WUOLAH

solucion23-06.pdf

limagod

Álgebra

1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática, Multimedia y Telecomunicación
Universitat Oberta de Catalunya

Álgebra/ Matemáticas I

SOLUCIÓN EXAMEN 23/06/2012

Exercici 1:

Realiza los cálculos siguientes:

a) Simplifica la expresión siguiente: $\dfrac{(2-i)\cdot(1-2i)^2}{2+i}$

b) Calcula las raíces quintas del complejo siguiente: $z=16\sqrt{3}-16i$ (proporciona los ángulos en grados y los resultados en forma polar)

Solución:

a) Operamos con la expresión, recordando que $i^2=-1$:

$$\frac{(2-i)\cdot(1-2i)^2}{2+i}=\frac{(2-i)\cdot(1-4i+4i^2)}{2+i}=\frac{(2-i)\cdot(1-4i-4)}{2+i}=\frac{(2-i)\cdot(-3-4i)}{2+i}=$$
$$=\frac{(-6-8i+3i+4i^2)}{2+i}=\frac{(-6-8i+3i-4)}{2+i}=\frac{-10-5i}{2+i}=\frac{(-5)\cdot(2+i)}{(2+i)}=-5$$

b) Escribimos el complejo z en forma polar:

$$m=\sqrt{\left(16\sqrt{3}\right)^2+(-16)^2}=\sqrt{768+256}=\sqrt{1024}=32$$
$$\alpha=arctg\frac{-16}{16\sqrt{3}}=arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=arctg\frac{-\sqrt{3}}{3}=-30^{\circ}$$

Tenemos, por tanto, que $z=16\sqrt{3}-16i=32_{-30^{\circ}}$

Como nos piden las raíces quintas, debemos hacer:

$$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{32_{-30}}=\left(\sqrt[5]{32}\right)_{\frac{-30+360k}{5}}$$ para k=0, 1, 2, 3, 4

Esto es, el módulo de las raíces es: $r=\sqrt[5]{32}=2$

Los argumentos de las raíces son $\beta=\dfrac{-30+360k}{5}$ para k=0, 1, 2, 3, 4

- Si k=0, tenemos que $\beta_0=-6^{\circ}$
- Si k=1, tenemos que $\beta_1=6^{\circ}+72^{\circ}=66^{\circ}$
- Si k=2, tenemos que $\beta_2=6^{\circ}+144^{\circ}=138^{\circ}$

- Si k=3, tenemos que $\beta_3 = 6º+216º = 210º$
- Si k=4, tenemos que $\beta_3 = 6º+288º = 282º$

Por tanto, las cinco raíces quintas del complejo $z = 16\sqrt{3} - 16i$ son:

$$2_{-6º}, 2_{66º}, 2_{138º}, 2_{210º}, 2_{282º}$$

Ejercicio 2:

Sea E el subespacio vectorial de R^6 generado por el conjunto de vectores siguiente:

E={(*b*-*ab*, 0, 0, 0, 0, 0), (2*b*, 1-*a*, 0, 0, 0, 0), (3*b*, 3, 1-*a*, 0, 0, 0), (4*b*, 4, 4, 1-*a*, 0, 0), (5*b*, 5, 5, 5, 1-*a*, 0), (6*b*, 6, 6, 6, 6, 1-*a*)}, $a, b \in R$. Sea *v*=(1,1,1,1,1,0)

a) Calcula la dimensión de E en función de *a* y *b*.

b) Para el cas *a*=1 y *b*=1, encuentra una base del espacio vectorial. Pertenece *v* a E en este caso? En caso afirmativo encuentra sus coordenadas en la base anterior.

Solución:

a) Calculemos el rango de la matriz:

$$rang\begin{pmatrix} b-ab & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante 6x6:

$$\begin{vmatrix} b-ab & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} 1-a & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = b \cdot (1-a)^6$$

Así pues si $b \neq 0$ y $a \neq 1$ entonces la dimensión de E es 6.

Si *b*=0, entonces calculamos el rango de la matriz:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$ para la cual cosa calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1-a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1-a & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^5$$

Así pues si b=0 y $a \neq 1$ entonces el rango de E es 5.

Si b=0 y a=1 tenemos

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$ ya que podemos encontrar el menor 4x4 con determinante distinto de cero: $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto la dimensión de E es 4

Ara queda el caso a=1 y $b \neq 0$. Queremos calcular el rango:

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$ ya que podemos encontrar el menor 5x5 con determinante distinto de cero: $$\begin{vmatrix} 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 720b \neq 0$$

Así resumiendo tenemos:

Si $b \neq 0$ y $a \neq 1$ entonces la dimensión de E es 6.

Si b=0 y $a \neq 1$ o bien a=1 y $b \neq 0$ entonces la dimensión de E es 5.

Si b=0 y a=1 entonces la dimensión de E es 4.

b) En el caso a=1 y b=1 sabemos por el apartado anterior que la dimensión de E es 5.

Tenemos que E está definido por los vectores:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos encontrar el menor 5x5 con determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces los vectores {(2,0,0,0,0,0), (3,3,0,0,0,0), (4,4,4,0,0,0), (5,5,5,5,0,0), (6,6,6,6,6,0)} son linealmente independientes porque contienen el menor anterior y son base de E cuando a=1 y b=1

Miramos si v pertenece a E en este caso planteando el sistema con la base encontrada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+3y+4z+5t+6k=1 \\ 3y+4z+5t+6k=1 \\ 4z+5t+6k=1 \\ 5t+6k=1 \\ 6k=1 \\ 0=0 \end{cases}$$

Que tiene solución x=0, y=0 , z=0, t=0, k=1/6.

Por tanto v pertenece a E y sus coordenadas en la base anterior son (0,0,0,0,1/6).

Ejercicio 3:

a) Discutid el sistema de ecuaciones lineals según los valores del parámetro *a:*

$$\begin{cases} x-2y+z=a^2 \\ (2-a)x+(2a-4)y+(4-2a)z=5 \\ (a+1)x-(a+1)y+(a+1)z=a+1 \end{cases}$$

b) Resolved el sistema para $a=0$, en el caso que tenga solución.

Solución:

a) Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas. Para discutirlo utilizaremos el teorema de Rouché-Frobenius. Calcularemos primero los valores de *a* para los cuales el rango de la matriz *M* sea máximo (es decir, rang(*M*)=3). Para estos valores el sistema será compatible determinado.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2-a & 2a-4 & 4-2a \\ a+1 & -a-1 & a+1 \end{pmatrix}, \qquad MA=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a^2 \\ 2-a & 2a-4 & 4-2a & 5 \\ a+1 & -a-1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$\det(M)=-(a+1)(2-a)=0$ si $a=-1$ o $a=2$.

La matriz *M* tiene rango 3 para todos los valores de *a*, a excepción de $a=-1,2$. Así para $a\neq -1,2$ tenemos $rang(M)=rang(MA)=3$ y el sistema será **COMPATIBLE DETERMINADO.**

Para $a=-1$,

$$rang(M) = rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ y } rang(MA) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Así el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO CON 1 GRADO DE LIBERTAD.**

Para $a = 2$,

$$rang(M) = rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \text{ y } rang(MA) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

En este caso el sistema es **INCOMPATIBLE.**

Resumiendo:

- Para $a \neq -1, 2$ el sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO.**
- Para $a = -1$ el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO CON 1 GRADO DE LIBERTAD.**
- Para $a = 2$ el sistema es **INCOMPATIBLE.**

b) Para $a = 0$, hagamos la reducción de la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Substituimos la 2fila por 2fila -2*(1fila) y la 3fila por 3fila-(1fila) y obtenemos

Álgebra/ Matemáticas I

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la 2fila y la 3fila y tenemos la reducción de Gauss de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución del sistema es

$$z = \frac{5}{2}$$
$$y = 1$$
$$x = -z + 2y = -\frac{5}{2} + 2 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio 4:

Sea $f: R^3 \to R^3$ la aplicación lineal definida por
$$f(x,y,z) = (2x, 3y, x+y+z)$$.

a) Encontrad la matriz de f en las bases canónicas.
b) Calculad el polinomio característico de f y los valores propios de f.
c) Estudiad si f diagonaliza.
d) En el caso en que f diagonaliza, encontrad una base formada por vectores propios.

Solución:

a) La matriz de f en las bases canónicas es :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) El polinomio característico de f es:

$$q(t) = (2-t)(3-t)(1-t)$$

Los valores propios de f son, por tanto, el 2,el 3 y el 1, todos con multiplicidad algebraica 1.

c) Tenemos que el polinomio característico descompone en factores lineales. Como que la multiplicidad algebraica es 1, automáticamente, la multiplicidad geométrica también es 1. Por tanto, el polinomio característico descompone en factores lineales y las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada valor propio coinciden. De aquí se deduce que f diagonaliza.

d) Para encontrar los vectores propios de f de valores propios 2, 3 y 1tenemos que resolver los sistemas de ecuaciones lineales: (A-2I)X=0 , (A-3I)X=0 y (A-I)X=0 .
O sea:

$$(A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El subespacio de soluciones del primer sistema es: < (1,0,1)>.

El subespacio de soluciones del segundo sistema es: <(0,2,1)>.

El subespacio de soluciones del tercer sistema es: <(0,0,1)>.

Por tanto, una base formada por vectores propios de f es :

<(1,0,1), (0,2,1),(0,0,1)>