EXAMEN 3

1. Responded razonadamente los siguientes apartados:

   a) Resolved, en los números complejos, la ecuación siguiente. Proporcionad la respuesta en forma polar y los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$.

$$z^3 - \frac{i}{-\sqrt{3}+i} = 0$$

   b) Sabiendo que $z = 1 - i\sqrt{3}$, expresad el número complejo, z, su opuesto y su conjugado en forma polar (y los ángulos en grados en el intervalo $[0, 360°)$).

Solución

a) Tenemos que partir de que resolver la ecuación es lo mismo que hallar las raíces terceras del número $\frac{i}{-\sqrt{3}+i}$, esto es, $z = \sqrt[3]{\frac{i}{-\sqrt{3}+i}}$ [ver apuntes "Los números", apartado 3.6].
Para esto es necesario pasar el número a forma binómica. Operamos, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador y agrupamos parte real y parte imaginaria:
$\frac{i}{-\sqrt{3}+i} \cdot \frac{(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}-i)} = \frac{-\sqrt{3}i+1}{3+1} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$
A continuación escribimos el complejo $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ en forma polar:
$m = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$
$\alpha = \arctan\left(\frac{\frac{-\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = 300°$
NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo α vale $-\sqrt{3}$ en $300°$ y en $120°$; pero al ser la parte real positiva y la parte imaginaria negativa, estamos en el cuarto cuadrante, es decir, en $300°$.
Tenemos, por tanto, que: $\frac{i}{-\sqrt{3}+i} = \left(\frac{1}{2}\right)_{300°}$
Como que nos piden las raíces terceras tenemos que hacer lo siguiente:
$\sqrt[3]{\frac{i}{-\sqrt{3}+i}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}_{\frac{300°+360°k}{3}} = 0{,}7937_{\frac{300°+360°k}{3}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2$
Detalladamente queda así:
Solución 1: $0{,}7937_{100°}$
Solución 2: $0{,}7937_{220°}$
Solución 3: $0{,}7937_{340°}$

b) Operamos con el número z, recordando que $i^2 = -1$ [ver apuntes "Los números", apartado 3.1]

$z = 1 - i\sqrt{3}$

Módulo: $m = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

Argumento: $\alpha = arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = arctan\left(-\sqrt{3}\right) = 300°$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo α vale $-\sqrt{3}$ en 300° y en 120°; pero al ser la parte real positiva y la parte imaginaria negativa, estamos en el cuarto cuadrante, es decir, en 300°.

Por tanto: $\boxed{z = 1 - i\sqrt{3} = 2_{300°}}$

A continuación tratamos el opuesto:

$-z = -1 + i\sqrt{3}$

Módulo: $m = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Argumento: $\alpha = arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = arctan\left(-\sqrt{3}\right) = 120°$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo α vale $-\sqrt{3}$ en 300° y en 120°; pero al ser la parte real negativa y la parte imaginaria positiva, estamos en el segundo cuadrante, es decir, en 120°.

Por tanto: $\boxed{-z = -1 + i\sqrt{3} = 2_{120°}}$

A continuación tratamos el conjugado:

$\bar{z} = 1 + i\sqrt{3}$

Módulo: $m = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Argumento: $\alpha = arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = arctan\left(\sqrt{3}\right) = 60°$

NOTA ACLARATORIA: Sabemos que la tangente de un ángulo α vale $\sqrt{3}$ en 60° y en 240°; pero al ser la parte real positiva y la parte imaginaria positiva, estamos en el primer cuadrante, es decir, en 60°.

Por tanto: $\boxed{\bar{z} = 1 + i\sqrt{3} = 2_{60°}}$

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Pasar el número complejo a forma binomial: 0,5 puntos.
- Calcular el módulo de z: 0,25 puntos.
- Calcular el argumento de z: 0,25 puntos.
- Encontrar los valores de z: 0,25 puntos.

Apartado b.

- Poner correctamente el número opuesto y conjugado: 0,05 puntos.
- Calcular el módulo de cada caso: 0,45 puntos (los tres casos).
- Calcular el argumento de cada caso: 0,75 puntos (los tres casos).

2. Considerad los tres planos siguientes:

$$\begin{aligned}\pi_1 &: \quad x+2y-z=k+1\\ \pi_2 &: \quad 3x+(k+6)\,y+(a-1)\,z=3k+a+5\\ \pi_3 &: \quad 2x+(k+4)\,y+(k-2)\,z=2k+a+4\end{aligned}$$

Sustituid el parámetro "a"por la **primera cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con los tres planos obtenidos:

a) Determinad, de manera razonada, para que valor del parámetro k los tres planos se cortan en una misma recta.

b) Para el valor $k=a+2$ calculad el punto de corte de la recta (intersección de los tres planos) con el plano de ecuación $z=1$.

Solución

Resolvemos este ejercicio de forma paramétrica, en función de a, de este modo, si quieres ver la resolución concreta que corresponde al valor de tu IDP, solo tienes que sustituir el parámetro a por tu valor.

a) Recordamos que el estudio de la posición relativa de tres planos se puede hacer a partir de la discusión del consiguiente sistema formado por las 3 ecuaciones que definen estos planos [Ver apuntes módulo 3, apartado 8, páginas de la 25 a 31)

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z=k+1\\ 3x+(k+6)\,y+(a-1)\,z=3k+a+5\\ 2x+(k+4)\,y+(k-2)\,z=2k+a+4\end{aligned}\right\}$$

Para discutirlo utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius. [Ver apuntes módulo 3, apartado 4, página 12].

La matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & k+6 & a-1\\ 2 & k+4 & k-2\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & k+1\\ 3 & k+6 & a-1 & 3k+a+5\\ 2 & k+4 & k-2 & 2k+a+4\end{pmatrix}$$

Dado que el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes A, porque si este rango es tres, también lo tendrá que ser el de la matriz ampliada y el sistema serà compatible determinado.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & k+6 & a-1\\ 2 & k+4 & k-2\end{vmatrix}=k^2-ak-2k=k\cdot(k-(a+2))$$

- Si $k\neq 0$ y $k\neq a+2$ $\rightarrow$ rango $(A)=3=$ rango$(M)=$ n^o incógnitas y el sistema es compatible determinado. Por lo tanto, podemos afirmar que los tres planos se cortan en un punto.

- Si $k=0$, entonces rango$(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y , $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a-1 \end{vmatrix} = a+2 \neq 0$ puesto que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9.
Calculamos, para $k=0$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de terminos independientes $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & a-1 & a+5 \\ 2 & -2 & a+4 \end{vmatrix} = a^2+4a+4 \neq 0$, puesto que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9. Así pues, tenemos que rango$(A)=2 \neq$ rango$(M)=3$, entonces el sistema es incompatible y por tanto los tres planos no tienen ningún punto en común.
- Si $k=a+2$, entonces rango$(A)=2$, puesto que $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a-1 \end{vmatrix} = a+2 \neq 0$, ya que a solo puede tomar valores enteros entre 0 y 9. Calculamos, para $k=a+2$, el menor de orden 3 de la matriz ampliada que se obtiene orlando este menor de orden dos no nulo con la columna de términos independientes $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a+3 \\ 3 & a-1 & 4a+11 \\ 2 & a & 3a+8 \end{vmatrix} = 0$. Así pues, tenemos que se verifica rango$(M)=$ rango$(A)=2 \neq$ n^o incógnitas y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación igual a 1. En consecuencia, $\boxed{\text{los tres planos se cortan en una recta si } k=a+2}$.

b) Por el apartado anterior sabemos que si $k=a+2$ los tres planos π_1, π_2 y π_3 se cortan en una misma recta que es la solución de este sistema. Si ahora queremos saber de todos los puntos de esta recta cuál es el punto de corte con el plano $z=1$, lo que deberemos hacer es sustituir $z=1$ en el sistema y determinar para este valor de $z=1$ los valores que toman las otras incógnitas.

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=a+3 \\ 3x+(a+8)\,y+(a-1)\,z&=4a+11 \\ 2x+(a+6)\,y+az&=3a+8 \end{aligned}\right\} \overset{z=1}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned} x+2y-1&=a+3 \\ 3x+(a+8)\,y+(a-1)&=4a+11 \\ 2x+(a+6)\,y+a&=3a+8 \end{aligned}\right\}$$

Obteniendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=a+4 \\ 3x+(a+8)\,y&=3a+12 \\ 2x+(a+6)\,y&=2a+8 \end{aligned}\right\}$$

Utilizaremos el método de Gauss [Ver apuntes módulo 3, apartado 6, páginas de la 18 a la 21] para determinar las soluciones de este sistema a partir de su matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a+4 \\ 3 & a+8 & 3a+12 \\ 2 & a+6 & 2a+8 \end{array}\right) \underset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a+4 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a+4 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones: (1): $F2-3{\cdot}F1 \to F2$, $\quad F3-2{\cdot}F1 \to F3$,
(2): $F3-F2 \to F3$.

El sistema equivalente que se obtiene por Gauss es:

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=\ a+4 \\ (a+2)\,y&=\ 0 \end{aligned}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene $y = 0$. Si hacemos la sustitución de $y = 0$ en la primera ecuación obtenemos $x = a + 4$.

Así pues, la recta intersección de los tres planos π_1, π_2 y π_3 corta al plano $z = 1$ en el punto $\boxed{(a + 4, 0, 1)}$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN:

Apartado a

- Calcular el determinante de la matriz A en función de k: 0,25 puntos.
- Obtener los valores $k = 0$ y $k = a + 2$: 0,25 puntos.
- Justificar que para k diferente de 0 y $a + 2$ los planos se cortan en un punto: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k = 0$ los planos no tienen ningún punto en común: 0,5 puntos.
- Justificar que para $k = a + 2$ los planos se cortan en una recta: 0,5 puntos.

Apartado b

- Plantear que se tiene que resolver el sistema haciendo $z = 1$: 0,25 puntos.
- Obtener las coordenadas del punto de corte: 0,25 puntos.

3. Sea E un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathbb{R}^5$ definido de la siguiente forma:

$$E = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5 | 2a_2 - a_3 = 0, 4a_2 - a_4 = 0\}.$$

Y sea $v = (-1, -2a, -4a, -8a, -16)$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** del vuestro IDP.

a) Comprobad que $A = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 2, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ es una base de E. ¿$v \in E$? En caso afirmativo calculad sus coordenadas en la base A.

b) Sea $b \in \mathbb{R}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}$ donde a es la **tercera cifra de la derecha** del vuestro IDP.
¿Para qué valores de b la matriz C es matriz de cambio de base de una base B a la base A? Calculad la base B en los casos donde lo sea.

Solución

a) Como sabemos que la dimensión de E es 3, sólo debemos mirar que los vectores de A pertenecen a E y que son linealmente independientes. Primer comprobamos que los vectores de A pertenecen a E comprobando que se cumplen las condiciones $2a_2 - a_3 = 0$ y $4a_2 - a_4 = 0$ para los tres vectores, cosa que es cierta. Seguidamente comprobamos que son linealmente independientes, ya que contienen el menor

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Así pues A es una base de E.
Para ver si $v \in E$ miramos si tiene solución el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2a \\ -4a \\ -8a \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Que tiene solución $x = -1$, $y = -2a$ y $z = -16$. Por tanto $v \in E$ y sus coordenadas en la base A son $(-1, -2a, -16)$.

b) Como sabemos que E tiene dimensión 3, las matrices de cambio de base deben ser 3×3 e invertibles. Vamos a ver para qué valores de b la matriz C lo es. Al ser una matriz triangular, podemos multiplicar la diagonal directamente para encontrar el determinante: $Det(C) = 3b$.
Así tenemos que para $b \neq 0$ la matriz C es matriz de cambio de base.
Para encontrar la base B podemos multiplicar directamente los vectores de la base A por la matriz C y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 2a & 2b & 0 \\ 4a & 4b & 0 \\ 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz resultante nos dan la base B:
$B = \{(1, a, 2a, 4a, 2a), (0, b, 2b, 4b, 1), (0, 0, 0, 0, 3)\}$.

PAUTAS DE CORRECCIÓN:
Apartado a

- Ver que los vectores pertenecen a E: 0,25 puntos.
- Ver que los vectores son linealmente independientes: 0,25 puntos.
- Justificar que estas dos comprobaciones son suficiente para que sea base: 0,25 puntos.
- Demostrar que v pertenece y calcular sus coordenadas en A: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular los valores de b en que la matriz es de cambio de base: 0,75 puntos.
- Calcular la base: 0,5 puntos.

4. Sustituid el parámetro a por la **segunda cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC en la siguiente definición de las imágenes de los vectores de la

base canónica C de $\mathbb{R}^3$ por una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f((1,0,0)) &= (10-a, 11-a, a-11) \\ f((0,1,0)) &= (12-a, 9-a, a-11) \\ f((0,0,1)) &= (12-a, 10-a, a-12) \end{aligned}$$

.

Responded razonadamente a los siguientes apartados:

a) Calculad para qué valor del parámetro $b \in \mathbb{R}$ los tres vectores del siguiente conjunto B son vectores propios de la aplicación lineal f:

$$B = \{(-1, b, 0), (0, b, -1), (1, b, -1)\}$$

b) Comprobad que B es una base de $\mathbb{R}^3$.

c) Escribid la matriz $A = M(f|C, C)$ asociada a la aplicación lineal f en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$. ¿Es A diagonalizable?

Solución

Resolvemos los apartados para un valor de a genérico. Para obtener la solución particular correspondiente a vuestro dígito solo tenéis que sustituir a por su valor en los desarrollos que siguen. Se indican al final los resultados particulares en función de vuestro IDP.

a) Para que $u = (-1, b, 0) \in \mathbb{R}^3$ sea un vector propio de f, la imagen del vector u por la aplicación f ha de ser un múltiplo de u. Tal como se define en el punto "7. Vectores y valores propios" del módulo "Aplicaciones lineales" tiene que existir un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = \lambda \cdot u$.

$$\begin{aligned} f(u) = f(-1, b, 0) &= f(-1(1,0,0) + b(0,1,0)) = \\ &= -f(1,0,0) + bf(0,1,0) = \\ &= -(10-a, 11-a, a-11) + b(12-a, 9-a, a-11) = \\ &= (a - 10 + 12b - ab, a - 11 + 9b - ab, 11 - a + ba - 11b) \end{aligned}$$

Igualando $f(u)$ a $\lambda \cdot u = (-\lambda, b\lambda, 0)$ se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} a - 10 + 12b - ab &= -\lambda \\ a - 11 + 9b - ab &= b\lambda \\ 11 - a + ba - 11b &= 0 \end{aligned}$$

De la tercera se obtiene que $b = \frac{a-11}{a-11} = 1$. Sustituyendo en la primera se ve que $a - 10 + 12 - a = -\lambda$ y, por tanto, $\lambda = -2$. Se comprueba que para esos valores también se cumple la segunda ecuación. Por tanto, si $b = 1$, el primer vector u del conjunto B es un vector propio de valor propio -2 ya que $f(u) = (2, -2, 0) = (-2)(-1, 1, 0)$.

Usando el mismo valor $b = 1$ se puede comprobar que el segundo vector del conjunto B, que será $v = (0, b, -1) = (0, 1, -1)$, es también un vector propio:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(0,1,-1) = \\ &= f((0,1,0)-(0,0,1)) = f(0,1,0) - f(0,0,1) = \\ &= (12-a, 9-a, a-11) - (12-a, 10-a, a-12) = (0,-1,1) = (-1)(0,1,-1) \end{aligned}$$

En este caso el valor propio es -1.

Usando también $b = 1$ se puede comprobar que el tercer vector del conjunto B, que será $w = (1, b, -1) = (1, 1, -1)$, es también un vector propio:

$$\begin{aligned} f(w) &= f(1,1,-1) = \\ &= f((1,0,0)+(0,1,0)-(0,0,1)) = f(1,0,0) + f(0,1,0) - f(0,0,1) = \\ &= (10-a, 11-a, a-11) + (12-a, 9-a, a-11) - (12-a, 10-a, a-12) = \\ &= (10-a, 10-a, a-10) = (10-a)(1,1,-1) \end{aligned}$$

En este caso el valor propio es $10 - a$.

b) Al ser u, v y w tres vectores propios de valores propios distintos, sabemos que son linealmente independientes. Por tanto B es una base de $\mathbb{R}^3$. También se puede ver que el rango de B es tres calculando el determinante de los tres vectores.

c) La matriz $A = M(f|C, C)$ asociada a la aplicación lineal f en la base canónica C se obtiene poniendo en columnas las imágenes de los vectores de la base canónica C:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (10-a, 11-a, a-11) \\ f(0,1,0) &= (12-a, 9-a, a-11) \\ f(0,0,1) &= (12-a, 10-a, a-12) \end{aligned}$$

La matriz resultante es por tanto la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 12-a & 12-a \\ 11-a & 9-a & 10-a \\ a-11 & a-11 & a-12 \end{pmatrix}$$

La matriz A es diagonalizable porque hemos visto en el apartado anterior que tiene tres valores propios distintos.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Escribir la condición de VEP para el primer vector, resolver la ecuación y encontrar el valor de b: 0,5 puntos.
- Escribir la condición de VEP para el segundo vector y comprobar que se cumple para el valor de b anterior: 0,5 puntos.
- Escribir la condición de VEP para el tercer vector y comprobar que se cumple para el valor de b anterior: 0,5 puntos.

Apartado b

- Justificar que los tres vectores son base mediante su rango o el hecho de ser VEPs de VAPs diferentes. 0,5 puntos.

Apartado c

- Construir la matriz de la aplicación: 0,25 puntos.
- Justificar que la matriz es diagonalizable: 0,25 puntos.

$\left(k^2-\frac{1}{2}\right)+2k\frac{\sqrt{2}}{2}i$

A continuación calculamos el conjugado del complejo:

$k-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

Y ahora imponemos que el cuadrado del complejo sea igual al conjugado:

$\left(k^2-\frac{1}{2}\right)+2k\frac{\sqrt{2}}{2}i=k-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

E igualamos parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria. Por tanto:

$k^2-\frac{1}{2}=k$

$k\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

De la segunda ecuación vemos que k debe valer $-\frac{1}{2}$. Ahora miramos si este valor de k cumple la primera ecuación:

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$

Y comprobamos que esta igualdad no se cumple porque el término de la izquierda vale $-\frac{1}{4}$ y el término de la derecha es $-\frac{1}{2}$. Y sabemos que: $\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}$

Por tanto: No existe ningún valor de k para el cual el número complejo dado cumpla que su cuadrado coincida con su conjugado.

PAUTAS DE CORRECCIÓN

Apartado a

- Despejar z de la ecuación: 0,25 puntos.
- Pasar $-27i$ a forma polar: 0,5 puntos.
- Calcular las raíces cúbicas de z: 0,5 puntos.

Apartado b

- Calcular el número complejo al cuadrado: 0,5 puntos.
- Calcular el conjugado del número complejo: 0,25 puntos.
- Igualar partes reales e imaginarias y razonar que no existe solución: 0,5 puntos.

2. Considerad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+2z & = & 3 \\ (4k+4)\,y+(4k+2a+4)\,z & = & 8k-40 \\ 4y+(k+(a+3))\,z & = & -16 \end{array}\right\}$$

Sustituid el parámetro "a"por la primera **cifra de la derecha** de vuestro identificador IDP del campus UOC y con el sistema obtenido:

a) Discutid el sistema para los distintos valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$.

b) Calculad las soluciones del sistema para $k=1$. A continuación, razonad si existe alguna solución en la que los valores de x y de y coincidan.