ÀLGEBRA

SOLUCIÓ EXAMEN

8 de juny 2019

1. Responeu als apartats següents:

   a) Expresseu en forma binòmica el nombre complex següent: 2_{90°

   b) Calculeu totes les arrels terceres del nombre complex següent: $\frac{3+3i}{-3+3i}$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Resolució:

a) Per resoldre aquest apartat apliquem les explicacions del punt 3.4.2. del mòdul imprès, "De la forma polar a binòmica":

A 2_{90° tenim que r = 2 i $\vartheta = 90^\circ$ llavors, 2_{90° = 2·(cos 90º+ i sin 90º) =
$= 2(0+1\cdot i) = 2i$

Per tant, la resposta a l'exercici és: $2_{90^\circ} = 2i$

b) Mirem l'exercici d'autoavaluació 30 de la pàgina 50 del material imprès.

De fet el que se'ns demana són les arrels terceres de $\frac{3+3i}{-3+3i}$.

Primer de tot hem de saber quin és el nombre complex que obtenim de la fracció donada. Per a això multipliquem i dividim pel conjugat del denominador (tal com s'explica en l'apartat 3.3.4, pàgina 26, del material imprès sobre la divisió de nombres complexos en forma binòmica) i agrupem part real i part imaginària:

$$\frac{3+3i}{-3+3i} = \frac{(3+3i)\cdot(-3-3i)}{(-3+3i)\cdot(-3-3i)} = \frac{-9-9i-9i+9}{9+9} = \frac{-18i}{18} = -i$$

Per determinar les arrels terceres de $-i$ anem a determinar primer el mòdul i l'argument d'aquest:

$$m = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = arctg\frac{-1}{0} = arctg(-\infty) = 270^\circ$$

(Observem que, en ser la part real nul·la, no cal sumar ni restar cap quantitat, tal com es diu en l'apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del mòdul imprès).

Com es diu en l'exercici 19 d'autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per tant, el primer que fem és dibuixar el nombre $0-i$ en el pla complex. Aquest número està associat al punt (0, -1), per tant, és un nombre que es troba justament entre el tercer i quart quadrant.

Tenim, per tant, que $-i = 1_{270^o}$

Com que ens demanen les arrels terceres, hem de fer:

$\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270^o+360^o k}{3}}$ per a k=0, 1,2

Això és, el mòdul de les arrels és: $r=\sqrt[3]{1}=1$ (això és sobre els reals)

Els arguments de les arrels són $\beta_k = \dfrac{270^o+360^o k}{3}$ per a k=0, 1,2

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 90^o$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 90^o+120^o = 210^o$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 90^o+240^o = 330^o$

Per tant, les tres arrels terceres, en forma polar, són:

$$\boxed{1_{90^o}}$$

$$\boxed{1_{210^o}}$$

$$\boxed{1_{330^o}}$$

2. Sigui F un subespai de $\mathbb{R}^5$ generat pels vectors següents:

$$F = \langle (0,0,3,4,1),(0,-1,-b,0,0),(2,0,-b,0,0),(b,b,b-1,0,4)\rangle$$

a) Determineu, en funció de b, la dimensió del subespai F.

b) Per al cas $b=2$ trobeu una base de F. Pertany $v=(0,-4,2,12,-1)$ a F? Quines són les seves coordenades en la base que heu trobat?

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors.

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 3 & -b & -b & b-1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Podem veure ràpidament que tenim el menor (agafant les files 1, 2 i 4) següent amb determinant diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ara orlem (per exemple, afegint la última fila):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$$

Així el rang de la matriu definida pels vectors és 4 independentment de b. Per tant la dimensió de F és sempre 4.

b) En l'apartat anterior ja hem vist que la dimensió de F és sempre 4. Així que com a base podem proposar els 4 vectors amb que esta definit F en el cas b=2: A={(0, 0, 3, 4, 1), (0, -1, -2, 0, 0), (2, 0, -2, 0, 0), (2, 2, 1, 0, 4)}.
Per veure si v pertany a E i a la vegada trobar-ne les coordenades en el cas que hi pertanyi, resolem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té solució: x=3, y=2, z=1, t=-1. Per tant v pertany a F i les seves coordenades en la base A són (3,2,1,-1).

3. Considereu el sistema d´equacions lineals:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2a-1 \\ 5x + (a-1)y + (2a+3)z = 3a+2 \\ 3x + (a+1)y + z = 3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema pels diferents valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculeu les solucions del sistema per $a = 0$.

Resolució:

a) Per discutir-lo utilitzarem el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Veure mòdul 3, apartat 4, pàg. 13]
La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, M, associades al sistema són:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 5 & a-1 & 2a+3\\ 3 & a+1 & 1\end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2a-1\\ 5 & a-1 & 2a+3 & 3a+2\\ 3 & a+1 & 1 & 3\end{array}\right)$$

Com que el sistema té tres equacions i tres incògnites, estudiarem el rang de la matriu de coeficients A, perquè si aquest rang és tres, també ho haurà de ser el de la matriu ampliada i el sistema serà compatible determinat.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 5 & a-1 & 2a+3\\ 3 & a+1 & 1\end{vmatrix}=-2a^2-6a+8=-2(a-1)(a+4)$$

- Si $a\neq 1$ i $a\neq -4\rightarrow \mathrm{rang}(A)=3=\mathrm{rang}(M)=\mathrm{num.\,incògnites}\rightarrow$ $\boxed{\mathrm{S.\,Comp.\,Determinat}}$.
- Si $a=1\rightarrow \mathrm{rang}(A)=2$, ja que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix}\neq 0$. Calculem, per $a=1$, el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada que s'obté orlant aquest menor d'ordre dos no nul amb la columna de termes independents:
$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 0 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=0\rightarrow \mathrm{rang}(M)=2\rightarrow \boxed{\mathrm{S.\,Comp.\,Indeterminat}}.$$
- Si $a=-4\rightarrow \mathrm{rang}(A)=2$, ja que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -5 & -5\end{vmatrix}\neq 0$. Per altra banda, per $a=-4$, la matriu ampliada té un menor d'ordre 3 no nul:
$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & -9\\ -5 & -5 & -10\\ -3 & 1 & 3\end{vmatrix}=275\neq 0\rightarrow \mathrm{rang}(M)=3\rightarrow \boxed{\mathrm{S.\,Incompatible}}.$$

b) Considerem la matriu ampliada del sistema quan $a=0$ i apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & -1\\ 5 & -1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 3\end{array}\right)\underbrace{\approx}_{(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -7 & 7\\ 0 & 4 & -5 & 6\end{array}\right)\underbrace{\approx}_{(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -7 & 7\\ 0 & 0 & 2 & -1\end{array}\right)$$

(1) Operacions: F2=F2-5·F1 i F3=F3-3·F1.

(2) Operacions: F3=F3-F2.

D'on s'obté el sistema i la solució següent:

$$\begin{cases}x-\ y+\ 2z=-1\\ \quad 4y-\ 7z=\ 7\\ \qquad\quad 2z=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x-\ y+\ 2z=-1\\ \quad 4y-\ 7z=\ 7\\ \qquad\quad z=-1/2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x-\ y+\ 2z=-1\\ \qquad\quad y=7/8\\ \qquad\quad z=-1/2\end{cases}$$

$$\rightarrow\boxed{\begin{cases}x=\ 7/8\\ y=\ 7/8\\ z=-1/2\end{cases}}$$

4. Sigui f l´aplicació lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida per:

$f(1,5,-2)=(2,10,-4), f(0,-1,2)=(0,1,-2), f(0,-1,1)=(0,0,0)$

a) Demostreu que $(1,5,-2),(0,-1,2),(0,-1,1)$ és una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculeu una base del subespai Imatge de f. És f exhaustiva?

c) Calculeu una base del subespai ker(f) (el nucli de f). És f injectiva?

d) Estudieu si f diagonalitza.

e) Calculeu el rang de f^{1000}, és a dir, la dimensió de la imatge de f^{1000}.

Resolució:

a) Anomenem $u=(1,5,-2), v=(0,-1,2), w=(0,-1,1)$. El determinant de u, v i w és:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & -1 & -1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}=1.$$

(Es pot fer usant la regla de Sarrus, o bé desenvolupant per la primera fila). Com que és diferent de zero, u,v i w són linealment independents. Com que són tres vectors linealment independents de R^3, formen base (veure Mòdul 2, Secció 4.6).

$u=(1,5,-2), v=(0,-1,2), w=(0,-1,1)$ **són una base de R^3.**

b) Per calcular el subespai imatge de f és suficient calcular la imatge d'una base de R^3. La imatge de la base u,v,w de R^3 és: $f(u)=(2,10,-4), f(v)=(0,1,-2), f(w)=(0,0,0)$. Per tant,

$$\text{Im}(f)=[f(u), f(v), f(w)]=[(2,10,-4),(0,1,-2),(0,0,0)]=[(2,10,-4),(0,1,-2)].$$

El tercer vector és nul i els dos primers són linealment independents. Així el subespai imatge de f està generat pels dos primers vectors. Per tant, {f(u),f(v)} és una base de la imatge. A més, f no és exhaustiva ja que la imatge de f té dimensió 2 i en canvi l'espai d'arribada té dimensió 3. (Veure Mòdul 4, Secció 4.)

$f(u)=(2,10,-4), f(v)=(0,1,-2)$ **és una base de la imatge de f i f no és exhaustiva.**

c) Recordem que el Teorema de la dimensió diu que dim E=dim Im(f)+dim Ker(f). Com que E=R^3 i la dimensió de la imatge és 2, deduïm que la dimensió del ker (o nucli) és 1. En particular, f no és injectiva, perquè el ker (nucli) és diferent de zero. (Veure Mòdul 4, Secció 5.) Com que f(w)=0, el vector w=(0,-1,1) és una base del nucli. Així,

$w=(0,-1,1)$ **és una base del nucli de f i f no és injectiva.**

d) Tenim f(u)=2u. En particular, u és vector propi de f de valor propi 2. D'altra banda, f(v)=-v. Per tant, v és vector propi de f de valor propi -1. Finalment, f(w)=0. Per tant, w és vector propi de f de valor propi 0. Els tres vectors u, v, w són base de R^3. Per tant, hi ha una base de R^3 formada per vectors propis de f. Això vol dir que f diagonalitza. (Veure Mòdul 4, Secció 8.)

f diagonalitza perquè hi ha una base de R^3 formada per vectors propis de f.

e) La matriu de f en la base de vectors propis és la matriu diagonal amb valors propis a la diagonal: 2,1,0. Per tant, la matriu de f elevada a qualsevol potència n, en la base de vectors propis, és la matriu diagonal amb els valors propis elevats a n a la diagonal: 2 elevat a n, 1 i 0. El rang segueix sent 2, doncs.

El rang de f^{1000} és 2.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels valors següents:

α	0º	30º	45º	90º	135º	180º	210º	270º	315º	330º
Sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tag(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$