EXAMEN 2 - 18 gener 2020

1. Responeu raonadament als següents apartats:
a) Realitzeu la següent operació: $(-2-i)+\sqrt{2}_{45^\circ}$
b) Calculeu totes les arrels terceres del següent nombre complex: $1+i$. Proporcioneu les solucions en forma polar.

Solució
a) Aquí hem de sumar dos nombres complexos, un en forma polar i un altre en forma binòmica. Per a això operem amb nombres complexos tal com es diu a la pàgina 20 del material:

$(-2-i)+\sqrt{2}_{45^\circ} = -2-i+1+i = -1$

Per passar $\sqrt{2}_{45^\circ}$a forma binòmica utilitzem la relació que diu que un nombre complex, en forma polar, r_α, per passar-lo a forma binària, hem de saber que: $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$.

$r = \sqrt{2}$

$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per tant, $\sqrt{2}_{45^\circ} = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1+i$

b) Escrivim el complex $1+i$ en forma polar tal com s'explica a l´apartat 3.4, pàgina 27 del material, sobre la forma polar dels nombres complexos:

$m = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = 45^\circ$

NOTA ACLARATÒRIA: Sabem que la tangent d'un angle val 1 en 45^o i en 225^o. Com que l'afix del punt buscat és $(1,1)$ l´angle està al quart quadrant, és a dir, en 45^o. Com es diu a l'exercici 19 d´autoavaluació, quan volem passar un nombre de forma binòmica a forma polar, és molt important, amb vista a no equivocar-nos en el resultat, fer un dibuix. Per la qual cosa, el primer que fem és dibuixar el nombre $1+i$ al pla complex. Aquest nombre està associat al punt $(1,1)$, per tant, és un nombre que es troba al quart quadrant.

Tenim, per tant, que $1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}$

Com que ens demanen les arrels terceres hem de fer (observem que a l'apartat 3.6.1. de la pàgina 43 del material es fa el mateix però amb les arrels cúbiques de la unitat):

$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ k}{3}}$ per a $k = 0,1,2$

Això és, el mòdul de les arrels és: $r = \sqrt[6]{2}$

Els arguments de les arrels cúbiques són $\beta = \frac{45°+360°k}{3}$ per a $k = 0, 1, 2$

Si$k = 0$, tenim que $\beta_0 = 15°$

Si $k = 1$, tenim que $\beta_1 = 15° + 120° = 135°$

Si $k = 2$, tenim que $\beta_2 = 15° + 240° = 255°$

Per tant, les tres arrels cúbiques del complex $1 + i$ són:

$\sqrt[6]{2}_{15°}, \sqrt[6]{2}_{135°}, \sqrt[6]{2}_{255°}$

2. Siguin $e_1 = (1, 1, 1, 3)$, $e_2 = (1, 0, -1, 0)$ i $e_3 = (0, -2, -4, -6)$ vectors de $\mathbb{R}^4$. Sigui $E =< e_1, e_2, e_3 >$. Sigui $v = (-1, 1, 3, 3)$.
a) Calculeu la dimensió de E i una base A. $v \in E$? En cas afirmatiu, calculeu-ne les coordenades en la base A.
b) Sigui $w = e_1 + e_2$. $B = \{v, w\}$ és una base de E. Calculeu la matriu de canvi de base de la base A a la base B i de la base B a la base A.

Solució
a) Calculem el rang de la matriu de vectors:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 2$$

Així la dimensió de E és 2 i una base pot estar formada per els dos primers vectors ja que són linealment independents: contenen el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Així doncs $A = \{e_1, e_2\}$.
Per mirar si $v \in E$ resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que té solució $x = 1$ i $y = -2$. Per tant $v \in E$ i les seves coordenades en la base A són $(1, -2)$.

b) Comencem per calcular la matriu de canvi de base de la base B a la base A, ja que per calcular-la cal expressar els vectors de la base de B en funció dels de la de A i això ja ho tenim (per a v ho hem calculat a l'apartat anterior i w està definit directament com a combinació lineal de e_1 i e_2). Així doncs la matriu de canvi de base de B a A és:

$$C_{B \to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcular la matriu de canvi de base de A a B calculem la inversa:

$$C_{A \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} -1 & k & -4 \\ 1 & 3 & 1-k \\ 2 & -1 & 2k+1 \end{pmatrix}$

Es demana:
a) Discutiu, raonadament, el rang de la matriu M en funció dels valors de $k \in \mathbb{R}$.
b) Si M és la matriu ampliada d'un sistema d'equacions, resoleu-lo sempre que sigui compatible determinat amb valor de k positiu.

Solució
a) Com que la matriu M és quadrada d'ordre 3, estudiem el seu rang utilitzant que el rang és tres, només si el determinant de la matriu és diferent de zero.

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & k & -4 \\ 1 & 3 & 1-k \\ 2 & -1 & 2k+1 \end{vmatrix} = -4k^2-4k+24 \;\rightarrow\; -4k^2-4k+24=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} k=2 \\ k=-3 \end{cases}$$

En conseqüència

- Si $k \neq 2$ i $k \neq -3 \;\rightarrow\; \boxed{\text{rang}(M)=3}$.
- Si $k=2$, $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ amb $|M|=0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rang}(M)=2}$.
- Si $k=-3$, $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ amb $|M|=0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rang}(M)=2}$.

b) Si M és la matriu ampliada d'un sistema d'equacions, el sistema associat és:

$$\left.\begin{aligned} -x+ky &= -4 \\ x+3y &= 1-k \\ 2x-y &= 2k+1 \end{aligned}\right\}$$

Observem que el sistema té 3 equacions i 2 incògnites, així doncs, sempre que el rang de la matriu ampliada M sigui tres, el sistema serà incompatible, ja que la matriu dels coeficients del sistema té rang 2, doncs només té dues columnes i té el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

En conseqüència, el sistema només pot tenir solució si $\text{rang}(M)=2$, és a dir si $k=2$ o $k=-3$.

Com que l'enunciat només ens demana resoldre per k positiu, resolem el cas $k=2$.

Utilitzarem el mètode de Gauss [Veure apunts mòdul 3, apartat 6, pàgines de la 19 a la 22].

Si $k=2$, la matriu ampliada del sistema és:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operacions: (1) $F2+F1 \to F2$ i $F3+2{\cdot}F1 \to F3$

(2) $5{\cdot}F3 - 3{\cdot}F2 \to F3$

El sistema equivalent que s'obté per Gauss és:

$$\left.\begin{aligned} -x+2y &= -4 \\ 5y &= -5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{Solució: } \boxed{(x=2, y=-1)}$$

4. Sigui $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x,y,z) = (3x-4y, 2x+z, x-4y-z, 4x-8y-z).$$

a) Calculeu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^4$.
b) Trobeu una base de $\ker(f)$, el subespai nucli de f. És f injectiva?
c) Trobeu una base de (f), el subespai imatge de f. És f exhaustiva?
d) És possible trobar una aplicació lineal $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composició

$$\text{f}\circ g : \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \text{ , definida per } (\text{f}\circ g)(v) = f(g(v)) \text{ , } v\in \mathbb{R}^4,$$

sigui la identitat? O sigui, $(f\circ g)(v) = v$, per a tot v$\in \mathbb{R}^4$?

Indicació: Penseu en el vector v=(0,0,1,0)$\in \mathbb{R}^4$.

e) És possible trobar una aplicació $h:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composició

$$\text{h}\circ f : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3 \text{ , definida per } (\text{h}\circ f)(u) = h(f(u)) \text{ , } u\in \mathbb{R}^4,$$

sigui la identitat? O sigui, $(h\circ f)(u) = u$, per a tot u $\in \mathbb{R}^4$?

Indicació: Penseu en el vector u=(4,3,-8) $\in \mathbb{R}^4$.

Solució

a) Per a trobar A, la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^4$, calculem les imatges dels tres vectors de la base canònica i els posem per columnes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Per a calcular una base del $\ker(f)$ resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fem Gauss, o transformacions per files. A la primera transformació, permutem files 1 i 3. A la segona fem $f_2' = f_2 - 2f_1$, $f_3' = f_3 - 3f_1$, $f_4' = f_4 - 4f_1$. A la tercera fem $f_3' = f_3 - f_2$ i $f_4' = f_4 - f_2$. Obtenim:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ens queden les equacions: $x - 4y - z = 0$ i $8y + 3z = 0$. O sigui, $y = -\frac{3}{8}z$ i $x = 4y + z = -4 \cdot \frac{3}{8}z + z = (-\frac{12}{8} + \frac{8}{8})z = -\frac{4}{8}z$. O sigui, $(x, y, z) = (-\frac{4}{8}z, -\frac{3}{8}z, z)$. Traient factor comú: $(x, y, z) = (-\frac{1}{8}z)(4, 3, -8)$. Per tant, una base del nucli és $\{(4, 3, -8)\}$.

Alternativament: la primera equació ens diu $3x - 4y = 0$. La segona equació ens diu $2x + z = 0$. Per tant, $z = -2x$. Així, doncs, el vector $(4, 3, -8)$ verifica les dues primeres equacions. Però veiem que també verifica la tercera, $x - 4y - z = 0$ i la quarta $4x - 8y - z = 0$. Això ens diu que almenys hi ha un vector no nul del nucli. Per tant, el rang de A com a molt és 2. Però ja veiem que és 2, perquè el menor 2×2 format per les dues primers columnes i les dues primeres files té determinant no nul. Així, $\ker(f) = [(4, 3, -8)]$ i $\{(4, 3, -8)\}$ és una base del $\ker(f)$.

L'aplicació f no és injectiva perquè el nucli és no nul.
c) Sabem que $\dim(E) = \dim \ker(f) + \dim(f)$. Com que $\dim(E) = 3$ i $\dim \ker(f) = 1$, aleshores $\dim(f) = 2$. D'altra banda, la imatge de f es troba calculant les imatges d'una base, per exemple, la canònica. Abans hem vist:

$$(f) = [f(e_1), f(e_2), f(e_3)] = [(3, 2, 1, 4), (-4, 0, -4, -8), (0, 1, -1, -1)].$$

El primer i el segon vectors són linealment independents. Així, $\{(3, 2, 1, 4), (-4, 0, -4, -8)\}$ formen una base de (f).

L'aplicació f no és exhaustiva perquè la dimensió de la imatge és 2 i en canvi la dimensió de l'espai d'arribada és 4.
d) No, no existeix una aplicació lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composició $f \circ g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ verifica $(f \circ g)(v) = v$, per a tot v $\in \mathbb{R}^4$. Si existís, prenent el vector $v = (0, 0, 1, 0)$, que no és de la imatge de f, tindríem $v = (f \circ g)(v) = f(g(v))$ i aleshores v seria de la imatge de f, una contradicció.
e) No, no existeix una aplicació lineal $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que la composició $h \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verifica $(h \circ f)(u) = u$, per a tot u $\in \mathbb{R}^3$. Si existís, prenent el vector $u = (4, 3, -8)$, tindríem $h(f(u)) = h(0) = 0$, ja que $f(u) = 0$ i $h(f(u)) = h(0) = 0$.

NOTA: En la realització dels exercicis pot ser que necessiteu utilitzar algun/s dels següents valors:

α	0^o	30^o	45^o	90^o	135^o	180^o	210^o	315^o	330^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$