Álgebra PEC 5 / José Carlos López Henestrosa / IDP: 1817998

1 a) El primer número a la derecha de mi IDP es 8, por lo que $\boxed{a=8}$

~~Para~~ Por lo tanto, la expresión resultante es la siguiente:

$$z=(8+\sqrt{3}\,i)^9+(8-\sqrt{3}\,i)^9$$

Como podemos apreciar, los dos términos son conjugados entre sí. Si definimos $w=8+\sqrt{3}\,i$, entonces el segundo término es su conjugado $\bar{w}=8-\sqrt{3}\,i$. Por lo tanto, la expresión se convierte en:

$$z=w^9+\bar{w}^9$$

Sabemos que la suma de un número complejo y su conjugado es igual a dos veces su parte real:

$$w^n+\bar{w}^n=2\,\mathrm{Re}(w^n)$$

Esto nos indica de antemano que la parte imaginaria será 0 y el resultado será un número real puro. Para encontrar el valor exacto utilizaremos el binomio de Newton, por lo que desarrollamos $(a+bi)^9$:

$$(a+bi)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}a^{9-k}(bi)^k$$

Al sumar $(a+bi)^9+(a-bi)^9$, los términos donde k es impar se cancelan, ya que tienen signos opuestos. Los términos donde k es par se duplican.

$$z=2\left[\binom{9}{0}a^9(bi)^0+\binom{9}{2}a^7(bi)^2+\binom{9}{2}a^5(bi)^4+\binom{9}{6}a^3(bi)^6+\binom{9}{8}a^1(bi)^8\right]$$

Sustituimos $a=8$ y $b=\sqrt{3}$. Hay que tener presente que $i^2=-1$, $i^4=1, i^6=-1, i^8=1$:

- $\boxed{\text{Primer término}}$ $(k=0)$: $\binom{9}{0} 8^9 (1) = 1 \cdot 134217728 = \boxed{134217728}$
- $\boxed{\text{Segundo término}}$ $(k=2)$: $\binom{9}{2} 8^7 (\sqrt{3}i)^2 = 36 \cdot 2097152 (-3) = \boxed{-226492416}$
- $\boxed{\text{Tercer término}}$ $(k=4)$: $\binom{9}{4} 8^5 (\sqrt{3}i)^4 = 126 \cdot 32768 \cdot 9 = \boxed{37158912}$
- $\boxed{\text{Cuarto término}}$ $(k=6)$: $\binom{9}{6} 8^3 (\sqrt{3}i)^6 = 84 \cdot 512 (-27) = \boxed{-1161216}$
- $\boxed{\text{Quinto término}}$ $(k=8)$: $\binom{9}{8} 8^1 (\sqrt{3}i)^8 = 9 \cdot 8 \cdot 81 = \boxed{5832}$

Ahora, sumamos los términos positivos y negativos dentro del corchete:

- $\boxed{\text{Suma positivos}}$: $134217728 + 37158912 + 5832 = \boxed{171382472}$
- $\boxed{\text{Suma negativos}}$: $-226492416 - 1161216 = \boxed{-227653632}$
- $\boxed{\text{Total (parte real de } w^9)}$: $171382472 - 227653632 = \boxed{-56271160}$

Por último, multiplicamos por 2:

$$\boxed{z = 2(-56271160) = -112542320}$$

Como resultado, obtenemos que la expresión en forma binómica $(a+bi)$ es:

$$\boxed{z = -112542320 + 0i}$$

① b) La primera cifra a la derecha de mi IDP es 8, por lo que $\boxed{a=8}$.

Por lo tanto, la expresión resultante es: $iz^4+(8+1)=i \Rightarrow \boxed{iz^4+9=i}$.

Ahora, despejamos el término con z:

$$iz^4 = 9 - i$$

Y dividimos toda la ecuación por i para aislar z^4:

$$z^4 = \frac{9-i}{i} \Rightarrow z^4 = \frac{i}{i} - \frac{9}{i}$$

Sabemos que $\frac{i}{i} = 1$ y que $\frac{1}{i} = -i$, por lo que:

$$z^4 = 1 - 9(-i) \Rightarrow z^4 = 1 + 9i$$

Ahora tenemos un número complejo $w = 1+9i$ del cual tenemos que encontrar las raíces cuartas. Para ello, lo expresamos en forma polar, calculando el módulo por un lado y el argumento por otro:

- Cálculo del módulo (r): $\boxed{r = |w| = \sqrt{1^2+9^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}}$
- Cálculo del argumento (α): Como la parte real (1) y la imaginaria (9) son positivas, el ángulo está en el primer cuadrante.

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{9}{1} = 9} \quad \boxed{\alpha = \arctan(9) \simeq 83{,}66^\circ}$$

Por lo tanto, la ecuación en forma polar es $\boxed{z^4 = (\sqrt{82})_{83{,}66^\circ}}$

Ahora que tenemos la forma polar, tenemos que hallar el valor de z calculando ~~el~~ las raíces cuartas. Para ello, aplicamos la fórmulas de las raíces enésimas:

$$\boxed{z_k = \sqrt[4]{r}_{\frac{\alpha + 360^\circ k}{4}}}$$

Para $k = 0, 1, 2, 3$.

Sustituimos el valor de r en la fórmula: $R = \sqrt[4]{\sqrt{82}} = \sqrt[8]{82} \approx 1,73$

La fórmula para los ángulos es $\frac{83,66^\circ + 360^\circ k}{4}$. Esto tiene que ser aplicado a cada valor posible de k. Para simplificar, sabemos que la fórmula equivale a partir de un ~~ángulo~~ ángulo base y sumar 90° en cada paso.

- $\boxed{k=0}$ $\frac{83,66^\circ}{4} \approx 20,92^\circ$
- $\boxed{k=1}$ $20,92^\circ + 90^\circ = 110,92^\circ$
- $\boxed{k=2}$ $110,92^\circ + 90^\circ = 200,92^\circ$
- $\boxed{k=3}$ $200,92^\circ + 90^\circ = 290,92^\circ$

Por lo tanto, sabemos que las cuatro soluciones para z en forma polar son:

- $z_0 = \sqrt[8]{82}_{20,92^\circ}$
- $z_1 = \sqrt[8]{82}_{110,92^\circ}$
- $z_2 = \sqrt[8]{82}_{200,92^\circ}$
- $z_3 = \sqrt[8]{82}_{290,92^\circ}$

2) La primera cifra a la derecha de mi DNP es 8, por lo que $\boxed{a=8}$
El sistema queda tal que así:

$$\begin{cases} 8x + my + z = 1 \\ x + 8my + z = m \\ x + my + 8z = 1 \end{cases}$$

Para discutir el sistema utilizando el teorema de Rouché - Fröbenius, debemos analizar el rango de la matriz de coeficientes (A) y el rango de la matriz ampliada (A^*) en función del parámetro m. Dado el sistema, definimos las matrices.

- Matriz de coeficientes (A): $A = \begin{pmatrix} 8 & m & 1 \\ 1 & 8m & 1 \\ 1 & m & 8 \end{pmatrix}$

- Matriz ampliada (A^*): $A^* = \begin{pmatrix} 8 & m & 1 & 1 \\ 1 & 8m & 1 & m \\ 1 & m & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora que tenemos las matrices, calculamos el determinante de A para conocer su rango. Para ello, aplicamos la regla de Sarrus:

$$|A| = (8 \cdot 8m \cdot 8) + m(1) + (1 \cdot 1 \cdot m) - (1 \cdot 8m \cdot 1) - (m \cdot 1 \cdot 8) - (8 \cdot 1 \cdot m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A| = 512m + m + m - 8m - 8m - 8m \Rightarrow |A| = 514m - 24m \Rightarrow \boxed{|A| = 490m}$$

Igualamos el determinante a 0 para encontrar los valores críticos:

$$490m = 0 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

Como el único valor crítico es 0, discutimos los únicos dos casos posibles:

- $\boxed{m \neq 0}$ ~~Si m toma~~ Premisas:
  - El determinante $|A| \neq 0$.
  - El rango de la matriz A es máximo $\Rightarrow Rg(A) = 3$
  - Como A es una submatriz de A^* y el rango máximo de A^* es 3 (tiene 3 filas), entonces $Rg(A^*) = 3$.
  - El número de incógnitas (n) es 3.

  Como $Rg(A) = Rg(A^*) = n = 3$, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es Compatible Determinado (solo tiene una solución).

- $\boxed{m=0}$ ~~Premisas:~~ Sustituimos $m=0$ en la matriz ampliada A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Analizamos el rango de A: $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Sabemos que $|A| = 0$. Sin embargo, existe un menor de orden 2 no nulo si eliminamos la columna de ceros:

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 \neq 0$$

Por lo tanto $Rg(A) = 2$.

Ahora analizamos ~~de~~ el rango de A^*. Para ello, buscamos si existe algún menor de orden 3 no nulo en la matriz ampliada. Tomamos las columnas 1, 3 y 4, ya que la 2 es nula:

$$M = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 8(1-0) - 1(1-0) + 1(8-1) = 8 - 1 + 7 = 14 \neq 0$$

Como hay un menor de orden 3 distinto de 0, $Rg(A^*) = 3$.

En conclusión, $Rg(A) = 2 \neq Rg(A^*) = 3$, por lo que el sistema es Incompatible (no tiene solución).

(a) b) Para resolver este sistema:

$$\begin{cases} 1x + 1y + 1z = 1 \\ 1x + 1(1)y + 1z = 1 \\ 1x + 1y + 1z = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Necesitamos utilizar parámetros libres (grados de libertad). El número de parámetros libres se determinan por la resta del nº de incógnitas menos el rango.

Por lo tanto, tenemos que hallar el rango. Como todas las filas son iguales, sabemos que el determinante de orden 3 y 2 es 0. Por lo tanto, probamos directamente con el determinante de orden 1: $|1| = 1 \neq 0$.
Como hay, al menos, un elemento que no es cero, el rango es 1.

Ahora que conocemos el rango (1), y sabemos también el nº de incógnitas (3), conocemos el número de parámetros libres $(3-1=2)$. Las vamos a llamar λ y μ:

$$\left.\begin{array}{l} z = \lambda \\ y = \mu \end{array}\right\}$$ Despejamos x de la ecuación $x+y+z=1 \Rightarrow x = 1-y-z \Rightarrow x = 1-\mu-\lambda$

La solución del sistema para $a=1$ y $m=1$ es:

$$\begin{cases} x = 1-\mu-\lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

② c) En este caso, el valor de la incógnita z tiene que coincidir con 8.
Sabemos que la condición que deben cumplir x, y, z es $x+y+z=1$.
Por lo tanto, sustituimos z por 8 en la ecuación: $x+y+8=1$
Despejamos x en función de y: $x = 1-8-y \Rightarrow x = -7-y$
Mantenemos la notación seguida en el apartado anterior, por lo que el sistema queda tal que así:

$$\begin{cases} x = -7-\mu \\ y = \mu \\ z = 8 \end{cases}$$

Como podemos comprobar, existen infinitas soluciones que hacen que el valor de ~~tu~~ la incógnita z coincide con 8.

3 a) La tercera cifra de la derecha de mi TDP es 9, por lo que $\dot{u}_3$ queda como $\dot{u}_3 = (9, 2 \cdot 9, -9, 1) \Rightarrow u_3 = (9, 18, -9, 1)$

A partir de los vectores dados, los colocamos como filas de una matriz (A):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 9 & 18 & -9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A continuación, aplicamos el método de Gauss para hallar el rango de A:

En primer lugar, hacemos ceros ~~et~~ en la primera columna usando la fila 1:

con estos cálculos:

$\boxed{F_2 \to F_2 - 2F_1}$ $\boxed{F_3 \to F_3 - 9F_1}$ $\boxed{F_4 \to F_4 - F_1}$

Procedemos a realizar las operaciones correspondientes:

- $\boxed{F_2}: (2-2, 4-4, -2+2, 1-0) = \boxed{(0, 0, 0, 1)}$
- $\boxed{F_3}: (9-9, 18-18, -9+9, 1-0) = \boxed{(0, 0, 0, 1)}$
- $\boxed{F_4}: (1-1, 0-2, 1+1, -1-0) = \boxed{(0, -2, 2, -1)}$

La matriz queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A continuación, ordenamos las filas para tener un pivote no nulo en la segunda columna. Para ello, intercambiamos la fila 2 por la 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como podemos apreciar, las filas 3 y 4 son idénticas, por lo que podemos hacer $F_4 \to F_4 - F_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como resultado, obtenemos una matriz cuyo número de filas no nulas en la matriz escalonada es 3. Por tanto, el rango de la matriz es 3. Esto a su vez, representa su dimensión.

Por otra parte, las ~~base~~ filas no nulas de la matriz escalonada forman una base del subespacio: $B=\{(1,2,-1,0),(0,-2,2,-1),(0,0,0,1)\}$

Como conclusión, la dimensión de F es 3 y una base B de F es $B=\{(1,2,-1,0),(0,-2,2,-1),(0,0,0,1)\}$.

3b) Primero, debemos comprobar si w puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de la base B hallados en el apartado ~~ant~~ a).

La tercera cifra de la derecha de mi IDP es 9, por lo que w queda como $w=(9-2,-2,9,-9) \Rightarrow w=(7,-2,9,-9)$.

La base B es $B=\{(1,2,-1,0),(0,-2,2,-1),(0,0,0,1)\}$.

En base a esto, queremos encontrar si existen escalares α, β, μ tales que $w=\alpha v_1+\beta v_2+\mu v_3$. Por lo tanto, tenemos que sustituir los vectores:

$$(7,-2,9,-9)=\alpha(1,2,-1,0)+\beta(0,-2,2,-1)+\mu(0,0,0,1)$$

Esto da pie al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha = 7 \\ \cancel{2\alpha} \; 2\alpha - 2\beta = -2 \\ -\alpha + 2\beta = 9 \\ -\beta + \mu = -9 \end{cases}$$

Como podemos comprobar, tenemos un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Para que el sistema sea compatible con el fin de que $w \in F$, los valores hallados con tres ecuaciones deben satisfacer la cuarta ecuación.

Por tanto, sustituimos $\alpha = 7$ en $2\alpha - 2\beta = -2$:

$$2(7) - 2\beta = -2 \Rightarrow 14 - 2\beta = -2 \Rightarrow -2\beta = -16 \Rightarrow \boxed{\beta = 8}$$

Ahora comprobamos si los valores $\alpha = 7$ y $\beta = 8$ cumplen la tercera ecuación para ~~verf~~ verificar que el vector pertenece al subespacio:

$$-\alpha + 2\beta = 9 \Rightarrow -(7) + 2(8) = -7 + 16 = 9 \Rightarrow \boxed{9 = 9}$$

Esto es seña de que sí pertenece al subespacio.

Por último, hallamos μ usando $-\beta + \mu = -9 \Rightarrow -(8) + \mu = -9 \Rightarrow \boxed{\mu = -1}$

Como conclusión, obtenemos que el vector w pertenece al subespacio F y que sus coordenadas en la base B ~~son los coeficientes~~ es $w_B = (7, 8, -1)$.

3 c) A partir de la base B, buscaremos una nueva base ortogonal $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$. Para ello, usaremos el producto escalar e iremos hallando cada vector en orden:

- Primer vector (e_1): Es igual al primer vector de la base original.

$$e_1 = v_1 = (1, 2, -1, 0)$$

Calculamos su norma al cuadrado, ya que nos hará falta para los denominadores:

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1 + 4 + 1 = 6$$

- Segundo vector (e_2): Fórmula para calcularlo, $e_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1$

Calculamos el producto escalar $\boxed{\langle v_2, e_1\rangle}$: $(0)(1)+(-2)(2)+(2)(-1)+(-1)(0) =$
$= 0-4-2+0 = \boxed{-6}$

Y sustituimos en la fórmula:

$$\boxed{e_2} = (0,-2,2,-1) - \frac{-6}{6}(1,2,-1,0) = (0,-2,2,-1) - (-1)(1,2,-1,0)$$

$$= (0,-2,2,-1) + (1,2,-1,0) = \boxed{(1,0,1,-1)}$$

Ahora calculamos su norma al cuadrado: $\boxed{\langle e_2, e_2\rangle} = 1^2+0^2+1^2+(-1)^2 = \boxed{3}$

- Tercer vector (e_3): Fórmula: $e_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 - \frac{\langle v_3, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2$

Calculamos el producto escalar $\boxed{\langle v_3, e_1\rangle}$: $(0)(1)+(0)(2)+(0)(-1)+(1)(0) = \boxed{0}$

Y sustituimos en la fórmula:

$$\boxed{e_3} = (0,0,0,1) - \frac{0}{6} e_1 - \frac{-1}{3} e_2 = (0,0,0,1) + \frac{1}{3}(1,0,1,-1) =$$

$$= (0,0,0,1) + \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \boxed{\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

Lo simplificamos multiplicándolo por 3: (la ortogonalidad se mantiene al escalar un vector).

$$\boxed{e'_3} = 3e_3 = \boxed{(1,0,1,2)}$$

Como resultado, obtenemos la siguiente base ortogonal a partir de la base B:

$$\boxed{B_{ortogonal} = \{(1,2,-1,0),(1,0,1,-1),(1,0,1,2)\}}$$

(9) d) La matriz de cambio de base B a $B_{ortogonal}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base antigua (v_i) expresados en función de la base nueva (e_i). La base ortogonal $B_{ortogonal}$ es $\{e_1, e_2, e'_3\}$.

Recuperamos las relaciones obtenidas en el apartado c) aplicando Gram-Schmidt:

- v_1 Sabemos que $e_1 = v_1$: $v_1 = 1 \cdot e_1 + 0e_2 + 0e'_3$

La primera columna es $(1, 0, 0)^T$

- v_2 Vimos que $e_2 = v_2 + v_1$. Despejamos v_2: $v_2 = -1e_1 + 1e_2 + 0e'_3$

La segunda columna es $(-1, 1, 0)^T$.

- v_3: Vimos que $e_3 = v_3 + \frac{1}{3}e_2$. Nuestra base final es $e'_3 = 3e_3$, por lo que sustituimos:

$$\frac{1}{3}e'_3 = v_3 + \frac{1}{3}e_2 \Rightarrow v_3 = 0e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e'_3$$

La tercera columna es $(0, -1/3, 1/3)^T$.

Con esto, obtenemos todas las columnas para formar la matriz de cambio de base: $P_{B \to B_{ortogonal}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Ahora la usamos para hallar las coordenadas de w multiplicando la matriz de cambio de base por el vector de coordenadas hallado en el apartado c), las cuales eran $[w]_B = (7, 8, -1)^T$:

$$[w]_{B_{orto}} = P_{B \to B_{orto}} \cdot [w]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Realizamos el desglose de operaciones:

- Primera coordenada: $1(7)+(-1)(8)+0(-1)=7-8=-1$
- Segunda coordenada: $0(7)+1(8)+(-1/3)(-1)=8+1/3=25/3$
- Tercera coordenada: $0(7)+0(8)+(1/3)(-1)=-1/3$.

Como resultado, obtenemos que las coordenadas del vector w en ~~la~~ la base ortogonal son: $\boxed{[w]_{B_{ortog}}=\left(-1,\frac{25}{3},-\frac{1}{3}\right)}$

4) a) La tercera cifra por la derecha de mi IDP es 9, por lo que $\boxed{k=9}$.

Por lo tanto, la expresión queda como $f(x,y,z)=(10x,\ y+z,\ y+kz)$

La base canónica C de $\mathbb{R}^3$ está formada por estos vectores:

$\boxed{e_1=(1,0,0)}$ $\boxed{e_2=(0,1,0)}$ $\boxed{e_3=(0,0,1)}$

A partir de estos vectores, calculamos $f(e_i)$ sustituyendo las coordenadas en la expresión $f(x,y,z)$.

- Imagen de $\boxed{e_1}=(1,0,0)$: Sustituimos $x=1,\ y=0,\ z=0$

$\boxed{f(1,0,0)}=(10(1),0+0,0+k(0))=\boxed{(10,0,0)}$

- Imagen de $\boxed{e_2}=(0,1,0)$: Sustituimos $x=0,\ y=1,\ z=0$

$\boxed{f(0,1,0)}=(10(0),1+0,1+k(0))=\boxed{(0,1,1)}$

- Imagen de $\boxed{e_3}=(0,0,1)$: Sustituimos $x=0,\ y=0,\ z=1$

$\boxed{f(0,0,1)}=(10(0),0+1,0+k(1))=\boxed{(0,1,k)}$

Por último, formamos la matriz $M(f|C,C)$ colocando los vectores imagen calculados anteriormente como columnas:

$$\boxed{M(f|C,C) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & l & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}}$$

(4) b) A partir de $M(f|C,C)$, a la que denominaremos A para abreviar, obtendremos el polinomio característico $p(\lambda)$. Se obtiene calculando $|A-\lambda I|$:

$$p(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & l \\ 0 & 1 & k-\lambda \end{vmatrix}$$

Dado que la matriz presenta ceros en la primera fila y ~~en la~~ columna fuera de la diagonal, podemos desarrollar el determinante directamente por la primera fila:

$$p(\lambda) = (10-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} l-\lambda & l \\ 1 & k-\lambda \end{vmatrix}$$

Lo calculamos: $\begin{vmatrix} l-\lambda & l \\ l & k-\lambda \end{vmatrix} = (l-\lambda)(k-\lambda)-l = k-\lambda-\cancel{l}k\lambda+\lambda^2-l =$

$$= \lambda^2-(k+l)\lambda+(k-l)$$

Sustituimos esto en la expresión original para obtener el polinomio característico:

$$p(\lambda) = (10-\lambda)[\lambda^2-(k+l)\lambda+(k-l)]$$

Ahora, averiguamos sus valores propios, que son las raíces del polinomio característico (las soluciones de $p(\lambda)=0$).

- Primer valor propio: $10-\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 10}$

- Segundo valor y tercer: $\lambda^2-(k+1)\lambda+(k-1)=0$

$$\lambda = \frac{(k+1) \pm \sqrt{(k+1)^2-4(1)(k-1)}}{2}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{k+1+\sqrt{k^2-2k+5}}{2}}$$

$$\boxed{\lambda_3 = \frac{k+1-\sqrt{k^2-2k+5}}{2}}$$

(4) c) Si nos fijamos en la estructura de $M(f|C,C)$, podemos concluir que es igual a su traspuesta, ~~El parámetro k se encuentra~~ lo cual implica que es simétrica.

El parámetro k se encuentra en la diagonal principal, por lo que no afecta a la simetría de la matriz.

Como la matriz ~~es~~ es simétrica independientemente del valor que tome k, y toda matriz real y simétrica es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, podemos afirmar sin hacer ningún cálculo que siempre es diagonalizable.

(4) d) ~~Calculamos los valores~~ Sustituimos $k=2$ en la matriz $M(f|C,C)$:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizamos la fórmulas de los valores propios del apartado c) con $k=2$:

- $\lambda_1 = 10$
- $\lambda_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
- $\lambda_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Por lo tanto, la matriz diagonal D contiene estos valores en la diagonal principal:

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}}$$

Buscamos los vectores propios asociados a cada valor propio resolviendo $(A-\lambda I)v=0$

- Para λ_1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Obtenemos $y=0$, $z=0$, mientras que x es libre. Tomamos el vector sencillo: $\boxed{v_1=(1,0,0)}$

- Para λ_2: $\begin{pmatrix} 10-\frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{3+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De la primera fila obtenemos $\left(10-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=0$. $\lambda_2\approx 2{,}62$, por lo que es evidente que $10-\lambda_2\neq 0$. Por lo tanto, $\boxed{x=0}$

Ahora, usamos la segunda fila de la matriz:

$$\left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)y+z=0 \Rightarrow \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)y+z=0 \Rightarrow \boxed{z=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)y}$$

Para evitar fracciones, podemos hacer que $\boxed{y=2}$:

$\boxed{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 2=1+\sqrt{5}}$. Por lo tanto, $\boxed{v_2=(0,2,1+\sqrt{5})}$

- Para λ_3: El proceso es igual que para λ_2. $\boxed{x=0}$, $z=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)y$, $\boxed{y=2}$

Sustituimos $y=2$ en z: $\boxed{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot 2=1-\sqrt{5}}$

Por lo tanto, $\boxed{v_3=(0,2,1-\sqrt{5})}$

Por último, construimos la matriz P colocando estos vectores como columnas:

$$\boxed{P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}}$$