75.569 · Grafos y Complejidad · 2025-26

PEC1 - Primera prueba de evaluación continua

Apellidos: *López Henestrosa*
Nombre: José Carlos

Presentación

Esta PEC es una introducción a la teoría de grafos que cubre los contenidos estudiados en los 3 primeros módulos de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre funciones y algoritmos, los fundamentos de la teoría de grafos y los problemas de recorridos y conectividades sobre grafos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer los principales conceptos de combinatoria.
- Conocer el concepto de complejidad temporal y espacial de un algoritmo.
- Conocer el concepto de grafo y los diferentes tipos de grafos (grafos orientados, grafos ponderados, pseudografos, multigrafos, ...).
- Conocer las principales propiedades de los grafos y saber analizarlas.
- Conocer los problemas de conectividad más usuales sobre grafos, los algoritmos que los resuelven y saber aplicarlos en un grafo concreto.
- Ser capaz de representar y analizar un problema en términos de la teoría de grafos.

Respuestas

Ejercicio 1 [25 %]

a) **[5 %]** En una competición deportiva las camisetas de los deportistas se numeran con un nuevo tipo de dorsal inteligente. Numerar cada camiseta cuesta dos euros por cada dígito que forme parte del número que aparezca en la camiseta. Esto es, por ejemplo el dorsal 6 (un solo dígito) cuesta 2 euros, el dorsal 34 (dos dígitos) cuesta 4 euros y el dorsal 352 (tres dígitos) cuesta 6 euros. La factura total para numerar las camisetas de todos los deportistas es de 13794 euros. Teniendo en cuenta que se empiezan a repartir los dorsales desde el número 1 y en orden. ¿Cuántos deportistas hay en la competición?

Sabemos que el coste por dígito es de $2€$, por lo que procedemos a calcular el precio de los dorsales por número de dígitos:

- **Del 1 al 9**: $9 \cdot 2€ = 18€$
- **Del 10 al 99**: $90 \cdot 4€ = 360€$
- **Del 100 al 999**: $900 \cdot 6€ = 5400€$
- **Del 1000 al 9999**: $9000 \cdot 8€ = 72000€$

Podemos apreciar que $72000€$ es mayor al precio de la factura total para numerar las camisetas de todos los deportistas $(13794€)$, por lo que procedemos a sumar el precio de los dorsales desde el 1 al 999:

$$18€ + 360€ + 5400€ = 5778€$$

Restamos el resultado al total de la factura para saber cuánto dinero nos falta para llegar al total:

$$13794€ - 5778€ = 8016€$$

Sabemos que ese resultado $(8016€)$ se corresponde con dorsales de 4 dígitos, por lo que procedemos a dividir dicho número entre 8 para hallar el número total de dorsales pertenecientes a este intervalo:

$$8016 / 8 = 1002 \text{ dorsales}$$

Por último, sumamos estos dorsales a los 999 restantes para obtener el total de deportistas que han participado en la competición:

5

$$999 + 1002 = 2001 \text{ deportistas}$$

b) **[10 %]** Consideremos los 18 primeros números naturales. Esto es, el conjunto $\{1, 2,..., 18\}$. Calculad de cuántas maneras distintas pueden elegirse 5 números distintos, $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, de este conjunto de tal forma que la distancia entre dos cualesquiera de ellos, (distintos), sea al menos 2. Esto es, que $|a_i - a_j| \geq 2$ para todo a_i, a_j con $i \neq j, i, j \in \{1, ..., 5\}$.

La agrupación solicitada es una **combinación**, ya que **no importa el orden**. Además, **no** se admite **repetición**.

Como restricción, la distancia entre dos números cualquiera de la combinación tiene que ser de, al menos, 2. Esto implica que no podemos usar la forma $\binom{n}{k}$.

10

Podemos interpretar k como "unos" en una fila de n casillas con ceros en la que no puede haber dos unos juntos. Como solución, colocamos un cero entre cada par de unos, lo que equivale a $k - 1$ ceros separadores. Tras reservar esos $k - 1$ ceros, quedan $n - (k - 1)$ posiciones en las que podemos colocar los k unos, siempre separados. Esto equivale a elegir k posiciones entre $n - k + 1$ posibles, por lo que debemos calcular $\binom{n-k+1}{k}$:

$$\binom{n-k+1}{k} = \frac{(n-k+1)!}{k!((n-k+1)-k)!} = \frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k+1)!} = \frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k+1)!} = \frac{18-5+1!}{5!(18-2\cdot5+1)!} = \frac{14!}{5!\cdot9!} = 2002$$

Como resultado, obtenemos **2002 combinaciones posibles** de 5 números distintos cuya distancia entre cualquiera de ellos es, al menos, 2.

c) Sea

$$f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$$

una función. Para cada uno de los siguientes casos, justificad cuál es el mayor subconjunto A de $\mathbb{R}$ que puede elegirse como dominio de la función, y después decid, (**también justificando la afirmación**), cuál tiene que ser el subconjunto B de $\mathbb{R}$ que nos permitirá afirmar que f es biyectiva.

1. **[5 %]** $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

Dominio A:
El denominador no puede ser cero, por lo que resolvemos

$$x + 2 = 0 \to x = -2$$

Por lo tanto, el dominio A de $f(x)$ es $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Imagen (rango) B:
Sea $y = \frac{x-2}{x+2}$, resolvemos para x:

$$y(x + 2) = x - 2 \to yx + 2y = x - 2$$
$$x(y - 1) = -2(1 + y) \qquad (y \neq 1)$$
$$x = -2\frac{1+y}{y-1}$$

La expresión anterior muestra que para todo $y \neq 1$ se corresponde un valor de x contenido en el dominio A. $y \neq 1$ no es posible, ya que nos llevaría a una expresión imposible de resolver $(x + 2 = x - 2)$. Por lo tanto, la imagen B de $f(x)$ es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Biyectividad:
$f(x)$ es creciente en todo su dominio A porque

$$f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0 \qquad (x \neq 2)$$

5

Por lo tanto, es **inyectiva**. Además, la resolución algebraica de la imagen B muestra que $f(x)$ es **exhaustiva** sobre $B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$**.** Como conclusión, $f : A \to B$ es **biyectiva**.

2. **[5 %]** $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$

Dominio A:
El radicando debe ser mayor o igual que 0, por lo que resolvemos la siguiente inecuación:

$$2 + 5x \geq 0 \to x \geq -\frac{2}{5}$$

Por lo tanto, el dominio A de $f(x)$ es $[-\frac{2}{5}, \infty)$.

Imagen (rango) B:
Sea $y = \sqrt{2 + 5x}$, resolvemos para x:

$$y^2 = 2 + 5x \rightarrow 5x = y^2 - 2 \rightarrow x = \frac{y^2 - 2}{5}$$

La raíz cuadrada no puede ser negativa. Cuando x recorre $[-\frac{2}{5}, \infty)$, el radicando recorre $[0, \infty)$. Por lo tanto, la imagen B de $f(x)$ es $[0, \infty)$.

Biyectividad:
$f(x)$ es creciente en todo su dominio A porque

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{2+5x}} \qquad (x \geq -\frac{2}{5})$$

Para todo x en A el denominador es positivo, por lo que $f'(x) > 0$ en todo A. Una función con derivada estrictamente positiva en un intervalo es estrictamente creciente en ese intervalo, por lo que no puede tomar el mismo valor en dos puntos distintos. Por lo tanto, f es **inyectiva** en A.

5

Por otro lado, la resolución algebraica de la imagen B muestra que para todo y en B existe x en A con $f(x) = y$. Por lo tanto, f es **exhaustiva** sobre B.

Como conclusión, $f : A \rightarrow B$ es **biyectiva**.

Ejercicio 2 [25 %]

a) **[5 %]** ¿Existe algún grafo que sea bipartito completo, con orden 5 y medida 7?

Un grafo bipartito completo $K_{m,n}$ tiene dos conjuntos disjuntos de vértices: uno de tamaño m y otro de tamaño n. Además, contiene todas las aristas posibles entre los dos conjuntos.

Para calcular su orden, tenemos que $m + n = 5$. Esto implica que los posibles valores de m y n sean los siguientes:

- $m = 1,\ n = 4$
- $m = 2,\ n = 3$
- $m = 3,\ n = 2$ (mismo grafo que $m = 2, n = 3$)
- $m = 4,\ n = 1$ (mismo grafo que $m = 1, n = 4$)

Podemos distinguir dos casos distintos:

- $K_{1,4}$
- $K_{2,3}$

5

Ahora, calculamos la medida (número de aristas) $m \times n$ para cada caso:

- $K_{1,4}$: $1 \times 4 = 4$ aristas
- $K_{2,3}$: $2 \times 3 = 6$ aristas

Tal y como podemos apreciar, no hay ningún grafo bipartito que tenga orden 5 y medida 7.

b) **[5 %]** Un grafo tiene 26 vértices y 58 aristas. Hay cinco vértices de grado 4, seis vértices de grado 5 y siete vértices de grado 6. Si el resto de vértices tienen todos el mismo grado. ¿Cuál es este grado?

En primer lugar, conocemos los grados del siguiente número de vértices:

$$5 + 6 + 7 = 18$$

Por lo tanto, el número de vértices restantes es

$$26 - 18 = 8$$

Todo grafo simple G cumple la fórmula de los grados de Euler, que relaciona la suma de los grados de cada vértice con su medida m (su número de aristas):

$$\sum_{v \in V}^{k} g(v) = 2m = 2 \cdot 58 = 116$$

Un grafo con 58 aristas tiene un grado total de 116. Dado el enunciado, el cual nos indica la suma de los grados conocidos, sabemos:

- $5 \cdot 4 = 20$
- $6 \cdot 5 = 30$
- $7 \cdot 6 = 42$

La suma de los grados conocidos es $20 + 30 + 43 = 92$. Los 8 vértices restantes aportan $8x$ grados, por lo que planteamos la siguiente ecuación:

S

$$92 + 8x = 116$$
$$8x = 116 - 92$$
$$8x = 24$$
$$x = 3$$

Como conclusión, sabemos que el grado de los vértices restantes es **3**.

c) **[5 %]** Usad la teoría de grafos para justificar si es o no posible que cada persona de un grupo de 15 individuos tenga exactamente 3 amigos en ese grupo (suponemos que la relación de amistad es simétrica. Esto es, la amistad surge en los dos sentidos entre dos personas).

Vamos a interpretar cada persona como un vértice. Una arista entre dos vértices significa que esas dos personas son amigas. Por otro lado, sabemos que la relación es simétrica, lo que nos indica que estamos ante un grafo no dirigido. Cada persona tiene exactamente 3 amigos, por lo que el grafo es de grado 3 con $n = 15$ vértices.

Sabemos que la suma de los grados del grafo es $15 \cdot 3 = 45$. La fórmula de Euler nos dice que

$$\sum_{v \in V}^{k} g(v) = 2m$$

5

donde m es el número de aristas.

Entonces:

$$2m = 45 \rightarrow m = \frac{45}{2} \rightarrow m = 22,5$$

El número de aristas debe ser entero. En cambio, al aplicar la fórmula de Euler, obtenemos $m = 22,5$, lo cual implica que **no es posible** que cada persona de un grupo de 15 individuos tenga exactamente 3 amigos en ese grupo.

d) **[5 %]** ¿Se corresponde la siguiente secuencia de números naturales

$$8,\ 8,\ 7,\ 6,\ 6,\ 5,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1$$

con la secuencia gráfica de algún grafo? Justificad la respuesta.

Para saber si la secuencia dada se corresponde con la secuencia gráfica de algún grafo, aplicamos el algoritmo de Havel-Hakimi. El objetivo de este algoritmo es iterar sobre la secuencia dada hasta obtener una serie formada solo por 0. En cambio, si obtenemos algún dígito negativo, podemos concluir que la secuencia dada no es una secuencia gráfica.

ITERACIÓN 1:

El primer paso es ordenar de mayor a menor la secuencia, la cual ya está ordenada. Por lo tanto, procedemos con el segundo paso, el cual consiste en suprimir el primer elemento de la secuencia, sea n su valor:

~~8~~, 8, 7, 6, 6, 5, 3, 2, 2, 2, 1

A continuación, restamos 1 a tantos elementos, desde la izquierda, como indica el elemento suprimido. Como se suprimió un 8, se resta 1 a los OCHO primeros elementos de la serie:

~~8~~, 8-1, 7-1, 6-1, 6-1, 5-1, 3-1, 2-1, 2-1, 2, 1
7, 6, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 2, 1

ITERACIÓN 2:

Ordenamos de mayor a menor la secuencia resultante de la iteración 1:

7, 6, 5, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 1

Suprimimos el primer elemento de la secuencia:

~~7~~, 6, 5, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 1

A continuación, se resta 1 a tantos elementos, desde la izquierda, como indica el elemento suprimido. Como se suprimió un 7, se resta 1 a los primeros siete elementos de la serie:

~~7~~, 6-1, 5-1, 5-1, 4-1, 2-1, 2-1, 1-1, 1, 1
5, 4, 4, 3, 1, 1, 0, 1, 1

ITERACIÓN 3:

Ordenamos de mayor a menor la secuencia resultante de la iteración 2:

5, 4, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 0

Suprimimos el primer elemento de la secuencia:

~~5~~, 4, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 0

A continuación, se resta 1 a tantos elementos, desde la izquierda, como indica el elemento suprimido. Como se suprimió un 5, se resta 1 a los primeros cinco elementos de la serie:

~~5~~, 4-1, 4-1, 3-1, 1-1, 1-1, 1, 1, 0
3, 3, 2, 0, 0, 1, 1, 0

ITERACIÓN 4:

Ordenamos de mayor a menor la secuencia resultante de la iteración 3:

3, 3, 2, 1, 1, 0, 0, 0

Suprimimos el primer elemento de la secuencia:

~~3~~, 3, 2, 1, 1, 0, 0, 0

A continuación, se resta 1 a tantos elementos, desde la izquierda, como indica el elemento suprimido. Como se suprimió un 3, se resta 1 a los primeros tres elementos de la serie:

~~3~~, 3-1, 2-1, 1-1, 1, 0, 0, 0
2, 1, 0, 1, 0, 0, 0

ITERACIÓN 5:

Ordenamos de mayor a menor la secuencia resultante de la iteración 4:

2, 1, 1, 0, 0, 0, 0

Suprimimos el primer elemento de la secuencia:

~~2~~, 1, 1, 0, 0, 0, 0

A continuación, se resta 1 a tantos elementos, desde la izquierda, como indica el elemento suprimido. Como se suprimió un 2, se resta 1 a los primeros dos elementos de la serie:

~~3~~, 1-1, 1-1, 0, 0, 0, 0
0, 0, 0, 0, 0, 0

5

Como podemos apreciar, hemos alcanzado una serie de 0, lo cual indica que la secuencia de números naturales dada en el enunciado **sí se corresponde con la secuencia gráfica de algún grafo**.

e) Calculad el orden y la medida de los siguientes grafos:

C_5 es un grafo ciclo de 5 vértices. Su orden es $n_1 = 5$ y su medida es $m_1 = 5$.
T_4 es un grafo trayecto de 4 vértices. Su orden es $n_2 = 4$ y su medida es $m_2 = 3$.

2.5

- **[2,5 %]** $C_5 + T_4$
  - **Orden**: $n = n_1 + n_2 = 5 + 4 = 9$
  - **Medida**: C_5 tiene 5 aristas, mientras que T_4 tiene 3 aristas. El número de aristas entre los dos grafos es $5 \cdot 4 = 20$. Por lo tanto, la medida total es $m = m_1 + m_2 + (n_1 \cdot n_2) = 5 + 3 + 20 = 28$.

2.5

- **[2,5 %]** $C_5 \times T_4$
  - **Orden**: $n = n_1 \cdot n_2 = 5 \cdot 4 = 20$
  - **Medida**: $m = n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 15 + 20 = 35$

Ejercicio 3 [25 %]

Una zona rural tiene una red de carreteras estrechas que une sus 8 granjas, siguiendo la siguiente matriz de adyacencias que indica distancias en km. Siendo la quinta granja (quinta columna/fila) la que tiene una salida a la autopista.

Un ladrón ha robado una cabra en la granja número 1, y quiere huir por la autopista. Pero como no conoce mucho el terreno, sigue el itinerario 1-2-4-6-8-5. El propietario de la granja lo ve y lo persigue, sabiendo que se dirige a la autopista. No obstante, cuando arranca el coche, el ladrón ya ha recorrido 2km y lo ha perdido de vista.

$$A = \begin{bmatrix} - & 4 & 7 & - & - & - & - & - \\ - & - & 1 & 5 & - & - & 9 & - \\ - & - & - & - & - & 5 & - & - \\ 3 & - & - & - & - & 2 & - & - \\ - & - & - & - & - & 6 & 4 & - \\ - & 4 & - & - & - & - & - & 8 \\ - & - & 2 & - & - & - & - & 2 \\ 6 & - & - & - & 7 & - & - & - \end{bmatrix}$$

Responded de manera justificada usando las metodologías de los apuntes de clase, las siguientes cuestiones:

a) **[6 %]** Aplica el algoritmo de Floyd para obtener la matriz de distancias entre vértices. A partir de esa matriz ¿Se puede deducir que el sistema de carreteras entre granjas es un grafo conexo?

El algoritmo de Floyd consiste en considerar si usar para cada vértice $k = 1 \dots 8$ como vértice intermedio mejora alguna distancia $d(i,j)$. La matriz resultante al aplicar el algoritmo es la siguiente:

4

Pasos intermedios?

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 9 & 22 & 10 & 13 & 15 \\ 8 & 0 & 1 & 5 & 18 & 6 & 9 & 11 \\ 17 & 9 & 0 & 14 & 20 & 5 & 18 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & 0 & 17 & 2 & 15 & 10 \\ 12 & 10 & 6 & 15 & 0 & 6 & 4 & 6 \\ 12 & 4 & 5 & 9 & 15 & 0 & 13 & 8 \\ 8 & 11 & 2 & 16 & 9 & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 11 & 15 & 7 & 13 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que un grafo es conexo si cualquier par de vértices u y v están conectados por un camino $u - v$; es decir, si tienen un valor finito. Como podemos apreciar en la matriz de distancias obtenida al aplicar el algoritmo de Floyd, todas las aristas son finitas, lo que indica que hay un camino $u - v$ para todas las aristas. Por lo tanto, el sistema de carreteras entre granjas es, efectivamente, un **grafo conexo**.

b) **[6 %]** ¿Qué itinerario debería seguir el propietario de la granja para llegar a la entrada de la autopista antes que el ladrón? Usa otro algoritmo de los apuntes, que no sea el del apartado anterior para resolverlo.

Como queremos que el propietario de la granja número 1 (A) llegue a la autopista antes que el ladrón, la cual se encuentra en la granja número 5 (E), tenemos que determinar la distancia mínima desde el punto de origen A al de destino E. Para ello, aplicamos el algoritmo de Dijkstra al grafo A:

	A	B	C	D	E	F	G	H	Pivot
Paso i = 1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	A
Paso i = 2	0	4	7	-1	-1	-1	-1	-1	B
Paso i = 3	0	4	5	9	-1	-1	13	-1	C
Paso i = 4	0	4	5	9	-1	10	13	-1	D
Paso i = 5	0	4	5	9	-1	10	13	-1	F
Paso i = 6	0	4	5	9	-1	10	13	18	G
Paso i = 7	0	4	5	9	-1	10	13	15	H
Paso i = 8	0	4	5	9	22	10	13	15	E

6

Dada la tabla resultante al aplicar el algoritmo de Dijkstra, el propietario de la granja 1 tiene que realizar el camino $A - B - G - H - E$ (22 km) para llegar a la entrada de la autopista antes que el ladrón.

c) **[6 %]** Siguiendo el camino óptimo, cuando el granjero ha recorrido 10km, al ladrón le faltan 13km para llegar a la autopista. Si ambos mantienen una velocidad constante. ¿Le alcanzará?

Sabemos que el camino que toma el ladrón es $1 - 2 - 4 - 6 - 8 - 5$, por lo que calculamos la distancia que tiene que recorrer sumando los tramos del itinerario (fila → columna):

- $1 \rightarrow 2 = 4$ km
- $2 \rightarrow 4 = 5$ km
- $4 \rightarrow 6 = 2$ km
- $6 \rightarrow 8 = 8$ km
- $8 \rightarrow 5 = 7$ km

La distancia total que el ladrón tiene que recorrer hasta la salida a la autopista es $4 + 5 + 2 + 8 + 7 = 26$ km.

Cuando el propietario arranca, el ladrón ya había recorrido 2 km. Por lo tanto, en ese momento, al ladrón le quedan por recorrer $26 - 2 = 24$ km hasta la salida a la autopista.

Ahora que sabemos la distancia que tiene que recorrer el ladrón, procedemos a analizar los datos de este enunciado. En el instante planteado por el enunciado, al granjero le quedan por recorrer $22 - 10 = 12$ km, mientras que al ladrón le faltan $26 - 13 = 13$ km.

Dicho esto, procedemos a hallar la velocidad a la que ambos avanzan. Vamos a suponer que transcurre un tiempo t para ambos desde que el granjero arranca hasta el momento planteado por el enunciado. El ladrón transcurre en ese tiempo t $13 - 2 = 11$ km, mientras que el granjero recorre 10 km.

Entonces, sus velocidades relativas son proporcionales a las distancias que avanzaron, por lo que establecemos la siguiente proporción, donde v_L es la velocidad del ladrón y v_G la del granjero:

$$\frac{v_L}{v_G} = \frac{11}{10} = 1,1$$

El ladrón es un 10 % más rápido que el granjero. Como podemos apreciar, la distancia restante no es lo que importa directamente, sino si sus tiempos de llegada se igualan o no. Entonces, procedemos a calcular el tiempo restante de cada uno hasta la salida a la autopista:

$$t_L = \frac{13}{v_L}; \quad t_G = \frac{12}{v_G}$$

Sustituimos $v_L = 1,1\, v_G$:

6

$$t_L = \frac{13}{1,1 v_G}; \quad t_G = \frac{12}{v_G}$$

$$t_L = 11,818; \quad t_G = 12$$

Comprobamos que el ladrón es más rápido y, aunque al granjero le quede 1 km menos, el ladrón llegará antes a la autopista.

d) **[7 %]** Ahora, el granjero puede llamar a otro granjero justo antes de arrancar el coche (solo le da tiempo de llamar a uno, y en el tiempo de llamada el ladrón recorre un km más) para que corte un tramo de carretera (una arista del grafo) y recorrer ese tramo en contra dirección. Teniendo en cuenta que solo puede hacer eso con aristas que salgan de o lleguen a las granjas 1 y 5, ¿Qué tramo debe recorrer en contra dirección para llegar cuanto antes a la entrada de la autopista?

Sabemos que, en el momento en el que el granjero inició la llamada, el ladrón llevaba 2 km recorridos. Después de la llamada, el ladrón avanza 1 km más, por lo que recorre un total de $2 + 1 = 3$ km. Por lo tanto, en el momento en el que el granjero arranca, el ladrón está a 1 km de la granja 2, ya que la distancia entre la granja 1 y la 2 es de 4 km y él ya recorrió 3 km.

Por otro lado, el otro granjero puede cortar un tramo de carretera (una arista) y recorrer ese tramo en contra dirección. Solo puede hacer eso con aristas que salgan de o lleguen a las granjas 1 y 5, por lo que las analizamos:

- Aristas que salen de 1:
  - $1 \rightarrow 2 = 4$ km
  - $1 \rightarrow 3 = 7$ km
- Aristas que llegan a 1:
  - $4 \rightarrow 1 = 8$ km
  - $8 \rightarrow 1 = 6$ km
- Aristas que salen de 5:
  - $5 \rightarrow 6 = 6$ km
  - $5 \rightarrow 7 = 4$ km
- Aristas que llegan a 5:
  - $8 \rightarrow 5 = 7$ km

Por lo tanto, las aristas posibles de cortar y usar en contra dirección son:
$(1, 2),\ (1, 3),\ (4, 1),\ (8, 1),\ (5, 6),\ (5, 7),\ (8, 5)$.

El hecho de que el otro granjero corte una de esas aristas implica que el ladrón no puede usarla, pero el granjero perseguidor sí puede usarla en el sentido contrario al original. Eso significa que si originalmente la arista era de u a v, ahora el granjero puede ir de v a u, pero el ladrón no puede pasar por esa arista en ningún sentido.

Dado el razonamiento anterior, procedemos a invertir las aristas posibles de cortar para hallar el camino más corto de 1 a 5. Es importante comentar que, para cada caso, se ha aplicado el algoritmo de Dijkstra para hallar la distancia mínima.

- Invertimos $1 \rightarrow 2$: Queda $2 \rightarrow 1$. Distancia mínima $1 \rightarrow 5 = 27$ km.
- Invertimos $1 \rightarrow 3$: Queda $3 \rightarrow 1$. Distancia mínima $1 \rightarrow 5 = 22$ km.
- Invertimos $4 \rightarrow 1$: Queda $1 \rightarrow 4$. Distancia mínima $1 \rightarrow 5 = 20$ km. Ruta óptima: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 5$ $(3 + 2 + 8 + 7 = 20)$
- **Invertimos** $8 \rightarrow 1$**: Queda** $1 \rightarrow 8$**. Distancia mínima** $1 \rightarrow 5 = 13$ **km. Ruta óptima:** $1 \rightarrow 8 \rightarrow 5$ $(6 + 7 = 13)$
- Invertimos $5 \rightarrow 6$: Queda $6 \rightarrow 5$. Distancia mínima $1 \rightarrow 5 = 16$ km. Ruta óptima: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5$ $(4 + 1 + 5 + 6 = 16)$

7

- Invertimos $5 \rightarrow 7$: Queda $6 \rightarrow 5$. Distancia mínima $7 \rightarrow 5 = 17$ km. Ruta óptima: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \quad (4 + 9 + 4 = 17)$
- Invertimos $8 \rightarrow 5$: Queda $5 \rightarrow 8$. No existe ningún camino dirigido de $1 \rightarrow 5$.

Como podemos apreciar, algunas distancias resultantes al invertir las aristas son mejores que la distancia mínima sin invertir las aristas (22 km). En este caso, la mejor arista a invertir es la que originalmente es $8 \rightarrow 1$, que tiene 6 km de longitud. Si la invertimos y la usamos en el sentido $1 \rightarrow 8$, el camino más corto de 1 a 5 queda tal que así:

$$1 \xrightarrow{6} 8 \xrightarrow{7} 5$$

La distancia total de $6 + 7 = 13$ km, la cual es la mínima entre las opciones permitidas. Por último, tenemos que determinar si el granjero llega a la salida de la autopista antes que el ladrón recorriendo este camino. Sabemos que el ladrón recorre 3 km cuando el granjero se pone en marcha, lo cual significa que le quedan por recorrer $26 - 3 = 23$ km. Por otro lado, sabemos que el ladrón avanza un 10 % más rápido que el granjero, al cual le quedan por recorrer 13 km.

Ahora que sabemos las distancias, aplicamos la fórmula vista en el apartado anterior para determinar quién llega antes a la autopista ($v_L = 1,1\, v_G$):

$$t_L = \frac{23}{1{,}1 v_G}; \quad t_G = \frac{13}{v_G}$$
$$t_L = 20,909; \quad t_G = 12$$

Como podemos ver, el granjero llega antes a la autopista que el ladrón. Por lo tanto, concluimos que el granjero debe recorrer en contra-dirección la arista $8 \rightarrow 1$, usando el tramo $1 \rightarrow 8$ de 6 km para llegar cuanto antes a la entrada de la autopista.