**EXAMEN 2 18/01/2013**

1.

a) Efectúa la siguiente operación con números complejos, expresando el resultado en forma binómica.

$$\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-(3/2)i}$$

b) Calcula todas las raíces de la ecuación siguiente: $x^5+32=0$ (proporciona los resultados en forma polar y binómica)

**Solución:**

a) Operamos con la expresión, recordando, tal como se explica en el recuadro gris de la página 17, que $i^2=-1$:

$$\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-(3/2)i}=\frac{4+4i-1+1-2i-1}{\frac{2-3i}{2}}=\frac{2\cdot(3+2i)}{2-3i}=\frac{2\cdot(3+2i)\cdot(2+3i)}{(2-3i)\cdot(2+3i)}=\frac{2\cdot(6+9i+4i-6)}{4+9}=2i$$

Por tanto:

$$\boxed{\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-(3/2)i}=2i}$$

b) Primero despejamos la incógnita:

$$x^5+32=0\rightarrow x^5=-32\rightarrow x=\sqrt[5]{-32}$$

Escribimos el complejo z=-32 en forma polar tal como se explica en el apartado 3.4, página 27 del material impreso, sobre la forma polar de los números complejo:

$$m=\sqrt{(-32)^2}=32$$

$$\alpha=arctg\frac{0}{-32}+180^\circ=arctg0+180^\circ=180^\circ$$

Observemos que sumamos 180º dado que la parte real del complejo es negativa y la parte imaginaria es 0 (apartado 3.4.1 de la página 30 del material impreso). De hecho, dado que la parte imaginaria es 0 podríamos sumar o restar 180º, el ángulo es el mismo.

Tenemos, por tanto, que $z=32_{180^\circ}$

Como nos piden las raíces quintas, debemos hacer (observemos que en el apartado 3.6.1. de la página 43 del material impreso se hace lo mismo pero con las raíces cúbicas de la unidad):

$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{32_{180^\circ}}=2_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{5}}=2_{36^\circ+72^\circ k}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

Los argumentos de las raíces son:

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=36^\circ$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=36^\circ+72^\circ=108^\circ$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=108^\circ+72^\circ=180^\circ$
- Si k=3, tenemos que $\beta_3=180^\circ+72^\circ=252^\circ$
- Si k=4, tenemos que $\beta_4=252^\circ+72^\circ=324^\circ$

Por tanto, las cinco raíces de la ecuación $x^5+32=0$ son:

$$2_{36^\circ}=1{,}618+1{,}1756i$$

$$2_{108^\circ}=-0{,}618+1{,}9021i$$

$$2_{180^\circ}=-2$$

$$2_{252^\circ}=-0{,}61803-1{,}9021i$$

$$2_{324^\circ}=1{,}618-1{,}1756i$$

2. Dados los siguientes conjuntos de vectores de $R^3$:

A=<$(1,0,0),(1,a,0),(1,1,a)$>.

B=<$(1,1,1),(0,a,1),(0,0,a)$>.

a) Encontrad el valor de *a* para que A y B sean base de $R^3$. Si $a=1$ encontrad las coordenadas del vector v=(2,0,1) en cada una de las bases.
b) Calculad la matriz de cambio de base de A a B para $a=1$. Comprobad la coherencia del apartado anterior.

**Resolución:**

a) Calculemos el rango de la matriz de vectores del espacio A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^2$$

Así para $a\neq 0$ el rango de la matriz es 3 y por tanto son base de $R^3$.

Hacemos lo mismo para el espacio B:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2$$

Así que de nuevo para $a \neq 0$ el rango de la matriz es 3 y por tanto son base de $R^3$.

Así pues tanto para A como para B cuando $a \neq 0$ forman una base de $R^3$.

Per a calcular les coordenadas de v en A cuando $a = 1$ resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=2, y=-1, z=1. Por tanto les coordenadas de v en A cuando $a = 1$ son (2,-1,1).

Para calcular las coordenadas de v en B cuando $a = 1$ resolvemos de forma análoga el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución x=2, y=-2, z=1. Por tanto les coordenadas de v en A cuando $a = 1$ son (2,-2,1).

b) Para encontrar la matriz de cambio de base C debemos resolver:

$$C = B^{-1} \cdot A$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos primero la inversa de la matriz B

$$B^{-1} = \frac{(adj(B))^t}{|B|}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos encontrar ahora la matriz de cambio de base.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora comprobamos los resultados del apartado anterior y vemos que efectivamente transforma las coordenadas de v en A a las coordenadas de v en B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & = & 1 \\ x & +(a+1)y & -z & = & -1 \\ -x & +y & -2z & = & -2 \end{cases}$$

**Resolución:**

Para discutir el sistema de ecuaciones lineales, si A es la matriz de coeficientes y A’ es la matriu ampliada, hemos de estudiar el rang(A) y el rang(A’), según los valores del parámetro $a \in R$ .

Tenemos

$$A \vee A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) ,$$

Observemos que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ y por lo tanto el rang(A) es como mínimo 2.

Rang(A)=3 sólo si el determinante de A es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4(a+1)+1+1+(a+1)+2+2 = -3a+3$$

Que sólo se anula para el caso a=1.

Por lo tanto, tenemos la siguiente discusión:

Caso I: Si $a \neq 1 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ que es el número de incógnitas y por lo tanto el sistema es SCD.

Para encontrar la solución podemos aplicar la regla de Cramer y tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3a+3} = \frac{0}{-3a+3} = 0 ,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-3a+3} = \frac{0}{-3a+3} = 0 ,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3a+3} = \frac{-3a+3}{-3a+3} = 1 .$$

Por lo tanto, en todos los casos obtenemos como solución única (0, 0, 1), independientemente del valor del parámetro $a$.

Caso II: Si $a=1 \Rightarrow rang(A)=2$ y hemos de estudiar el rang(A'). Cuando sustituimos el valor de $a$ tenemos las siguientes matrices:

$$A \vee A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

y podemos observar que las dos últimas columnas coinciden y por lo tanto rang(A')=rang(A)=2 y el sistema será SCI con (3-2=1) 1 grado de libertad.

Para encontrar la solcuión, resolvemos el sistema formado, por ejemplo, por las dos primeras ecuaciones y obtenemos.

Restando a la segunda ecuación dos veces la primera: -3y = 3-3z o sea y = z-1 y sustituyendo en la primera ecuación y despejando, x = z-1-2(z-1)=-z+1=1-z. Por lo tanto los puntos solución son de la forma $(1-z, z-1, z)$ .

En resumen:

| | | |
|---|---|---|
| • Caso I: | $a \neq 1$ | , SCD con solución $(0,0,1)$ . |
| • Caso II: | $a=1$ | , SCI con 1 g.l. y solución $(1-z, z-1, z)$ . |

4. Sea $f: R^3 \to R^3$ la aplicación lineal definida por $f(1,1,1)=(3,3,3)$, $f(0,1,1)=(2,2,2)$ y $f(0,0,1)=(0,0,0)$
   a) Halla la matriz de $f$ en las bases canónicas.
   b) Halla una base del núcleo de $f$. ¿Es $f$ inyectiva?
   c) Halla una base de la imagen de $f$. ¿Es $f$ exhaustiva?
   d) Di si $f$ diagonaliza y, si es possible, halla una base de $R^3$ formada por vectores propios de $f$.

Resolución:

a) Tenemos que $(1,0,0)=(1,1,1)-(0,1,1)$. Por linealidad,

$$f(1,0,0)=f(1,1,1)-f(0,1,1)=(3,3,3)-(2,2,2)=(1,1,1).$$

Por otra parte, $(0,1,0)=(0,1,1)-(0,0,1)$. Por lo tanto,

$$f(0,1,0)=f(0,1,1)-f(0,0,1)=(2,2,2)-(0,0,0)=(2,2,2)$$

Además, $f(0,0,1)=(0,0,0)$. Así, la matriz de $f$ en las bases canónicas es:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

b) El núcleo de $f$ se encuentra resolviendo el sistema $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. O sea, $x+2y=0$. Es decir, $x=-2y$ y $(x,y,z)=(-2y,y,z)=y(-2,1,0)+z(0,0,1)$. O sea, el núcleo de $f$ está generado por los vectores $(-2,1,0)$ y $(0,0,1)$. En particular, por ser el núcleo no nulo, $f$ no es inyectiva.

c) La imagen de $f$ está generada por las columnas de la matriz $A$. Por lo tanto, una base de la imagen de $f$ es: $(1,1,1)$. Por ser la imagen de $f$ distinta de $R^3$, deducimos que $f$ no es exhaustiva.

d) Como $f(-2,1,0)=(0,0,0)=0\cdot(-2,1,0)$ y $f(0,0,1)=(0,0,0)=0\cdot(0,0,1)$, tenemos que los vectores $(-2,1,0)$ y $(0,0,1)$ son vectores propios de $f$ de valor propio 0. Puesto que $f(1,1,1)=(3,3,3)=3\cdot(1,1,1)$, deducimos que el vector $(1,1,1)$ es vector propio de $f$ de valor propio 3. Observemos que $(-2,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$ forman una base de $R^3$ de vectores propios de $f$. Eso significa que la matriz de $f$ en esta base es diagonal con valores diagonales 0, 0 y 3. Por lo tanto, $f$ diagonaliza.