

Solució examen 24-01-2015

Exercici 1.

a) Siguin $z_1 = 3 - 2i$ i $z_2 = 2 + i$. Troba el valor de l'expressió següent i simplifica-la al màxim:

$$\frac{2z_1 + z_2 - 5 - i}{2z_2 - z_1 + 3 - i}$$

b) Resol l'equació: $z^4 + 16 = 0$, amb z complex (proporciona els resultats en forma polar)

NOTA: $\arctg 0 = 0^\circ$

Resolució:

a) Operem l'expressió de l'enunciat, recordant, tal com s'explica al requadre gris de la pàgina 17, que $i^2 = -1$:

$$\frac{2z_1 + z_2 - 5 - i}{2z_2 - z_1 + 3 - i} = \frac{2(3 - 2i) + (2 + i) - 5 - i}{2(2 + i) - (3 - 2i) + 3 - i} = \frac{6 - 4i + 2 + i - 5 - i}{4 + 2i - 3 + 2i + 3 - i} = \frac{3 - 4i}{4 + 3i}$$

Per eliminar el complex del denominador multipliquem i dividim pel conjugat del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{2z_1 + z_2 - 5 - i}{2z_2 - z_1 + 3 - i} &= \frac{2(3 - 2i) + (2 + i) - 5 - i}{2(2 + i) - (3 - 2i) + 3 - i} = \frac{6 - 4i + 2 + i - 5 - i}{4 + 2i - 3 + 2i + 3 - i} = \frac{3 - 4i}{4 + 3i} = \\ &= \frac{(3 - 4i) \cdot (4 - 3i)}{(4 + 3i) \cdot (4 - 3i)} = \frac{12 - 9i - 16i + 12i^2}{16 - 9i^2} = \frac{-25i}{25} = -i \end{aligned}$$

Per tant:

$$\frac{2z_1 + z_2 - 5 - i}{2z_2 - z_1 + 3 - i} = -i$$

b) Aïllem la incògnita de l'equació:

$$z^4 + 16 = 0 \rightarrow z^4 = -16 \rightarrow z = \sqrt[4]{-16}$$

Escrivim el complex -16 en forma polar tal com s'explica a l'apartat 3.4, pàgina 27 del material imprès, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$$m = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{0}{-16}\right) + 180^\circ = 0^\circ + 180^\circ = 180^\circ$$

Àlgebra/ Matemàtiques I

Observem que podem sumar o restar 180° donat que la part real és negativa i la part imaginària del complex és 0 (apartat 3.4.1 de la pàgina 30 del material imprès).

Tenim, per tant, que $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}}$

Com que ens demanen les arrels quarts hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material imprès es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{4}} \text{ per a } k=0, 1, 2, 3$$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = 2$

Els arguments de les arrels són $\beta = \frac{180^\circ+360^\circ k}{4}$ per a $k=0, 1, 2, 3$

- Si $k=0$, tenim que $\beta_0 = 45^\circ$
- Si $k=1$, tenim que $\beta_1 = 45^\circ+90^\circ=135^\circ$
- Si $k=2$, tenim que $\beta_2 = 45^\circ+180^\circ=225^\circ$
- Si $k=3$, tenim que $\beta_3 = 45^\circ+270^\circ=315^\circ$

Per tant, les quatre solucions de l'equació $z^4 + 16 = 0$ són:

$$2_{45^\circ}$$

$$2_{135^\circ}$$

$$2_{225^\circ}$$

$$2_{315^\circ}$$

Exercici 2

Donats els conjunts de vectors de \mathbb{R}^3 :

$$A = \{ (a, 0, 0), (a, a, 0), (a, a, a) \}.$$

$$B = \{ (a, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, a) \}.$$

- Trobeu els valors d' a per a que A i B siguin base de \mathbb{R}^3 . Si $a=1$ trobeu les coordenades del vector $v=(3,2,1)$ en cada una de les bases.
- Calcula la matriu de canvi de base d' A a B per $a=1$. Comproveu també que la matriu que heu trobat efectivament transforma les coordenades de v en A en les coordenades de v en B i que obteniu el mateix resultat que a l'apartat anterior.

Àlgebra/ Matemàtiques I

Resolució:

a) Calculem el rang de la matriu de vectors de l'espai A:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$$

Així per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 3 i per tant són base de \mathbb{R}^3 .

Fem el mateix per a l'espai B:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2$$

Així que de nou per $a \neq 0$ el rang de la matriu és 3 i per tant són base de \mathbb{R}^3 .

Així doncs tant A com B quan $a \neq 0$ formen una base de \mathbb{R}^3 .

Per a calcular les coordenades de v en A quan $a=1$ resollem el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x=1, y=1, z=1$. Per tant les coordenades de v en A quan $a=1$ són (1,1,1).

Per a calcular les coordenades de v en B quan $a=1$ resollem de forma anàloga el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x=3, y=-1, z=-2$. Per tant les coordenades de v en A quan $a=1$ són (3,-1,-2).

b) Per trobar la matriu de canvi de base C hem de resoldre $C=B^{-1}A$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Àlgebra/ Matemàtiques I

Calculem primer la inversa de la matriu B

$$B^{-1} = \frac{(\text{adj}(B))^t}{|B|}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podem trobar ara ja la matriu de canvi de base.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara comprovem els resultats de l'apartat anterior i veiem que efectivament transforma les coordenades de v en A en les coordenades de v en B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exercici 3.

Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - az = -3 \\ 2x + (a-5)y + z = 4a + 2 \\ 4x + (a-1)y - 3z = 4 \end{array} \right\}$$

- Calculeu els valors del paràmetre a perquè el sistema no sigui compatible determinat.
- Hi ha algun valor de a per al qual $x = 1$, $y = -3$, $z = -1$, sigui l'única solució del sistema?

Resolució:

a) Com que la matriu del sistema és quadrada d'ordre 3, els valors del paràmetre que fan que el sistema no sigui compatible determinat són aquells que anul·len el seu determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 2 & a-5 & 1 \\ 4 & a-1 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & a-9 & 2a+1 \\ 0 & a-9 & 4a-3 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} a-9 & 2a+1 \\ a-9 & 4a-3 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{vmatrix} a-9 & 2a+1 \\ 0 & 2a-4 \end{vmatrix} = (a-9)(2a-4)$$

Àlgebra/ Matemàtiques I

Les operacions elementals fetes a cada pas han estat:

- (1) $F_2 - 2F_1$; $F_3 - 4F_1$.
- (2) Desenvolupant el determinant per la primera columna.
- (3) $F_2 - F_1$.

Com que $\det A = 0$ si i sols si $a = 2$ o $a = 9$, aquests són els valors per als quals el sistema no és compatible determinat.

De manera anàloga, escalonant la matriu ampliada (o sense ampliar) obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & | & -3 \\ 2 & a-5 & 1 & | & 4a+2 \\ 4 & a-1 & -3 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & | & -3 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & | & 4a+8 \\ 0 & a-9 & 4a-3 & | & 16 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & | & -3 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & | & 4a+8 \\ 0 & 0 & 2a-4 & | & 8-4a \end{pmatrix} .$$
□

Els valors que fan que $\text{rang}(A) \neq 3$ són, evidentment, $a = 2$ i $a = 9$.

b) Quan $x = 1$, $y = -3$ i $z = -1$, el sistema es transforma en

$$\left. \begin{array}{l} 1 - 6 + a = -3 \\ 2 - 3(a-5) - 1 = 4a+2 \\ 4 - 3(a-1) + 3 = 4 \end{array} \right\} .$$

Les tres equacions donen el mateix valor per al paràmetre: $a = 2$.

Per tant, quan $a = 2$, els valors proposats formen una solució del sistema. Ara bé, a l'apartat anterior hem vist que per $a = 2$ el sistema no és compatible determinat. Això vol dir que per $a = 2$ el sistema és compatible indeterminat.

En definitiva, no existeix cap valor del paràmetre a per al qual els valors proposats siguin solució única.

Exercici 4

Sigui $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicació lineal definida per $f(2,1) = (0,0)$ i $f(0,1) = (0,4)$.

- a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.
- b) Trobeu una base del nucli de f . És injectiva?
- c) Trobeu una base de la imatge de f . És exhaustiva?
- d) Digueu si f diagonalitza i, si és possible, trobeu una base de \mathbb{R}^2 formada per

Àlgebra/ Matemàtiques I

vectors propis de f .

Resolució:

- a) Tenim que $(1,0)=(1/2)(2,1)+(-1/2)(0,1)$. Per linealitat,

$$f(1,0)=(1/2)f(2,1)+(-1/2)f(0,1)=(0,-2).$$

Per tant, $f(1,0)=(0,-2)$ i $f(0,1)=(0,4)$. Així, la matriu de f en les bases canòniques és:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- b) El nucli de f es troba resolent el sistema $AX=0$. O sigui, $-2x+4y=0$. Per tant, $2x=4y$ i $x=2y$. O sigui, el nucli de f està generat pel vector $(2,1)$. En particular, com que el nucli no és zero, f no és injectiva.
- c) La imatge de f està generada per les columnes de la matriu de f . Per tant, una base de la imatge de f és: $(0,4)$. Com que la imatge de f no és tot \mathbb{R}^2 , deduïm que f no és exhaustiva.
- d) Clarament $(2,1)$ és vector propi de f de valor propi 0. D'altra banda, $(0,1)$ és vector propi de f de valor propi 4. Així, f té dos valors propis diferents, que són el 0 i el 4. Pel teorema de diagonalització, f diagonalitza. Una base de \mathbb{R}^2 formada per vectors propis de f és $(2,1)$, $(0,1)$ (veure apunts M5, Teorema de diagonalització.).