EXAMEN 3 - 20 enero 2021

1. Calculad el valor que ha de tener k para que el resultado de la operación siguiente $\frac{1+i}{k+2i}$ sea:

(a) Un número real.

(b) Un número imaginario puro.

Solución

(a) Tenemos que saber cuál es el número complejo que obtenemos de la fracción dada. Para ello multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (tal como se explica en el apartado 3.3.4, página 26, del material sobre la división de números complejos en forma binómica), recordando que $i^2 = -1$, y agrupamos parte real y parte imaginaria.
$\frac{1+i}{k+2i} = \frac{(1+i)\cdot(k-2i)}{(k+2i)\cdot(k-2i)} = \frac{k-2i+ki-2i^2}{k^2-4i^2} = \frac{k-2i+ki+2}{k^2+4} = \frac{k+2}{k^2+4} + \frac{k-2}{k^2+4}i$
Para que el número sea real, imponemos que la parte imaginaria sea 0:
$\frac{k-2}{k^2+4} = 0 \Longleftrightarrow k-2=0 \Longleftrightarrow k=2$
Por tanto, la respuesta a fin de que el resultado sea un número real es: $k = 2$

(b) Para que el número sea imaginario puro, imponemos que la parte real sea 0:
$\frac{k+2}{k^2+4} = 0 \Longleftrightarrow k+2=0 \Longleftrightarrow k=-2$
Por tanto, la respuesta para que el resultado sea un número imaginario puro es: $k = -2$

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+\ \ z &=& 18a \\ x+2y+(6a+3)\,z &=& 3 \\ 2x+4\ y+(18a+3)\,z &=& 8 \end{array}\right\}$$

Se pide:

(a) Determinad, de manera razonada, para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado.

(b) Considerad el sistema de ecuaciones que se obtiene sustituyendo el parámetro a por la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC y calculad su solución.

Solución

(a) La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6a+3 \\ 2 & 4 & 18a+3 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18a \\ 1 & 2 & 6a+3 & 3 \\ 2 & 4 & 18a+3 & 8 \end{array}\right)$$

Por el Teorema de Rouché-Fröbenius [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12] sabemos que el sistema será compatible determinado si y solo si rango$(A) = 3 =$ rango$(M) =$ n^o incógnitas. Dado que el sistema tiene tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo será el de la matriz ampliada y el sistema será compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6a+3 \\ 2 & 4 & 18a+3 \end{vmatrix} = 6a-3$$

Así pues, si $\boxed{a \neq 1/2}$ $\rightarrow$ rango$(A) = 3 =$ rango$(M) =$ n^o incógnitas y el sistema es compatible determinado.

(b) Resolvemos este apartado del ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor asignado.

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 18 a la 21] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18a \\ 1 & 2 & 6a+3 & 3 \\ 2 & 4 & 18a+3 & 8 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18a \\ 0 & 1 & 6a+2 & 3-18a \\ 0 & 2 & 18a+1 & 8-36a \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18a \\ 0 & 1 & 6a+2 & 3-18a \\ 0 & 0 & 6a-3 & 2 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2 - F1 \rightarrow F2$, $\quad F3 - 2{\cdot}F1 \rightarrow F3$, $\quad$ (2): $F3 - 2{\cdot}F2 \rightarrow F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 18a \\ y + (6a+2)\,z &=& 3-18a \\ (6a-3)\,z &=& 2 \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $\boxed{z = \frac{2}{6a-3}}$ y sustituyendo este valor de z en la segunda ecuación y despejando la y obtenemos $\boxed{y = \frac{-108a^2+60a-13}{6a-3}}$. Si sustituimos en la primera ecuación las dos condiciones anteriores se obtiene $\boxed{x = \frac{216a^2-114a+11}{6a-3}}$.

Así pues, la solución de este sistema, en función de los diferentes valores del parámetro a, es:

	$x = \frac{216a^2-114a+11}{6a-3}$,	$y = \frac{-108a^2+60a-13}{6a-3}$,	$z = \frac{2}{6a-3}$
Si $a=0$	$x = -11/3$	$y = 13/3$	$z = -2/3$
Si $a=1$	$x = 113/3$	$y = -61/3$	$z = 2/3$
Si $a=2$	$x = 647/9$	$y = -325/9$	$z = 2/9$
Si $a=3$	$x = 1613/15$	$y = -805/15$	$z = 2/15$
Si $a=4$	$x = 3011/21$	$y = -1501/21$	$z = 2/21$
Si $a=5$	$x = 4841/27$	$y = -2413/27$	$z = 2/27$
Si $a=6$	$x = 7103/33$	$y = -3541/33$	$z = 2/33$
Si $a=7$	$x = 9797/39$	$y = -4885/39$	$z = 2/39$
Si $a=8$	$x = 12923/45$	$y = -6445/45$	$z = 2/45$
Si $a=9$	$x = 16481/51$	$y = -8221/51$	$z = 2/51$

3. Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$F = < (1,-2,3),(3\lambda,-2\lambda,\lambda),(0,2,-3),(-1,2,0) >, \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) Calculad la dimensión de F según λ y una base A en cada caso.

(b) Sea $v_1 = (1+a,-2a,3(1+a))$, $v_2 = (0,4+2a,-3-3a)$, $v_3 = (-1-a,4+2a,0)$ donde a es la primera cifra de la derecha de tu IDP. ¿Cuáles pertenecen a F? Para los que sí pertenezcan, calculad sus coordenadas en la base A del apartado anterior.

(c) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ el conjunto formado por los vectores del apartado anterior. B es una base de F. Calculad la matriz $C_{B\to A}$ de cambio de base de la base B a las bases A que habéis calculado en el primer apartado.

Solución

(a) Calculamos el rango de los vectores con los que está definido F [Ver módulo 2, sección 4.5]. Si calculamos el determinante (usando la regla de Sarrus) [Ver módulo 2, sección 4.1]:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0-6+0+6-0+6 = 6$$

Vemos directamente que la dimensión de F es 3 independientemente de λ. Una base puede ser la formada por los vectores del determinante anterior:
$A = \{(1,-2,3),(0,2,-3),(-1,2,0)\}$.

(b) Como la dimensión de F es 3, sabemos directamente que todos los vectores v_i serán de F. Para calcular las coordenadas de v_1 resolvemos el sistema lineal [Ver módulo 2, sección 2.4, Ejemplo 15]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ -2a \\ 3(1+a) \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = a+2$, $y = 1$, $z = 1$. Por tanto, las coordenadas de v_1 en la base A son $(a+2,1,1)$.
Para calcular las coordenadas de v_2 procedemos de forma análoga resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4+2a \\ -3-3a \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 1$, $y = a+2$, $z = 1$. Obtenemos que las coordenadas de v_2 en la base A son $(1,a+2,1)$.
Y una vez más, para las coordenadas de v_3 procedemos de forma análoga resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-a \\ 4+2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene solución $x = 1$, $y = 1$, $z = a+2$. Así obtenemos que las coordenadas de v_3 en la base A son $(1,1,a+2)$.

(c) Para calcular la matriz de cambio de base de B a A debemos expresar los vectores de B en función de los de A [Ver módulo 2, sección 4.7]. Pero esto es justo lo que hemos hecho en el apartado anterior! Así la matriz de cambio de base de B a A es:

$$C_{B\to A} = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida en la base canónica por

$$f(x, y, z) = (7x + (5 - 5a)z, (a + 7)x - ay + (a + 7)z, (5a + 2)z).$$

Se pide:

(a) Calculad la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Justificad si la aplicación f es inyectiva cuando $a = 0$ y dad una base del núcleo de f en este caso.

(c) Para a igual a la primera cifra de la derecha de vuestro IDP del campus UOC, calculad el polinomio característico de f. Indicad cuáles son los valores propios de f y calculad una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga el número máximo de vectores propios.

Solución

(a) Para calcular A, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calculamos las imágenes de los tres vectores de la base canónica y los colocamos en columnas, tal como se explica en el punto "3.Matriz asociada a una aplicación lineal" del módulo "Aplicaciones lineales":

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a & a+7 \\ 0 & 0 & 5a+2 \end{pmatrix}.$$

(b) En el caso $a = 0$, la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para determinar si la aplicación f es inyectiva, podemos usar la equivalencia del punto "5.Monomorfismos y epimorfismos" que nos dice que f será inyectiva si su matriz asociada A tiene rango igual a la dimensión del espacio de salida, que en este caso es $\mathbb{R}^3$. El rango de la matriz no es 3 porque, al tener una columna nula, el determinante 3x3 asociado es 0. El rango es 2, ya que el siguiente determinante 2x2 es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

Así que ya podemos deducir que f no es inyectiva. Además en el mismo punto del módulo encontramos que este hecho es equivalente a que el núcleo de f no es nulo. Podemos calcular una base del núcleo usando la definición del punto "4.Núcleo e imagen de una aplicación lineal". Para encontrar los vectores con imagen el vector nulo, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como las soluciones cumplen $x = 0$ y $z = 0$, están generadas por el vector $(0, 1, 0)$.

También se puede usar para resolver este apartado el teorema de la dimensión del mismo punto del tema. Como el rango de la matriz coincide con la dimensión de la imagen de la aplicación lineal asociada a ella, tenemos que $dim(Imf) = 2$ y por el teorema de la dimensión sabemos que $dim(Kerf) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Imf) = 3 - 2 = 1$. Por tanto el núcleo tiene dimensión 1 y la aplicación no es inyectiva. El núcleo está generado por el vector $(0, 1, 0)$, ya que su imagen es la segunda columna de la matriz y esta columna es $(0, 0, 0)$.

(c) Resolvemos este apartado para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito basta con sustituir a por su valor en los resultados que siguen.

El polinomio característico de f es $p(t) = |A - t\mathrm{I}|$, tal como se define en el punto "7.Vectores y valores propios". Para calcularlo, desarrollamos este determinante por la segunda columna:

$$\det(A - t\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 7-t & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a-t & a+7 \\ 0 & 0 & 5a+2-t \end{vmatrix} = (-a-t) \cdot \begin{vmatrix} 7-t & 5-5a \\ 0 & 5a+2-t \end{vmatrix}$$

$$\det(A - t\mathrm{I}) = (-a-t)(7-t)(5a+2-t)$$

Los valores propios de f son las soluciones de la ecuación característica $p(t) = 0$: $-a$, 7 y $5a + 2$. Si $a = 1$ el VAP 7 tendrá multiplicidad 2, en el resto de casos hay 3 VAPs con multiplicidad 1.

Para encontrar un vector propio de valor propio $-a$ buscamos una base del $\ker(f + a\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7+a & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a+a & a+7 \\ 0 & 0 & 5a+2+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 7+a & 0 & 5-5a \\ a+7 & 0 & a+7 \\ 0 & 0 & 6a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos aislar de la tercera ecuación y ver que $z = 0$. Substituyendo este valor en la segunda obtenemos $(a + 7)x = 0$ y por tanto $x = z = 0$. Una solución es el vector $(0, 1, 0)$ y éste sería un VEP de VAP $-a$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio 7 buscamos una base del $\ker(f - 7\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7-7 & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a-7 & a+7 \\ 0 & 0 & 5a+2-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a-7 & a+7 \\ 0 & 0 & 5a-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = 1$ la primera y tercera ecuación son nulas y no nos dan información, pero podemos dividir la segunda ecuación $8x-8y+8z = 0$ por $(a+7) = 8$ y se convierte en $x-y+z = 0$. De donde $x = y - z$ y tendríamos 2 VEPs para el VAP 7:$(-1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$.
En caso contrario, podemos aislar de la tercera ecuación o de la primera $(5a - 5)z = 0$ y ver que $z = 0$. De la segunda obtenemos $(a + 7)x - (a + 7)y = 0$ y por tanto $x = y$. Una solución es el vector $(1, 1, 0)$ y éste sería un VEP de VAP 7, para $a \neq 1$.

Para encontrar los vectores propios de valor propio $5a + 2$ buscamos una base del $\ker(f - (5a + 2)\mathrm{I})$. O sea, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7-5a-2 & 0 & 5-5a \\ a+7 & -a-5a-2 & a+7 \\ 0 & 0 & 5a+2-5a-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5-5a & 0 & 5-5a \\ a+7 & -6a-2 & a+7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = 1$ ya hemos resuelto el sistema en el punto anterior.
En caso contrario, podemos aislar de la primera ecuación que es $(5-5a)x+(5-5a)z = 0$ y ver que $x = -z$. Sustituyendo en la segunda $(a + 7)x - (6a + 2)y + (a + 7)z = 0$ obtenemos $(6a + 2)y = 0$ y por tanto $y = 0$. Una solución es el vector $(-1, 0, 1)$.
Así pues, una base de vectores propios de $\mathbb{R}^3$ es $(0, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)$.

NOTA: En la realización de los ejercicios puede ser que necesitéis utilizar algún/os de los siguientes valores:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o	330^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$--\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	∞	-1	0	-1	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$