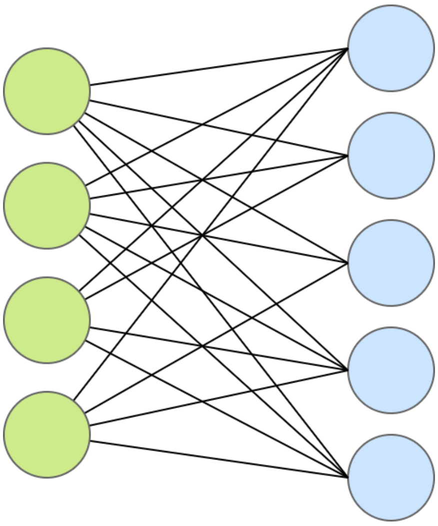
$$V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

$$tal\ que\ |V_1| = n, |V_2| = m$$

Que presenta TODAS las aristas posibles, es decir:

- CADA VÉRTICE de V_1 conecta con TODOS los vértices de V_2.
- CADA VÉRTICE de V_2 conecta con TODOS los vértices de V_1.

EJEMPLO
Grafo bipartito completo $K_{4,5}$



O sea, todos los vértices de V_1 son adyacentes a todos los de V_2 y viceversa:

$$E = \left\{\{u, v\} \,\middle|\, u \in V_1, v \in V_2\right\}$$

El orden del grafo bipartito completo es:

$$|V| = |V_1| + |V_2| = n + m$$

La medida de un grafo bipartito completo es:

$$|E| = n \cdot m$$

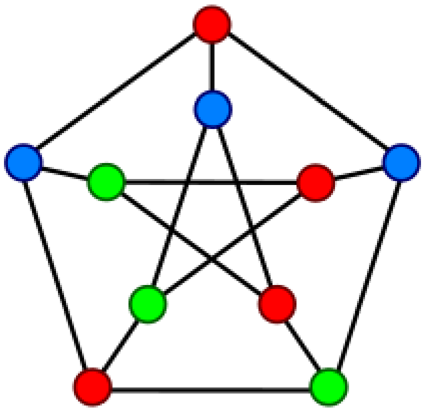
Los grados de sus vértices cumplen:

- Todos los vértices de V_1 son de grado n
- Todos los vértices de V_2 son de grado m

d) Grafo k-partido y k-partido completo

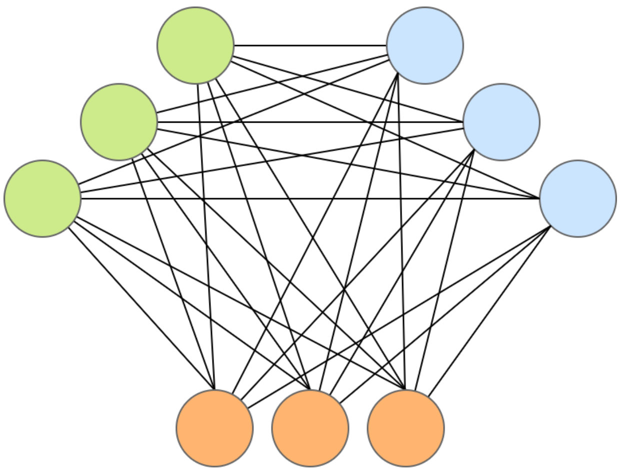
En un grafo k-partido se tienen k particiones de vértices cuyas cardinalidades son $n_1, n_2, n_3 \dots n_k$ de modo que las aristas NUNCA conectan vértices de la misma partición.

Si cada vértice de cada partición es adyacente a cada vértice de cada otra partición, se dice que el grafo es k-partido completo. Se denota por $K_{n_1,n_2 \dots n_k}$.



EJEMPLO
El denominado grafo de Petersen es 4-partito, de modo que bastan 4 colores para definir particiones de sus vértices de modo que ningún vértice esté conectado con ninguno de la MISMA partición.

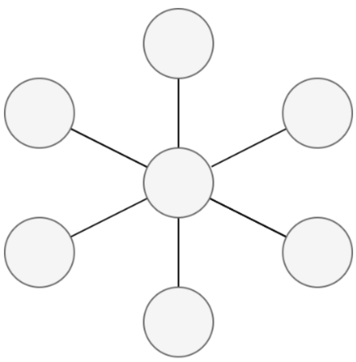
O sea, que cada vértice solo conecta con vértices de otro color (no hay 2 vértices del mismo color conectados por una arista).



EJEMPLO

Grafo tripartito completo.

e) Grafo estrella E_n



El grafo estrella de orden n (con n ≥ 3 necesariamente) se denota por E_n y es el grafo bipartito completo $K_{1,n-1}$ y se define de acuerdo con:

- Su orden es n
- Su medida es n – 1.

EJEMPLO
Grafo estrella de orden 6 denotado por E_5

9.2.7. Grafo rueda R_n

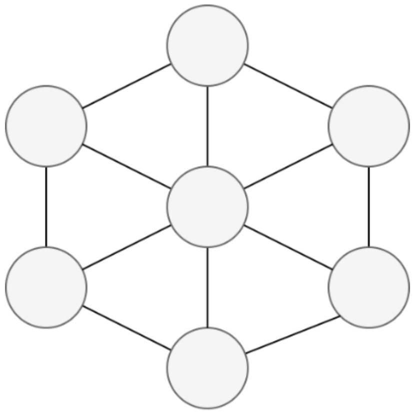
El grafo rueda de orden n (con n ≥ 4 necesariamente) se denota por R_n y se define por 2 propiedades:

- Tener 1 vértice de grado n – 1.
- Si se suprime ese vértice de grado n – 1, se obtiene un ciclo C_{n-1}.

Además:

- Su orden es n.
- Su medida es 2(n – 1).

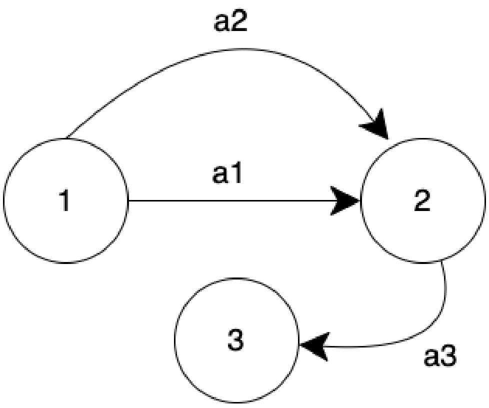
EJEMPLO
Grafo rueda de orden 7.



1.3. Extensión de grafos simples: multigrafos y pseudografos

1.3.1. Multigrafo

Un grafo es multigrafo si contiene alguna ARISTA MÚLTIPLE, es decir, dos mismos vértices conectados mediante más de una arista.



EJEMPLO

El MULTIGRAFO G se escribe como:

$$V = \{1,2,3\}$$

$$A = \{a1, a2, a3\} = \{(1,2), (1,2), (2,3)\}$$

Algunos autores consideran que todo MULTIGRAFO es PSEUDOGRAFO, pero en este manual se distinguen MULTIGRAFOS (con aristas múltiples) y se reserva PSEUDOGRAFOS para aquellos que, además de contener aristas múltiples, contienen BUCLES (aristas de la forma {u,u}).

1.3.2. Pseudografo

Un grafo es PSEUDOGRAFO si contiene algún BUCLE o LAZO, es decir, una arista de forma {u,u}.

Algunos autores consideran que el PSEUDOGRAFO es un tipo de MULTIGRAFO, en el sentido que los LAZOS que los caracterizan son formas de aristas múltiples.

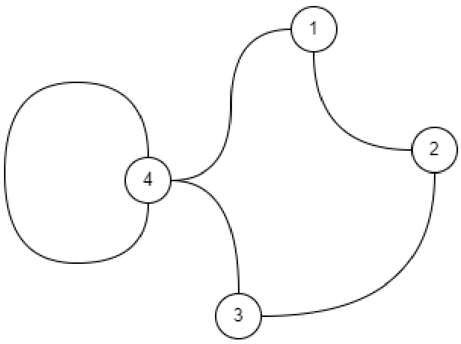
Otros autores los consideran un tipo independiente y reservan MULTIGRAFO para aquellos grafos compatibles con aristas múltiples y PSEUDOGRAFO para aquellos que contienen lazos.

En este manual, se considera que un PSEUDOGRAFO es aquel con LAZOS y un MULTIGRAFO es aquel con aristas MÚLTIPLES. De todos modos:

- Un pseudografo es compatible con aristas múltiples.
- Un multigrafo es compatible con lazos.

EJEMPLO

El PSEUDOGRAFO G se define por:

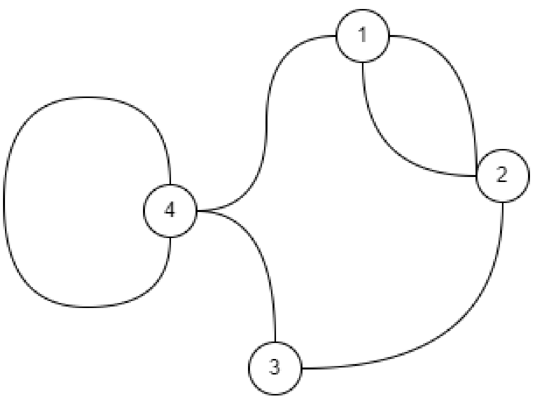


$$V = \{1,2,3,4\}$$

$$E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\},\{4,4\}\}$$

EJEMPLO

El PSEUDOGRAFO G presenta una arista múltiple:



Es decir, además de pseudografo, es multigrafo. Se define:

$$V = \{1,2,3,4\}$$

$$E = \{\{1,2\},\{1,2\}\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\},\{4,4\}\}$$

1.4. Grafos dirigidos

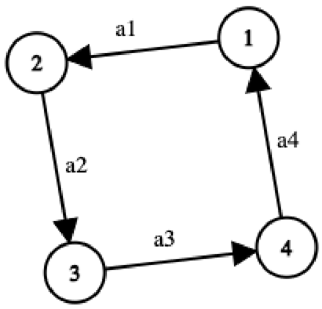
9.4.1. Definición de grafo dirigido

Un grafo es DIRIGIDO o DIGRAFO (o bien grafo ORIENTADO) si sus aristas están ORIENTADAS por un sentido.

Un grafo dirigido G se define por:

1. El conjunto de vértices V.
2. El conjunto de ARCOS (aristas dirigidas) A.

Es decir: G = (V,A) o G(V,A).



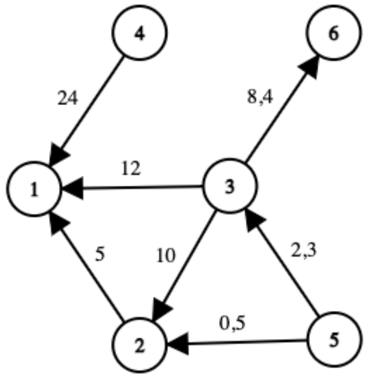
EJEMPLO
Por ejemplo, en el grafo G:
G = (V,A)
V = {1,2,3,4}
A = {(a1),(a2),(a3),(a4)} = {(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)}

El sentido de recorrido impide alcanzar el nodo 1 desde 2 directamente.
Solo se puede alcanzar el nodo 1 desde el nodo 2 recorriendo los nodos 3 y 4.

El conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano de V × V y, por tanto, resulta en pares ordenados.

En grafos NO dirigidos, las aristas se declaran como un conjunto de 2 vértices e = {u,v} (usando corchetes) y se representan como SEGMENTOS simétricos, de modo que para cada par de vértices u y v ∈ V, se cumple que {u,v} = {v,u} y se denotan por e.

En cambio, en grafo DIRIGIDOS, las aristas se declaran como un par ordenado a = (u,v) (usando paréntesis) resultante de V × V y se representan como FLECHAS que indican un SENTIDO DE RECORRIDO del grafo. Estas aristas dirigidas se denominan ARCOS y se denotan por a.
Una arista dirigida o ARCO a= (u,v) tiene un ORIGEN en u y un EXTREMO en v.
Si el origen y el extremo coinciden, es decir a = (u,u) se trata de un BUCLE ORIENTADO.



EJEMPLO

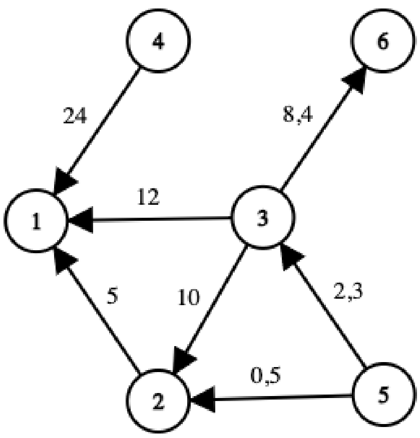
En este grafo no se puede alcanzar el nodo 4 desde ninguna arista.
Solo se puede alcanzar el nodo 3 desde el nodo 5.
Aunque otras aristas conectan el nodo 3 con otros vértices, están orientadas de forma que no permiten acceder a él.

9.4.2. Grado de entrada g(v)- y de salida g(v)+ de vértices en grafos dirigidos

Para grafos DIRIGIDOS, se define:

- GRADO DE ENTRADA de un vértice $g^-(v)$ Número de aristas que ENTRAN en él.
- GRADO DE SALIDA de un vértice $g^+(v)$ Número de aristas que SALEN de él.

a) Grado de entrada de un vértice



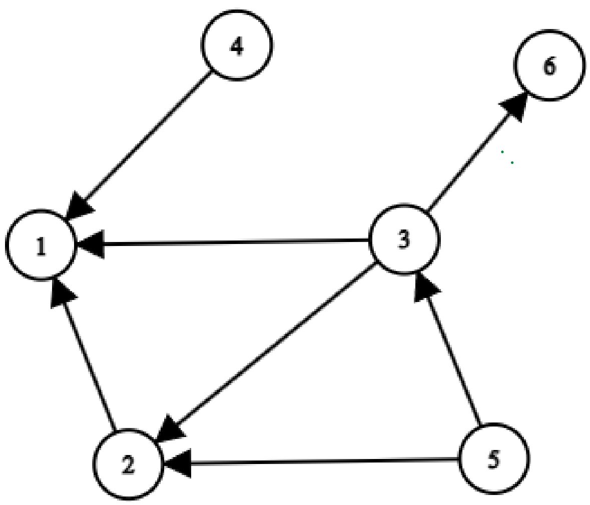
En un grafo DIRIGIDO, el grado de entrada g^- de un vértice v es el número de aristas entrantes en v.

EJEMPLO
Los grados de entrada de los vértices del grafo G son:

$g^-(1) = 3$
$g^-(2) = 2$
$g^-(3) = 1$
$g^-(4) = 0$
$g^-(5) = 0$
$g^-(6) = 1$

b) Grado de salida de un vértice

En un grafo DIRIGIDO, el grado de salida g^+ de un vértice es el número de aristas salientes de él.



EJEMPLO
Los grados de salida de los vértices del grafo G son:

$g^+(1) = 0$
$g^+(2) = 1$
$g^+(3) = 3$
$g^+(4) = 1$
$g^+(5) = 2$
$g^+(6) = 0$

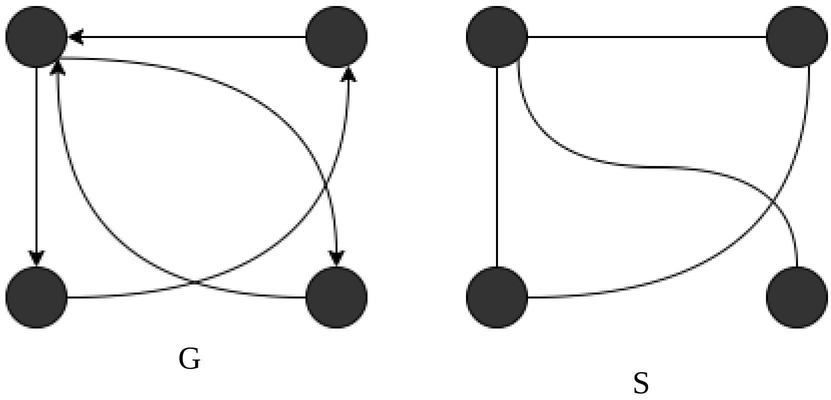
9.4.3. Grafo subyacente

Se define el grafo SUBYACENTE S de un digrafo G = (V,A) como S = (V,A’) de modo que A’ representa las mismas conexiones en V que A pero sin que importe el sentido del arco original.

Es decir, dado un digrafo, su grafo subyacente resulta de IGNORAR EL SENTIDO de los arcos.

EJEMPLO

El digrafo G tiene como grafo subyacente al grafo S:



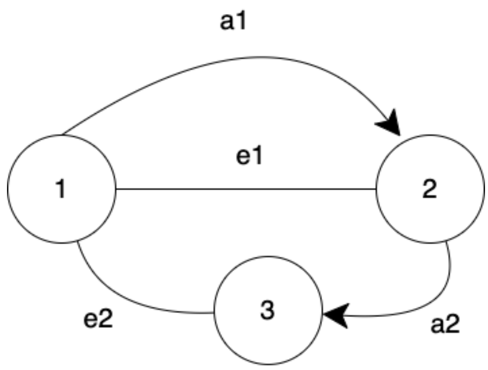
9.4.4. Grafo mixto

Un grafo mixto se define a través de un conjunto de vértices V, un conjunto de aristas NO DIRIGIDAS denotado por E (generalmente, del inglés *edges*) y un conjunto de aristas DIRIGIDAS denominado A (del inglés, *arcs*):

$$G = (V, E, A)\ es\ MIXTO$$

EJEMPLO

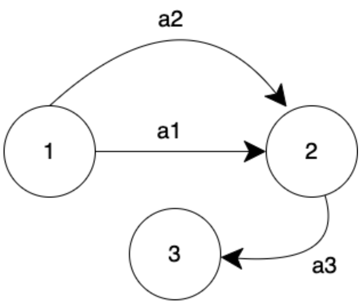
Por ejemplo, el grafo G es MIXTO:



$$\begin{aligned} &G7 = (V, E, A) \\ &V = \{1,2,3\} \\ &E = \{e1, e2\} = \{\{1,2\}, \{1,3\}\} \\ &A = \{a1, a2\} = \{(1,2), (2,3)\} \end{aligned}$$

9.4.5. Multidigrafo

Un MULTÍDIGRAFO es un MULTIGRAFO DIRIGIDO.

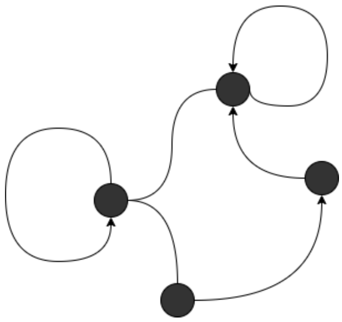


EJEMPLO

Como el MULTIGRAFO G es DIRIGIDO, se dice que es MULTIDIGRAFO.

9.4.6. Pseudodigrafo

Un grafo que contiene LAZOS DIRIGIDOS es un pseudodigrafo.



EJEMPLO

El pseudografo G contiene LAZOS DIRIGIDOS, de modo que es un PSEUDODIGRAFO.

1.5. ESTRUCTURA Y MANIPULACIÓN DE GRAFOS

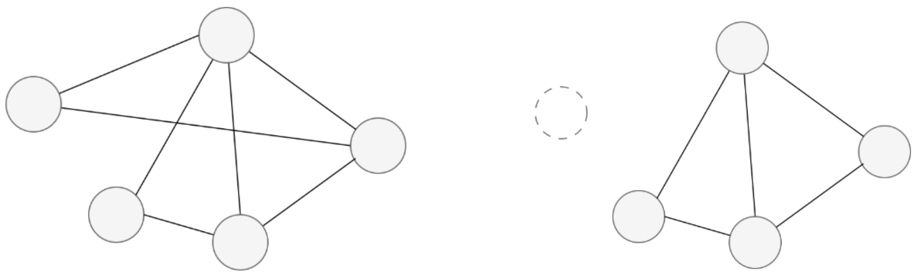
9.5.1. Transformaciones sobre grafos simples

a) Eliminación de vértices

A partir del grafo G = (V,E), si se elimina un vértice u ∈ V se obtiene el grafo G' = (V', E') según:

- El nuevo conjunto de vértices es V', que excluye el vértice suprimido:
  $V' = V - \{u\}$
- El nuevo conjunto de aristas es E', que excluye todas las aristas incidentes con u:
  $E' = E - \{e = \{u, v\}, e \in E \; ; \; u, v \in \text{V}\}$

EJEMPLO

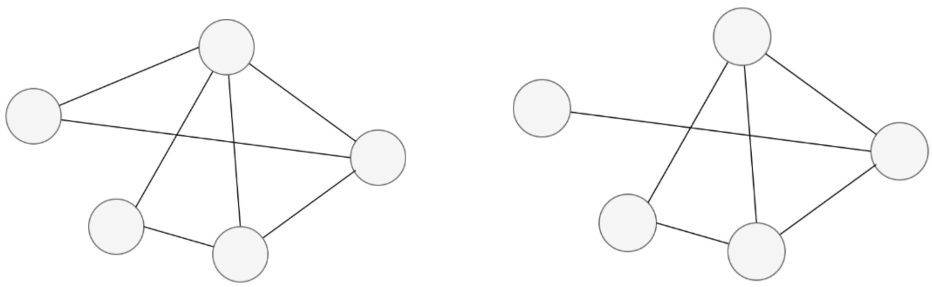


b) Eliminación de aristas

A partir del grafo G = (V,E), si se elimina una arista e ∈ E se obtiene el grafo G' = (V, E') según:

- El conjunto de vértices del nuevo grafo es EL MISMO que el original.
- El nuevo conjunto de aristas es E', que excluye la arista suprimida:
  $E' = E - \{e \in E\}$

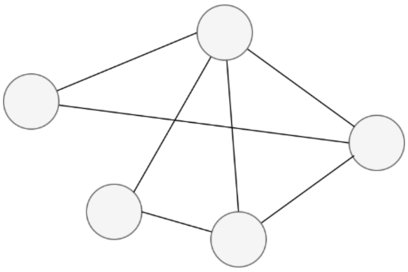
EJEMPLO

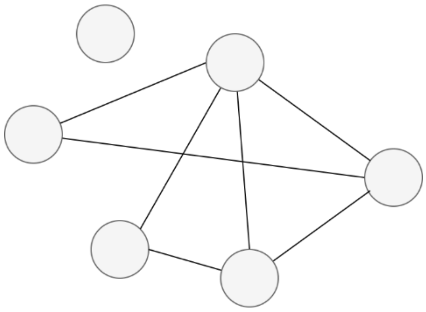


c) Adición de vértices NUEVOS

Para añadir a G = (V,E) un conjunto de vértices W (considerando $V \cap W = \emptyset$ se alcanza un nuevo grafo $G' = G + W = (V \cup W, E)$.
Para un solo vértice u, se suele denotar por G' = G + u.

EJEMPLO





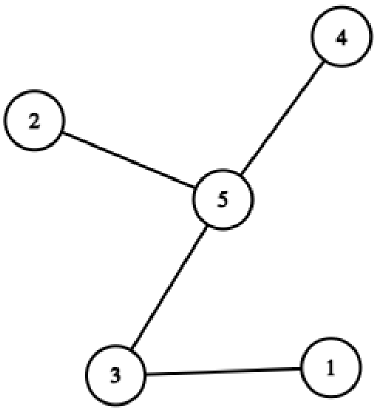
d) Adición de nuevas aristas

Para añadir a G = (V,E) un conjunto de aristas INEXISTENTES en E (aquí se trata exclusivamente con grafos simples), basta con:

$$G' = (V, E \cup \{\{u, v\}\}$$

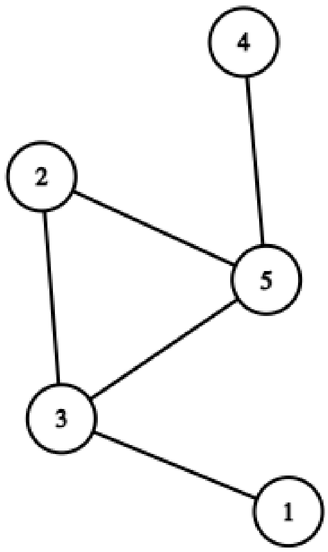
Para una sola arista uv, se suele denotar por G' = G + uv.

EJEMPLO



Se tiene el grafo G, al cual se añade la arista 23, es decir:

G' = G + 23



e) Grafo complementario

Para construir el grafo complementario de G, denotado por G^C se opera del siguiente modo:

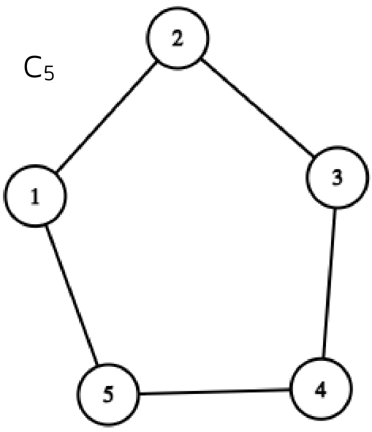
1. Se parte del grafo completo de orden n denotado por K_n.
2. Se EXCLUYEN del grafo completo K_n todas las aristas presentes en el grafo G original (todas las que pueblan su matriz de adyacencias).
3. Las aristas persistentes en el grafo completo K_n tras la supresión de todas las aristas de G determinan el grafo complementario G^c.

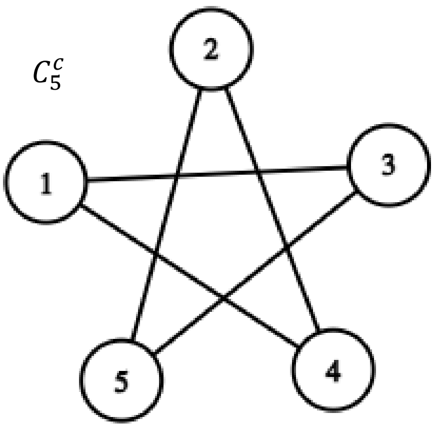
Es decir, para obtener el grafo complementario G^C basta con INVERTIR en su matriz de adyacencias todos los 0 por 1 y viceversa.

Se cumple la reciprocidad: $(G^C)^C = G$

Es decir, el complementario del complementario de G es el grafo G propiamente.

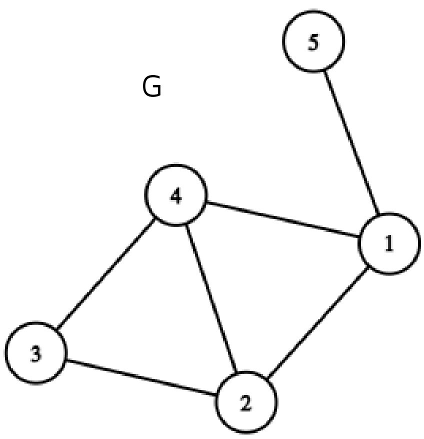
EJEMPLO

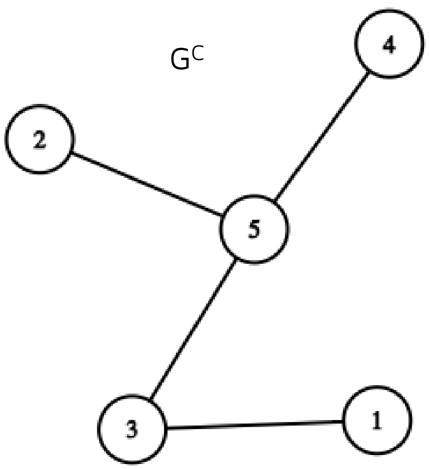




Dado el grafo C_5 su complementario G_c es como se muestra.

EJEMPLO





En el grafo G = (V,E) se tienen las aristas:

{12,14,15,23,24,34}

Por tanto, en su complementario $G^C = (V,E^C)$ se tiene:

$E^C = E_{K5} – E$ = {13,25,35,45}

Nótese que, análogamente al cálculo de las aristas, el grado de un vértice en el grafo complementario se puede expresar como:

$$g_{G^C}(v) = g_{K_n}(v) - g_G(v) = n - 1 - g_G(v)$$

f) Contracción de aristas

CONTRAER una arista e = {u,v} consiste en combinar en un solo vértice nuevo w los 2 vértices u y v conectados previamente por la arista contraída e, de manera que el nuevo vértice w aglutina las adyacencias de los vértices u y v.

Esto conlleva:

- La desaparición de la arista contraída: La medida del grafo mengua en 1

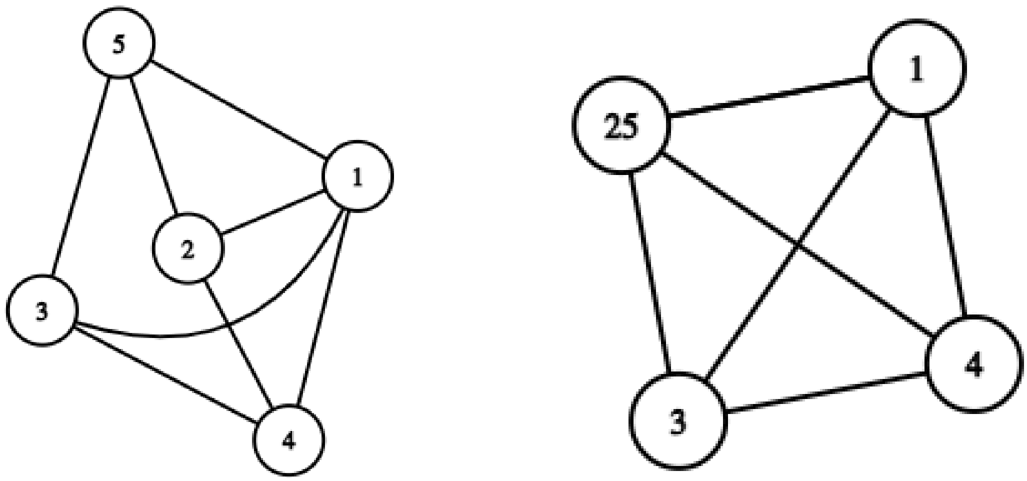
- Se pierde un vértice: Los vértices u y v desaparecen
  Aparece un vértice w nuevo
  El orden disminuye en 1.

- Las aristas que salen de cada uno de los vértices fundidos HACIA UN MISMO DESTINO se funden también:

  La medida disminuye 1 unidad por cada par de aristas con salientes de u o v con el mismo destino.

EJEMPLO

La contracción de la arista (2,5) en el grafo G da lugar al grafo G':



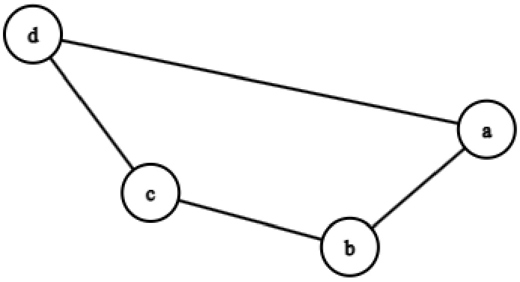
g) Subdivisión elemental de arista

Dada una arista e = {u,v} que conecta los vértices u y v, para subdividirla, basta con:

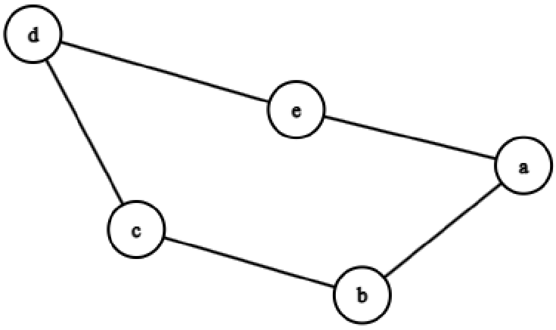
3. Eliminar la arista e = {u,v}.
4. Añadir un nuevo vértice w ∉ V.
5. Insertar 2 aristas nuevas: {u,w} y {w,v}.

Se puede escribir como G – e + w + uw + wv

EJEMPLO



Dado el grafo G, se suprime la arista {d,a}, se añade el vértice e, y se añaden 2 aristas nuevas, una {d,e} y otra {e,a}. Se alcanza la subdivisión de la arista original {d,a}.



1.5.1. Operaciones entre grafos

a) Unión disjunta de grafos (unión de grafos)

Dados 2 grafos:

$$G_1 = (V_1, E_1) \; y \; G_2 = (V_2, E_2)$$

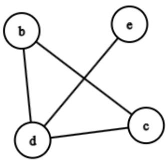
Tales que no tengan vértices en común:

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

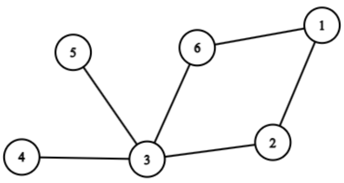
Se cumple que su unión es:

$$G = G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$$

EJEMPLO
UNIÓN DISJUNTA

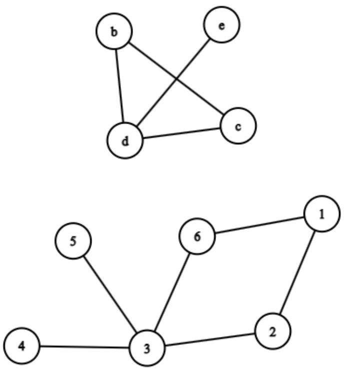


G_1



G_2

Se consideran el grafo G_1 y el grafo G_2 , cuya unión se representa abajo:



$G_1 \cup G_2$

b) Suma de grafos

El grafo SUMA $G_1 + G_2$ contiene:

Los vértices V_1 de G_1 y los de G_2 y añade nuevas aristas entre CADA UNO de los vértices de G_1 con CADA UNO de los vértices de G_2.

Formalmente:

$$G_1 + G_2 = \left(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \left\{\{u, v\} \mid u \in V_1 \wedge v \in V_2\right\}\right)$$

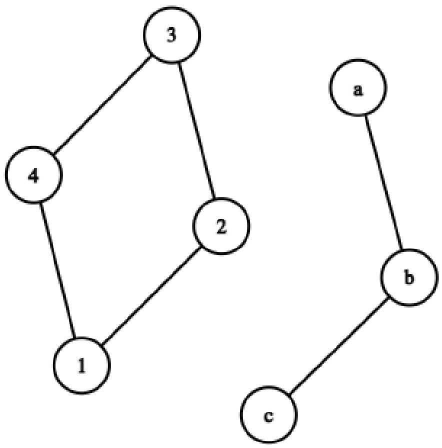
$$n_{G_1+G_2} = (V_1 \cup V_2) = |V_1| + |V_2|$$

$$m_{G_1+G_2} = \left(E_1 \cup E_2 \cup \left\{\{u, v\} \mid u \in V_1 \wedge v \in V_2\right\}\right) = |E_1| + |E_2| + |V_1| \cdot |V_2|$$

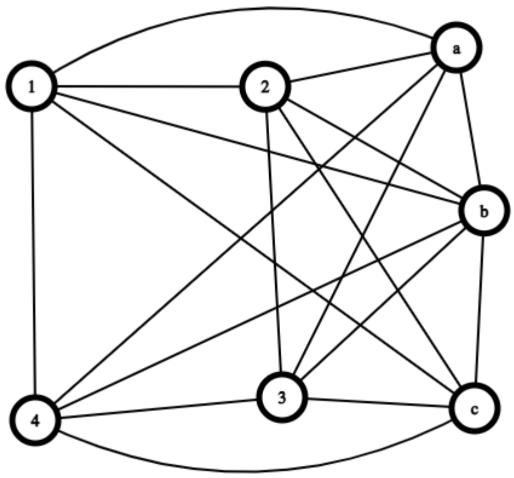
EJEMPLO

Se desea sumar el ciclo C_4 y el trayecto T_3.

Se tiene:



Se alcanza:

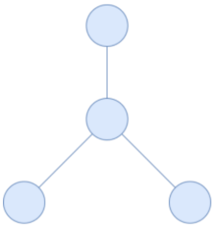


$$C_4 + T_3 = (\{1,2,3,4\} \cup \{a, b, c\}, (E_{C_4} \cup E_{T_3} \cup S))$$

Donde el conjunto de nuevas aristas S es:

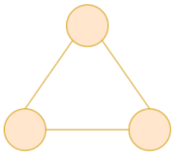
$$S = \{\{a, 1\}, \{a, 2\}, \{a, 3\}, \{a, 4\}, \{b, 1\}, \{b, 2\}, \{b, 3\}, \{b, 4\}, \{c, 1\}, \{c, 2\}, \{c, 3\}, \{c, 4\}\}$$

EJEMPLO



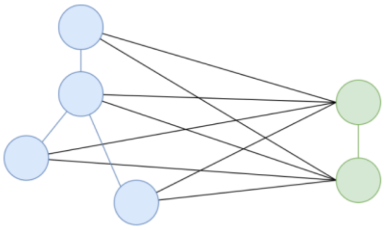
E4

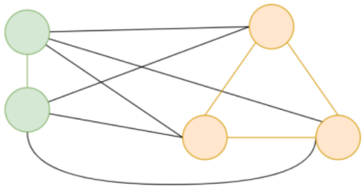
T2



K3

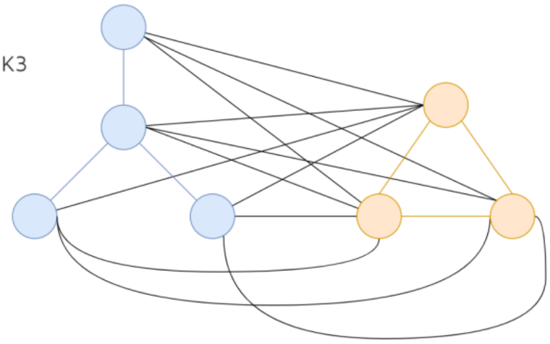
E4 + T2





T2+K3

E4+K3



$$E_4 + T_2 = \left(V_{E_4} \cup V_{T_2}, E_{E_4} \cup E_{T_2} \cup \left\{\{u,v\} \mid u \in V_{E_4} \wedge v \in V_{T_2}\right\}\right)$$

$$n_{E_4+T_2} = \left|V_{E_4}\right| + \left|V_{T_2}\right| = 4 + 2 = 6$$

$$m_{E_4+T_2} = \left|E_{E_4}\right| + \left|E_{T_2}\right| + \left|V_{E_4}\right| \cdot \left|V_{T_2}\right| = 3 + 1 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$E_4 + K_3 = \left(V_{E_4} \cup V_{K_3}, E_{E_4} \cup E_{K_3} \cup \left\{\{u,v\} \mid u \in V_{E_4} \wedge v \in V_{K_3}\right\}\right)$$

$$n_{E_4+K_3} = \left|V_{E_4}\right| + \left|V_{K_3}\right| = 4 + 3 = 7$$

$$m_{E_4+K_3} = \left|E_{E_4}\right| + \left|E_{K_3}\right| + \left|V_{E_4}\right| \cdot \left|V_{K_3}\right| = 3 + \binom{3}{2} + 4 \cdot 3 = 18$$

$$T_2 + K_3 = \left(V_{T_2} \cup V_{K_3}, E_{T_2} \cup E_{K_3} \cup \left\{\{u,v\} \mid u \in V_{T_2} \wedge v \in V_{K_3}\right\}\right)$$

$$n_{T_2+K_3} = \left|V_{T_2}\right| + \left|V_{K_3}\right| = 2 + 3 = 5$$

$$m_{T_2+K_3} = \left|E_{T_2}\right| + \left|E_{K_3}\right| + \left|V_{T_2}\right| \cdot \left|V_{K_3}\right| = 1 + \binom{3}{2} + 2 \cdot 3 = 10$$

c) Producto cartesiano de grafos $G_1 \square G_2$

Se da solamente una definición informal, para mayor claridad.

El producto cartesiano entre 2 grafos se denota por $G_1 \square G_2$ y se basa en construir un nuevo grafo producto con la misma arquitectura que un factor del producto, pero tomando como cada uno de sus vértices el otro grafo propiamente.

Es una operación, para grafos no etiquetados:

- Conmutativa — Ya que $G_1 \square G_2$ es isomorfo a $G_2 \square G_1$.
- Es asociativa — $(G_1 \square G_2) \square G_3$ es isomorfo a $G_1 \square (G_2 \square G_3)$.

Se cumple:

- Orden de $G_1 \square G_2$:

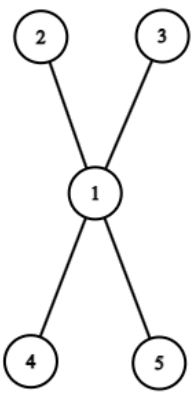
$$n = |V_1| \cdot |V_2|$$

- Medida de $G_1 \square G_2$:

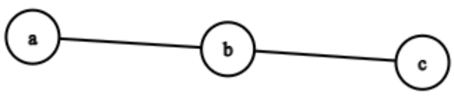
$$m = |E_1| \cdot |V_2| + |E_2| \cdot |V_1|$$

EJEMPLO

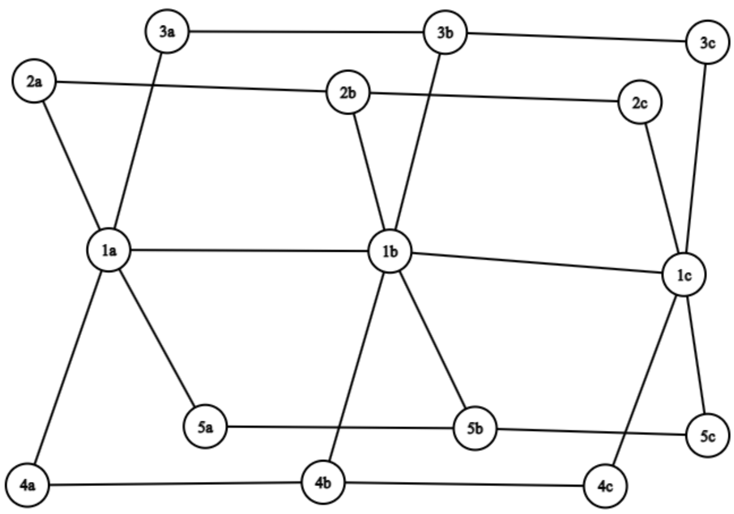
Sean G_1 y G_2 respectivamente (se etiquetan para mayor claridad):



G_1

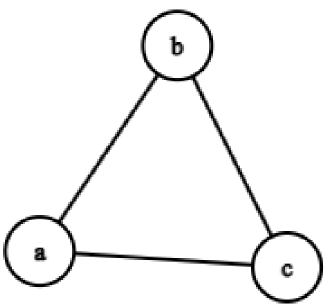


G_2

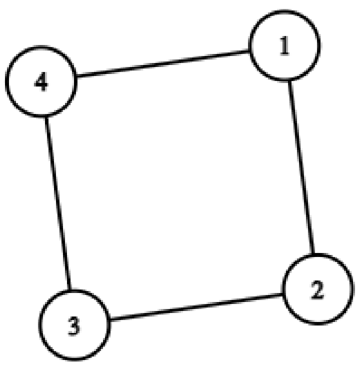


$G_1 \times G_2$

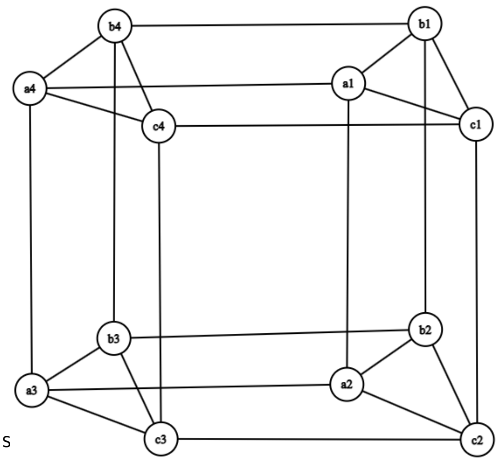
EJEMPLO:



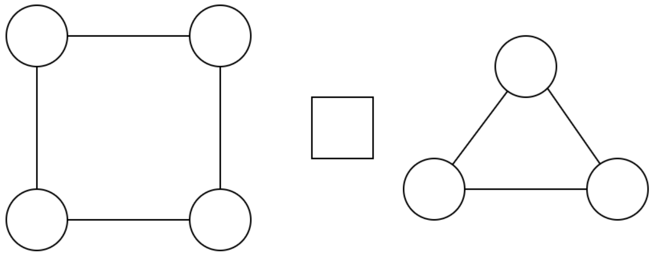
G_1

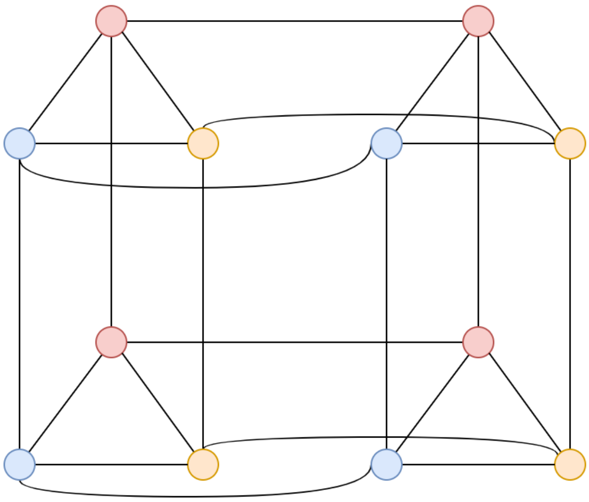


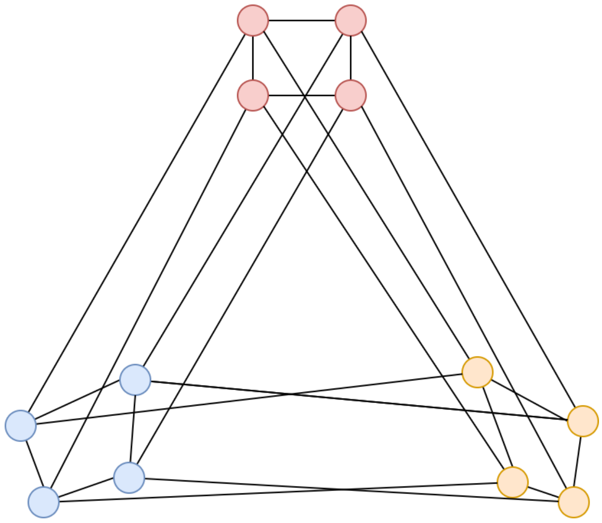
G_2



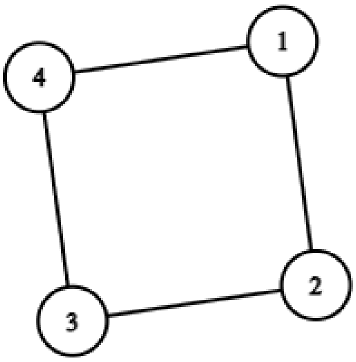
$G_1 \times G_2$



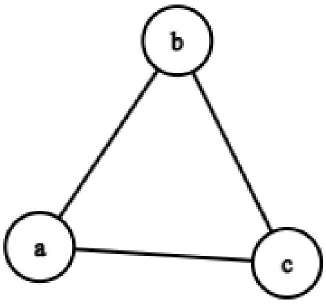




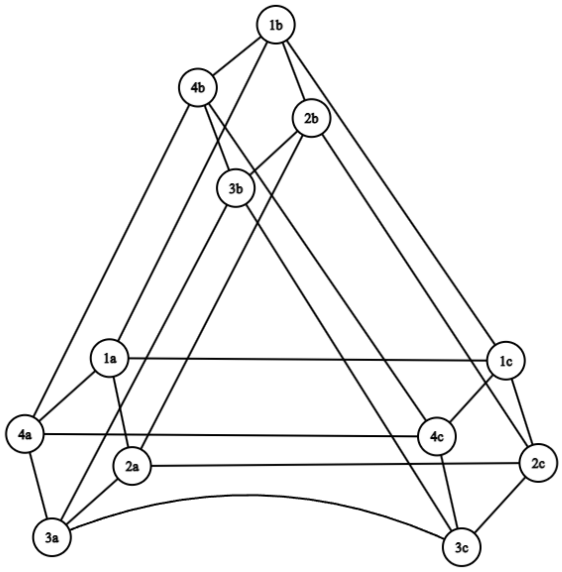
Mientras que $G_2 \times G_1$ es:



G_2



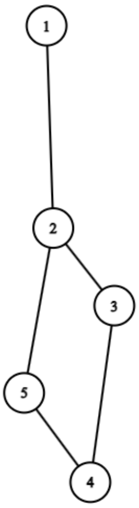
G_1



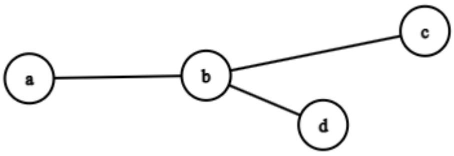
$G_2 \times G_1$

EJEMPLO

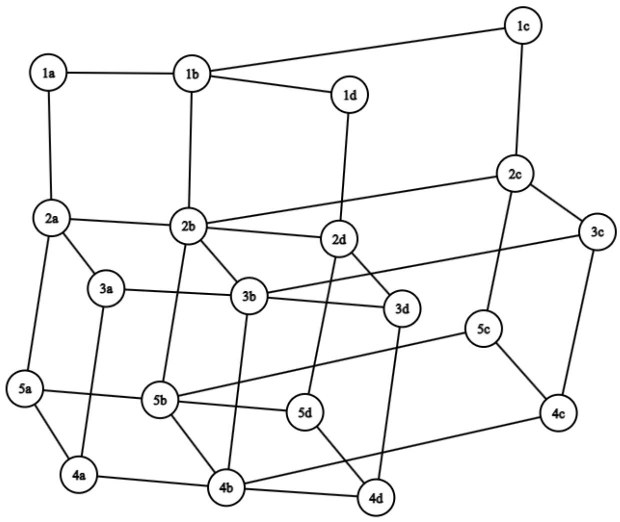
Sean G_1 y G_2 respectivamente:



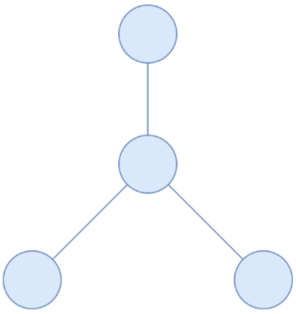
G_1



G_2

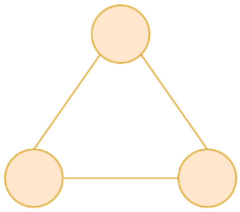


$G_1 \times G_2$



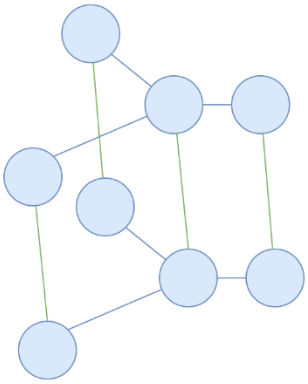
E4

T2

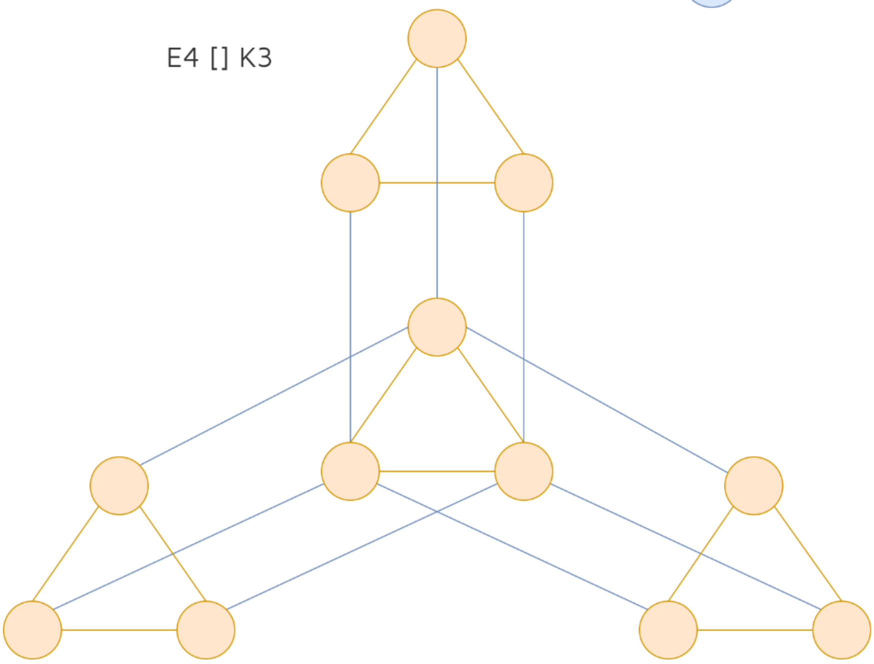


K3

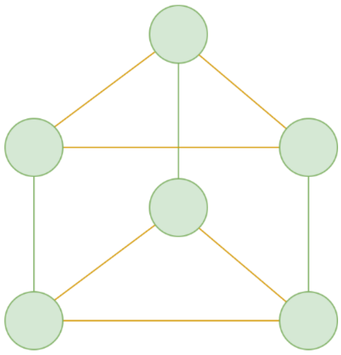
E4 [] T2



E4 [] K3



T2 [] K3



- Medida de $G_1 \square G_2$:

$$n = |V_1| \cdot |V_2|$$

$$m = |E_1| \cdot |V_2| + |E_2| \cdot |V_1|$$

9.5.2. Grafos iguales

Dos grafos $G_1 = (V_1,E_1)$ y $G_2 = (V_2,E_2)$ son IDÉNTICOS si y solo si cumplen 2 condiciones a la vez:

- Tienen los mismos vértices $V_1 = V_2$
- Tienen las mismas aristas $E_1 = E_2$

9.5.3. Isomorfismo

Dados los grafos G=(V,E) y G'=(V',E'), se denomina ISOMORFISMO entre G y G' a la biyección f entre sus conjuntos de vértices $f: V \rightarrow V'$ tal que los vértices adyacentes en G son adyacentes también en G' y los que no lo son en G tampoco lo son en G'.

Es decir, se deben conservar las adyacencias y las no adyacencias a través de f. Es decir:

$$\forall u, v \in V: u \approx v \Leftrightarrow \forall f(u), f(v) \in V' f(u) \approx f(v)$$
$$\forall u, v \in V: u \not\approx v \Leftrightarrow \forall f(u), f(v) \in V' f(u) \not\approx f(v)$$

Y, por tanto, también las aristas:

$$(v_i, v_j) \in E \leftrightarrow (f(v_1), f(v_j)) \in E'$$

O sea, una aplicación biyectiva f es un ISOMORFISMO entre dos grafos G y G' si las imágenes f(u) y f(v) de 2 vértices u y v adyacentes en V cualesquiera, son adyacentes también en V'.

Es decir, la imagen de cualquier arista del conjunto E a través de f es una arista de E'.

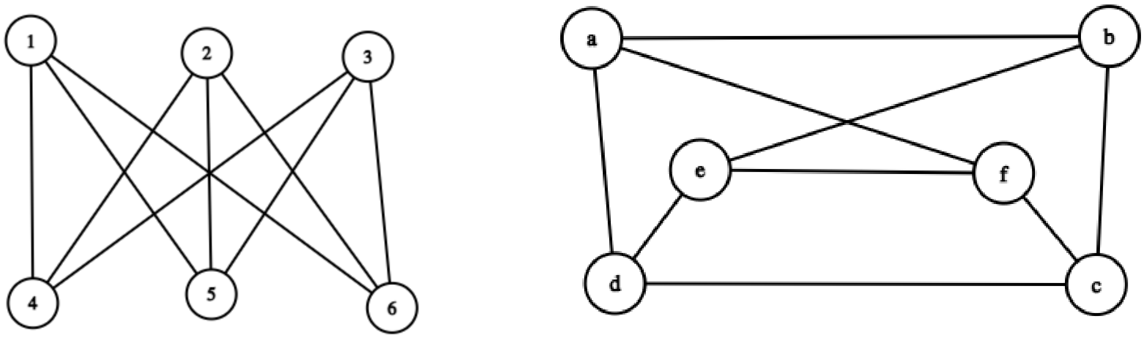
9.5.4. Grafos isomorfos

Por tanto, dos grafos G y G' son ISOMORFOS, denotado por G ≅ G', si existe entre ellos algún isomorfismo f, lo cual conlleva que tienen el MISMO:

1. Número de VÉRTICES (orden).
2. Número de ARISTAS (medida).
3. Los mismos grados en vértices homólogos a través de f: $g_G(u) = g_{G'}(f(u))$
4. Por tanto, tienen la misma SECUENCIA DE GRADOS.
5. Número de COMPONENTES conexas.
6. GRADO máximo.
7. Número de CICLOS de longitud n.

EJEMPLO

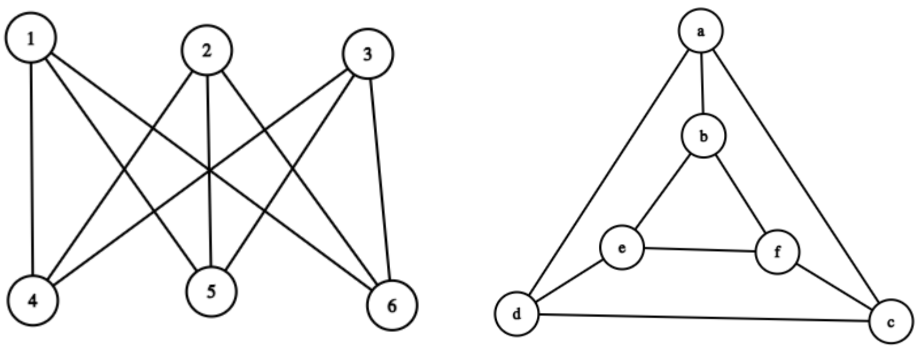
Estos dos grafos G y G':



SÍ SON ISOMORFOS ya que existe una biyección f tal que:

$$
\begin{gathered}
f: G \rightarrow G' \\
f(1) = a \\
f(2) = e \\
f(3) = c \\
f(4) = b \\
f(5) = d \\
f(6) = f
\end{gathered}
$$

En cambio, estos 2 grafos G y G' NO SON ISOMORFOS:



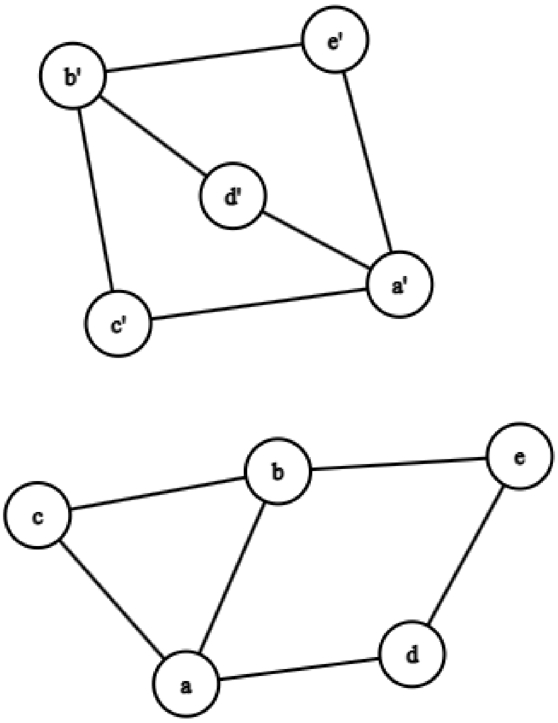
El grafo G es bipartito, mientras que el grafo G' NO LO ES.

Por tanto, no existe una biyección a través de la cual se conserve G en G'.

1.5.2. Deducción de isomorfismos

Para evaluar si 2 o más grafos sencillos son isomorfos, no basta con comparar su secuencia de grados, sino que debe discutirse la correspondencia biyectiva entre ellos que conserve las relaciones de adyacencia.

EJEMPLO



El grafo G con V = {a,b,c,d,e} presenta la secuencia de grados 3,3,2,2,2.

El grafo G’ con V ‘ = {a’,b’,c’,d’,e’} presenta la misma secuencia: 3,3,2,2,2.

No obstante, en G, los 2 vértices de grado 3 a y b forman un ciclo con un único vértice de grado 2 {a,b,c} y otro ciclo distinto con los otros 2 vértices de grado 2 {a,b,e,d}.

En G’, por contrario, no se da esa topología: los 2 vértices de grado 3 forman 2 ciclos topológicamente idénticos con los vértices de grado 2 {a’,d’,b’,e’} y {a’,d’,b’,c’}.

Es decir, G y G’ no son isomorfos.

Por tanto, aunque la conciencia de la secuencia gráfica de grados es necesaria para definir la relación de isomorfismo, no es suficiente para encontrarla: requiere también de la conservación de las adyacencias.

1.6. Representación de grafos

De entre las múltiples formas de representación de un grafo, se destaca la denominada Matriz de adyacencia y la lista de adyacencia.

1.6.1. Matriz de adyacencia

a) Definición de matriz de adyacencias

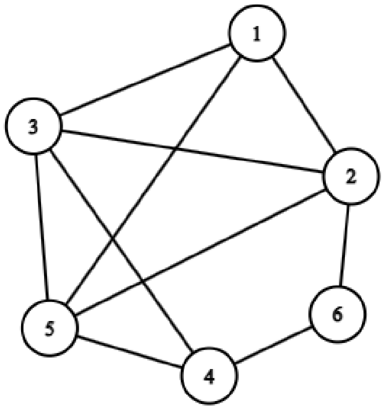
La matriz de adyacencia es una matriz A de elementos a_{ij} y dimensión n x n en que cada elemento representa el número de aristas que van del vértice i hacia el vértice j:

$$A[i,j] \equiv número\ de\ aristas\ n_i \rightarrow n_j$$

La matriz de adyacencia es CUADRADA, ya que refleja la relación binaria entre nodos que cada arista representa.

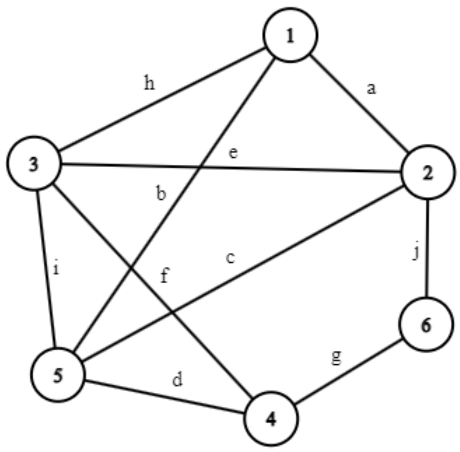
EJEMPLO
MATRIZ DE ADYACENCIAS

Cada columna y cada fila representa un vértice. Cada elemento no neutro es una arista.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

También se puede construir la matriz de adyacencias relacionando los n vértices con las m aristas que los conectan, es decir, una matriz de dimensión n x m, en que cada fila es un vértice y cada columna extremos de aristas que inciden en él:



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En este manual, no se considera este tipo de matriz, porque es más incómoda de interpretar.

b) Propiedades de la matriz de adyacencia (grafo simple no dirigido)

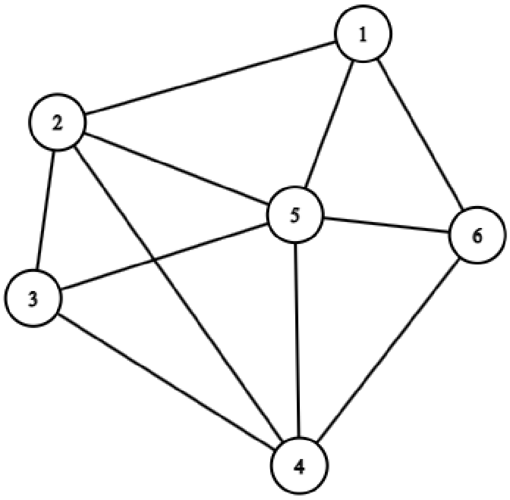
La matriz de adyacencia A de un grafo simple (sin lazos ni aristas múltiples) no dirigido cumple las propiedades:

1. Para todo grafo de orden n, con independencia del tipo de grafo, su matriz de adyacencias A es cuadrada de dimensión n x n.

2. Para todo grafo NO DIRIGIDO, su matriz de adyacencias es SIMÉTRICA.
3. Para todo grafo SIMPLE, libre de bucles, todos los elementos de la diagonal principal, que denotan bucles, son 0, es decir: $a_{ii} = 0 \; \forall \; a \in A$
   Ya que ningún vértice conecta consigo mismo.

4. Para todo grafo SIMPLE, sin aristas múltiples, los elementos de la matriz solo pueden valer 0 o bien 1, ya que no hay arcos múltiples. O sea: $a_{ij} = \{0,1\}\ \forall\ a \in A$

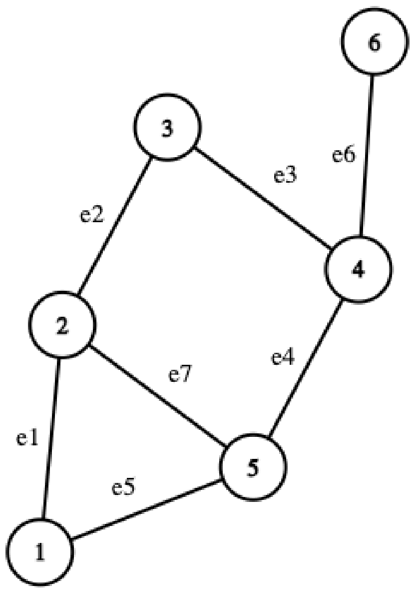
   Es decir, para un grafo simple, las entradas de su matriz de la forma a_{ij} valen $a_{ij} = 1$ si los vértices i y j están conectados y $a_{ij} = 0$ en caso de no estarlo.



Por ejemplo, el grafo simple G tiene como matriz de adyacencias:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \end{array}$$

c) EJEMPLO de matriz de adyacencias de un grafo simple no dirigido



Se observa, para el grafo no dirigido G, una matriz de adyacencias:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se construye así:

		Nodo de destino					
		1	2	3	4	5	6
Nodo de origen	1	0	1	0	0	1	0
	2	1	0	1	0	1	0
	3	0	1	0	1	0	0
	4	0	0	1	0	1	1
	5	1	1	0	1	0	0
	6	0	0	0	1	0	0

d) Ventajas y limitaciones de la matriz de adyacencias

La principal ventaja de esta representación es su simplicidad estructural.

Sus inconvenientes son 2:

1) El tiempo de acceso a cada posición es constante, pero no es lineal.
El recorrido de todas las aristas del grafo demanda $\frac{1}{2}n(n-1)$ consultas, con independencia de la medida m del grafo. Esto acarrea una complejidad temporal proporcional a n^2 y no a la medida m del grafo.

2) El principal inconveniente para almacenar grafos mediante su matriz de adyacencias es que malgasta mucha memoria, espacio no utilizado.
El espacio que consume es n^2, pero como el máximo número de aristas es $\frac{1}{2}n(n-1)$, siempre habrá elementos nulos.

Por ello, para grafos NO DIRIGIDOS, y aprovechando el carácter SIMÉTRICO de la matriz de adyacencias cuadrada, se utiliza también la MATRIZ DE ADYACENCIAS TRIANGULAR, lo que supone un ahorro de espacio del 50%.

e) Matriz de adyacencia de un MULTIGRAFO

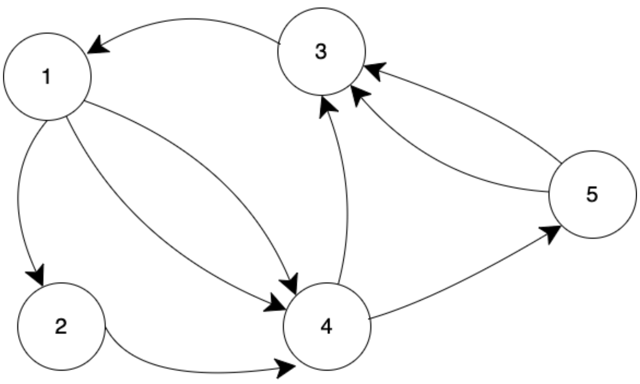
La matriz de adyacencia de un MULTIGRAFO cumple:

$$\exists A_{ij} \neq (0,1).$$

Es decir, hay elementos cuyo valor es distinto de 1 por la presencia de arcos múltiples.

EJEMPLO

El siguiente MULTIGRAFO G tiene como matriz de adyacencias la matriz A:



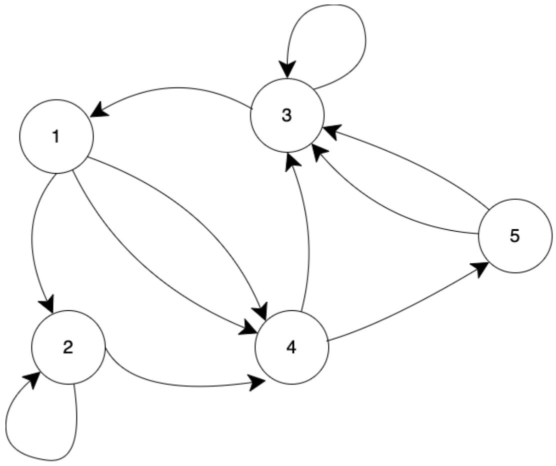
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Matriz de adyacencia de un pseudografo

La matriz de adyacencia de un PSEUDOGRAFO se caracteriza por la presencia de elementos no nulos en la diagonal principal asociados a bucles.

$$\exists A_{ii} \neq 0$$

EJEMPLO
El siguiente pseudografo G tiene como matriz de adyacencias la matriz A:

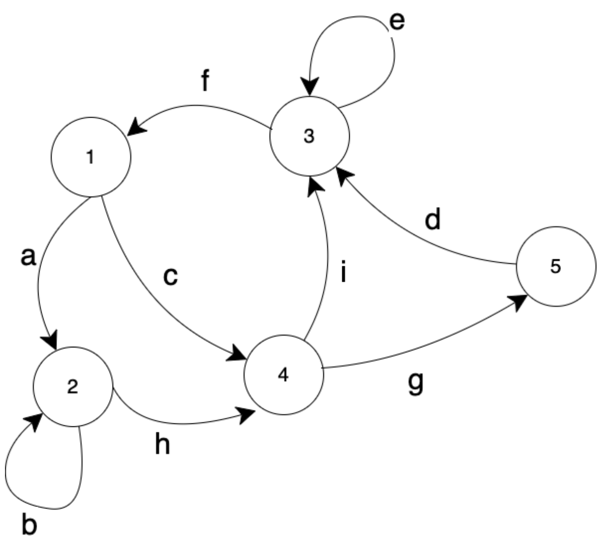


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g) Matriz de adyacencia etiquetada o ponderada

La matriz de adyacencia de un grafo ponderado se denomina matriz de adyacencia etiquetada o ponderada.
Para reflejar la etiqueta de la arista, se introduce su peso en su posición de la matriz.

EJEMPLO
Por ejemplo, el pseudografo etiquetado G tiene por matriz de adyacencia etiquetada:



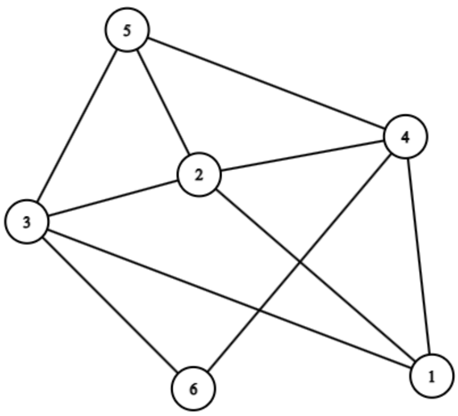
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & h & 0 \\ f & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & g \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.6.2. Lista de adyacencias

Otra forma de representar un grafo es la lista de adyacencias.

a) Definición de la lista de adyacencias

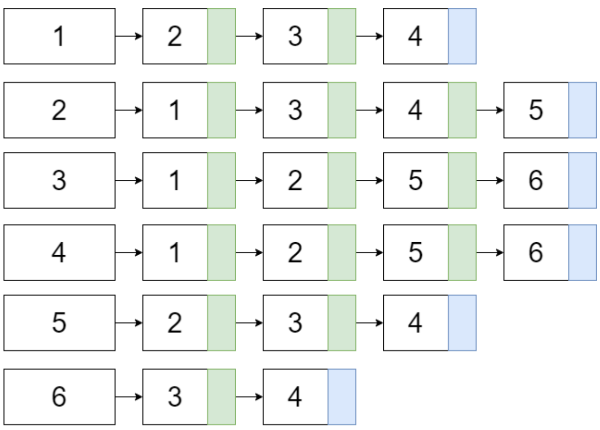
La lista de adyacencias de un grafo G = (V,E) se define como la LISTA DE VÉRTICES adyacentes a cada uno de sus vértices.



Por ejemplo, para el grafo G*, se tiene la lista de adyacencias:

1	:	2,3,4
2	:	1,3,4,5
3	:	1,2,5,6
4	:	1,2,5,6
5	:	2,3,4
6	:	3,4

Su implementación más habitual es una lista enlazada de punteros:



El extremo verde de cada elemento de la lista representa el puntero hacia el siguiente elemento de la lista enlazada y el extremo azul representa el final de la lista de adyacencias del vértice correspondiente.

b) Ventajas y limitaciones de la lista de adyacencias

La principal ventaja es que reduce el espacio empleado al espacio esencial:

- El espacio que ocupa almacenar un grafo de orden n y medida m es proporcional a n vértices y 2m aristas, es decir, su complejidad espacial es de n + 2m.
- En caso de ser un grafo dirigido, cada arista se almacena en un solo sentido de recorrido, por tanto, se reduce a n + m.

Las principales limitaciones de la lista de adyacencia están relacionadas con su manipulación:

- El tiempo necesario para consultar las adyacencias de un vértice v no es constante, sino que es proporcional a su grado g(v), ya que está mediatizada por la exploración de su lista enlazada.

9.5.5. Comparación ente matriz de adyacencias y lista de adyacencias

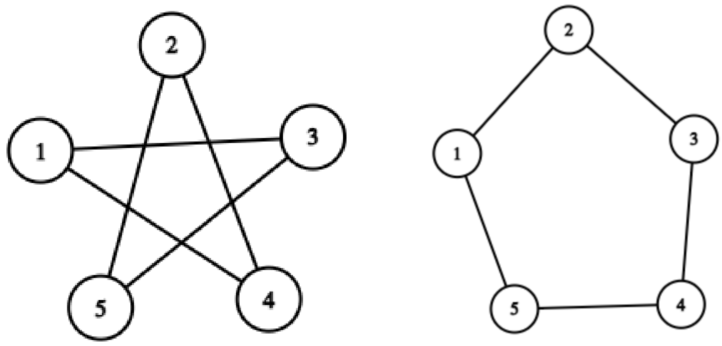
Matriz de adyacencia	Característica	Lista de adyacencias
Más sencilla	Representación de estructura de datos	Más compleja
Malgasta espacio (n^2)	Eficiencia espacial	Minimiza el espacio (n+2m o n+m)
Menos deseable	Comportamiento en algoritmos	Más deseable
n^2 (Proporcional a n) LENTO	Tiempo de explorar adyacencias	Proporcional a g(v) (más rápido)
n^2 (Proporcional a n)	Tiempo de recorrer de aristas	2m operaciones PROPORCIONAL A ARISTAS (inferior SI GRAFO ES SENCILLO)
MEJOR	En grafos DENSOS ($m^2 \sim n^2$)	Peor
Peor	En grafos POCO DENSOS ($m^2 \ll n^2$)	MEJOR

9.5.6. Grafo autocomplementario

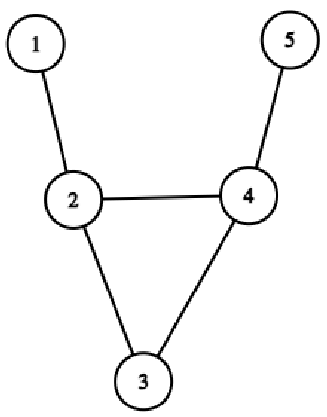
Un grafo G es AUTOCOMPLEMENTARIO si es ISOMORFO a su complementario.

EJEMPLO
GRAFO AUTOCOMPLEMENTARIO

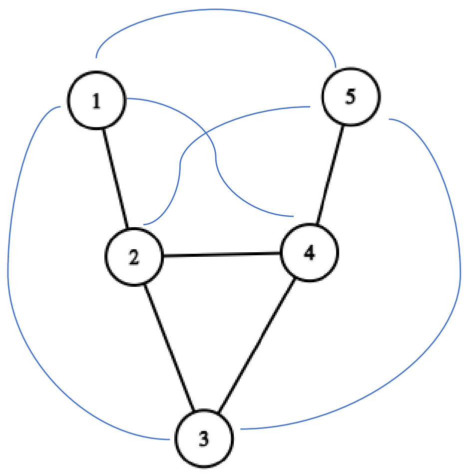
C_5 es AUTOCOMPLEMENTARIO, ya que es isomorfo a $\overline{C_5}$.



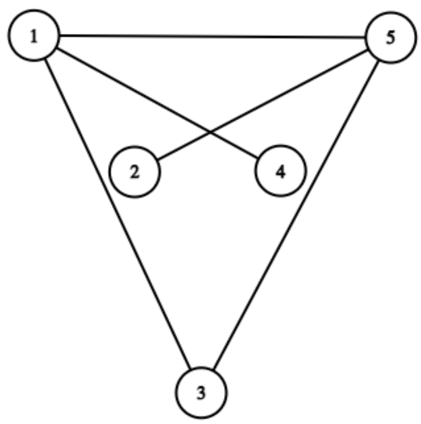
EJEMPLO
El denominado Bull's graph es AUTOCOMPLEMENTARIO:



Bull's graph G



Completo K_5



Complementario de G

2.CONECTIVIDAD Y RECORRIDOS

2.1. RECORRIDOS

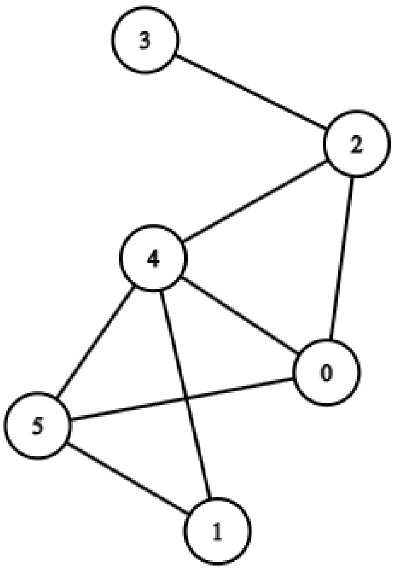
10.1.1. Concepto de cadena (chain)

Una CADENA en un grafo G = (V,E) es una secuencia (es decir, es ordenada y contempla repeticiones) de vértices de forma que 2 vértices consecutivos cualesquiera de la secuencia son extremos de una misma arista. Es decir: $\{v_i,v_{i+1}\} \in E$.

Por tanto, una cadena conecta vértices de un grafo.

Los vértices inicial y final de una cadena son los EXTREMOS o vértices EXTERIORES.
Los vértices comprendidos entre los extremos de una cadena son vértices INTERIORES.

EJEMPLO DE CADENA



En el grafo G, se identifican, entre otras, las cadenas:

{0,4,5,1}

{3,2,0,5,4,1,5,4,1}

10.1.2. Cadena SIMPLE (no repite aristas)

Para todo tipo de cadena (ya sea o no recorrido, itinerario, camino, circuito o ciclo) se dice que es SIMPLE si no admite la repetición de ARISTAS.

La cadena {0,4,5,1} es SIMPLE.
La cadena {3,2,0,5,4,1,5,4,1} NO ES SIMPLE: repite las aristas 54 y 41.

10.1.3. Cadena ELEMENTAL (no repite ni aristas ni vértices interiores)

Para todo tipo de cadena (ya sea o no recorrido, itinerario, camino, circuito o ciclo) se dice que es ELEMENTAL si, además de no repetir arista alguna tampoco repite ningún vértice interior.

La condición de SIMPLE es NECESARIA para la condición de ELEMENTAL.
La condición ELEMENTAL es SUFICIENTE para la condición de SIMPLE.

La cadena {0,4,5,1} además de ser simple, ya que no repite aristas, es también ELEMENTAL, pues no visita ningún vértice 2 veces.

10.1.4. Concepto de recorrido (walk)

Un RECORRIDO en un grafo G = (V,E) es una cadena SIMPLE, es decir, no repite aristas.

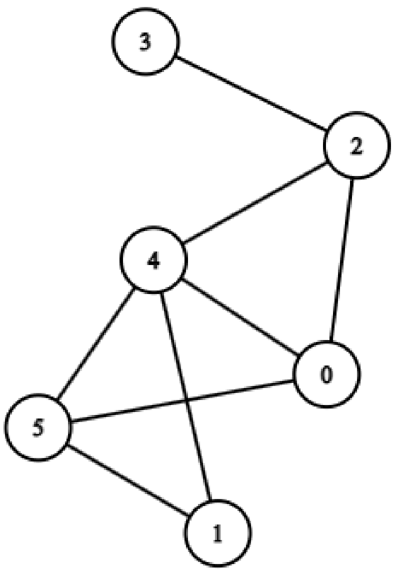
El recorrido entre el vértice v_1 y el vértice v_k se denota por $v_1 - v_k$ de modo que v_1 y v_k son sus extremos.

Los vértices inicial y final de una cadena son los EXTREMOS o vértices EXTERIORES.
Los vértices comprendidos entre los extremos de una cadena son vértices INTERIORES.

Un recorrido es SIMPLE: no admite la repetición de aristas.

Si un recorrido admite la repetición de vértices interiores, se dice que es NO ELEMENTAL.
Si un recorrido NO admite la repetición de vértices interiores, se dice que es ELEMENTAL.

EJEMPLO DE RECORRIDO



En el grafo G se encuentran, entre otros, los recorridos:

{3,2,4,5,0,4,1,5}

Los vértices 4 y 5 se repiten, pero sin repetirse arista alguna.

En cambio, la cadena {0,4,1,5,4,0,2} repite la arista ente 0 y 4 y, por eso, no se trata de un recorrido propiamente.

10.1.5. Concepto de recorrido abierto (open walk)

Un recorrido u – v es ABIERTO si u ≠ v. Es decir, si sus 2 extremos son distintos.

Hay 2 tipos de recorrido abierto:

- Si no admite repetición de aristas: ITINERARIO (trail).
- Si además de no repetir aristas tampoco repite vértices interiores: CAMINO (path).

Como en un recorrido no se repiten aristas, se dice que es SIMPLE.

Cuando en un recorrido, además de no repetirse aristas, no se repiten vértices, es ELEMENTAL.

EJEMPLO DE RECORRIDO ABIERTO
El recorrido {4,5,0,2} es ABIERTO ya que sus 2 extremos son distintos.

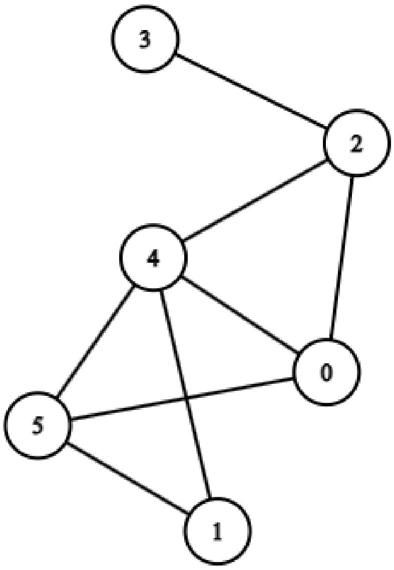
10.1.6. Concepto de recorrido cerrado (closed walk)

Un recorrido u – v es CERRADO si u = v. Es decir, si sus 2 extremos son iguales.

Hay 2 tipos de recorrido cerrado:
- Si no repite aristas, pero puede repetir vértices interiores: CIRCUITO (circuit).
- Si además de no repetir aristas tampoco repite vértices interiores: CICLO (cycle).

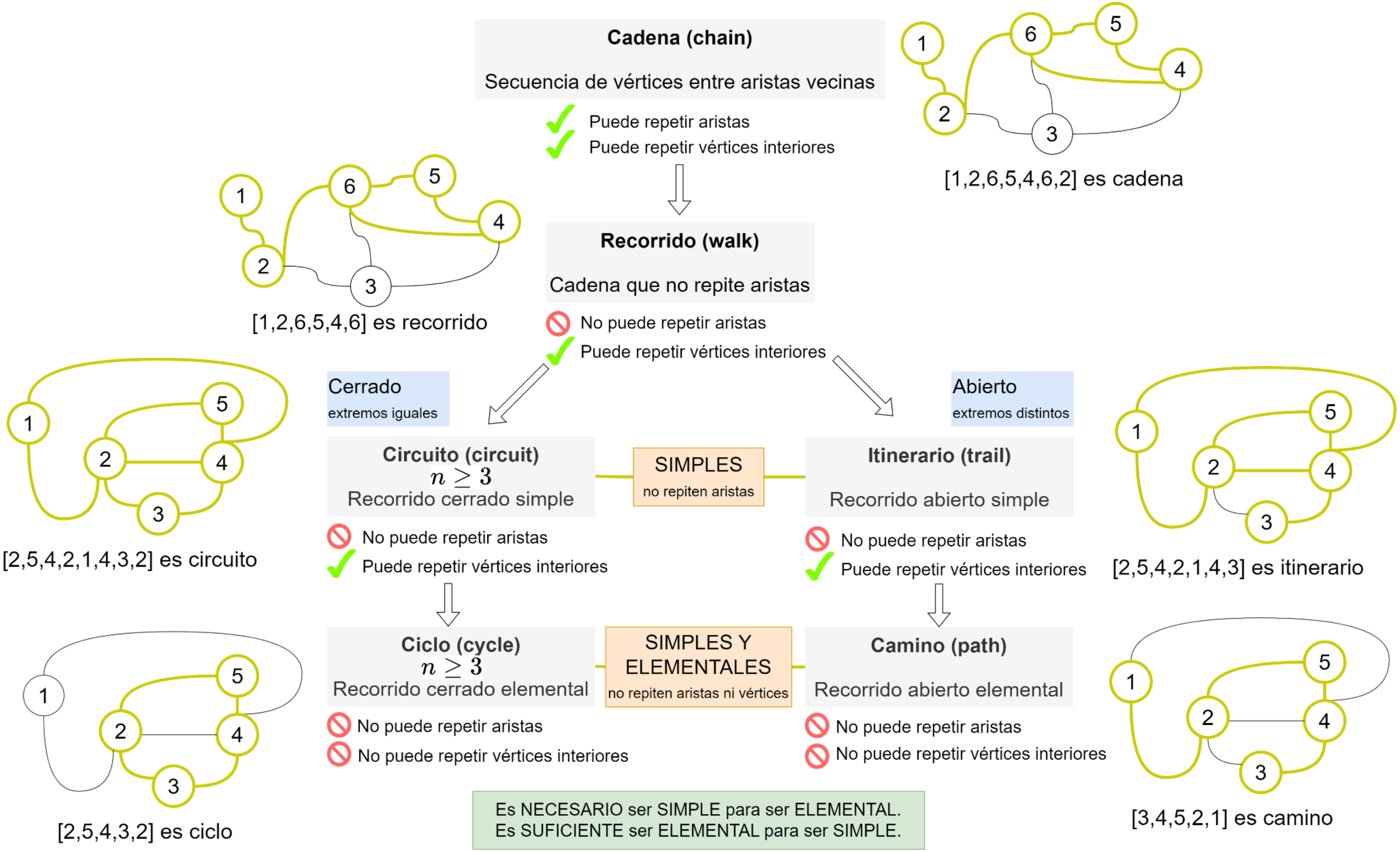
Como en un recorrido no se repiten aristas, todo recorrido es SIMPLE.
Cuando en un recorrido, además de no repetirse aristas, no se repiten vértices interiores, es ELEMENTAL.

EJEMPLO DE RECORRIDO CERRADO



El recorrido {5,0,2,4,5} es CERRADO ya que sus 2 extremos son iguales.

10.1.7.Clasificación de recorridos



De más general a más específico, en este manual se emplea la siguiente clasificación. Según literatura que se consulte, hay discrepancias de nomenclatura o taxonomía, pero no afectan sustancialmente a nivel conceptual. Se ha elegido esta por ser la más clara y funcional.

En resumen:

- Cadena = secuencia de vértices que conecta aristas adyacentes
- Recorrido = Cadena SIMPLE (no repite aristas)
- Itinerario = Cadena SIMPLE ABIERTA (extremos distintos)
- Camino = Cadena ELEMENTAL (no repite ni vértices interiores ni aristas) ABIERTA.
- Circuito = Cadena SIMPLE CERRADA (extremos iguales)
- Ciclo = Cadena ELEMENTAL (no repite ni vértices interiores ni aristas) CERRADA.

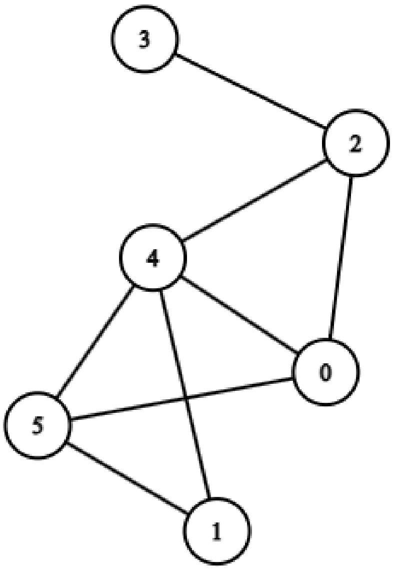
10.1.8. Concepto de itinerario (trail)

Un ITINERARIO en un grafo G = (V,E) es una cadena simple ABIERTA.

- Un itinerario no admite la repetición de aristas.
- Un itinerario sí admite la repetición de vértices interiores.

Un itinerario es, por definición, SIMPLE.

EJEMPLO DE ITINERARIO



La cadena {1,4,2,0,4,5} es un ITINERARIO en el grafo G.

10.1.9. Concepto de camino (path)

Un CAMINO en un grafo G = (V,E) es una cadena abierta ELEMENTAL.

Un camino no admite la repetición de aristas ni de vértices interiores.

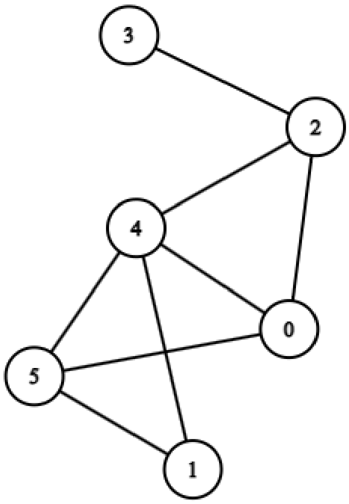
Un camino es, por definición, simple y ELEMENTAL.

EJEMPLO DE CAMINO

{1,5,0,4,2,3} es un camino, ya que es una cadena abierta que no repite ni vértices ni aristas (es elemental).

En cambio, el itinerario {1,4,2,0,4,5} no es camino, ya que o es elemental.

10.1.10. Circuito (circuit)



Un CIRCUITO en un grafo G = (V,E) es una cadena simple CERRADA.

- Un circuito no admite la repetición de aristas.
- Un circuito sí admite la repetición de vértices interiores.

Un circuito es, por definición SIMPLE.

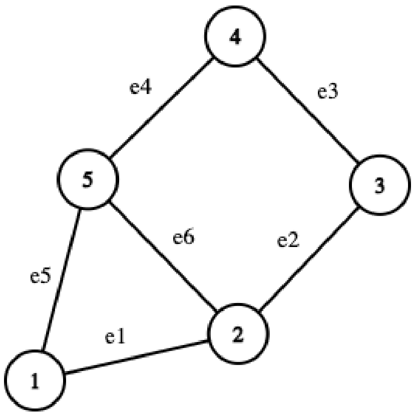
EJEMPLO DE CIRCUITO

En el grafo G se observa el circuito {2,4,5,0,4,2}.

EJEMPLO DE CIRCUITO

{1,4,2,0,4,5} es un ITINERARIO en el grafo G.

10.1.11. Ciclo (cycle)



Un CICLO es una cadena cerrada ELEMENTAL de longitud ≥ 3.

Es decir:
- Es un camino SIMPLE (sin aristas repetidas).
- No repite vértices exteriores (ELEMENTAL).
- Es CERRADO (sus extremos coinciden).

La definición es apta tanto para grafos dirigidos como para no dirigidos.

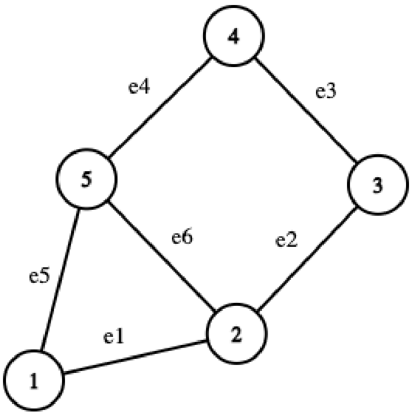
En G* hay ciclos en (3,4,5,2,3), (1,2,5) o (1,2,3,4,5,1).

Nótese que hay una longitud mínima de 3 aristas.

10.1.12. Grafo cíclico y acíclico

Si en un grafo existe al menos un ciclo, se denomina GRAFO CÍCLICO.
Si en un grafo NO existe ciclo alguno, se denomina GRAFO CÍCLICO.

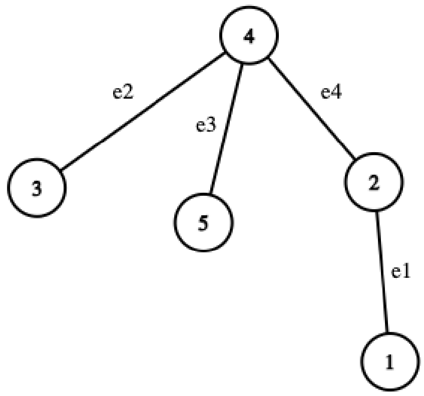
Todo grafo cíclico presenta al menos 2 caminos diferentes conectando cualquier par de sus vértices. La definición es apta tanto para grafos dirigidos como para no dirigidos.



El grafo G* es CÍCLICO:

El vértice 1 se conecta con 4 por el camino {1,5,4} o bien por el camino {1,2,3,4}

El grafo G* es ACÍCLICO: no hay ningún camino alternativo para conectar 2 vértices cualesquiera.



10.1.13. Grado de los vértices de un grafo cíclico

Si en un grafo G = (V,E) no hay ningún vértice de grado 1 ni de grado 0, entonces G aloja algún ciclo. Es decir:

$$\forall v \in V \, , g(v) \geq 2 \rightarrow G \; es \; CÍCLICO$$

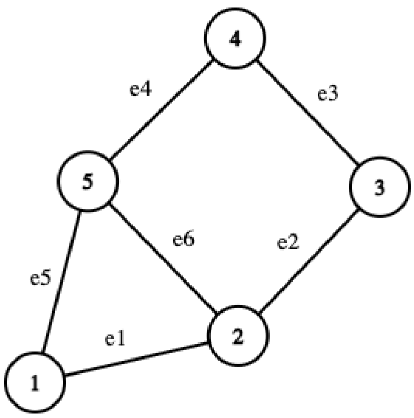
Por tanto, todo grafo r-regular (con r ≥ 2) es cíclico.

2.1.1. Longitud de cadena

La longitud de una cadena es el número de aristas entre v_1y v_n, cuyo valor es $n-1$, siendo n el número de nodos o vértices que recorre.

Es decir, la longitud de una cadena coincide con el número de aristas que cruza.

EJEMPLO DE LONGITUD



C_1 = (4,5,1,2,5,4,3)
Recorre 7 vértices
La longitud de C_1 es 7 – 1 = 6 aristas.

C_2 = (5,2,3)
Recorre n = 3 vértices
La longitud de C_2 es 3 – 1 = 2 aristas.

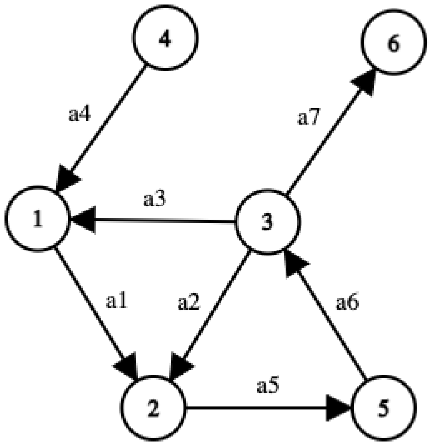
10.1.14. Cadena en grafo dirigido

La clasificación de cadenas es la misma para grafos dirigidos y no dirigidos.

En un grafo dirigido G = (V,A), un recorrido orientado o dirigido es una secuencia de vértices en que 2 vértices consecutivos son extremos de un arco. Es decir: {vi,vi+1} ∈ A.

Todas las definiciones anteriores referentes a los recorridos son válidas para grafos dirigidos.

Por ejemplo:



Una cadena en un grafo dirigido es una sucesión de vértices $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ tal que $v_1 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_3, \dots, v_{n-1} \rightarrow v_n$.

Es decir, una sucesión de vértices vecinos conectados en el mismo sentido de los arcos que los unen.

En el grafo G* se identifican, por ejemplo, las cadenas:

C_1 = (4,1,2,5,3,6)
C_2 = (5,3,2)

2.2. ALGORITMOS DE EXPLORACIÓN

Se tratan 2 algoritmos de exploración:

- Depth First Search — Algoritmo de búsqueda en PROFUNDIDAD (DFS)
- Breadth First Search — Algoritmo de búsqueda en ANCHURA (BFS)

10.2.1. Algoritmo DFS

Se aplica a:

- Problemas de conectividad, orientado a la identificación de componentes conexas.
- La caracterización de ciclos.

Es la base de otros algoritmos de búsqueda como el de Dijkstra o el de Prim.
Para su ejecución:

1. Se elige, arbitrariamente, un vértice de inicio.

2. Se inicializa una PILA P y se incluye como elemento TOP el vértice de inicio. Cada nuevo vértice que se añada a la pila, reemplazará al elemento TOP.
   Los elementos añadidos más recientemente son los primeros en eliminarse (LIFO).

3. Se inicializa una secuencia R para registrar el recorrido del grafo, usando el vértice de inicio.

4. De entre las adyacencias del vértice TOP, se avanza hacia el siguiente vértice adyacente no incluido en R. El criterio de ordenación relativa entre vértices se establece de forma previa a la ejecución, ya sea alfanuméricamente o mediante otro sistema.

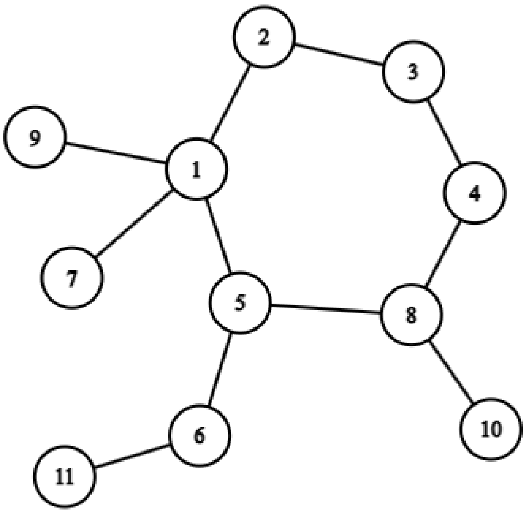
5. Cada vez que se visita un vértice:
   - Se añade a la pila P, en la posición TOP.
   - Se incluye el vértice en la secuencia R que determina el RECORRIDO del grafo.

6. Siempre que se agotan las adyacencias por incluir en R de un vértice, se excluye de la pila P, de modo que el vértice que ingresó en P previamente, lo releva como TOP. El agotamiento de adyacencias, por tanto, provoca un fenómeno de retroceso (*backtracking*) hasta el siguiente vértice en la pila con adyacencias pendientes de ser incluidas en R.

7. La ejecución se detiene cuando P queda vacía. El último vértice en abandonar P es siempre el de inicio.

Es notable que el recorrido R resultado de la ejecución SIEMPRE ES UN ÁRBOL cuyas aristas pertenecen necesariamente al grafo recorrido.

10.2.2. EJEMPLO DE EJECUCIÓN DFS BÚSQUEDA EN PROFUNDIDAD



- Se elige, como vértice de inicio, el vértice 2.
- Se inicializa la pila P = 2
- Se inicializa el recorrido R = [2]
- El criterio de comparación entre vértices se fija como: MENOR PRIMERO (v.g. 5 antes que 6 y 6 antes que 7).
- Se representa la ejecución como una tabla de 4 columnas:
    - P = Estado de la pila
    - V^+ = Vértice añadido a P en la iteración previa
    - V^- = Vértice suprimido de P en la iteración previa
    - R = Secuencia de recorrido

P	V+	V-	R	
2	2	-	[2]	Se ha añadido el vértice 2
21	1	-	[2,1]	Se elige 1 frente a 3 ya que 1 < 3
215	5	-	[2,1,5]	Se elige 5 frente a 7 y frente a 9 (5 < 7 y 5 < 9)
2156	6	-	[2,1,5,6]	Se elige 6 frente a 8 ya que 6 < 8
215611	11	-	[2,1,5,6,11]	Se elige la única adyacencia de 6 no incluida en R
2156	-	11	[2,1,5,6,11]	Se desempila 11, ya que no tiene adyacencias por incluir en R
215	-	6	[2,1,5,6,11]	Se desempila 6, ya que no tiene adyacencias por incluir en R
2158	8	-	[2,1,5,6,11,8]	Se elige la única adyacencia de 5 no incluida en R
21584	4	-	[2,1,5,6,11,8,4]	Se elige 4 frente a 10 ya que 4 < 10
215843	3	-	[2,1,5,6,11,8,4,3]	Se elige la única adyacencia de 4 no incluida en R
21584	-	3	[2,1,5,6,11,8,4,3]	Se desempila 3, ya que no tiene adyacencias por incluir en R
2158	-	4	[2,1,5,6,11,8,4,3]	Se desempila 4, ya que no tiene adyacencias por incluir en R
215810	10	-	[2,1,5,6,11,8,4,3,10]	Se elige la única adyacencia de 8 no incluida en R
2158	-	10	[2,1,5,6,11,8,4,3,10]	Se desempila 10, ya que no tiene adyacencias por incluir en R
215	-	8	[2,1,5,6,11,8,4,3,10]	Se desempila 8, ya que no tiene adyacencias por incluir en R
21	-	5	[2,1,5,6,11,8,4,3,10]	Se desempila 5, ya que no tiene adyacencias por incluir en R
217	7	-	[2,1,5,6,11,8,4,3,10,7]	Se elige 7 frente a 9 ya que 7 < 9
21	-	7	[2,1,5,6,11,8,4,3,10,7]	Se desempila 7, ya que no tiene adyacencias por incluir en R
219	9	-	[2,1,5,6,11,8,4,3,10,7,9]	Se elige la única adyacencia de 1 no incluida en R
21	-	9	[2,1,5,6,11,8,4,3,10,7,9]	Se desempila 9, ya que no tiene adyacencias por incluir en R
2	-	1	[2,1,5,6,11,8,4,3,10,7,9]	Se desempila 1, ya que no tiene adyacencias por incluir en R
∅	-	2	[2,1,5,6,11,8,4,3,10,7,9]	Se desempila 2, ya que no tiene adyacencias por incluir en R. La pila está vacía: la ejecución termina.

EJEMPLO DE EJECUCIÓN DFS BÚSQUEDA EN PROFUNDIDAD

También se puede representar el recorrido como SECUENCIA DE ARISTAS. Para el mismo grafo anterior:

P	e+	R
2	-	Ø
21	{2,1}	[{2,1}]
215	{1,5}	[{2,1},{1,5}]
2156	{5,6}	[{2,1},{1,5},{5,6}]
215611	{6,11}	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11}]
2156	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11}]
215	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11}]
2158	{5,8}	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8}]
21584	{8,4}	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4}]
215843	{4,3}	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3}]
21584	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3}]
2158	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3}]
215810	{8,10}	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3},{8,10}]
2158	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3},{8,10}]
215	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3},{8,10}]
21	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3},{8,10}]
217	{1,7}	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3},{8,10},{1,7}]
21	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3},{8,10},{1,7}]
219	{1,9}	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3},{8,10},{1,7},{1,9}]
21	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3},{8,10},{1,7},{1,9}]
2	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3},{8,10},{1,7},{1,9}]
Ø	-	[{2,1},{1,5},{5,6},{6,11},{5,8},{8,4},{4,3},{8,10},{1,7},{1,9}]

10.2.3. Análisis del algoritmo DFS

El algoritmo DFS visita cada vértice 2 veces: para empilarlo y para desempilarlo, es decir, 2n operaciones.

Además, para examinar todas las adyacencias de cada vértice se accede a 2m aristas.

Por tanto, la complejidad paroximada del algoritmo DFS es proporcional a 2n+2m, lo cual resulta en una complejidad O(n+m).

10.2.4. Algoritmo BFS

Se aplica a:

- Problemas de coloración de grafos bipartitos.
- Cálculo de distancias
- Búsqueda de ciclos de mínima longitud.

Para su ejecución:

1. Se elige, arbitrariamente, un vértice de inicio.

2. Se inicializa una COLA Q en la cual se distinguen los extremos FIRST y LAST.
   Los elementos se añaden a la cola Q por el extremo LAST.
   Los elementos se eliminan de la col Q por el extremo FIRST.
   Un elemento desaparece antes si se ha añadido antes (FIFO).

3. Se inicializa una secuencia R para registrar el recorrido del grafo, con el vértice de inicio.

4. De entre las adyacencias del vértice FIRST, se avanza hacia el siguiente vértice adyacente no incluido en R. El criterio de ordenación relativa entre vértices se establece de forma previa a la ejecución, ya sea alfanuméricamente o mediante otro sistema.

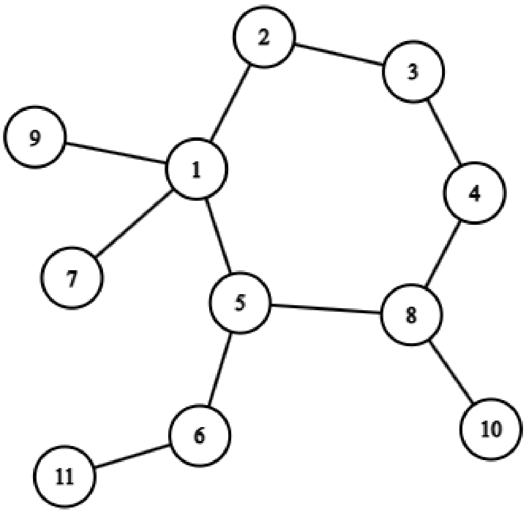
5. Cada vez que se visita un vértice:
   - Se añade a la cola Q, en la posición LAST.
   - Se incluye el vértice en la secuencia R que determina el RECORRIDO del grafo.

6. Siempre que se agotan las adyacencias por incluir en R de un vértice, se excluye ese vértice de la cola Q, de modo que el siguiente vértice en la cola Q lo releva como FIRST. La supresión de vértices sigue hasta el siguiente vértice en la cola con adyacencias pendientes de ser incluidas en R.

7. La ejecución se detiene cuando Q queda vacía.

Nótese que el recorrido no tiene por qué presentar forma de árbol ni discurrir a través de las aristas del grafo recorrido.

10.2.5. EJEMPLO DE EJECUCIÓN BFS BÚSQUEDA EN ANCHURA



- Se elige, como vértice de inicio, el vértice 2.
- Se inicializa la cola Q = 2
- Se inicializa el recorrido R = [2]
- El criterio de comparación entre vértices se fija como: MENOR PRIMERO (v.g. 5 antes que 6 y 6 antes que 7).
- Se representa la ejecución como una tabla de 4 columnas:
  - Q = Estado de la cola
  - V^{+} = Vértice añadido a Q en la iteración previa
  - V^{-} = Vértice suprimido de Q en la iteración previa
  - R = Secuencia de recorrido

Q	V+	V-	R	
2	2	-	[2]	Se añade en LAST el vértice inicial 2
21	1	-	[2,1]	Se añade en LAST la adyacencia 1 frente a 3 ya que 1 < 3
213	3	-	[2,1,3]	Se añade en LAST la última adyacencia de 2 no presente en R
13	-	2	[2,1,3]	Se suprime de FIRST el vértice 2: todas sus adyacencias están en R
135	5	-	[2,1,3,5]	Se añade en LAST la adyacencia 5 frente a 7 y frente a 9 (5 < 7 y 5 < 9)
1357	7	-	[2,1,3,5,7]	Se añade en LAST la adyacencia 7 frente a 9 ya que 7 < 9
13579	9	-	[2,1,3,5,7,9]	Se añade en LAST la última adyacencia de 1 no presente en R
3579	-	1	[2,1,3,5,7,9]	Se suprime de FIRST el vértice 1: todas sus adyacencias están en R
35794	4	-	[2,1,3,5,7,9,4]	Se añade en LAST la última adyacencia de 3 no presente en R
5794	-	3	[2,1,3,5,7,9,4]	Se suprime de FIRST el vértice 3: todas sus adyacencias están en R
57946	6	-	[2,1,3,5,7,9,4,6]	Se añade en LAST la adyacencia 6 frente a 8 ya que 6 < 8
579468	8		[2,1,3,5,7,9,4,6,8]	Se añade en LAST la última adyacencia de 5 no presente en R
79468	-	5	[2,1,3,5,7,9,4,6,8]	Se suprime de FIRST el vértice 5: todas sus adyacencias están en R
9468	-	7	[2,1,3,5,7,9,4,6,8]	Se suprime de FIRST el vértice 7: todas sus adyacencias están en R
468	-	9	[2,1,3,5,7,9,4,6,8]	Se suprime de FIRST el vértice 9: todas sus adyacencias están en R
68	-	4	[2,1,3,5,7,9,4,6,8]	Se suprime de FIRST el vértice 4: todas sus adyacencias están en R
6811	11	-	[2,1,3,5,7,9,4,6,8,11]	Se añade en LAST la última adyacencia de 6 no presente en R
811	-	6	[2,1,3,5,7,9,4,6,8,11]	Se suprime de FIRST el vértice 6: todas sus adyacencias están en R
81110	10	-	[2,1,3,5,7,9,4,6,8,11,10]	Se añade en LAST la última adyacencia de 8 no presente en R
1110	-	8	[2,1,3,5,7,9,4,6,8,11,10]	Se suprime de FIRST el vértice 8: todas sus adyacencias están en R
10	-	11	[2,1,3,5,7,9,4,6,8,11,10]	Se suprime de FIRST el vértice 11: todas sus adyacencias están en R
∅	-	10	[2,1,3,5,7,9,4,6,8,11,10]	Se suprime de FIRST el vértice 10: todas sus adyacencias están en R. La cola Q está vacía: se detiene la ejecución

EJEMPLO DE EJECUCIÓN BFS BÚSQUEDA EN ANCHURA

También se puede representar el recorrido como SECUENCIA DE ARISTAS. Para el mismo grafo anterior:

Q	e+	R
2	-	∅
21	{2,1}	[{2,1}]
213	{2,3}	[{2,1},{2,3}]
13	-	[{2,1},{2,3}]
135	{1,5}	[{2,1},{2,3},{1,5}]
1357	{1,7}	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7}]
13579	{1,9}	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9}]
3579	-	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9}]
35794	{3,4}	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4}]
5794	-	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4}]
57946	{5,6}	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6}]
579468	{5,8}	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8}]
79468	-	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8}]
9468	-	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8}]
468	-	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8}]
68	-	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8}]
6811	{6,11}	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8},{6,11}]
811	-	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8},{6,11}]
81110	{8,10}	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8},{6,11},{8,10}]
1110	-	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8},{6,11},{8,10}]
10	-	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8},{6,11},{8,10}]
∅	-	[{2,1},{2,3},{1,5},{1,7},{1,9},{3,4},{5,6},{5,8},{6,11},{8,10}]

Nótese que la arista {8,4} queda fuera del recorrido en anchura.

10.2.6. Análisis del algoritmo BFS

En el algoritmo BFS cada vértice de los n que hay en G se añade a la cola 1 vez.

En total, se examinan 2m aristas, siendo m la medida de G.

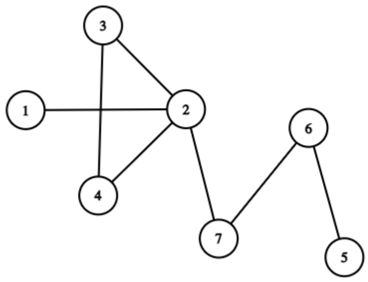
Por tanto, la complejidad aproximada es O(n + m).

2.3. CONECTIVIDAD

2.3.1. Conexión entre vértices: grafo conexo y componente conexa

Un grafo G=(V,E) es CONEXO si cualquier par de vértices u y v ($\forall\, u, v \in V$) están conectado por un camino u – v.

Es decir, todo vértice del grafo debe ser accesible mediante un camino desde cualquier otro



Todo grafo conexo está compuesto por UNA ÚNICA COMPONENTE CONEXA.

Por ejemplo, en el grafo G* se puede alcanzar cualquier vértice a partir de cualquier otro siguiendo un camino.
Por tanto, el grafo G* es conexo.

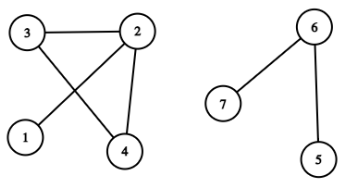
2.3.2. Grafo no conexo y componentes conexas

Se dice que un grafo es NO CONEXO si no existe ningún camino que permita alcanzar cualquier vértice desde cualquier otro.

Como consecuencia, se identifican más de una COMPONENTES CONEXAS o SUBGRAFOS en él.

Un grafo no conexo G se puede ver como la unión disjunta de sus k componentes conexas:

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots G_k$$



Por ejemplo, el grafo G* es NO CONEXO y presenta 2 componentes conexas, con sus subconjuntos de V y de E propios, en este caso:

- El subgrafo G^*_a = ({1,2,3,4},E_a)
- El subgrafo G^*_b = ({5,6,7},E_b)

Entonces $G = G_a \cup G_b$

2.3.3. Relación entre orden y medida en componentes conexas

Todo grafo G de orden n y medida m, formado por k componentes conexas cumple:

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$; $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$

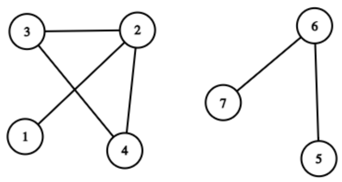
2.3.4. Medida mínima de un grafo: conexo y no conexo

Todo grafo G de orden n y medida m satisface:

$$m \geq n - k$$

Para un grafo conexo (k=1) se ve el resultado particular m ≤ n – 1

EJEMPLO



El grafo G tiene orden n = 7, medida m = 6 y tiene k = 2 componentes conexas.
Se verifica: 6 ≥ 7 – 2

2.3.5. Test de conexión

Si mediante el algoritmo DFS se puede obtener un recorrido R que contenga TODOS los vértices del grafo G, se dice que G es CONEXO.

Verificar la conectividad de un grafo de esta manera tiene complejidad O(n+m).

La matriz de adyacencias de un grafo conexo no puede alojar fila o columna nula.

EJEMPLO DFS Y MATRIZ DE ADYACENCIAS PARA DETERMINAR CONECTIVIDAD

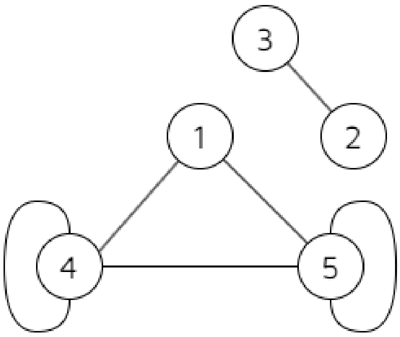
Se desea verificar si el grafo G definido por la siguiente matriz de adyacencias A es conexo o no.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que la segunda y la tercera fila solo alojan un elemento no nulo: los vértices caracterizados por esas hileras están aislados del resto. Por tanto, se identifican 2 componentes conexas.

Además, hay elementos no nulos en la diagonal principal, lo cual señala la presencia de bucles en los vértices 4 y 5.

Aplicando el algoritmo DFS, arbitrariamente desde el vértice 1 se tiene:



P	V^+/V^-	R
1	+1	[1]
14	+4	[1,4]
145	+5	[1,4,5]
45	-1	[1,4,5]
5	-4	[1,4,5]
Ø	-5	[1,4,5]

Empezando por 2, se obtiene lo mismo:

P	V^+/V^-	R
2	+2	[2]
23	+3	[2,3]
3	-2	[2,3]
Ø	-3	[2,3]

EJEMPLO DFS Y MATRIZ DE ADYACENCIAS PARA DETERMINAR CONECTIVIDAD

Se desea verificar si el grafo G definido por la siguiente matriz de adyacencias B es conexo o no.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P	V^+/V^-	R
1	+1	[1]
12	+2	[1,2]
123	+3	[1,2,3]
1235	+5	[1,2,3,5]
123	-5	[1,2,3,5]
12	-3	[1,2,3,5]
1	-2	[1,2,3,5]
14	+4	[1,2,3,4,5]
1	-4	[1,2,3,4,5]
Ø	-1	[1,2,3,4,5]

Como se puede obtener un recorrido R que incluye todos los vértices, es decir, $R \mid \forall\, v \in V, \forall\, v \in R$ solo hay 1 componente conexa en G.

2.4. DISTANCIAS

2.4.1. Distancia entre vértices

La distancia entre 2 vértices u y v de un grafo G = (V,E), denotada por d(u,v) es la mínima longitud de los caminos que los conectan:

$$d(u,v) = \min\{\, l(C) \mid C \text{ } es \text{ } camino \text{ } u - v\}$$

La distancia entre 2 vértices que pertenecen a componentes conexas distintas es, por convenio, infinita.

2.4.2. Diámetro de un grafo

El diámetro de un grafo G, denotado por D(G), es la mayor de las distancias entre 2 de sus vértices:

$$D(G) = \max\{d(u,v) | u, v \in V\}$$

EJEMPLOS

Diámetro de K_n:

En un grafo completo de orden n, se ven todas las aristas posibles, de manera que todo vértice es vecino de cada otro. Por tanto, el diámetro de K_n es 1

$$D(K_n) = 1$$

Diámetro de $K_{n,m}$:

En un grafo bipartito completo, cada vértice de cada partición es vecino de cada vértice de la otra partición y, por tanto, está a 2 aristas de cualquier otro en su misma partición. Es decir:

$$D(K_{n,m}) = 2$$

Diámetro de C_n:

En un ciclo de orden n, pueden pasar 2 cosas:

- Si n es PAR Los vértices más alejados están separados por la mitad de las aristas:

$$D(C_n) = \frac{n}{2} \text{ } con \text{ } n \text{ } PAR$$

- Si n es IMPAR Los vértices más alejados están separados por la mitad de n – 1 aristas:

$$D(C_n) = \frac{n-1}{2} \text{ } con \text{ } n \text{ } IMPAR$$

Diámetro de T_n:

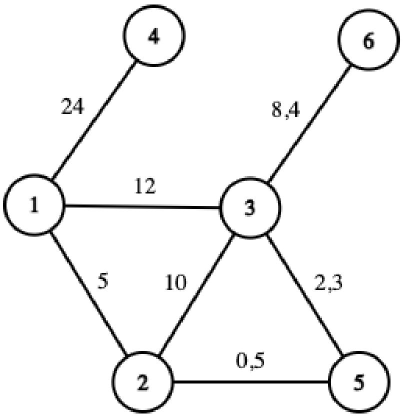
La distancia máxima que se puede encontrar en un grafo trayecto de orden n es la que separa sus extremos, es decir, las n – 1 aristas que aloja. O sea:

$$D(T_n) = n - 1$$

2.4.3. Grafo ponderado

Un grafo ponderado (G,w) se define a partir de un grafo G y una función w que asigna pesos a las aristas del grafo, es decir:

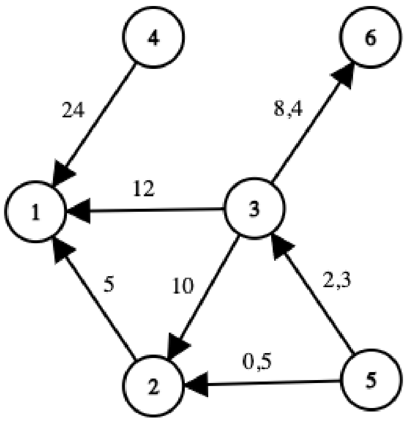
$$w : A \to \mathbb{R}$$



Entonces, un grafo $G = (V, E, w)$ es ponderado si a cada arista $e \in E$ se asigna un peso $w(e) \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, para el grafo G*: w({1,4}) = 24
w({3,6}) = 8,4
w({2,5}) = 0,5

El concepto es el mismo tanto para grafos dirigidos como no dirigidos.



→ Todo grafo cuyas aristas no estén asociadas a pesos, es un grafo NO PONDERADO, para el cual se asocia, de forma convencional, un peso de 1 a cada arista.

2.4.4. Peso de camino en grafo ponderado

Se considera un grafo ponderado G en el cual se define un camino $C : v_0, v_1, v_2 \dots v_k$ que conecta los vértices u y v.

El peso de un camino C, denotado por w(C) es la suma de los pesos de las aristas que conforman el camino:

$$w(C) = \sum_{i=1}^{k} w(\{v_i, v_{i+1}\})$$

2.4.5. Distancia en grafo ponderado

El concepto de distancia es el mismo que para grafos no ponderados, pro considerando el criterio del PESO del camino en lugar de la longitud del camino.

Se considera un grafo ponderado G en el cual existe un camino $C : v_0, v_1, v_2 \dots v_k$ que conecta los vértices u y v con un peso w(C).

Si C es el camino u – v más corto, es decir, el MENOS PESADO de todos, la distancia entre ambos vértices es el peso del camino.

La distancia entre los vértices es el peso del camino MENOS PESADO que los conecta:

$$d(u, v) = \min\{\, w(C) \mid C\ es\ camino\ u - v \,\}$$

→ La distancia entre vértices de componentes conexas distintas es un peso infinito.

2.5. Algoritmos

Se describen 3 algoritmos orientados a la manipulación y exploración de grafos:

1. Algoritmo de Havel-Hakimi
   Permite evaluar si una serie de números es una secuencia gráfica.

2. Algoritmo de Dijksta:
   Permite calcular la longitud mínima entre cualquier pareja de vértices dada.

3. Algoritmo de Floyd:
   Permite calcular la distancia mínima entre todos los pares de vértices de un grafo.

2.5.1. Camino mínimo: algoritmo de Dijkstra

Dado un grafo simple ponderado, permite calcular el camino mínimo desde un vértice seleccionad como origen, hasta cada uno de los otros vértices.

Sobre su representación:
- La EJECUCIÓN del algoritmo se puede representar como TABLA.
- Cada FILA de la tabla, es una ITERACIÓN. Se empieza en la ITERACIÓN 0.
- Cada COLUMNA representa un vértice.
- Cada CELDA registra el COSTE DEL CAMINO MÁS BARATO que permite llegar al vértice que designa la cabecera de la columna en cada momento de la ejecución.
- Además, hay una columna adicional donde se anota el vértice PIVOTE desde el cual se ejecuta la siguiente iteración.
- El contenido de una celda puede ser:
  - Un número natural (coste del mejor camino hasta el momento).
  - Un valor infinito (habitualmente denotado por “-1”) que denota la ausencia de camino hacia un vértice.
- Una vez un vértice ha sido seleccionado como pivote, hace falta algún símbolo para denotar que los valores de esa columna ya no se pueden modificar. Se suele usar *.

Ejecución:
Se parte de la matriz de adyacencias o bien de la representación gráfica del grafo:

	A	B	C	D	E	F	G
A	0				20		
B	8	0	19		31	46	33
C			0	49	8		33
D	29	40		0			
E		40		31	0	16	5
F				12		0	
G				1		5	0

Por ejemplo, se tomará como pivote inicial B.

1. En la iteración 0 SE FIJA EL PIVOTE INICIAL:
   - Se asigna en la columna del pivote inicial un 0.
   - Se asigna en todas las otras columnas un valor ∞.

   Se anota el pivote inicial en la columna reservada para el siguiente pivote.

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i = 0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B

2. En la iteración 1, se evalúa la lista de adyacencias del pivote inicial:

	A	B	C	D	E	F	G
B	8	0	19		31	46	33

B conecta con A por coste 8, C por coste 19, con E por 31 y con G por 33.
No conecta con D.

Se anota en la columna que corresponde a cada uno de los otros vértices los pesos de las aristas que los conectan con el pivote actual.

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i = 0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B
$i = 1$	8	0*	19	∞	31	46	33	

En caso de no existir arista desde el pivote hacia algún vértice, no se podrá mejorar el coste del camino registrado hacia ese vértice hasta el momento y se mantendrá como ∞.

3. Una vez evaluadas todas las adyacencias y no adyacencias, es decir, habiendo actualizado las etiquetas que se puedan actualizar (porque mejoren el ∞ inicial), se selecciona como pivote para la siguiente iteración el vértice que corresponda a aquella columna con una etiqueta de menor peso. Su columna queda fijada.

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i = 0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B
$i = 1$	8*	0*	19	∞	31	46	33	A

4. En la siguiente iteración, se evalúa sí las adyacencias del nuevo pivote permiten disminuir el valor del coste acumulado hacia cada vértice hasta la iteración anterior.

   El coste acumulado para llegar hasta el pivote actual A es de 8 a través de B.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0				20		

A tiene como adyacencia E por 20.

Para cada celda de cada fila en cada iteración, si la suma del peso de la arista que conecta el pivote actual con otro vértice más el coste acumulado que tiene llegar al pivote actual es MENOR que el coste actual que tiene llegar a ese otro vértice, el valor se actualiza, de lo contrario, queda igual que hasta ahora.

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i=0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B
$i=1$	8*	0*	19	∞	31	46	33	A
$i=2$	8*	0*	19	∞	8+28=28	46	33	

El mejor camino hasta E, hasta la iteración anterior era de 31 desde B (camino B,E). Como el coste de llegar a E tomando A como relevo (camino B,A,E) tiene un coste total menor que 31, pus es de 8 + 20 = 28. La etiqueta se actualiza.

A continuación, ya se puede decidir el siguiente pivote y repetir el proceso hasta haber fijado e mejor coste con * en cada una de las columnas.

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i=0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B
$i=1$	8*	0*	19	∞	31	46	33	A
$i=2$	8*	0*	19*	∞	28	46	33	C

El coste acumulado hasta C es de 19.
Sus adyacencias son:

	A	B	C	D	E	F	G
C			0	49	8		33

La ejecución sigue:

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i=0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B
$i=1$	8*	0*	19	∞	31	46	33	A
$i=2$	8*	0*	19*	∞	28	46	33	C
$i=3$	8*	0*	19*	19+49=68	19+8=27*	46	33	E

El coste acumulado hasta E es 27.
Sus adyacencias son:

	A	B	C	D	E	F	G
E		40		31	0	16	5

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i=0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B
$i=1$	8*	0*	19	∞	31	46	33	A
$i=2$	8*	0*	19*	∞	28	46	33	C
$i=3$	8*	0*	19*	68	27*	46	33	E
$i=4$	8*	0*	19*	27+31=58	27*	27+16=43	27+5=32*	G

El coste acumulado hasta G es 32.
Sus adyacencias son:

	A	B	C	D	E	F	G
G				1		5	0

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i=0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B
$i=1$	8*	0*	19	∞	31	46	33	A
$i=2$	8*	0*	19*	∞	28	46	33	C
$i=3$	8*	0*	19*	68	27*	46	33	E
$i=4$	8*	0*	19*	58	27*	43	32*	G
i=5	8*	0*	19*	32+1=33*	27*	32+5=37	32*	D

El coste acumulado hasta D es 33.
Sus adyacencias son:

	A	B	C	D	E	F	G
D	29	40		0			

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i=0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B
$i=1$	8*	0*	19	∞	31	46	33	A
$i=2$	8*	0*	19*	∞	28	46	33	C
$i=3$	8*	0*	19*	68	27*	46	33	E
$i=4$	8*	0*	19*	58	27*	43	32*	G
i=5	8*	0*	19*	33*	27*	37	32*	D
$i=6$	8*	0*	19*	33*	27*	37*	32*	F

No se puede mejorar ninguna etiqueta, puesto que todas están o bloqueadas o no son accesibles desde D.
Se escoge el siguiente pivote, lo cual provoca que TODAS las columnas estén bloqueadas. Esto FINALIZA la ejecución y la iteración i = 7 no se ejecuta.

A partir de esta tabla se puede calcular el coste mínimo del recorrido desde el vértice origen a cualquier otro.

Que se actualice el coste hacia un vértice en una iteración NO SIGNIFICA que deba convertirse en pivote para la siguiente necesariamente.

El desarrollo de las columnas debe respetar una serie DECRECIENTE, ya que las sucesivas actualizaciones deben responder a caminos de menor coste.

Se puede recrear el relevo de los pivotes buscando el asterisco en cada fila desde arrba y hacia abajo. Este relevo entre pivotes NO REFLEJA NINGÚN CAMINO en particular.

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i = 0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B
$i = 1$	8*	0*	19	∞	31	46	33	A
$i = 2$	8*	0*	19*	∞	28	46	33	C
$i = 3$	8*	0*	19*	68	27*	46	33	E
$i = 4$	8*	0*	19*	58	27*	43	32*	G
i=5	8*	0*	19*	33*	27*	37	32*	D
$i = 6$	8*	0*	19*	33*	27*	37*	32*	F

Para identificar el camino entre 2 vértices:

- Conviene LEERLO HACIA ATRÁS: del destino hacia el origen, e ir deshaciendo el camino.
- Se observa en LA COLUMNA DEL DESTINO cuál es la PRIMERA ITERACIÓN que presenta una ACTUALIZACIÓN DEFINITIVA (que no se mejora después).
- En la iteración ANTERIOR a esa consultada, se examina CUÁL ERA EL PIVOTE que permitió esa actualización.

Por ejemplo, para leer el camino de B hasta E:

El vértice F tiene un coste mínimo de 37 que se consiguió actualizando desde el vértice G.
El vértice G tiene un coste mínimo de 32 que se consiguió actualizando desde el vértice E.
El vértice E tiene un coste mínimo de 27 que se consiguió actualizando desde el vértice C.
El vértice C tiene un coste mínimo de 19 que se consiguió actualizando desde el vértice B.

Luego el camino es (B,C,E,G,F)

	A	B	C	D	E	F	G	Pivote
$i = 0$	∞	0*	∞	∞	∞	∞	∞	B
$i = 1$	8*	0*	19	∞	31	46	33	A
$i = 2$	8*	0*	19*	∞	28	46	33	C
$i = 3$	8*	0*	19*	68	27*	46	33	E
$i = 4$	8*	0*	19*	58	27*	43	32*	G
i=5	8*	0*	19*	33*	27*	37	32*	D
$i = 6$	8*	0*	19*	33*	27*	37*	32*	F

2.5.2. Camino mínimo en grafo no ponderado

***

2.5.3. Camino mínimo: algoritmo de Floyd

Permite calcular la distancia mínima entre todos los pares de vértices de un grafo.
Parte de la matriz de adyacencias del grafo.
Se basa en evaluar el efecto que tiene en las distancias entre vértices la interposición de un nuevo nodo.

El diámetro de un grafo es la distancia máxima entre dos de sus vértices.

El algoritmo de Floyd consiste en una sucesiva actualización los elementos de la matriz de adyacencias en cada iteración según:

$$\forall d_{i,j}^{n} \in A : \begin{cases} si\ d_{i,j}^{n} + d_{j,i}^{n} < d_{i,i}^{n} & \rightarrow d_{i,i}{}^{n+1} = d_{i,j}^{n} + d_{j,i}^{n} \quad Se\ actualiza\ (camino\ más\ corto) \\ si\ d_{i,j}^{n} + d_{j,i}^{n} > d_{i,i}^{n} & \rightarrow d_{i,i}{}^{n+1} = d_{i,j}^{n} \quad No\ se\ actualiza\ (camino\ más\ largo) \end{cases}$$

Siendo n la iteración del algoritmo.

Ejemplo:
Dada la matriz de adyacencia etiquetada A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \\ 18 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

En la iteración 1, se considera la fila 1 y la columna 1.
En la iteración 2, se considera la fila 2 y la columna 2.
En la iteración n se considera la fila n y la columna n.

En cada iteración n, se compara el elemento en la posición d_{ij} con la suma de los elementos d_{nj} (misma columna que d_{ij}) y d_{in} (misma fila que d_{ij}).
Nóteses que en d_{ij} intersecan la fila donde está d_{in} y la columna donde está d_{nj}.

Por ejemplo, en la iteración 3 se tendría:

$$(d_{i,j}^{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 22 & 12 \\ 31 & 0 & 4 \\ 23 & 2 & 0 \\ \mathbf{18} & 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow resultado\ de\ la\ iteración\ 2$$

Sobre esta matriz, se hace:

$$18 + 12 = 30$$
$$18 + 4 = 22$$
$$18 + 0 = 18$$

Y se compara cada suma de esos elementos con el valor del elemento en que intersecan su fila con su columna, es decir:

$$18 + 12 = 30 > 0 \rightarrow No\ se\ actualiza$$
$$18 + 4 = 22 < 31 \rightarrow Se\ actualiza\ el\ 31\ con\ 22$$
$$18 + 0 = 18 < 23 \rightarrow Se\ actualiza\ el\ 23\ con\ 18$$

Una vez actualizada la matriz, se hace lo mismo con el siguiente elemento de la fila seleccionada:

$$(d_{i,j}^3) = \begin{pmatrix} 0 & 22 & 12 \\ 22 & 0 & 4 \\ 18 & 2 & 0 \\ 18 & \mathbf{5} & 7 \end{pmatrix}$$

$$5 + 12 = 17 < 22 \rightarrow Se\ actualiza\ el\ 22\ con\ 17$$
$$5 + 4 = 9 > 0 \rightarrow No\ se\ actualiza$$
$$5 + 0 = 5 > 2 \rightarrow No\ se\ actualiza$$

Una vez actualizada:

$$(d_{i,j}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 17 & 12 \\ 22 & 0 & 4 \\ 18 & 2 & 0 \\ 18 & \mathbf{5} & 7 \end{pmatrix}$$

Y así sucesivamente para todos los elementos de la fila seleccionada y para cada fila.

2.6. Secuencia gráfica: Algoritmo de Havel-Hakimi

a) Secuencia gráfica

Una secuencia gráfica es una secuencia de grados (secuencia de números que corresponden a los grados de los vértices de un grafo no dirigido) compatible con la construcción de un grafo.

La secuencia gráfica de un grafo es uno de sus INVARIANTES TOPOLÓGICOS, es decir, lo determina.

Que 2 grafos tengan la misma secuencia gráfica no los hace isomorfos.

De acuerdo con Hakimi (1962), una serie de números con n elementos es una secuencia gráfica si cumple 3 condiciones:

5. Cada uno de los n números de la secuencia debe ser menor o igual a n – 1:

$$\forall d_i \leq n - 1 \mid 1 \leq i \leq n$$

Donde:

d_i Representa el GRADO de cada vértice *i* de un grafo.

n Representa el NÚMERO DE VÉRTICES del grafo.

Esto impone el número de vértices n como límite para el grado máximo del grafo a n – 1.

6. La suma de todos los grados debe ser par:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = k \cdot 2 \mid k \in \mathbb{Z}$$

Esto permite considerar también las aristas múltiples.

7. Verifica el algoritmo de Havel-Hakimi.

b) Algoritmo de Havel-Hakimi

Dada una secuencia de números que representan los GRADOS de los vértices de un putativo grafo G, permite determinar si la secuencia es compatible con la construcción de ese grafo. Es decir, permite decidir si la SECUENCIA dada ES GRÁFICA o no.

Cada iteración del algoritmo tiene 3 pasos:
1) Ordenar de mayor a menor la secuencia inicial o procedente de la iteración previa.
2) Suprimir el primer elemento de la secuencia, sea n su valor.
3) Restar 1 a los primeros n elementos de la serie, desde la izquierda, siendo n el valor del elemento suprimido.

Se ejecutan sucesivas iteraciones del algoritmo hasta:
a) Alcanzar una serie formada solo por 0 → La secuencia dada ES SECUENCIA GRÁFICA
b) Alcanzar algún dígito NEGATIVO → La secuencia dada NO ES SECUENCIA GRÁFICA.

¡Esta web va MUY BIEN para verificar si una secuencia de grados dada es secuencia gráfica!

Ejemplo:

Se desea conocer si la la secuencia de números $3,2,2,1,2,1,3,1,2,1$ es gráfica.

→ La secuencia verifica la primera condición:

$$\forall d_i \leq n - 1 \mid 1 \leq i \leq n$$

Es decir, ninguno de los 10 grados dados excede el valor 10.

→ Cumple la segunda condición, SU SUMA ES PAR:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 3 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 = 18$$

→ Se ejecuta el algoritmo de Havel-Hakimi:

ITERACIÓN 0
1) Se ordena de mayor a menor: 3,3,2,2,2,2,1,1,1,1
2) Se suprime el primer elemento: ~~3~~,3,2,2,2,2,1,1,1,1
3) Se resta 1 a tantos elementos, desde la izquierda, como indica el elemento suprimido:
Como se suprimió un 3, se resta 1 a los primeros TRES elementos de la serie
$\cancel{3}, 3-1, 2-1, 2-1$,2,2,1,1,1,1
Se obtiene: 2,1,1,2,2,1,1,1,1

ITERACIÓN 1
1) Se ordena de mayor a menor: 2,2,2,1,1,1,1,1,1
2) Se suprime el primer elemento: ~~2~~,2,2,1,1,1,1,1,1
3) Se resta 1 a tantos elementos como indica el elemento suprimido: $\cancel{2}, 2-1, 2-1$,1,1,1,1,1,1
Se alcanza: 1, 1, 1,1,1,1,1,1

ITERACIÓN 2
1) Se ordena de mayor a menor: 1, 1, 1,1,1,1,1,1
2) Se suprime el primer elemento: ~~1~~, 1, 1,1,1,1,1,1
3) Se resta 1 a tantos elementos como indica el elemento suprimido: $\cancel{1}, 1-1$, 1,1,1,1,1,1
Se alcanza: 0, 1,1,1,1,1,1

ITERACIÓN 3
1) Se ordena de mayor a menor: 1, 1, 1,1,1,1,0
2) Se suprime el primer elemento: ~~1~~, 1, 1,1,1,1,0
3) Se resta 1 a tantos como indica: ~~1~~,0, 1,1,1,1,0

ITERACIÓN 4
1) Se ordena de mayor a menor: 1, 1, 1,1,0,0
2) Se suprime el primer elemento: ~~1~~, 1,1,1,0,0
3) Se resta 1 a tantos como indica: ~~1~~,0, 1,1,0,0

ITERACIÓN 5
1) Se ordena de mayor a menor: 1, 1,0,0,0
2) Se suprime el primer elemento: ~~1~~, 1,0,0,0
3) Se resta 1 a tantos como indica: ~~1~~,0,0,0,0

Se alcanza una serie de 0, es secuencia gráfica.

EJEMPLO 2:
Dada la secuencia 5,6,2,1,1,1,2,4 se desea verificar si es gráfica o no.

1) La secuencia está formada por n = 8 números.
Ningún grado d_i excede n – 1 = 7, es decir: $\forall d_i \leq n-1$
Es compatible con ser gráfica.

2) La suma de los grados es 5 + 6 + 2 + 1 + 1 +1 + 2 + 4 = 22

La SUMA ES PAR.
Es compatible con ser gráfica.

3) Se ejecuta el algoritmo de Havel-Hakimi:

Secuencia dada:	(5,6,2,1,1,1,2,4)

ITERACIÓN 0

Secuencia ordenada:	(6,5,4,2,2,1,1,1)
Se elimina el primer elemento (6):	(5,4,2,2,1,1,1)
Se resta 1 de los primeros 6 elementos:	(4,3,1,1,0,0,1)

ITERACIÓN 1

Secuencia ordenada:	(4,3,1,1,1,0,0)
Se elimina el primer elemento (4):	(3,1,1,1,0,0)
Se resta 1 de los primeros 4 elementos:	(2,0,0,0,0,0)

ITERACIÓN 1

Secuencia ordenada:	(2,0,0,0,0,0)
Se elimina el primer elemento (2):	(0,0,0,0,0)
Se resta 1 de los primeros 2 elementos:	(-1,-1,0,0,0)

Se han alcanzado dígitos NEGATIVOS. Por tanto, la secuencia NO ES GRÁFICA.

c) Análisis del Algoritmo de Havel-Hakimi

El algoritmo contempla n – 1 iteraciones, ya que, en cada bucle, se descarta un dígito de la secuencia de grados de longitud n.

La clasificación en orden descendiente tiene complejidad O(n ·log n) mediante algoritmos de clasificación como *merge sort* o *quick sort*.

El bucle del algoritmo ejecuta 2 tipos de operaciones:

1. Restar 1 unidad a cada dígito que corresponda $\frac{n(n-1)}{2}\ operaciones = O(n^2)$
2. Intercalar 2 subsecuencias: aquella de la cual se ha restado y aquella intacta O(n)

De modo que la complejidad global del algoritmo, en el peor de los casos, es $O(n^2)$.

EJEMPLO

Se tiene un grafo simple G de orden n = 9 y medida m = 20. Se desea determinar los valores x,y para que la serie de dígitos (no necesariamente ordenada) sea secuencia gráfica del grafo G' que es COMPLEMENTARIO de G:

$$y, x, x, 6,6,2,2,2,1$$

Se tiene: $n_G = 9$
$m_G = 20$

Por tanto, para su complementario G': $m_{K_n} = m_G + m_{\bar{G}}$

Se cumple, para todo grafo completo:

$$|m_{K_n}| = \binom{n}{2}$$

De lo cual:

$$n_{\bar{G}} = n_G = 9$$

$$m_{\bar{G}} = m_{K_n} - m_G = \binom{9}{2} - 20 = 36 - 20 = 16$$

Por teorema de Euler:

$$m_G = \frac{\sum g(v)}{2}$$

O sea:

$$\sum g(v) = 2 \cdot m_G = 2 \cdot 16 = 32$$

La secuencia gráfica cumple:

- Sus dígitos son NO NEGATIVOS (pueden ser 0):
$$\forall d_i \in S = \{d_1, d_2 \dots d_n\} \geq 0 \to x \geq 0, y \geq 0$$

- Sus dígitos, como MÁXIMO, valen n – 1:
$$\forall d_i \in S = \{d_1, d_2 \dots d_n\} \leq n - 1 \to x \leq 9 - 1, y \leq 9 - 1$$

- Su suma es PAR:
-
$$\sum g(v)\ debe\ ser\ PAR \to se\ cumple\ (32\ es\ par)$$

- S debe satisfacer el algoritmo de Havel-Hakimi.

Para verificarlo, se considera:

- El rango válido para x e y: $x, y \in [1,8]\ en\ S = \{y, x, x, 6,6,2,2,2,1\}$

- La suma de grados par: $y + x + x + 6 + 6 + 2 + 2 + 2 + 1 = y + 2x + 19 = 32$

De lo cual: $y + 2x = 32 - 19 = 13$

Ahora ya se pueden restringir las combinaciones x,y:

$$Si\ x\ es\ PAR\ \to 2x\ es\ PAR$$
$$Si\ x\ es\ IMPAR\ \to 2x\ es\ PAR$$
$$13\ es\ IMPAR \to y\ debe\ ser\ NECESARIAMENTE\ IMPAR$$

Por tanto: $x = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
$y = \{1,3,5,7\}$

Ahora, se descartan las incompatibles:

$$si\ x = 1 \rightarrow y = 11 > 8 \rightarrow descartada$$
$$si\ x = 2 \rightarrow y = 9 > 8 \rightarrow descartada$$
$$si\ x = 3 \rightarrow y = 7 \rightarrow compatible$$
$$si\ x = 4 \rightarrow y = 5 \rightarrow compatible$$
$$si\ x = 5 \rightarrow y = 3 \rightarrow compatible$$
$$si\ x = 6 \rightarrow y = 1 \rightarrow compatible$$
$$si\ x = 7 \rightarrow y = -1 < 1 \rightarrow descartada$$
$$si\ x = 8 \rightarrow y = -3 < 1 \rightarrow descartada$$

Las combinaciones para probar en el algoritmo son:

$$\{(x,y)\} = \{(3,7),(4,5),(5,3),(6,1)\}$$

O sea:

$$S_1 = \{7,6,6,3,3,2,2,2,1\}$$
$$S_2 = \{6,6,5,4,4,2,2,2,1\}$$
$$S_3 = \{6,6,5,5,3,2,2,2,1\}$$
$$S_4 = \{6,6,6,6,2,2,2,1,1\}$$

Para ejecutar el algoritmo:

- Se ordena
- Se suprime la primera cifra
- Se resta 1 unidad a las primeras n cifras, tomando como n el valor de la cifra suprimida.
- Se repite hasta encontrar una secuencia nula y validar la secuencia o encontrar una cifra negativa que la refute.

$S_1 = \{7,6,6,3,3,2,2,2,1\}$	$S_2 = \{6,6,5,4,4,2,2,2,1\}$	$S_3 = \{6,6,5,5,3,2,2,2,1\}$	$S_4 = \{6,6,6,6,2,2,2,1,1\}$
766332221	665442221	665532221	666622211
55221111	54331121	54421121	55511111
4110011	54332111	54422111	4400011
4111100	3221011	3311011	4411000
000000	3221110	3311110	300-100
S es gráfica	110110	200110	S NO es gráfica
con (x,y) = (3,7)	111100	211000	con (x,y) = (6,1)
	01100	00000	
	11000	S es gráfica	
	0000	con (x,y) = (5,3)	
	S es gráfica		
	con (x,y) = (4,5)		

3.SOLUCIÓN PEC 1

CUESTIÓN 1
Cuestión 1a
Determinad cuántas funciones $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{N}_b$ hay, donde $\mathbb{N}_z = \{1,2, \dots z\}$ que cumplan la siguientes propiedades.

1. Que sean inyectivas, con a = 5, b = 20, y tales que los números pares no tengan antiimagen.

Se desea que:

1) La relación entre ambos conjuntos sea una función:

$$f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{N}_b$$

Entonces, el orden de las combinaciones entre los elementos de ambos conjuntos importa en tanto que la función se define como una relación de pares cartesianos ordenados que NO SON INTERCAMBIABLES (no se trata de una combinación).

Por tanto, se debe poder calcular:
- O bien como una como una VARIACIÓN → Si se cumple $m \neq n$
- O bien como una PERMUTACIÓN → Si se cumple $m = n$

Es decir, depende de la relación de los cardinales de los conjuntos de origen y destino, siendo $m = \#\mathbb{N}_a$ y $\#\mathbb{N}_b = n$.

2) Además, se desea que sea inyectiva. Es decir, que satisfaga:

$$\forall a_1 \neq a_2 \in \mathbb{N}_a \to f(a_1) = f(a_2)$$

Se puede demostrar que el número de funciones inyectivas entre dos conjuntos dados está definido por la relación:

$$\#funciones\ inyectivas = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Lo cual es equivalente a:

$$V_{(m,n)} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots}_{n\ veces}$$

Pero los valores n y m están supeditados al **carácter inyectivo** de las funciones buscadas, de forma que se debe cumplir:

$$m \leq n$$

Donde:
$m = \#\mathbb{N}_a$ cardinal del conjunto origen
$n = \#\mathbb{N}_b$ cardinal del conjunto de destino

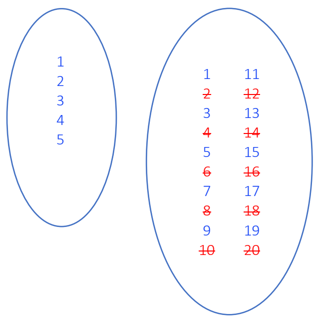
3) Que el conjunto de origen tenga 5 elementos y el de destino 20 elementos. Por tanto, se buscan funciones que cumplan:

$$f : \mathbb{N}_5 \rightarrow \mathbb{N}_{20}$$

La relación entre los cardinales de ambos conjuntos satisface la condición necesaria de inyectividad.

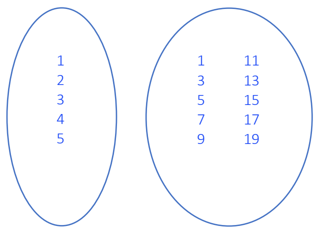
4) Que los números pares no tengan antiimagen (ningún elemento del conjunto de origen conduce a un número par a través de f). Por tanto, el conjunto de destino $\mathbb{N}_{20}$ inicial de 20 elementos queda reducido a:

$$f : \quad \mathbb{N}_5 \quad \rightarrow \quad \mathbb{N}_{20}$$



Es decir, $\mathbb{N}_{20}$ está formado por 10 elementos y todos ellos impares:

$$f : \quad \mathbb{N}_5 \quad \rightarrow \quad \mathbb{N}_{20}$$



La relación entre estos nuevos los cardinales de ambos conjuntos satisface la condición de inyectividad.

Por tanto, de 1) 2) 3) y 4) se puede concluir que el número de funciones inyectivas deseado se calcula como una VARIACIÓN SIN REPETICIÓN de 10 elementos tomados de 5 en 5, es decir:

$$V_{(10,5)} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30.240 \; funciones \; inyectivas$$

O lo que es lo mismo:

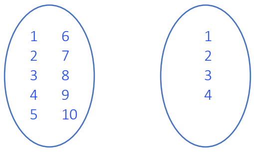
$$\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 30.240 \; funciones$$

2. Que sean exhaustivas, con a = 10, b = 4 y tales que cada $x \in \mathbb{N}_4$ tenga exactamente x antiimágenes.

En este caso se desea:

1) La relación entre ambos conjuntos sea una función:

$$f : \ \mathbb{N}_{10} \quad \to \quad \mathbb{N}_4$$



El orden de las combinaciones entre los elementos de ambos conjuntos importa en tanto que la función se define como una relación de pares cartesianos ordenados que NO SON INTERCAMBIABLES (no se trata de una combinación).

Por tanto, se debe poder calcular:

- O bien como una como una VARIACIÓN → Si se cumple $m \leq n$
- O bien como una PERMUTACIÓN → Si se cumple $m = n$

Es decir, depende de la relación de los cardinales, siendo $m = \#\mathbb{N}_a$ y $\#\mathbb{N}_b = n$

2) Que las funciones f sean exhaustivas, es decir, cumplan:

$$\forall b \in \mathbb{N}_4, \exists\ a \in \mathbb{N}_{10} : f(a) = b$$

Lo cual exige, necesariamente:

$$\#\mathbb{N}_a \geq \#\mathbb{N}_b \leftrightarrow m \geq n$$

Donde:

$m = \#\mathbb{N}_{10} = 10$ cardinal del conjunto origen

$n = \#\mathbb{N}_4 = 4$ cardinal del conjunto de destino

3) Que cada $x \in \mathbb{N}_4$ tenga x antiimágenes, es decir, hay REPETICIÓN:

$$1 \in \mathbb{N}_4\ debe\ tener\ 1\ antiimágenes$$
$$2 \in \mathbb{N}_4\ debe\ tener\ 2\ antiimágenes$$
$$3 \in \mathbb{N}_4\ debe\ tener\ 3\ antiimágenes$$
$$4 \in \mathbb{N}_4\ debe\ tener\ 4\ antiimágenes$$

Por tanto, de 1) 2) y 3) se concluye que la cantidad de funciones deseada se puede calcular como una PERMUTACIÓN (deben intervenir todos los elementos del conjunto de destino) CON REPETICIÓN. Es decir, el número de funciones f deseadas se puede calcular como:

$$PR_n^{r1,r2,r3\dots} = \frac{n!}{r1! \cdot r2! \cdot r3! \dots}$$

En este caso:

$$PR_{10}^{1,2,3,4} = \frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 6 \cdot 24} = 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 12.600\ funciones$$

Cuestión 1b

Queremos encontrar el número de formas diferentes de ordenar las letras de la palabra "CONSCIENCIA". Enunciad este problema en términos del número de funciones que cumplan ciertas propiedades, como las descritas en el apartado anterior, definiendo cuál es el conjunto de entrada, el conjunto de salida y qué propiedades deben cumplir las funciones. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar?

1) En primer lugar, se pide que la relación entre ambos conjuntos sea una función:

$$f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{N}_b$$

Entonces, el orden de las combinaciones entre los elementos de ambos conjuntos importa en tanto que la función se define como una relación de pares cartesianos ordenados que NO SON INTERCAMBIABLES (no se trata de una combinación).

2) En segundo lugar, se pide, de forma implícita, que las funciones f sean exhaustivas, es decir, cumplan:

$$\forall b \in \mathbb{N}_a, \exists\, a \in \mathbb{N}_b : f(a) = b$$

Ya que las reordenaciones de letras en el conjunto de salida contienen repeticiones, es decir, la misma imagen se observa varias veces.

3) En tercer lugar, se caracterizan los conjuntos de entrada y de salida. Se tiene:

Elementos del conjunto origen	Elementos del conjunto destino	Frecuencia
C	C	3
O	O	1
N	N	2
S	S	1
C	Repetición de C	
I	I	2
E	E	1
N	Repetición de N	
C	Repetición de C	
I	Repetición de I	
A	A	1
11 posiciones	**7 elementos únicos distintos**	

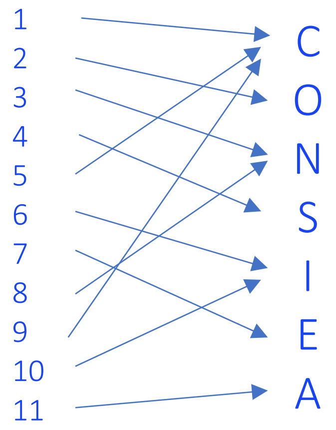
Por tanto, el conjunto de entrada es:

$$\mathbb{N}_{11} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$$

El conjunto de salida es:

$$\mathbb{N}_7 = \{C, O, N, S, I, E, A\}$$

Es decir:



4) Por lo anterior, se pide encontrar un número de funciones:

$$f: \mathbb{N}_{11} \to \mathbb{N}_7$$

Que cumplan:

- El conjunto de entrada tiene 11 elementos pero en el de salida hay tan solo 7 elementos únicos distintos.
- Se observan elementos repetidos en el conjunto de salida.
- Hay elementos en la antiimagen cuya imagen coincide.

Por todo esto, se puede concluir que se busca el número de PERMUTACIONES CON REPETICIÓN de 11 elementos (en que 3 de ellos se repiten 3, 2 y 2 veces respectivamente). Se calcula como:

$$PR_{11}^{3,2,2} = \frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1.663.200 \; formas\ distintas\ de\ ordenar$$

CUESTIÓN 2

Cuestión 2a

Las empresas A, B, C,..., K quieren participar en un congreso internacional. Entre las empresas se tienen que poner de acuerdo para escoger a la persona adecuada que las representará en el congreso. Coinciden en que quién las represente sea de la junta directiva de la empresa que se haya reunido con el mayor número de juntas directivas de las otras empresas el último año.

- De las empresas A y B dicen que se han reunido cada una con 9 de las otras empresas.
- De J y K no quieren decir con cuántas juntas se han reunido, pero sabemos que se han reunido con el mismo número.
- De C, D y E afirman que han participado en 6 reuniones más de las que lo ha hecho J.
- De F y G que han participado en 4 reuniones más que J.
- Finalmente, de H e I dicen que han participado en 2 reuniones más que J.

Sabiendo que las juntas directivas de todas las empresas se han reunido como mínimo con otra junta, indicad de qué empresa sería la persona que debería representar a todas las empresas en el congreso internacional. Justificad la respuesta utilizando la teoría de grafos.

Se sabe:

Empresa	Reuniones
A	9
B	9
J	x
K	x
C	x + 6
D	x + 6
E	x + 6
F	x + 4
G	x + 4
H	x + 2
I	x + 2

Donde x es el número de reuniones que ha celebrado J.

Además, se sabe que: $x \geq 1$

Se observa que el número de empresas es 11. Por tanto, como máximo, una empresa puede haber realizado 10 reuniones.

Por tanto: $1 \leq x \leq 10$

Aplicando la teoría de grafos al caso:

- Cada empresa representa un vértice, un nodo.
- Cada reunión con otra empresa representa una arista.
- El número de empresas que han visitado una junta coincide con el grado del nodo de la empresa visitada.

Sobre el grafo resultante, si existe, se puede afirmar que es un grafo conexo, o con una única componente conexa, ya que no hay reuniones que no hayan asistido reunión alguna.

Según la teoría de grafos, la existencia de este grafo está supeditada a que la serie de número de reuniones dada sea secuencia gráfica, es decir, que verifique el algoritmo de Havel-Hakimi.

Para ello, es NECESARIO que cumpla 2 condiciones:

1) Cada grado (números de la secuencia) debe ser menor o igual a n – 1, siendo n el número total de grados, es decir, ningún grado puede exceder el total de vértices:

$$d_i \leq n - 1 \ \forall\ 1 \leq i \leq n$$

En este caso, n = 11. Por tanto, como mucho, habrá 10 reuniones:

$$d_i \leq 10 \ \forall\ 1 \leq i \leq 11$$

Esta condición solo se cumplirá si el mayor de los grados observados es menor que 10. Por tanto:

$$x + 6 \leq 10$$

De lo cual, se alcanza:

$$x \leq 4$$

Entonces, considerando la condición de 1 reunión mínima:

$$1 \leq x \leq 4$$

2) La suma de todos los grados del grafo debe ser par:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot k : k \in \mathbb{N}$$

En este caso:

$$\sum_{i=1}^{11} d_i = 9 \cdot 2 + x \cdot 2 + (x + 6) \cdot 3 + (x + 4) \cdot 2 + (x + 2) \cdot 2 =$$

$$= 2 \cdot (9 + x + x + 6 + x + 4 + x + 2) + (x + 6) =$$

$$= 2 \cdot (4x + 21) + x + 6 = 9x + 48$$

Se debe cumplir:

$$\sum_{i=1}^{11} d_i = 9x + 48 = 2 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}$$

De lo cual:

$$9x + 48 = 2 \cdot k \mid k \in \mathbb{N} \leftrightarrow x = 2 \cdot k$$

Si x fuera impar, se tendría:

Empresa	Reuniones	Paridad
A	9	IMPAR
B	9	IMPAR
J	x	IMPAR
K	x	IMPAR
C	x + 6	IMPAR
D	x + 6	IMPAR
E	x + 6	IMPAR
F	x + 4	IMPAR
G	x + 4	IMPAR
H	x + 2	IMPAR
I	x + 2	IMPAR

Y la suma de un número IMPAR (11 empresas) de números impares da como resultado un número IMPAR, de modo que el grafo no se podría construir.

Por tanto, solo se puede construir el grafo si x es par, de lo cual se deduce:

$$x = \{2,4\}$$

Por último, para verificar si la serie de grados dada es una secuencia gráfica y, por tanto, compatible con la construcción de un grafo, se recurre al algoritmo de Havel-Hakimi para cada uno de los valores obtenidos para x (2 y 4).

El algoritmo de Havel-Hakimi consiste en:

a. Se toma la secuencia ordenada de mayor a menor.
b. Se elimina el primer elemento.
c. Se resta 1 a tantos elementos como el valor del elemento eliminado.
d. Se ordena de nuevo.
e. Se reitera hasta:
    - Alcanzar una secuencia de 0 → Se trata de una secuencia gráfica.
    - Alcanzar un número negativo → No es secuencia gráfica.

A partir del conjunto de grados dado:

$$9,9,x,x,x+6,x+6,x+6,x+4,x+4,x+2,x+2$$

Para x = 2:

$$9,9,2,2,8,8,8,6,6,4,4$$

Ordenando de mayor a menor:

$$9,9,8,8,8,6,6,4,4,2,2$$

Se suprime el 9, se resta 1 a los nueve siguientes elementos y se ordena:

$$8,7,7,7,5,5,3,3,2,1$$

Se reitera:

$$6,6,6,4,4,2,2,1,1$$

Se reitera:

$$5,5,3,3,1,1,1,1$$

Se reitera:

$$4,2,2,1,1,0,0$$

Se reitera:

$$1,1,0,0,0,0$$

Se reitera:

$$0,0,0,0,0$$

Se ha alcanzado una secuencia de 0 y, por tanto, para x = 2, el número de reuniones dado verifica el algoritmo de Havel-Hakimi y, por tanto, existe un grafo que modela el caso.

Para x = 4:

$$9,9,4,4,10,10,10,8,8,6,6$$

Ordenando de mayor a menor:

$$10,10,10,9,9,8,8,6,6,4,4$$

Se suprime el 10, se resta 1 a los diez siguientes elementos y se ordena:

$$9,9,8,8,7,7,5,5,3,3$$

Se reitera:

$$8,7,7,6,6,4,4,2,2$$

Se reitera:

$$6,6,5,5,3,3,1,1$$

Se reitera:

$$5,4,4,2,2,1,0$$

Se reitera:

$$3,3,1,1,0,0$$

Se reitera:

$$2,0,0,0,0$$

Se reitera:

$$-1,-1,0,0$$

Se alcanza un índice negativo. Por tanto, para x = 4, la secuencia de reuniones dada no verifica el algoritmo de Havel-Hakimi, de modo que no existe un grafo que la modele.

De los 2 posibles valores de x, solo x = 2 verifica una secuencia gráfica, así que se asume como cierto. Se concluye:

Se puede afirmar que una persona de la empresa A o de la empresa B responde a los requerimientos del colectivo y es quien debe asistir al congreso.

Empresa	Reuniones
A	9
B	9
J	2
K	2
C	8
D	8
E	8
F	6
G	6
H	4
I	4

Cuestión 2b

¿Para qué valores de n, donde n es el número de vértices, existe un grafo $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{A})$ 3-regular tal que su grafo complementario $\overline{\mathrm{G}} = (\mathrm{V}, \overline{\mathrm{A}})$ tenga 3 aristas menos que $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{A})$? Justificad la respuesta adecuadamente para todo valor de n.

Según la teoría de grafos, se sabe que:

1) Un grafo G es 3-regular si cada uno de sus vértices es de grado 3 (es decir, sobre cada vértice inciden 3 aristas).
2) La medida de un grafo corresponde a:

$$Medida = nº\ de\ aristas = \frac{\sum grados}{2}$$

3) Un grafo $\overline{\mathrm{G}}$ complementario está compuesto por el mismo conjunto de vértices que G, pero sus aristas $\overline{\mathrm{A}}$ son las complementarias de A.
4) Para calcular las aristas de $\overline{\mathrm{G}}$ basta con sustraer del grafo completo K-regular las aristas presentes en G:

$$\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_{\mathrm{Gcompleto}} - \mathrm{A}$$

Donde $\mathrm{A}_{\mathrm{Gcompleto}}$ se obtiene mediante el número combinatorio $\binom{n}{2}$ donde n es su número de vértices.

Por tanto, en este caso:

- La medida del grafo G es:

$$Medida\ de\ G = \frac{\sum grados}{2} = \frac{3n}{2}$$

Ya que G es 3-regular, el grado de todos sus vértices es 3 y n su número.

- Y la medida del grafo complementario $\overline{\mathrm{G}}$ se pide que sea:

$$Medida\ de\ \overline{\mathrm{G}} = \frac{3n}{2} - 3$$

Se cumple que la medida del grafo completo equivale a la suma de aristas de G y de $\overline{\mathrm{G}}$:

$$\binom{n}{2} = \frac{3n}{2} + \left(\frac{3n}{2} - 3\right)$$

De lo cual:

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 3n - 3$$

Se alcanza:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2!\,(n-2)!} = 3n - 3$$

Operando:

$$n \cdot (n-1) = 2 \cdot (3n - 3)$$

Se alcanza la ecuación:

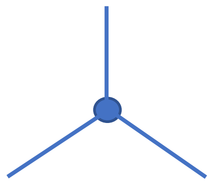
$$n^2 - 7n + 6 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$n = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 1 \\ n_2 = 6 \end{cases}$$

→ Se representa el grafo **G** con n = 1 de un único vértice:

Se sabe que **G** debe ser 3-regular, es decir, sobre su único vértice deben incidir 3 aristas:



Pero esta configuración no es compatible con la definición de grafo.

→ Se considera n = 6 como única solución posible para la existencia del grafo G.

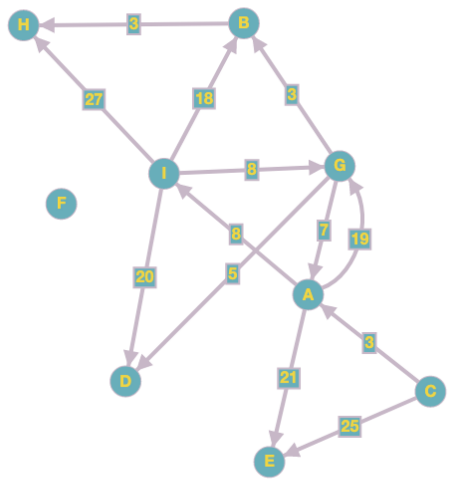
CUESTIÓN 3

La Tabla 1 muestra la ejecución parcial del algoritmo de Dijsktra para un grafo $G = (V, A)$ dirigido (con pesos asignados a los arcos dentro del conjunto de los números enteros positivos), en el que se está buscando la distancia para ir del vértice C al F. Además, sabemos que desde B sólo sale un arco hacia H con un peso de 3; y desde G salen tres arcos, hacia a A, B y D con pesos de 7, 3, y 5, respectivamente.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
(∞, C)	(∞, C)	$(0, C)$	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)
$(3, C)$	(∞, C)	$(0, C)^*$	(∞, C)	$(25, C)$	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)
$(3, C)^*$	(∞, C)	$(0, C)$	(∞, C)	$(24, A)$	(∞, C)	$(22, A)$	(∞, C)	$(11, A)$
$(3, C)$	$(29, I)$	$(0, C)$	$(31, I)$	$(24, A)$	(∞, C)	$(19, I)$	$(38, I)$	$(11, A)^*$
$(3, C)$	$(22, G)$	$(0, C)$	$(24, G)$	$(24, A)$	(∞, C)	$(19, I)^*$	$(38, I)$	$(11, A)$
$()$,	$()$,	$()$,	$()$,	$()$,	$()$,	$()$,	$()$,	$()$,

A partir de la información facilitada, contestad las siguientes preguntas.

En primer lugar, a partir de la lectura de la tabla, y para facilitar la respuesta de las preguntas, se representa el grafo:



Cuestión 3a

¿Podemos afirmar que la distancia para ir del vértice C a D es 24?

Sí, tal como se puede leer en la ejecución del algoritmo de Dijkstra (destacado en fondo verde), el camino a seguir sería:

$$C \xrightarrow{3} A \xrightarrow{8} I \xrightarrow{8} G \xrightarrow{5} D$$

$$(3 + 8 + 8 + 5 = 24) \rightarrow dist(C, D) = 24$$

it	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	(∞, C)	(∞, C)	$(0, \mathrm{C})$	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)
1	$(3, \mathrm{C})$	(∞, C)	$(0, \mathrm{C})^*$	(∞, C)	$(25, \mathrm{C})$	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)
2	$(3, \mathrm{C})^*$	(∞, C)		(∞, C)	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(22, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(11, \mathrm{A})$
3		$(29, \mathrm{I})$		$(31, \mathrm{I})$	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(19, \mathrm{I})$	$(38, \mathrm{I})$	$(11, \mathrm{A})^*$
4		$(22, \mathrm{G})$		$(24, \mathrm{G})$	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(19, \mathrm{I})^*$	$(38, \mathrm{I})$	
5									

Por claridad, ninguna etiqueta fijada se ha escrito una iteración posterior a ese pivote.

Cuestión 3b

¿Cuál es el camino mínimo y la distancia del vértice I al G?

it	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	(∞, C)	(∞, C)	$(0, \mathrm{C})$	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)
1	$(3, \mathrm{C})$	(∞, C)	$(0, \mathrm{C})^*$	(∞, C)	$(25, \mathrm{C})$	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)
2	$(3, \mathrm{C})^*$	(∞, C)		(∞, C)	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(22, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(11, \mathrm{A})$
3		$(29, \mathrm{I})$		$(31, \mathrm{I})$	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(19, \mathrm{I})$	$(38, \mathrm{I})$	$(11, \mathrm{A})^*$
4		$(22, \mathrm{G})$		$(24, \mathrm{G})$	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(19, \mathrm{I})^*$	$(38, \mathrm{I})$	
5									

El camino mínimo es la arista $I \xrightarrow{8} G$ que recorre una distancia de 19 – 11 = 8:

$$dist(I, G) = 8$$

Cuestión 3c

¿Cuál es el camino mínimo y la distancia del vértice C al G?

it	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	(∞, C)	(∞, C)	$(0, \mathrm{C})$	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)
1	$(3, \mathrm{C})$	(∞, C)	$(0, \mathrm{C})^*$	(∞, C)	$(25, \mathrm{C})$	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)
2	$(3, \mathrm{C})^*$	(∞, C)		(∞, C)	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(22, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(11, \mathrm{A})$
3		$(29, \mathrm{I})$		$(31, \mathrm{I})$	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(19, \mathrm{I})$	$(38, \mathrm{I})$	$(11, \mathrm{A})^*$
4		$(22, \mathrm{G})$		$(24, \mathrm{G})$	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(19, \mathrm{I})^*$	$(38, \mathrm{I})$	
5									

El camino mínimo es:

$$C \xrightarrow{3} A \xrightarrow{8} I \xrightarrow{8} G$$

Que recorre una distancia de 3 + 8 + 8 = 19:

$$dist(C, G) = 19$$

Cuestión 3d

Indicad cómo quedaría la siguiente fila de la Tabla 1. Recordad indicar cuál es el vértice pivote de la siguiente iteración.

it	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	(∞, C)	(∞, C)	$(0, \mathrm{C})$	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)
1	$(3, \mathrm{C})$	(∞, C)	$(0, \mathrm{C})^*$	(∞, C)	$(25, \mathrm{C})$	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)	(∞, C)
2	$(3, \mathrm{C})^*$	(∞, C)		(∞, C)	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(22, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(11, \mathrm{A})$
3		$(29, \mathrm{I})$		$(31, \mathrm{I})$	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(19, \mathrm{I})$	$(38, \mathrm{I})$	$(11, \mathrm{A})^*$
4		$(22, \mathrm{G})$		$(24, \mathrm{G})$	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(19, \mathrm{I})^*$	$(38, \mathrm{I})$	
5	$(3, \mathrm{C})$	$(22, \mathrm{G})^*$	$(0, \mathrm{C})$	$(24, \mathrm{G})$	$(24, \mathrm{A})$	(∞, C)	$(19, \mathrm{I})$	$(25, \mathrm{B})$	$(11, A)$
6									

- La etiqueta de menor valor de la iteración 4 es (22,G), en la columna B. Por tanto, el vértice B se elije como pivote para la iteración 5.
- De acuerdo al enunciado, desde el vértice B solo se puede acceder al vértice H, así que es la única etiqueta que se actualiza con (25,B) ya que el peso del arco de B a H es 3.
- Para evitar ambigüedad, se han escrito todas las etiquetas fijadas antes omitidas.

CUESTIÓN 4

Sea G un grafo dirigido ponderado con 8 vértices, $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Aplicando el algoritmo de Floyd, obtenemos los valores $(d_{i,j}^{6})$ y $(d_{i,j}^{7})$ $(i, j = 1, \ldots, 8)$ siguiente:

$$(d_{i,j}^{6}) = \begin{pmatrix} 0 & 43 & 28 & 14 & 35 & 31 & 25 & 20 \\ 13 & 0 & 29 & 5 & 2 & 24 & 24 & 11 \\ 38 & 31 & 0 & 14 & 11 & 33 & 27 & 20 \\ 27 & 39 & 32 & 0 & 21 & 22 & 19 & 6 \\ 30 & 20 & 27 & 3 & 0 & 22 & 22 & 9 \\ 11 & 29 & 36 & 12 & 9 & 0 & 31 & 18 \\ 8 & 28 & 8 & \mathbf{15} & \mathbf{12} & 3 & 0 & \mathbf{21} \\ 8 & 7 & 36 & 12 & 9 & 7 & 23 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d_{i,j}^{7}) = \begin{pmatrix} 0 & 43 & 28 & 14 & 35 & \mathbf{28} & 25 & 20 \\ 13 & 0 & 29 & 5 & 2 & 24 & 24 & 11 \\ \mathbf{35} & 31 & 0 & 14 & 11 & \mathbf{30} & 27 & 20 \\ 27 & 39 & \mathbf{27} & 0 & 21 & 22 & 19 & 6 \\ 30 & 20 & 27 & 3 & 0 & 22 & 22 & 9 \\ 11 & 29 & 36 & 12 & 9 & 0 & 31 & 18 \\ 8 & 28 & 8 & 15 & 12 & 3 & 0 & 21 \\ 8 & 7 & \mathbf{31} & 12 & 9 & 7 & 23 & 0 \end{pmatrix}$$

En negrita aparecen las entradas que se han modificado respecto a la matriz del paso anterior.

Cuestión 4a

Calculad la siguiente matriz que obtenemos si aplicamos el algoritmo de Floyd. Marcad las posiciones que se actualizan respecto a la matriz del paso anterior $(d_{i,j}^{7})$.

$$(d_{i,j}^{8}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{27} & 28 & 14 & \mathbf{29} & \mathbf{27} & 25 & 20 \\ 13 & 0 & 29 & 5 & 2 & \mathbf{18} & 24 & 11 \\ \mathbf{28} & \mathbf{27} & 0 & 14 & 11 & \mathbf{27} & 27 & 20 \\ \mathbf{14} & \mathbf{13} & 27 & 0 & \mathbf{15} & \mathbf{13} & 19 & 6 \\ \mathbf{17} & \mathbf{16} & 27 & 3 & 0 & \mathbf{16} & 22 & 9 \\ 11 & \mathbf{25} & 36 & 12 & 9 & 0 & 31 & 18 \\ 8 & 28 & 8 & 15 & 12 & 3 & 0 & 21 \\ 8 & 7 & 31 & 12 & 9 & 7 & 23 & 0 \end{pmatrix}$$

Se han marcado en negrita los valores actualizados.

Cuestión 4b

¿Cuál es el diámetro del grafo G? ¿Qué dos vértices están a distancia el valor del diámetro?

De la iteración definitiva del algoritmo de Floyd, se deduce que el diámetro del grafo G es 36. Los vértices a esta distancia son los vértices 6 y 3.

Cuestión 4c

¿Por qué vértices podemos asegurar que pasa o que no pasa el camino mínimo de 3 a 1? ¿Y el camino mínimo de 7 a 4? ¿Y de 4 a 3? Justificad todas las respuestas.

Sobre el camino mínimo de 3 a 1:

Se observa la última actualización del camino entre 3 y 1 en la iteración 8.
Esto significa que el camino más corto entre 3 y 1 pasa por el vértice 8.

Sobre el camino mínimo de 7 a 4:

En la iteración 6, se observa la actualización del camino de 7 a 4, de forma que se puede afirmar que el camino más corto entre estos dos vértices pasa por el nodo 6.

$$(d^6_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 43 & 28 & 14 & 35 & 31 & 25 & 20 \\ 13 & 0 & 29 & 5 & 2 & 24 & 24 & 11 \\ 38 & 31 & 0 & 14 & 11 & 33 & 27 & 20 \\ 27 & 39 & 32 & 0 & 21 & 22 & 19 & 6 \\ 30 & 20 & 27 & 3 & 0 & 22 & 22 & 9 \\ 11 & 29 & 36 & 12 & 9 & 0 & 31 & 18 \\ 8 & 28 & 8 & \boxed{\mathbf{15}} & \mathbf{12} & 3 & 0 & \mathbf{21} \\ 8 & 7 & 36 & 12 & 9 & 7 & 23 & 0 \end{pmatrix}$$

Sobre el camino mínimo de 4 a 3:

En la iteración 7, se observa la actualización del camino de 4 a 3, de forma que se puede afirmar que el camino más corto entre estos dos vértices pasa por el nodo 7.

$$(d^7_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 43 & 28 & 14 & 35 & \mathbf{28} & 25 & 20 \\ 13 & 0 & 29 & 5 & 2 & 24 & 24 & 11 \\ \mathbf{35} & 31 & 0 & 14 & 11 & \mathbf{30} & 27 & 20 \\ 27 & 39 & \boxed{\mathbf{27}} & 0 & 21 & 22 & 19 & 6 \\ 30 & 20 & 27 & 3 & 0 & 22 & 22 & 9 \\ 11 & 29 & 36 & 12 & 9 & 0 & 31 & 18 \\ 8 & 28 & 8 & 15 & 12 & 3 & 0 & 21 \\ 8 & 7 & \mathbf{31} & 12 & 9 & 7 & 23 & 0 \end{pmatrix}$$

No disponemos del resto de iteraciones, de modo que no podemos afirmar ni refutar qué otros vértices integran cada camino mínimo.

CUESTIÓN 5 – Moodle
Cuestión 5.1
Dado el grafo simple G con vértices V = (1,2,...,8) y definido por la siguiente matriz de adyacencias:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	1	0	0	1	1	0
2	0	0	1	0	0	1	0	1
3	1	1	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	1	1
6	1	1	1	0	0	0	1	1
7	1	0	0	0	1	1	0	1
8	0	1	0	0	1	1	1	0

Nótese que no es imprescindible dibujar el grafo para responder, aunque si no es complejo, es muy aconsejable representarlo.

Determinar:

- El orden del grafo
  El orden del grafo coincide con el número de vértices. En este caso, el orden es 8.
- La medida del grafo
  La medida del grafo coincide con el número de aristas. En este caso, 13. En el caso de grafos simples, es útil leer solamente los valores situados por encima o por debajo de la diagonal principal (que en este caso solo contendrá elementos nulos) de la matriz de adyacencias (que en este caso siempre será simétrica).

- Los vértices adyacentes al vértice 1.
  Basta con leer cuáles entradas distintas de 0 hay en la columna 1 o bien en la fila 1. En este caso, son el vértice 1 está conectado con los vértices 3, 6 y 7.

- La secuencia de grados, escrita de mayor a menor.
  El grado de un vértice es el número de aristas que inciden en él. Por tanto, basta con contar cuántas aristas entran y salen de cada vértice, es decir, el número de 1 en cada hilera. En este caso:

Vértice	Grado
1	3
2	3
3	4
4	0
5	3
6	5
7	4
8	4

De mayor a menor: 5,4,4,4,3,3,3,0

- El número de vértices aislados.
  Cada hilera vacía en la matriz de adyacencias denota un vértice aislado.
  Cada vértice aislado es, en sí mismo, una componente conexa del grafo.
  En este caso, solamente la fila 4 está vacía, por tanto, solo el vértice 4 está aislado. Se dice entonces que el grafo dado tiene 2 componentes conexas: el vértice 4 aislado y el resto del grafo.

- La medida del grafo complementario
  La medida del grafo complementario se deduce a partir de la medida del grafo dado mediante la relación con el grafo completo de orden n:

  La medida del grafo completo se calcula como:

$$Medida\ G_{completo} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

  En este caso:

$$Medida\ G_{completo} = \binom{8}{2} = \frac{8(8-1)}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

  Y se verifica:

$$Medida\ G_{completo} = Medida\ G + Medida\ \bar{G}$$

  En este caso:

$$Medida\ \bar{G} = Medida\ G_{completo} - Medida\ G = 28 - 13 = 15$$

- El número de componentes conexas del grafo complementario
  El grafo complementario G' se construye:
  - Excluyendo del grafo completo de orden k las aristas presentes en el grafo G dado (todas las presentes en la matriz de adyacencias).
  - Incluyendo las aristas del grafo completo ausentes en G (0 en la matriz de adyacencias).

  Esto se resume invirtiendo en la matriz de adyacencias todos los 0 por 1 y viceversa.

  En este caso, en el grafo complementario G' se encontrará UNA ÚNICA componente conexa: el vértice 4 se conectará con todos los demás y cada otro perderá las aristas que tiene y ganará las que no tiene.

  Para observar más de una componente conexa en G' se debe cumplir que al menos 1 vértice de G esté conectado con todos los otros, es decir, debe haber al menos una hilera con todos los elementos 1, es decir, ningún 0.

Cuestión 5.1
Dado el grafo simple G con vértices V = (1,2,...,8) y definido por la siguiente matriz de adyacencias:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	0	0	1	1	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	1	0
6	1	1	1	0	0	0	0	1	0
7	0	1	0	1	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	1	1	1	0	0
9	1	0	1	0	0	0	0	0	0

Nótese que la diagonal principal solo contiene elementos nulos. Esto conlleva la ausencia de lazos.

Se desea determinar:

- El orden de G:
  El número de vértices de G es 9, por tano, su orden es 9.

- La medida de G:
  El número de aristas de G se calcula fácilmente dividiendo entre 2 el recuento de elementos no nulos de la matriz. En este caso, se cuentan 28 elementos no nulos. Por tanto, la medida es de 14 aristas.

- El orden de G tras eliminar el vértice 1:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	0	0	1	1	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	1	0
6	1	1	1	0	0	0	0	1	0
7	0	1	0	1	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	1	1	1	0	0
9	1	0	1	0	0	0	0	0	0

El nuevo orden es de 8 vértices.

- La medida de G tras eliminar el vértice 1:

Se han perdido 8 elementos no nulos (4 de la fila 1 y 4 de la columna 1).
Como en la matriz se representa cada uno de los 2 extremos de cada arista, por cada 2 elementos suprimidos, se pierde 1 arista.
Por tanto, la nueva medida es: $14 - \frac{8}{2} = 14 - 4 = 10\ aristas.$

- El orden de G tras CONTRAER la arista entre los vértices 1 y 2:

  CONTRAER una arista consiste en combinar en un solo vértice los vértices conectados por la arista contraída de manera que el nuevo vértice aglutina las aristas presentes en los vértices previos.
  Esto conlleva:
  - Se pierde la arista contraída:
    La medida mengua en 1.
  - Se pierde un vértice:
    Los vértices 1 y 2 dan lugar al vértice 12.
    El orden disminuye en 1.
  - Las aristas que salían de los vértices contraídos hacia un mismo destino se funden:
    La medida mengua en 1 por cada par de aristas con origen en 1 o 2 con el mismo destino.

  Por tanto, el nuevo orden es 8.

- La medida de G tras CONTRAER la arista entre los vértices 1 y 2:

  Se pierde la arista 1->2 → Medida mengua en 1.

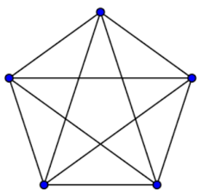
  El vértice 1 proyecta a 4, 6 y 9 (además de a 2).
  El vértice 2 proyecta a 3,6 y 7 (además de a 1).
  Por tanto, ambos vértices solo comparten la arista hacia 6.
  Se pierde 1 de las 2 aristas que salen hacia 6. → Medida mengua en 1.

  La mengua total en la medida es de 2 aristas.
  Por tanto, la nueva medida es de $14 - 2 \ = 12 \ aristas.$

- El orden del grafo $G' = G \cup K_5$ (unión de G y el grafo completo de orden 5):

  → Sobre el grafo completo:
  El grafo completo de n vértices se define como: $K_n = \left(5, \binom{n}{2}\right)$

  El grafo K_5 es:



  En este caso, n = 5:

$$K_5 = \left(5, \frac{5(5-1)}{2}\right) = \left(5, \frac{20}{2}\right) = (5{,}10).$$

  → Sobre el grafo unión:

Siendo $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ se cumple:

$$G' = G_1 \cup \mathrm{G}_2 = (V_1 \cup V_2\,, A_1 \cup A_2) = (\#V_1 + \#V_2, \#A_1 + \#A_2)$$

Por tanto, en este caso:

$$G' = G \cup \mathrm{K}_5 = (9 + 5{,}14 + 10) = (14{,}28)$$

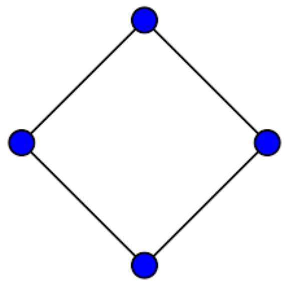
Por tanto, el orden del grafo unión es 14.

- La medida del grafo $G' = G \cup K_5$ (unión de G y el grafo completo de orden 5):

  Por tanto, el orden del grafo unión es 14.

- El orden del grafo suma G + C4 (ciclo de 4 vértices):

  → Sobre el grafo ciclo:
  El ciclo de 4 vértices es:



→ Sobre el grafo suma
Siendo $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ se cumple:

$$G' = G_1 + \mathrm{G}_2 = (V_1 \cup V_2\,, A_1 \cup A_2 \cup \{(u, v) \mid u \in V_1, v \in V_2\})$$
$$G' = G_1 + \mathrm{G}_2 = (\#V_1 + \#V_2\,, \#A_1 + \#A_2 + \#V_2 \cdot \#V_1)$$

Es decir:
- Los vértices del grafo suma incluyen los vértices de G_1 y los de G_2.
- Las aristas del grafo suma incluye las aristas de G_1, las de G_2 y las que conectan ambos.

En este caso:

$$G' = G + \mathrm{C}_4 = (9 + 4\,, 14 + 4 + 4 \cdot 9) = (13{,}54)$$

Es decir, por cada vértice de C4, se añade una arista hacia CADA VÉRTICE de G.

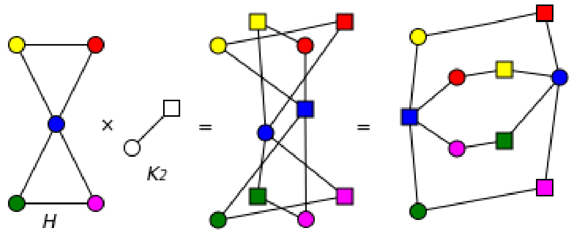
Por tanto, el orden del grafo suma es 13.

- La medida del grafo suma G + C4 (ciclo de 4 vértices):

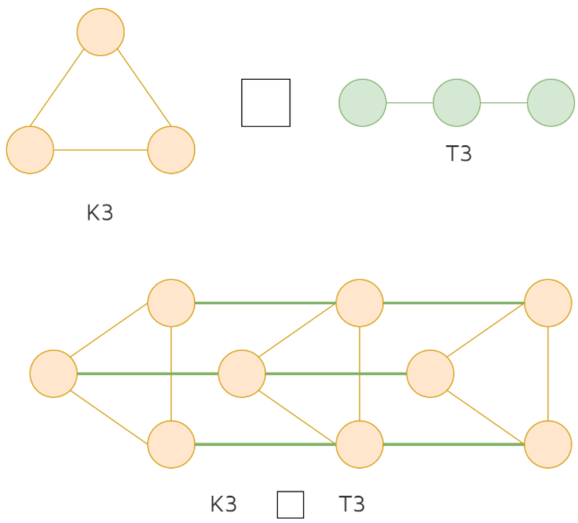
  Por lo anterior, la medida del grafo suma es 54.

- El orden de G x T3, siendo T3 el trayecto de 3 vértices:

  → Sobre el PRODUCTO CARTESIANO de grafos



Se trata de construir un grafo con la misma arquitectura que K2 usando como vértice una copia del grafo H entero.



Por ejemplo:

Orden de $K_3 \square T_3 = |V_{K_3}| \cdot |V_{T_3}|$

Medida $K_3 \square T_3 = |E_{K_3}| \cdot |V_{T_3}| + |V_{K_3}| \cdot |E_{T_3}|$

Por tanto, el orden del grafo producto cartesiano es de 9 · 3 = 27 vértices.

- La medida de G x T3, siendo T3 el trayecto de 3 vértices:

  Por lo anterior, la medida del producto cartesiano es de 60 aristas.