# Solució examen 17/01/15

**Exercici 1**

a) Troba el resultat de la següent expressió:

$$(3i+1)^2\cdot\left(\frac{i^{17}+3i^4}{1-i}+\frac{i^{11}+i^2}{1+i}\right)$$

b) Calcula: $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$ (proporciona els resultats en forma polar)

NOTA: $arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)=330^{\circ}$

**Resolució:**

a) Operem l´expressió de l´enunciat, recordant, tal com s´explica en el requadre gris de la pàgina 17, que $i^2=-1$. Per tant: $i^{17}=i$, $i^4=1$ i $i^{11}=i^3=-i$

$$(3i+1)^2\cdot\left(\frac{i^{17}+3i^4}{1-i}+\frac{i^{11}+i^2}{1+i}\right)=(9i^2+6i+1)\left(\frac{i+3}{1-i}+\frac{-i-1}{1+i}\right)=(-9+6i+1)\cdot\left(\frac{3+i}{1-i}+\frac{-i-1}{1+i}\right)=$$

$$=(-8+6i)\left(\frac{(3+i)\cdot(1+i)-(1+i)\cdot(1-i)}{1-i^2}\right)=(-8+6i)\cdot\left(\frac{3+3i+i-1-(1+1)}{2}\right)=(-8+6i)\cdot\frac{4i}{2}=$$

$$=\frac{-32i-24}{2}=-12-16i$$

**Per tant:**

$$\boxed{(3i+1)^2\cdot\left(\frac{i^{17}+3i^4}{1-i}+\frac{i^{11}+i^2}{1+i}\right)=-12-16i}$$

b) Escrivim el complex $\sqrt{3}-i$ en forma polar tal com s´explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$$

$$\alpha=arctg\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=330^{\circ}$$

Observem que ni sumem ni restem cap angle ja que la part real del complex és positiva (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}=\sqrt[4]{2_{330^{\circ}}}$

Com que ens demanen les arrels quartes hem de fer (observem que a l´apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[4]{2_{330^o}} = \sqrt[4]{2}_{\frac{330^o+360^o k}{4}}$ per a k=0, 1, 2, 3

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[4]{2}$

Els arguments de les arrels són $\beta = \dfrac{330^o+360^o k}{4}$ per a k=0, 1, 2, 3

- Si k=0, tenim que $\beta_0 = 82{,}5^o = 82^o30'$
- Si k=1, tenim que $\beta_1 = 82{,}5^o+90^o = 172{,}5^o = 172^o30'$
- Si k=2, tenim que $\beta_2 = 82{,}5^o+180^o = 262{,}5^o = 262^o30'$
- Si k=3, tenim que $\beta_3 = 82{,}5^o+270^o = 352{,}5^o = 352^o30'$

Per tant, les quatre arrels quartes del complex $\sqrt{3}-i$ són:

$$\boxed{\sqrt[4]{2}_{82{,}5^o}}$$

$$\boxed{\sqrt[4]{2}_{172{,}5^o}}$$

$$\boxed{\sqrt[4]{2}_{262{,}5^o}}$$

$$\boxed{\sqrt[4]{2}_{352{,}5^o}}$$

**Exercici 2**

Siguin A i B els subespais de $R^3$ generats pels conjunts de vectors següents:

$A = <(0,1,0),(0,1,1),(0,a^2-1,-a)>$, $a \in R$

$B = <(0,-1,0),(0,0,2)>$

a) Troba la dimensió d'A en funció d'*a*. Troba la dimensió de B. Troba una base per cada subespai.

b) Determina si el vector v=(0,0,4) pertany o no a A i a B. En cas que hi pertanyi, calcula'n les coordenades en les bases de l'apartat anterior.

c) Generen A i B el mateix subespai vectorial? Si és que sí, troba la matriu de canvi de base d'A a B. Comproveu també que la matriu que heu trobat efectivament transforma les coordenades de v en A en les coordenades de v en B i que obteniu el mateix resultat que a l'apartat anterior.

**Resolució:**

**a)** Calculem els rangs de les matrius:

Per A: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a^2-1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = 0$ però trobem el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió d'A és 2 per a tot $a$. Com a base podríem usar els dos primers vectors que són linealment independents (ja que contenen el menor anterior): $Base-A=\{(0,1,0),(0,1,1)\}$

Per B: Podem trobar el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Així la dimensió de B és 2 i com a base podríem usar els dos vectors amb els quals està definit: $Base-B=\{(0,-1,0),(0,0,2)\}$

**b)** Per al subespai A i usant la base trobada en l'apartat i), podem plantejar el sistema:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 0=0 \\ x+y=0 \\ y=4 \end{cases}$ que té per solució: x=-4, y=4. Així doncs $v \in A$ i les seves coordenades són (-4,4).

Per al subespai B i usant la base trobada en l'apartat i), podem plantejar el sistema:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ que ens dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 0=0 \\ -x=0 \\ 2y=4 \end{cases}$ que té per solució: x=0, y=2. Així doncs $v \in B$ i les seves coordenades són (0,2).

**c)** Per comprovar si generen el mateix subespai vectorial, com que sabem que la dimensió dels dos és igual, n'hi haurà prou amb comprovar que un és dins de l'altre. Per exemple comprovant si una base d'A pertany a B.

Així per a (0,1,0) de la base d'A:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que té per solució x=-1, y=0 i per tant $(0,1,0) \in B$

Així per a (0,1,1) de la base d'A:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que té per solució x=-1, y=1/2 i per tant $(0,1,1) \in B$

Per tant A i B generen el mateix subespai vectorial.

Per a calcular la matriu de canvi de base d'A a B, posarem els vectors de la base d'A com a combinació lineal dels de la base de B. Això ho acabem de resoldre, per tant:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

I podem comprovar el resultat de l'apartat anterior fent:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Exercici 3**

Sigui el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} mx - y & = & m \\ 3x + (m-4)y & = & m+2 \end{cases}$$

amb $m \in \mathbb{R}$.

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre $m$.
b) Resoleu el sistema en aquells casos que el sistema sigui compatible.

**Resolució:**

a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, A', associades al sistema són:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & m \\ 3 & m-4 & m+2 \end{array}\right)$$

$$rang(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3).$$

- Cas I: Si $m \neq 1, 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2 = rang(A') =$ nombre d'incògnites i per tant el sistema és Compatible Determinat.
- Cas II: Si $m = 1$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

i per tant tenim $rang(A) = rang(A') = 1$ i aleshores el sistema és Compatible Indeterminat amb (2-1=1) 1 grau de llibertat.

- Cas III: Si $m = 3$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

que correspon clarament a un sistema incompatible ja que la primera equació demana $3x - y = 3$, mentre que la segona demana $3x - y = 5$.

En resum:

Si $m \neq 1, 3$, el sistema és Compatible Determinat
Si $m = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat
Si $m = 3$, el sistema és Incompatible.

b) Hem de trobar la solució per als casos I: $m \neq 1, 3$ i II: $m = 1$.

Cas I: $m \neq 1, 3$

Com que la matriu de coeficients és quadrada i $|A| \neq 0$, podem resoldre directament el sistema pel mètode de Cràmer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ m+2 & m-4 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - 4m + m + 2}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - 3m + 2}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m-1)(m-3)} = \frac{m-2}{m-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m \\ 3 & m+2 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 + 2m - 3m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2 - m}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m}{m-3}.$$

Per tant, per a cada valor de $m \neq 1, 3$ el punt solució del sistema és $\boxed{\left(\frac{m-2}{m-3}, \frac{m}{m-3}\right)}$.

Cas II: $m = 1$

En aquest cas el sistema queda reduït a una única equació $x - y = 1$, ja que la segona equació queda múltiple de la primera.

Els punts solució del sistema són de la forma $\boxed{(x, x-1)}$.

**Exercici 4**

Siguin A=(0,0), B=(1,0) i C=(0,1).

a) Sigui $g$ el gir de $\pi/2$ radians en sentit antihorari des del punt (1,1). Trobeu g(A), g(B) i g(C).

b) Sigui $f$ l'escalatge uniforme de raó $a$ des del punt (0,0). Calculeu f(A), f(B) i f(C). Qui ha de ser $a$ per tal que el triangle format per f(A), f(B) i f(C) contingui al triangle format per g(A), g(B) i g(C)?

**Resolució:**

**a)** Per a fer un gir g de $\pi/2$ radians des del punt (1,1), primer fem la translació que porta el (1,1) a l'origen *(veure apunts M6, Notació matricial eficient)*:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Després fem el gir de $\pi/2$ radians des de l'origen i en sentit antihorari:

$$G = \begin{pmatrix} cos(\pi/2) & -sin(\pi/2) & 0 \\ sin(\pi/2) & cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Després desfem la translació

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Composant les tres transformacions, obtenim g, el gir de $\pi/2$ radians des del punt (1,1):

$$g = T^{-1}GT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a obtenir les imatges dels punts A=(0,0), B=(1,0) i C=(0,1) pel gir $g$ fem:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, g(A)=(2,0), g(B)=(2,1) i g(C)=(1,0).

**b)** La matriu de l'escalatge $f$ de raó $a$ és *(veure apunts M6,Notació matricial eficient)*:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a obtenir les imatges dels punts A=(0,0), B=(1,0) i C=(0,1) per l'escalatge *f* fem:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenim doncs f(A)=(0,0), f(B)=(a,0) i f(C)=(0,a). Per a que el triangle format per f(A), f(B) i f(C) contingui el triangle format per g(A), g(B) i g(C), necessitem que *a* sigui com a mínim 3.