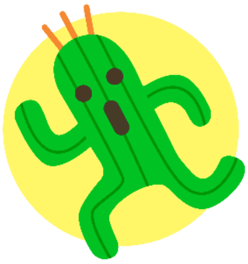
Grafos sin espinas

(1) Fundamentos matemáticos



V 0.3 2024_02_21

Aprende sin espinas
con @carlos_cactus

Sócrates se equivocaba. El conocimiento no es lo único que crece al compartirse: La alegría también.

A la inspiración del bucle_infinito,
al Cibergrupo y al tHash_A, por su amistad,
y sobre todo, a quienes dicen "pero quiero"
cuando sienten "no puedo".

¡Un saludo sin espinas!
@carlos_cactus :D

Y si quieres saber más:
¡Encuéntrame en Telegram como @carlos_cactus o habla con Espinito, el bot Sin Espinas, en @GestionSinEspinasBot.

Únete a la comunidad de Telegram Sin Espinas y no te pierdas nada!

Deja de preocuparte por aprobar y ¡Aprende sin Espinas!

Índice

ESTO ESTÁ INCONCLUSO. En siguientes versiones:

- Más ejemplos de combinatoria y casos confronta SIN vs CON rep.
- Ejemplos de análisis de complejidad de algoritmos (código → O(n))

- **GLOSARIO DE NOTACIÓN**

Símbolo	Se lee	Ejemplo	Se lee
∈	"Pertenece"	a ∈ A si A = {a,b,c}	El elemento "a" pertenece al conjunto A
∉	"No pertenece"	d ∉ A si A = {a,b,c}	El elemento "d" no pertenece al conjunto A
#	"Cardinal" (número de elementos)	#A = 3 si A = {a,b,c}	El cardinal del conjunto A es 3
|	"Tal que" (satisface, cumple cierta propiedad que sigue)	x | x + 2 = 3	x satisface que sumado a 2 da 3
:	"Tal que" (Lo mismo que |)	x : x + 2 = 3	x tal que sumado a 2 da 3
⊂	"Está incluido en"	$A \subset B$ si A = {a,b,c} y B = {a,b,c,d}	A está incluido en B si todos los elementos de A están también en B
⊄	"No está incluido en"	$B \not\subset A$ si A = {a,b,c} y B = {a,b,c,d}	B no está incluido en A si algún elemento de B no está en A
∪	"Unión" de conjuntos	$C = A \cup D$	El conjunto C es la unión de los conjuntos A y D e incluye los elementos de A y los elementos de D
∩	"Intersección" de conjuntos	$F = G \cap H$	La intersección de los conjuntos G y H es el conjunto F que incluye los elementos que están tanto en G y en H simultáneamente
∧	"conjunción" lógica "y"	$A \subset B \wedge B \subset A$	A está incluido en B y B está incluido en A
∨	"disyunción" lógica "o" (no excluyente)	$A \subset B \vee B \subset A$	A está incluido en B o bien B está incluido en A (o ambas).
⇔	"si y solo si"	$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$	2 conjuntos son iguales si y solo si su inclusión mutua se da.
⟹	"Implicación" (suficiencia)	A = B ⟹ #A = #B	Que 2 conjuntos sean iguales implica que sus cardinales también.
∃	"Existe"	$\exists x \mid x/2 = 6$ $\exists x \in Y$	Existe algún valor de x tal que su mitad es 6. Existe algún elemento que pertenece al conjunto Y
∀	"Para todo"	$\forall y \in Y$	Todos los elementos del conjunto Y
Ø	"conjunto vacío"	$A = \{Ø\}$	Conjunto A sin elementos
{...}	"Conjunto"	$A = \{a_1, a_2\}$	Conjunto A compuesto por elementos a_i
≡	"por definición"	x ≡ variable independiente	x es la variable independiente

1. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

1.1. TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1.1. Definición y notación de conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos.
Un conjunto se designa mediante letras mayúsculas.
Sus elementos se declaran entre corchetes.

Por ejemplo: $A = \{1,2,3\}$
$B = \{c, f, k\}$

1.1.2. Conjuntos de números

($\mathbb{N}$) Naturales Conjunto formado por los enteros positivos. NO INCLUYEN el 0.

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$$

($\mathbb{Z}$) Enteros Conjunto formado por los naturales, sus opuestos y EL CERO.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2 - 1 - ,0,1,2,\dots\}$$

($\mathbb{Q}$) Racionales Se pueden expresar como el cociente entre dos enteros, siempre que el divisor sea distinto de 0.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Irracionales No expresables vía cociente de enteros (ni decimal exacto ni periódico).
Se evita el uso de $\mathbb{I}$ para prevenir ambigüedad con Imaginarios.

$$irracionales = \{\sqrt{2}, \pi, e \dots\}$$

En ocasiones se usa $\mathbb{Q}^*$ para denotarlos, pero no hay una notación consolidada.

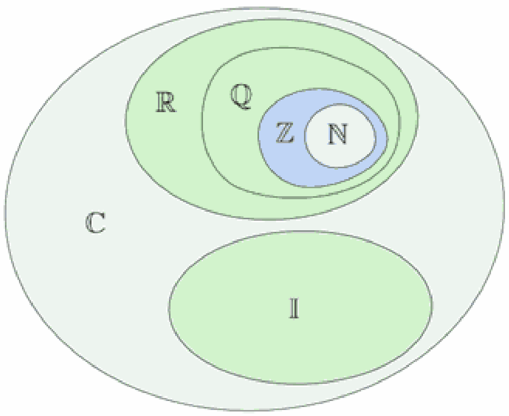
($\mathbb{R}$)$\mathbb{R}$eales Conjunto formado por los racionales y los irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \boldsymbol{Irracionales}$$

Imaginarios Conjunto formado por los complejos cuya parte real es nula.
Se evita el uso de $\mathbb{I}$ para prevenir ambigüedad con Irracionales.

$\mathbb{C}$omplejos Conjunto formado por los reales y los imaginarios.

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \boldsymbol{Imaginarios}$$



Cada conjunto está incluido en otro, hasta los complejos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \boldsymbol{Imaginarios}$$
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \boldsymbol{Irracionales}$$
$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \boldsymbol{fraccionarios}$$
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \boldsymbol{0} \cup \boldsymbol{Op}(\mathbb{N})$$

$$\mathbb{C}\quad \text{Complejos}\begin{cases}\mathbb{R}\quad \text{Reales}\begin{cases}\mathbb{Q}\quad \text{Racionales}\begin{cases}\mathbb{Z}\quad \text{Enteros}\begin{cases}\mathbb{N}\quad \text{Naturales}\begin{cases}1 & \text{Uno}\\ & \text{Primos}\\ & \text{Compuestos}\end{cases}\\ 0\quad \text{Cero}\\ \quad\ \ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\begin{cases}\text{Exactos}\\ \text{Periódicos}\begin{cases}\text{Puros}\\ \text{Mixtos}\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

Cada conjunto más complejo permite resolver un mayor abanico de tipos de ecuaciones:

$$x + 5 = 9 \rightarrow x = 4$$

$$x + 4 = 3 \rightarrow x = -1$$

$$3x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{3}$$

$$x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \in \boldsymbol{Irracionales}$$

$$x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1} \in \boldsymbol{imaginarios}$$

1.1.3. Cardinal # de un conjunto

Se denota como Card(A) = #A = número de elementos de un conjunto.

Por ejemplo: Para A = {a,b,c} → #A = 3

1.1.4. Secuencia de elementos de un conjunto

Una secuencia es una serie de elementos tal que:

- El orden de los elementos importa
- Admite repeticiones

Es decir: La secuencia $\langle a, f, h, g, h\rangle$ no es la misma que $\langle f, h, h, g, a\rangle$.

1.1.5. Conjunto C*

Se denota por C* al conjunto de secuencias finitas de elementos del conjunto C, incluyendo la secuencia vacía ⟨∅⟩.

1.1.6. Conjuntos equivalentes A = B

Dos conjuntos A y B son **EQUIVALENTES** si cumplen:

ºº

Nótense que cada conjunto incluye al otro y, por tanto, tienen el mismo cardinal:

$$\text{A} = \text{B} \Longrightarrow \#A = \#B$$

1.1.7. Partes de un conjunto P(A)

- Las partes de un conjunto A son el conjunto de las colecciones P(A) que hay en él, es decir, todos los **subconjuntos** que se pueden obtener en él forman P(A):

$$P(A) = \{ B \mid B \subseteq A\}$$

Todo subconjunto B es una parte de A siempre que B esté contenido en A.

- Nótese que las partes P(A) del conjunto A incluyen el propio conjunto A.

Por ejemplo, para un conjunto D:

$$D = \{1,2,3\}$$

$$P(D) = \{\{\emptyset\},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$$

- El conjunto vacío $\{\emptyset\}$ es PARTE DE CUALQUIER conjunto.

- Se calcula el NÚMERO DE PARTES de D, denotado como #P(D) como:

$$\#P(D) = Cardinal\ de\ P(D) = Card(P(D)) = 2^{\#D}$$

En este caso:

$$P(D) = 2^3 = 8$$

1.1.8. Operaciones con conjuntos

a) Unión ∪

Se representa como ∪ (se comporta como el operador disyunción "O" o "OR").
Un elemento pertenece a la unión de dos conjuntos si se encuentra AL MENOS EN UNO DE ELLOS.
Para la unión, se tomará, por tanto, todo elemento que aparezca en al menos alguno de los conjuntos unidos.

Ejemplo:

$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{4,2,5\}$$
$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

b) Intersección ∩

Se representa como ∩ (se comporta como el operador conjunción "Y" o "&").
Un elemento debe aparecer EN AMBOS conjuntos para pertenecer a la intersección.
Para la intersección, solo se toman los elementos comunes.

Ejemplo:

$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{4,2,5\}$$
$$A \cap B = \{2\}$$

c) Conjuntos disjuntos

Dos o más conjuntos son disjuntos si NO TIENEN elementos EN COMÚN. Cumplen:

$$A \cap B \ = \ \{\emptyset\} \rightarrow A \ y \ B \ son \ DISJUNTOS$$

Por ejemplo:
$A = \{1,2,3\}$
$B = \{4,5,6\}$
$A \cap B \ = \ \{\emptyset\}$

d) Espacio total E

Representa el conjunto de elementos que integran el universo considerado.
Por ejemplo, para un dado de 8 caras:

$$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

e) Conjunto complementario

Se representa como: $A' = A^C = \bar{A}$

Ejemplo:

Dado un espacio total E = {1,2,3,4,5,6} y el conjunto A = {1,2,3} se puede definir el complementario de A denotado por A^C como:

$$A^c = \{4,5,6\}$$

f) Tablas de verdad de operadores unión, intersección y complementario

- La unión es un operador de disyunción equivalente a "O" (or).
- La intersección es un operador de conjunción equivalente a "Y" (&).
- El complementario se comporta como el operador negación "NO" (NOT).

Se verifica en una tabla de verdad:

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

A	A^C
V	F
F	V

g) Leyes de De Morgan

- **Primera ley de De Morgan:**

  El complementario de la unión equivale a la intersección de complementarios:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

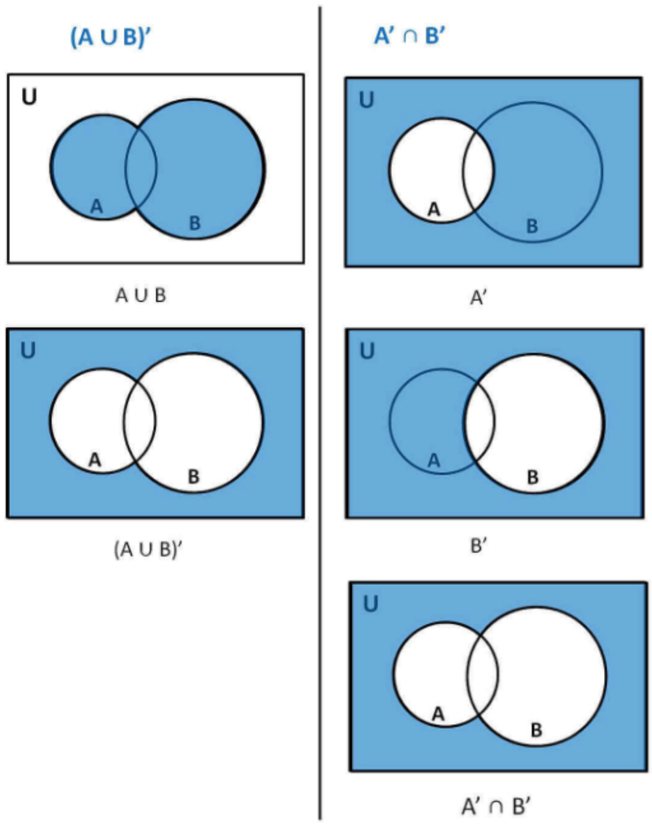
- **Segunda ley de De Morgan:**

  El complementario de la intersección equivale a la unión de complementarios:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

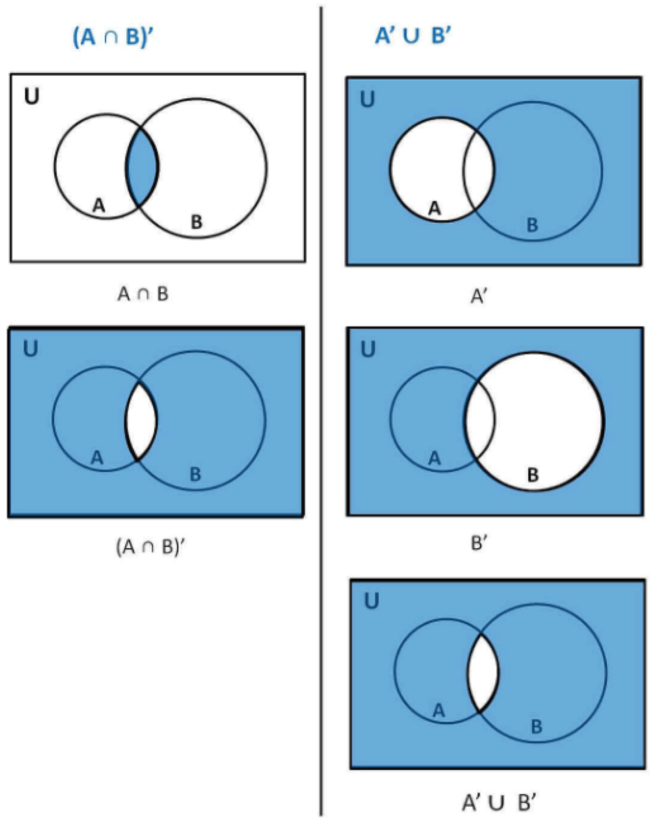
Se puede visualizar mediante un diagrama de Venn:

Se demuestra (A U B)' = A' ∩ B'



∴ (A ∪ B)′ = A′ ∩ B′

Se demuestra (A ∩ B)' = A' U B'



∴ (A ∩ B)'= A' ∪ B'

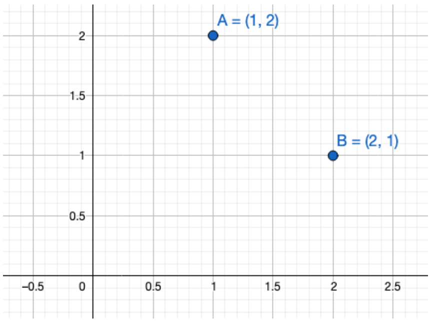
h) Producto cartesiano

El producto cartesiano entre dos conjuntos es la colección de pares ordenados formados por elementos de cada uno de los conjuntos. Es decir:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Es el conjunto de parejas **ordenadas** en que el primer elemento del par pertenece al primer conjunto y el segundo elemento pertenece al segundo conjunto.

Por tanto, el producto cartesiano **no es conmutativo**.
Ejemplo:



Se tiene: $A = \{1,2,3\}$
$B = \{a, b\}$

Entonces:

$$A \times B \ = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Que NO EQUIVALE a:

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2\}, (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Su definición geométrica permite evidenciar su carácter NO CONMUTATIVO (a la derecha).

1.2. RELACIONES

1.2.1. Definición de relación

El conjunto R es una relación de A en B si R se encuentra en las partes del conjunto definido por el producto cartesiano entre A y B. Es decir:

$$R\ es\ relación\ de\ A\ en\ B\ si\ R \in P(A \times B)$$

Por ejemplo:

Se tiene: $A = \{a, b, c\}$
$B = \{1,2,3\}$

Entonces, se define la relación R como el conjunto de partes:

$$R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 3)\}$$

R está BIEN DEFINIDA ya que todos sus elementos pertenecen a las partes de $A \times B$, que son:

$$P(A \times B) = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$$

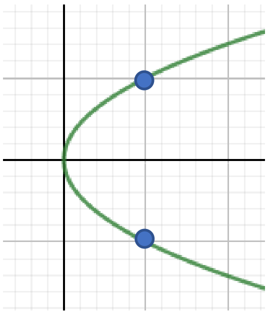
Esta relación informa de una correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos:

$$\begin{array}{l} \underline{A \rightarrow B} \\ a \rightarrow \ 1 \\ a \rightarrow \ 2 \\ b \rightarrow \ 1 \\ c \rightarrow \ 3 \end{array}$$

1.2.2. Definición de función

Una relación entre los conjuntos A y B es una función SOLO cuando cada elemento de A (conjunto de salida) está asignado, como máximo, a UN ÚNICO elemento de B (conjunto de llegada), es decir, de forma UNÍVOCA.

- Ejemplo de relación **NO FUNCIÓN**:



$f: A \rightarrow B$ Se define la relación f que da cuenta de la imagen de A en B, que se lee "F de A en B".

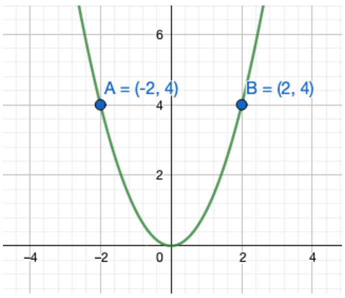
Se identifican 2 elementos concretos de la imagen B de A a través de F:

$f(1) = 1$
$f(1) = -1$

Esta relación NO ES una función, ya que un mismo elemento del conjunto A tiene 2 imágenes distintas en B, es decir, NO ES UNÍVOCA.

En una relación que SÍ ES UNA FUNCIÓN, un elemento del conjunto de origen A no puede tener imágenes distintas en el conjunto de origen, requiere del carácter UNÍVOCO de la relación.

- Ejemplo de relación **SÍ FUNCIÓN**:
-



$f(x) = y^2$
$f(2) = 4$
$f(-2) = 4$

Un elemento del conjunto de origen A tiene COMO MÁXIMO un único elemento asignado del conjunto de destino B, es decir, de forma UNÍVOCA.

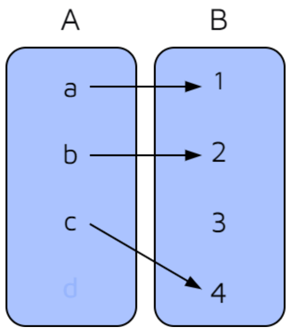
Nótese que, además, en este ejemplo, las imágenes de destino de dos elementos distintos del conjunto origen coinciden.

Cuando distintos elementos del conjunto de salida convergen en el conjunto de llegada, se dice que la función es NO INYECTIVA.
Esto no va en contra del carácter UNÍVOCO de la asignación entre A y B, que es lo que caracteriza una función.

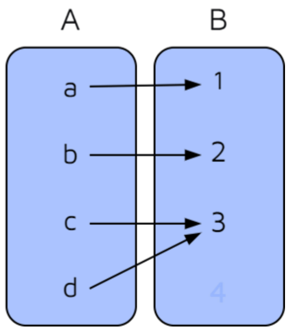
Cuando una función asigna UN ÚNICO elemento del conjunto de llegada B a cada uno de los elementos del conjunto de salida A, se dice que es INYECTIVA.

1.2.3. Clasificación de funciones

a) Función INYECTIVA



Función INYECTIVA



Función NO INYECTIVA

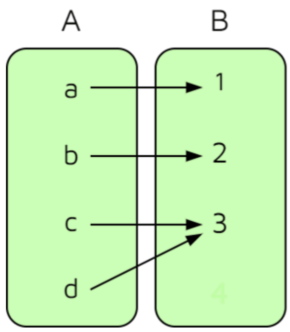
Es INYECTIVA una función si cualquier pareja de elementos del conjunto de origen presenta imágenes distintas en el conjunto de destino.

Es decir, una función INYECTIVA cumple:

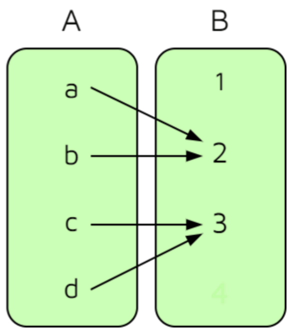
$$\forall x_1 \neq x_2 \in X \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

O sea, la asignación de elementos distintos de X no converge en el mismo elemento de Y.

b) Función SOBREYECTIVA (o EXHAUSTIVA)



Función EXHAUSTIVA



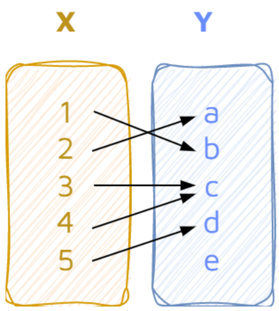
Función NO EXHAUSTIVA

Es SOBREYECTIVA o EXHAUSTIVA (o SUPRAYECTIVA) una función si cada elemento del conjunto de destino es imagen de algún elemento del conjunto de origen.

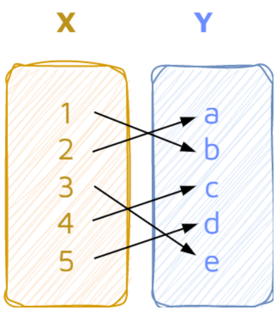
$$\forall y \in Y, \exists x \in X : \ f(x) = y$$

Todo elemento del conjunto Y resulta de la asignación de alguno del conjunto de origen X.

c) Función BIYECTIVA



Función NO BIYECTIVA



Función BIYECTIVA

Es BIYECTIVA una función que cumple 2 condiciones DE FORMA SIMULTÁNEA:

- Es INYECTIVA.
- Es SUPRAYECTIVA.

El carácter BIYECTIVO, comporta:

$$\#X = \#Y$$

Lo anterior conlleva que:

- Todo elemento del conjunto de destino resulta de asignar un elemento del conjunto origen.
- Cada elemento del conjunto de origen se asigna a un ÚNICO elemento del conjunto de destino.

1.2.4. Cálculo de número de funciones

Se consideran 2 conjuntos, uno de salida A y otro de llegada B, cuyos cardinales son, respectivamente, #A = m y #B = n.

Se define una relación entre ambos conjuntos en forma de función:

$$f: A_m \rightarrow B_n$$

Donde:

$$A_m = conjunto\ de\ salida\ A \qquad \#A = m$$
$$B_n = conjunto\ de\ llegada\ B \qquad \#B = n$$

La cantidad de funciones #f que se pueden establecer entre ambos conjuntos depende del carácter de esas funciones, de acuerdo con:

$$\#funciones\ cualesquiera = n^m$$

$$\#funciones\ inyectivas = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$\#funciones\ biyectivas = n!$$

Donde:

$$m = \#A\ (conjunto\ de\ salida)$$
$$n = \#B\ (conjunto\ de\ llegada)$$

1.2.5. Relación entre cardinales de conjuntos y tipos de funciones que los relaciona

Se cumple:

- Si $\#A \leq \#B$ $(m \leq n)$ entonces $f: A_m \rightarrow B_n$ es INYECTIVA
- Si $\#A \geq \#B$ $(m \geq n)$ entonces $f: A_m \rightarrow B_n$ es SUPRAYECTIVA
- Si $\#A = \#B$ $(m = n)$ entonces $f: A_m \rightarrow B_n$ es BIYECTIVA

1.3. COMBINATORIA

La combinatoria estudia la agrupación de elementos en función de si importa su orden y si hay repeticiones de elementos.

1.3.1. Factorial

Para un número natural n, se define n! (leído como “factorial de n” o “m factorial”) al producto de m por cada uno de los números naturales menores que m. Es decir:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Es relevante notar que:

$$1! = 1$$
$$0! = 1$$

Lo anterior se desprende de:

$$n! = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{(n-1)!}$$

Y se demuestra por inducción.

1.3.2. Número combinatorio

Para un par de números naturales n y k, tales que k ≤ n se define el número combinatorio “n sobre k” como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Se destacan las siguientes propiedades:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
4. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

En la calculadora CASIO fx-991SPX II Iberia, para calcular el número combinatorio:

n , SHIFT , DIVIDIR , k En la pantalla se v:

Por ejemplo: $\binom{9}{6}$ se opera como 9C6 y resulta en 84.

1.3.3. Variaciones

Son agrupaciones ORDENADAS de los elementos de un conjunto.

Si se tienen m elementos, se toman n de entre ellos (n > k), de forma que:
→ IMPORTA EL ORDEN.
→ NO HACEN FALTA TODOS los elementos.

a) Variaciones sin repetición

Si se tienen n objetos, se toman k de entre ellos, de forma que:
- → Importa el ORDEN.
- → NO hacen falta TODOS los elementos.
- → NO admite REPETICIÓN.

El número de VARIACIONES SIN REPETICIÓN es:

$$\#Variaciones_{sin\ repetción} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Es decir, k factores decrecientes desde n.

b) Variaciones con repetición

Si se tienen n objetos, se toman k de entre ellos, de forma que:
- → Importa el ORDEN.
- → NO hacen falta TODOS los elementos.
- → SÍ admite REPETICIÓN.

El número de VARIACIONES CON REPETICIÓN es:

$$\#Variaciones_{con\ Repetición} = n^k$$

1.3.4. Permutaciones

Son las ORDENACIONES de TODOS los elementos de un conjunto.

Si se tienen n objetos, se toman TODOS ellos (n = k), de forma que:
- → IMPORTA EL ORDEN.
- → SÍ HACEN FALTA TODOS los elementos.

a) Permutaciones sin repetición

Se tienen n objetos, se toman TODOS ellos de forma que:
- → IMPORTA EL ORDEN.
- → SÍ HACEN FALTA TODOS los elementos.
- → SIN REPETICIÓN.

El número de PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN es:

$$\#Permutaciones = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

b) Permutaciones con repetición

Se tienen n objetos, se toman TODOS ellos de forma que:
→ IMPORTA EL ORDEN.
→ SÍ HACEN FALTA TODOS los elementos.
→ CON REPETICIÓN.

El número de PERMUTACIONES CON REPETICIÓN es:

$$PR_k^{r_1, r_2, r_3 \dots} = \frac{k!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \dots}$$

1.3.5. Combinaciones

Son los subconjuntos NO ordenados de n elementos tomados de k en k de forma que:
→ NO IMPORTA EL ORDEN.
→ NO HACEN FALTA TODOS los elementos.

a) Combinación sin repetición

Se toman n elementos agrupados de k en k de forma que:
→ NO IMPORTA EL ORDEN.
→ NO HACEN FALTA TODOS los elementos.
→ NO ADMITE REPETICIÓN.

El número de COMBINACIONES SIN REPETICIÓN es:

$$\#Combinaciones\ \text{sin}\ repetición = \binom{n}{k} = \frac{Variaciones\ de\ n\ elementos\ tomados\ de\ k\ en\ k}{permutaciones\ de\ k\ elementos}$$

Es decir:

$$\#Combinaciones\ \ \text{sin}\ repetición = \binom{n}{k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Donde $\binom{n}{k}$ se denomina NÚMERO COMBINATORIO y se lee “n sobre k”.

También se puede escribir de otras 2 formas:

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = C_n^k$$

b) Combinación con repetición

Se toman n elementos agrupados de k en k de forma que:

→ NO IMPORTA EL ORDEN.
→ NO HACEN FALTA TODOS los elementos.
→ SÍ ADMITE REPETICIÓN.

El número de COMBINACIONES CON REPETICIÓN es:

$$CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

1.3.6. Expresiones de combinatoria

Existen 6 posibles modelos de agrupación:

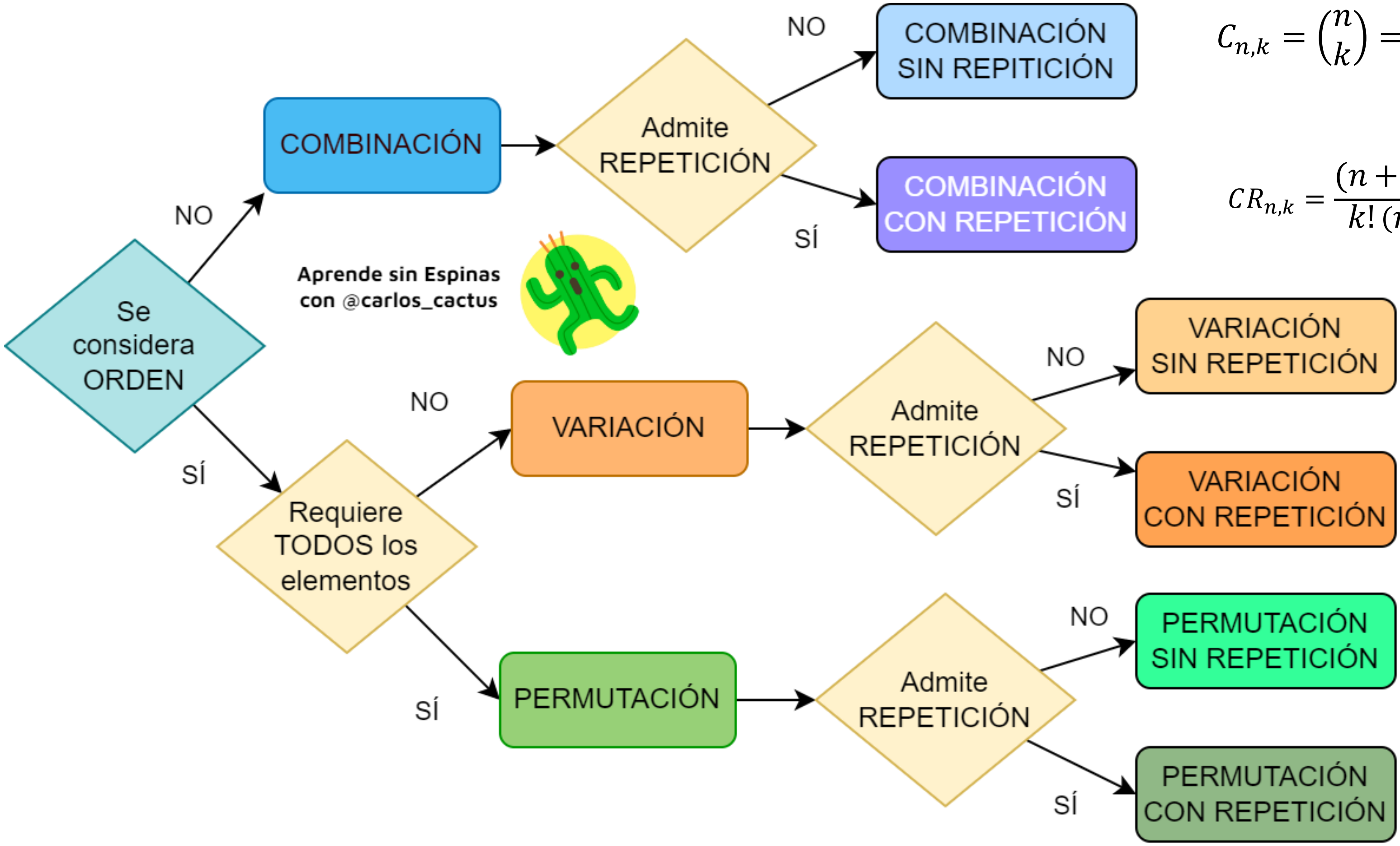
<table>
<tr><td rowspan="2">AGRUPACIONES
6 modelos posibles</td><td colspan="2">$n = \text{número de elementos disponibles}$
$k = \text{número de elementos que agrupamos}$</td></tr>
<tr><td>Sí importa el orden
(variaciones y permutaciones)</td><td>No importa el orden
(combinaciones)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sin repetición</td><td>$Si\ n \neq k \rightarrow Variaciones$
$V_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}_{k\ veces} = \frac{n!}{(n-k)!}$</td><td rowspan="2">$Combinaciones$ sin $repetición$:
$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{V_{n,k}}{P_k}$</td></tr>
<tr><td>$Si\ n = k \rightarrow Permutaciones$
$P_k = k!$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Con repetición</td><td>$Si\ n \neq k \rightarrow Variaciones\ con\ repetición$
$VR_{n,k} = n^k$</td><td rowspan="2">$Combinaciones\ con\ repetición$:
$CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$</td></tr>
<tr><td>$Si\ n = k \ \rightarrow\ Permutaciones\ con\ repetición$
$PR_k^{r_1,r_2,r_3 \ldots} = \frac{k!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \ldots}$</td></tr>
</table>

¡Este APLICATIVO DE GEOGEBRA creado por Adrián Martín ES FANTÁSTICO!

GRAFOS SIN ESPINAS
1 – Fundamentos Matemáticos

1.3.7. Síntesis expresiones de combinatoria

Por tanto, ante una situación problemática, basta con hacerse 3 preguntas:



$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}_{k\ veces}$$

$$VR_{n,k} = n^k$$

$$P_k = k!$$

$$PR_k^{r_1,r_2,r_3\ldots} = \frac{k!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \ldots}$$

GRAFOS SIN ESPINAS
1 – Fundamentos Matemáticos

¿Importa el orden?		¿Requiere TODOS los elementos?		Tipo	¿Admite repetición?			
¿Importa el orden?	NO importa orden			Combinación • NO importa orden • NO requiere TODOS los elementos	¿Admite repetición?	NO hay repetición	• NO importa orden • NO requiere todos • NO repetición	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{V_{n,k}}{P_k}$
						SÍ hay repetición	• NO importa orden • NO requiere todos • SÍ repetición	COMBINACIÓN CON REPETICIÓN $CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$
	SÍ importa orden	¿Requiere TODOS los elementos?	NO requiere TODOS los elementos $k \neq n$	Variación • SÍ importa orden • NO requiere todos	¿Admite repetición?	NO hay repetición	• SÍ importa orden • NO requiere todos • NO repetición	VARIACIÓN SIN REPETICIÓN $V_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots}_{k\ veces}$
						SÍ hay repetición	• SÍ importa orden • NO requiere todos • SÍ repetición	VARIACIÓN CON REPETICIÓN $VR_{n,k} = n^k$
			SÍ requiere TODOS los elementos $k = n$	Permutación • SÍ importa orden • SÍ requiere todos	¿Admite repetición?	NO hay repetición	• SÍ importa orden • SÍ requiere todos • NO repetición	PERMUTACIÓN SIN REPETICIÓN $P_k = k!$
						SÍ hay repetición	• SÍ importa orden • SÍ requiere todos • SÍ repetición	PERMUTACIÓN CON REPETICIÓN $PR_k^{r_1,r_2,r_3\ldots} = \frac{k!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \ldots}$

1.3.8. EJEMPLOS

Esta calculadora online de estadisticaparatodos.es es MUY CLARA :)

a) Ejemplo 1 : Variación sin repetición

Es fiesta mayor y vamos a la feria. Somos 7 personas en el grupo de amigos, pero en las vagonetas de "La Rana Loca" solo caben 4 personas. ¿De cuántas maneras podemos organizarnos para que unos suban y otros saluden?

1. Se considera m = 7 y n = 4
2. Se identifica el modelo de agrupación:

- ¿Importa el orden en que se sientan?

  Sí importa, porque una combinación se define por CUÁL persona se sienta en CUÁL asiento de la vagoneta.
  → NO ES COMBINACIÓN

- ¿Requiere todos los elementos?

  No, ya que, de las 10 personas, solo se asignan 4. Mala suerte a los otros.
  → NO ES PERMUTACIÓN

  Por tanto, es VARIACIÓN

- ¿Hay repeticiones?
  No, porque cada persona solo puede sentarse en un asiento a la vez. No hay clones metafísicos en el grupo.

Por tanto, se pide una VARIACIÓN SIN REPETICIÓN de 7 elementos tomados de 4 en 4:

$$V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840\ variaciones$$

b) Ejemplo 2 : Variación con repetición

¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden construir usando exclusivamente las cifras 8 y 7?

Para calcularlo, basta con calcular las variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k. Es decir:

$$VR_{n,k} = n^k$$

En este caso, 2 elementos, tomados de 3 en 3:

$$VR_{2,3} = 2^3 = 8\ variaciones$$

Los números son: 777 778 787 877 788 878 887 888

c) Ejemplo 3 : Variación sin repetición vs. Variación con repetición

En un torneo de cocina con 12 participantes, se reparten 3 trofeos. ¿De cuántas formas puede hacerse?

a. Si los premios son todos diferentes.
b. Si los premios son todos iguales.

Se sabe que m = 12 participantes y n = 3 trofeos.
Es decir, m ≠ n de modo que NO SE TRATA DE PERMUTCACIONES.

Se desconoce:

- Si los trofeos son para una sola categoría o para varias categorías.
- Si hay varios trofeos para una misma categoría.

Por ejemplo, no se sabe si son "primer premio", "segundo premio" y "tercer premio" o son "al espíritu culinario", "al mejor acompañamiento" o "al mejor postre".

Si consideramos AMBOS factores, se tienen varios casos (alguno de los cuales carece de sentido práctico):

- Si solo se PUEDE RECIBIR UN ÚNICO PREMIO — No hay repetición
  - Si SÍ importa el orden (hay 1º, 2º y 3º) — VARIACIÓN SIN REPETICIÓN
  - Si NO importa el orden (ganar 1 categoría...) — COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN

- Si se PUEDE RECIBIR MÁS DE UN PREMIO — Sí hay repetición
  - Si SÍ importa el orden (**carece de sentido**) — VARIACIÓN CON REPETICIÓN
  - Si NO importa el orden (ganar k categorías) — COMBINACIÓN CON REPETICIÓN

CASO 1) ASUMIENDO que cada persona SOLO puede recibir UN premio.

Se consideran las 2 situaciones:

a. Si los premios son diferentes (hay 1º, 2º y 3º):

- Importa el orden → Se trata de una VARIACIÓN.

  (n < m o sea, no intervienen todos los elementos: hay participantes que se quedan sin).

- No hay repetición (lo hemos asumido así: solo un premio por persona).

  → Es VARIACIÓN SIN REPETICIÓN con m = 12 participantes y n = 3 trofeos para asignar:

$$V_{m,n} = V_{12,3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \; = \; 1320 \, formas$$

b. Si los premios son iguales (no hay 1º, º ni 3º, solo categorías):

- No importa el orden → Se trata de una COMBINACIÓN.
- No hay repetición (lo hemos asumido así: solo un premio por persona)

→ Es una COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN con m = 10 participantes y n = 3 premios:

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 9!} = \frac{1320}{6} = 220\ formas$$

CASO 2) ASUMIENDO que cada persona puede recibir MÁS DE UN premio:

Se consideran 2 casos:

a. Si los premios son diferentes (hay 1º, 2º y 3º):

- Importa el orden → VARIACIÓN

  (n < m → no intervienen todos los elementos)

- Sí hay repetición (lo hemos asumido así: se puede tener más de uno)

  → Se trata de una **VARIACIÓN CON REPETICIÓN**:

$$VR_{10,3} = 10^3 = 1000\ formas$$

b. Si los premios son iguales (no hay 1º, 2º ni 3º sino solo categorías):

- No importa el orden → Es una COMBINACIÓN
- Sí hay repetición (lo hemos asumido así):

  Se trata de una **COMBINACIÓN CON REPETICIÓN:**

$$CR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!}$$

$$CR_{12,3}\binom{12}{3} = \frac{(12+3-1)!}{3!\cdot(12-1)!} = \frac{14!}{3!\cdot 11!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11!}{6\cdot 11!} = \frac{156}{6} = 26$$

O sea, 26 combinaciones con repetición.

d) Ejemplo 4 : Permutación sin repetición

¿Cuántos números de 3 cifras distintos se pueden escribir con los dígitos 4, 6 y 8?

Se tiene que m = 3 elementos disponibles (4, 6 y 8) y n = 3 cifras en cada número.
Por tanto, m = n = 3.

Basta con calcular:

$$P_n = n! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6\ números\ distintos$$

e) Ejemplo 5 : Permutación con repetición

¿Cuántas vocablos, estén o no estén en el diccionario (en el diccionario que sea, es decir, aunque no tengan significado alguno), se pueden formar con las letras que forman la palabra KROATOAN?

Se trata de una PERMUTACIÓN ya que utiliza todos los elementos y ADMITE REPETICIÓN, ya que la A y la O aparecen 2 veces. Por tanto, se aplica:

$$PR_n^{r_1,r_2,r_3 \dots} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \dots}$$

En este caso:

$$PR_8^{2,2} = \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 1080\ vocablos$$

f) Ejemplo 6 : Combinación sin repetición

En un sorteo de lotería se premia una combinación que contenga 6 números salidos de un bombo en que se encuentran 49 bolas todas ellas con números distintos. El premio no considera el orden: la serie ganadora no es una secuencia ordenada.

¿Cuántas combinaciones ganadoras hay?

La agrupación es una COMBINACIÓN ya que NO IMPORTA EL ORDEN.
Además, NO se admite REPETICIÓN: cuando un número sale, no se devuelve al bombo.

Por tanto, basta con calcular:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{V_{n,k}}{P_k}$$

En este caso:

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!}$$

Operando:

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!}$$

$$C_{49,6} = 13983816$$

Alternativamente:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{V_{49,6}}{P_6} = \frac{\overbrace{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}^{6\ veces}}{6!}$$

$$C_{49,6} = 13983816\ combinaciones\ ganadoras$$

g) Ejemplo 7 : Combinación con repetición

Se desea conocer cuántos resultados distintos se pueden obtener de sacar 4 cartas de una baraja de 40 cartas, si no importa para el resultado el orden en que se obtengan y después de cada extracción se DEVUELVE a la baraja la carta que ha salido.

→ NO importa el orden, por tanto, es una COMBINACIÓN.
→ Se admite la repetición, ya que hay RECAMBIO en el experimento, es decir, tras cada extracción, se devuelve la carta que ha salido a la baraja.

Para calcular cuántas combinaciones CON REPETICIÓN hay para 40 cartas tomadas de 4 en 4, se calcula una combinación SIN REPETICIÓN de 40 + 4 – 1 elementos tomados de 4 en 4.

Es decir:

$$CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

En este caso:

$$CR_{40,4} = \frac{(40+4-1)!}{4! \cdot (40-1)!} = \frac{43!}{4! \cdot 39!} = \frac{43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39!}{24 \cdot 39!} = 123410$$

1.4. COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE ALGORITMOS

En el cálculo del coste computacional de un algoritmo es útil considerar su COMPLEJIDAD.

La complejidad de un algoritmo se expresa mediante la Notación de Landau, que representa el tipo de cota asintótica de funciones.

1.4.1. Escala de complejidad

Clasificación de algoritmos según su complejidad CRECIENTE en "O mayúscula"

MENOR COMPLEJIDAD

$O(I)$	Complejidad constante
$O(log\ n)$	Complejidad logarítmica
$O(n)$	Complejidad lineal
$O(n \cdot logn)$	Complejidad cuasi lineal
$O(n^2)$	Complejidad cuadrática
$O(n^3)$	Complejidad cúbica
$O(n^k)$	Complejidad polinomial
$O(c^n)$	Complejidad exponencial

MAYOR COMPLEJIDAD

1.4.2. Ejemplo 1 : uso de escala de complejidad

Dadas una serie de funciones de coste computacional de diversos algoritmos, se desea ordenarlas de menor a mayor complejidad. Las funciones son:

$f(n) = 5n^3$
$f(n) = 15n \cdot \log n$
$f(n) = 3^n$
$f(n) = 22n$
$f(n) = 11n^2$

Entonces:

$f(n) = 5n^3$	$\subset O(n^3)$	cúbica
$f(n) = 15n \cdot \log n$	$\subset O(n \cdot \log n)$	cuasi lineal
$f(n) = 3^n$	$\subset O(c^n)$	exponencial
$f(n) = 22n$	$\subset O(n)$	lineal
$f(n) = 11n^2$	$\subset O(n^2)$	cuadrática

Ordenadas de menor a mayor complejidad, se tiene:

$f(n) = 22n$	$f(n) = 15n \cdot \log n$	$f(n) = 11n^2$	$f(n) = 5n^3$	$f(n) = 3^n$
Lineal	cuasi lineal	cuadrática	cúbica	exponencial