Examen 2023/24-1

Asignatura	Código	Fecha	Hora inicio
Álgebra	75.557	24/1/2024	10:00

Este enunciado también corresponde a las siguientes asignaturas:

- 81.506 - Matemáticas I

Ficha técnica del examen

- No es necesario que escribas tu nombre. Una vez resuelta la prueba final, solo se aceptan documentos en formato .doc, .docx (Word) y .pdf.
- Comprueba que el código y el nombre de la asignatura corresponden a la asignatura de la que te has matriculado.
- Tiempo total: **2 horas** Valor de cada pregunta: **25%**
- ¿Se puede consultar material durante la prueba? **SÍ** ¿Qué materiales están permitidos? **Todos**
- ¿Puede utilizarse calculadora? **SÍ** ¿De qué tipo? **PROGRAMABLE**
- Si hay preguntas tipo test, ¿descuentan las respuestas erróneas? **NO** ¿Cuánto?
- Indicaciones específicas para la realización de este examen: **Puedes utilizar cualquier material y calculadora (incluyendo la Calcme) para comprobar los cálculos, pero tienes que asegurarte que detallas y justificas todos los pasos seguidos para llegar a la solución.**
- **No es necesario que te identifiques con el nombre o el número del carné de estudiante. La autoría de la prueba es detectada por el propio sistema.**
- **Tienes que resolver el examen de forma manuscrita: en una tablet donde puedas escribir directamente o en papel. NO se aceptarán respuestas realizadas con un procesador de textos.**
- **No es necesario imprimir el enunciado, puedes resolver las preguntas en una hoja en blanco. Utiliza un bolígrafo de tinta azul o negra. Digitaliza tus respuestas en un único**

archivo en formato PDF (puedes hacerlo con un escáner o con un dispositivo móvil). Dispones de 10 minutos extras para la digitalización y entrega de la prueba.

Examen 2023/24-1

Asignatura	Código	Fecha	Hora inicio
Álgebra	75.557	24/1/2024	10:00

Enunciados

1. Responded razonadamente a los siguientes apartados:
   a) Determinad el valor del número complejo z que verifica la siguiente ecuación:
   $$\frac{z}{-z}+\frac{2z-2i}{1-i}=3-2i$$
   b) Resolved la ecuación $iz^4+81=0$ y expresad el resultado en forma polar y los ángulos en grados dentro del intervalo $[0, 360^\circ)$.

2. Considerad la recta r y el plano π siguientes:
   $$r:\left.\begin{array}{c} x+2(a+1)^2y=1 \\ 2x+(2(a+1)^2-k)y+(k+a+2)z=2 \end{array}\right\} \qquad \pi:\quad x+(k+a+1)z=1$$
   Substituid el parámetro a por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del Campus UOC y con la recta r y el plano π obtenidos:
   a) Determinad, de manera razonada, para qué valores del parámetro k la recta r solo tiene un punto en común con el plano π.
   b) Para $k=-1$, calculad, en caso de existir, el punto de corte de la recta r con el plano π.

3. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:
   $$E=\{(b_1,b_2,b_3,b_4)\ \in\ \mathbb{R}^4 | b_1+b_2=b_3+b_4\}$$
   Y sea $v=\ (a+1,a+4,a+2,a+3)$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del Campus UOC. Decid si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y **justificad vuestra respuesta:**
   a) $A=\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1)\}$ es una base de E.
   b) $v\ \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(a+1,a+2,a+3)$.
   c) $C_{B\to A}=\begin{pmatrix} k & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de la base
   $B=\left\{(k,0,k,0),\left(\frac{-\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{-\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\left(\sqrt{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\right\}$ a la base A.
   d) El valor $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ hace que B sea una base ortonormal.

4. Sustituid el parámetro a por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente matriz:
   $$M\ (f|C,C)=\begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b-2 & a+b-1 & a+b \end{pmatrix}$$
   donde $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal, $M(f|C,C)$ es su matriz asociada en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$ y b es un parámetro real diferente de 2 y de $1-a$.
   Responded razonadamente a los siguientes apartados:
   a) Calculad el polinomio característico de f, su vector propio u de valor propio $a+2$ y el valor propio correspondiente al vector propio $w=(0,0,1)$.
   b) Justificad, a partir del hecho de que $v=(0,1,-1)$ es vector propio de f, que $B=\{u,v,w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y escribid la matriz $M(f|B,B)$ asociada a la aplicación lineal f en la base B.