Lernziele:

- Wie sind komplexe Signale zusammengesetzt?
- Was ist die Fourierreihe?
- Wofür brauchen wir die Fourierreihe?

Wiederholung:

Periodische Signale

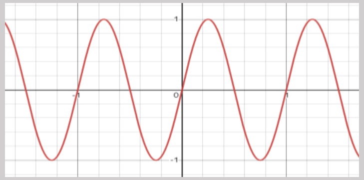
Ein Signal $x(t)$ ist periodisch, wenn eine Zahl T existiert für die gilt $x(t) = x(t + T)$.
T ist dabei die Periode des Signals.

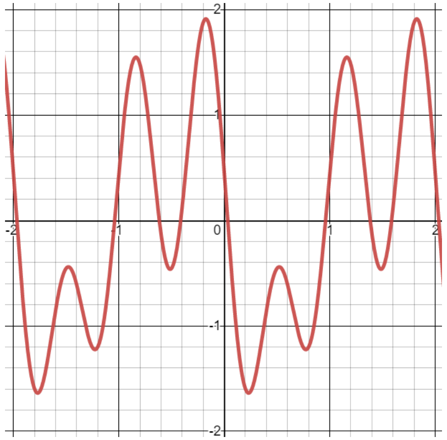
Sinuskurve

Eine einfache Sinuskurve ist eine Funktion in der Form $s(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$.
A ist die Amplitude, f eine Frequenz und ϕ die Phase (rechts/links-Verschiebung).

Sinuskurve

Eine einfache Sinuskurve ist eine Funktion in der Form $s(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$.
A ist die Amplitude, f eine Frequenz und ϕ die Phase (rechts/links-Verschiebung).



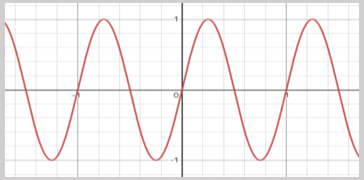


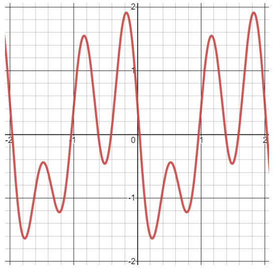
Komplexe Kurve

Signale sind in der Regel nicht nur eine einfache Sinuskurven, sondern ähneln periodischen Funktionen mit deutlich komplexerem Verlauf.

Sinuskurve

Eine einfache Sinuskurve ist eine Funktion in der Form $s(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$.
A ist die Amplitude, f eine Frequenz und ϕ die Phase (rechts/links-Verschiebung).

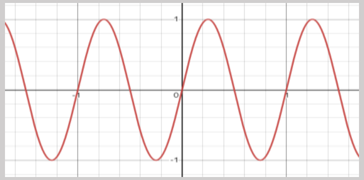


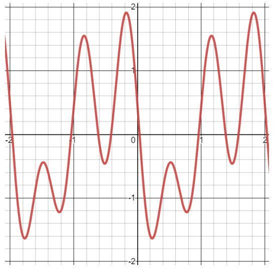


Komplexe Kurve

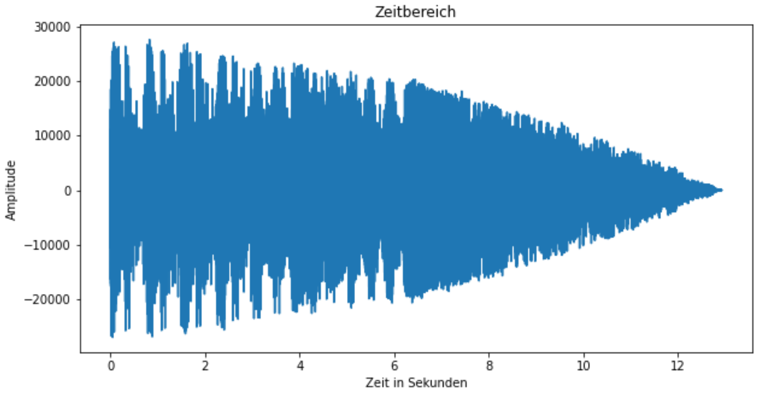
Sinuskurve

Eine einfache Sinuskurve ist eine Funktion in der Form $s(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$.
A ist die Amplitude, f eine Frequenz und ϕ die Phase (rechts/links-Verschiebung).





Komplexe Kurve

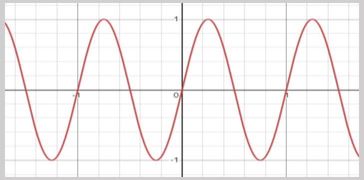


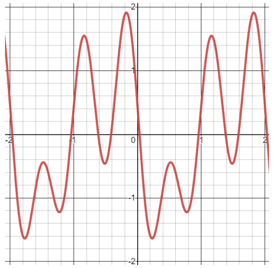
Realistisches Signal (13 s)

Signale aus der echten Welt sind noch um ein vielfaches komplexer und länger. Das Beispiel im Bild ist ein **13-sekündiger** Ausschnitt aus einem Musikstück.

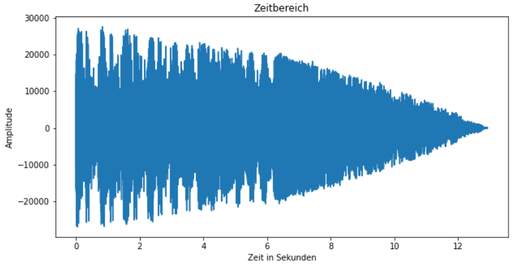
Sinuskurve

Eine einfache Sinuskurve ist eine Funktion in der Form $s(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$.
A ist die Amplitude, f eine Frequenz und ϕ die Phase (rechts/links-Verschiebung).





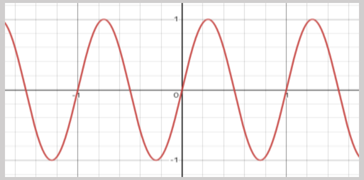
Komplexe Kurve

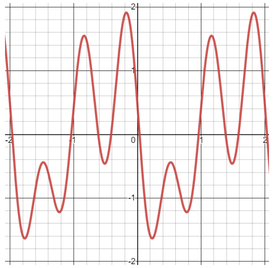


Realistisches Signal (13 s)

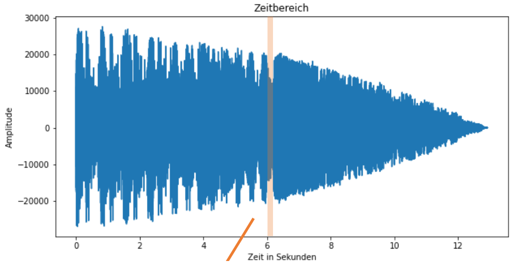
Sinuskurve

Eine einfache Sinuskurve ist eine Funktion in der Form $s(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$.
A ist die Amplitude, f eine Frequenz und ϕ die Phase (rechts/links-Verschiebung).

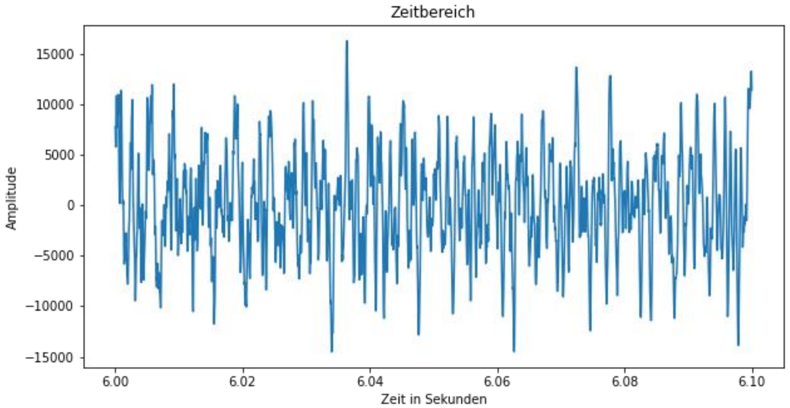




Komplexe Kurve



Realistisches Signal (13 s)

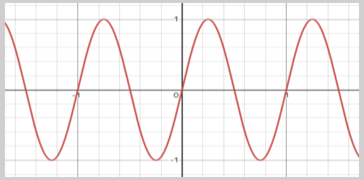


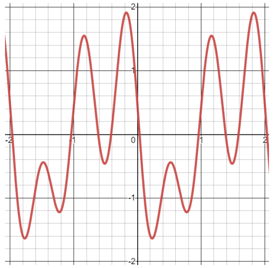
Ausschnitt (0,1 s)

Wenn wir sehr weit „hereinzoomen“, können wir Formen ausmachen, die an die komplexe Kurve erinnern.
Dieser Ausschnitt zeigt nur noch **0,1 Sekunde** aus dem Stück.

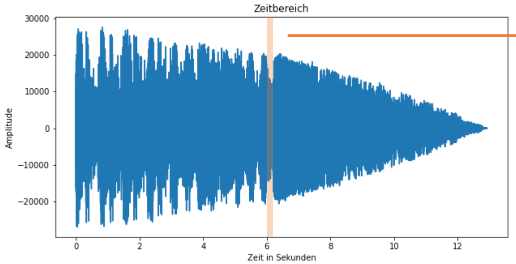
Sinuskurve

Eine einfache Sinuskurve ist eine Funktion in der Form $s(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$.
A ist die Amplitude, f eine Frequenz und ϕ die Phase (rechts/links-Verschiebung).

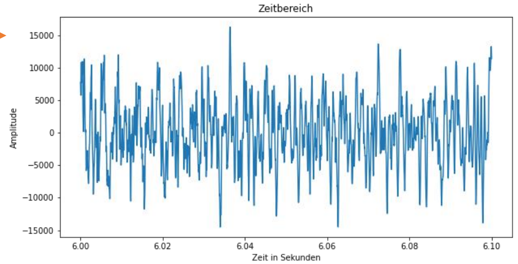




Komplexe Kurve



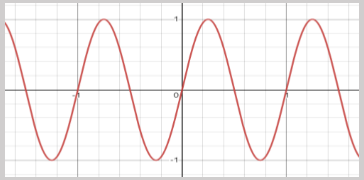
Realistisches Signal (13 s)

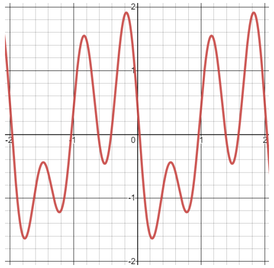


Ausschnitt (0,1 s)

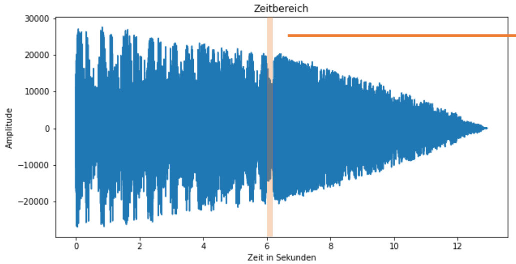
Sinuskurve

Eine einfache Sinuskurve ist eine Funktion in der Form $s(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$.
A ist die Amplitude, f eine Frequenz und ϕ die Phase (rechts/links-Verschiebung).

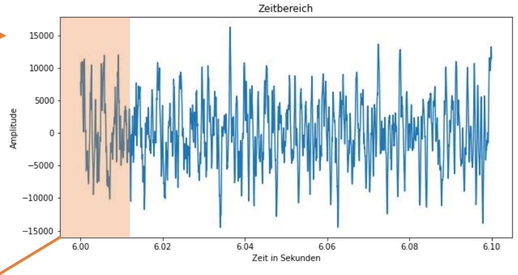




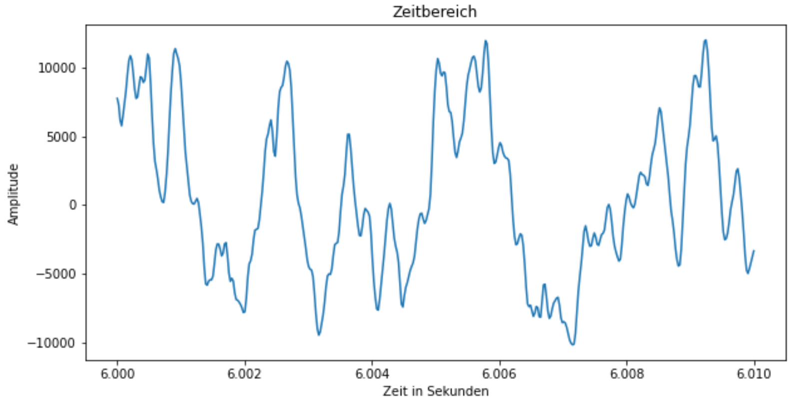
Komplexe Kurve



Realistisches Signal (13 s)



Ausschnitt (0,1 s)

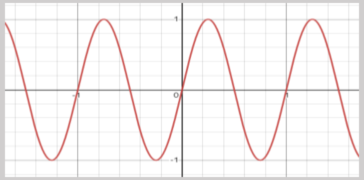


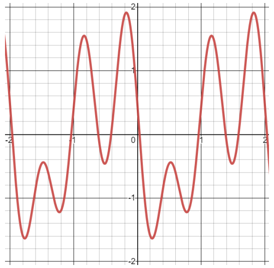
Ausschnitt (0,01 s)

Hier erkennen wir eindeutig die Ähnlichkeit zur komplexen Kurve.
Dieser Ausschnitt zeigt nur noch **0,01 Sekunden** aus dem Stück.

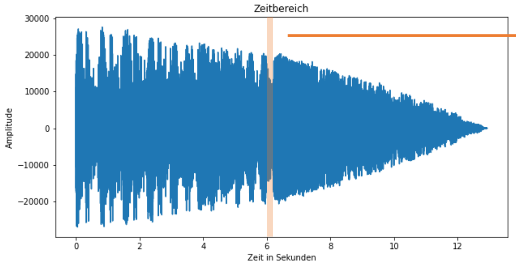
Sinuskurve

Eine einfache Sinuskurve ist eine Funktion in der Form $s(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$.
A ist die Amplitude, f eine Frequenz und ϕ die Phase (rechts/links-Verschiebung).

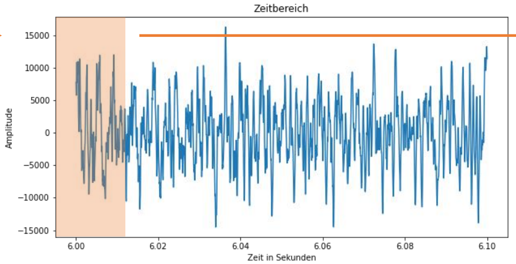




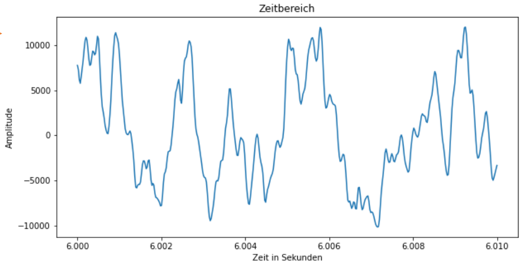
Komplexe Kurve



Realistisches Signal (13 s)



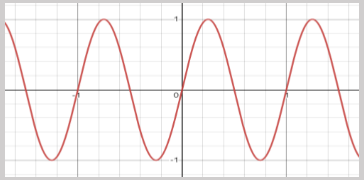
Ausschnitt (0,1 s)

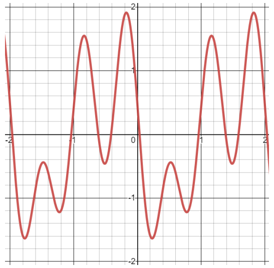


Ausschnitt (0,01 s)

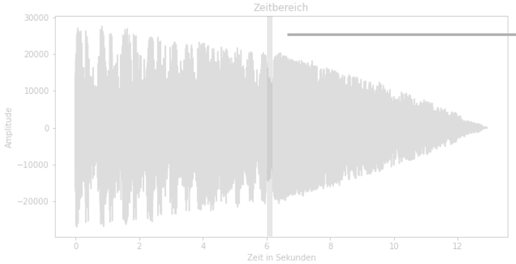
Sinuskurve

Eine einfache Sinuskurve ist eine Funktion in der Form $s(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$.
A ist die Amplitude, f eine Frequenz und ϕ die Phase (rechts/links-Verschiebung).

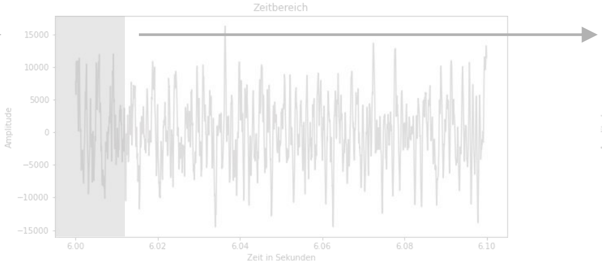




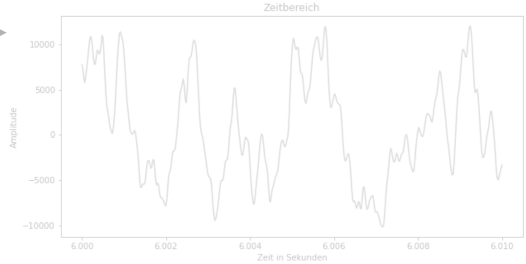
Komplexe Kurve



Realistisches Signal (13 s)



Ausschnitt (0,1 s)



Ausschnitt (0,01 s)

Können wir die komplexe Kurve als Sinuskurve darstellen?

Nicht als Einzelne, aber als Mehrere zusammen!

Intuition: Signal als Summe von Sinuskurven darstellen.

Frage: Geht das mit **allen** Signalen?

Joseph Fourier, Mathematiker, 1768 - 1830

Joseph Fourier

Theorem. Wenn $x(t)$ ein periodisches Signal mit der Periode T ist, dann kann es in folgender Form geschrieben werden:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t + \varphi_n)$$

Mit $f = \frac{1}{T}$

für $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (Amplituden)

und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (Phasen)

Diese Summe nennen wir die **Fourier-Reihe** von $x(t)$.

Theorem. Wenn $x(t)$ ein periodisches Signal mit der Periode T ist, dann kann es in folgender Form geschrieben werden:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t + \varphi_n)$$

Mit $f = \frac{1}{T}$ für $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (Amplituden) und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (Phasen). Diese Summe nennen wir die **Fourier-Reihe** von $x(t)$.

Disclaimer:

- Diese Darstellung ohne komplexen Anteil reicht für unsere Übung aus. Eine mathematisch-theoretische Herangehensweise seht ihr in der Vorlesung.
- Intensive Beschäftigung damit noch in *Analysis 1*, *ITPDG* und *Signale & Systeme*.

Theorem. Wenn x(t) ein periodisches Signal mit der Periode T ist, dann kann es in folgender Form geschrieben werden:

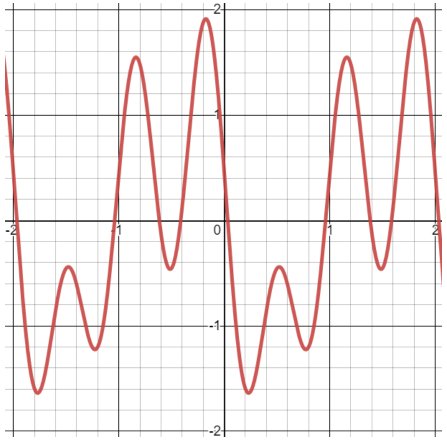
$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t + \varphi_n)$$

Mit $f = \frac{1}{T}$ für $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (Amplituden) und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (Phasen). Diese Summe nennen wir die **Fourier-Reihe** von x(t).

Disclaimer: für mathematisch formellere Darstellung -> siehe Vorlesung.

Unendliche Summe berechnen?

Manche Signale brauchen nur endlich viele Sinuskurven um perfekt beschrieben zu werden.



$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$

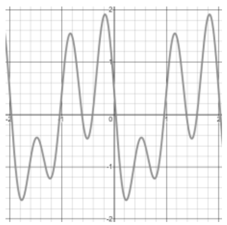
Theorem. Wenn $x(t)$ ein periodisches Signal mit der Periode T ist, dann kann es in folgender Form geschrieben werden:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t + \varphi_n)$$

Mit $f = \frac{1}{T}$ für $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (Amplituden) und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (Phasen). Diese Summe nennen wir die **Fourier-Reihe** von $x(t)$.

Disclaimer: für mathematisch formellere Darstellung -> siehe Vorlesung.

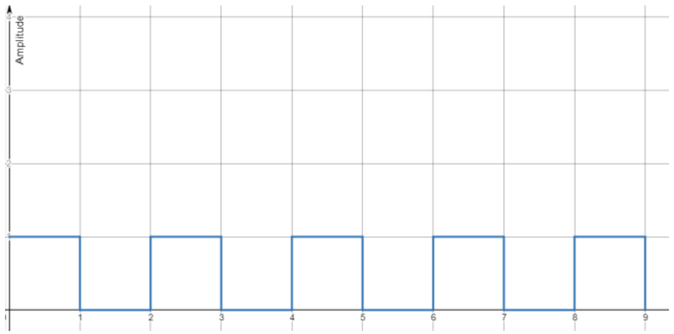
endlich viele Sinuskurven



$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$

Unendliche Summe berechnen?

Andere Signale können nur mit unendlich hoher Genauigkeit exakt beschrieben werden.



$$y(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2\pi n t - \pi t)$$

Theorem. Wenn x(t) ein periodisches Signal mit der Periode T ist, dann kann es in folgender Form geschrieben werden:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t + \varphi_n)$$

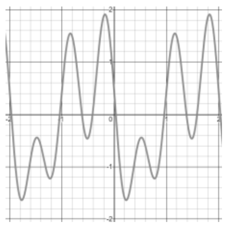
Mit $f = \frac{1}{T}$ für $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (Amplituden) und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (Phasen). Diese Summe nennen wir die **Fourier-Reihe** von x(t).

Disclaimer: für mathematisch formellere Darstellung -> siehe Vorlesung.

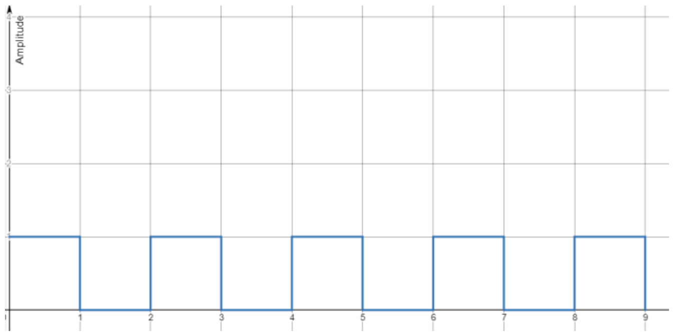
Unendliche Summe berechnen?

Wie berechnen wir so ein Rechtecksignal ohne für immer weiter zu rechnen?

endlich viele Sinuskurven



$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$



Aufhören nach **N** Sinuskurven
-> Approximation

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2\pi n t - \pi t)$$

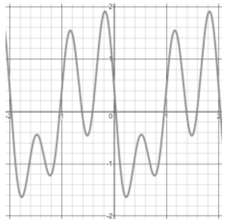
Theorem. Wenn x(t) ein periodisches Signal mit der Periode T ist, dann kann es in folgender Form geschrieben werden:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t + \varphi_n)$$

Mit $f = \frac{1}{T}$ für $A_0, A_1, A_2, \dots$ (Amplituden) und $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ (Phasen). Diese Summe nennen wir die **Fourier-Reihe** von x(t).

Disclaimer: für mathematisch formellere Darstellung -> siehe Vorlesung.

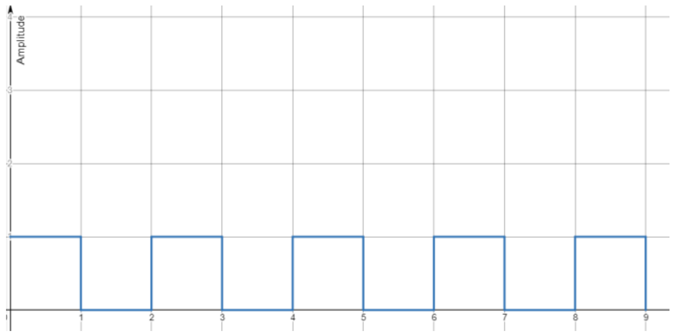
endlich viele
Sinuskurven

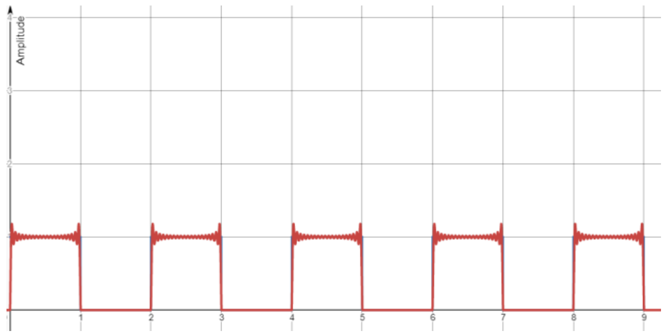


$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$

Unendliche Summe berechnen?

Wie berechnen wir so ein Rechtecksignal ohne für immer weiter zu rechnen?

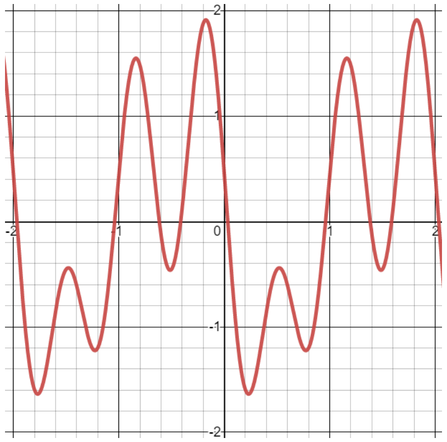




Close enough

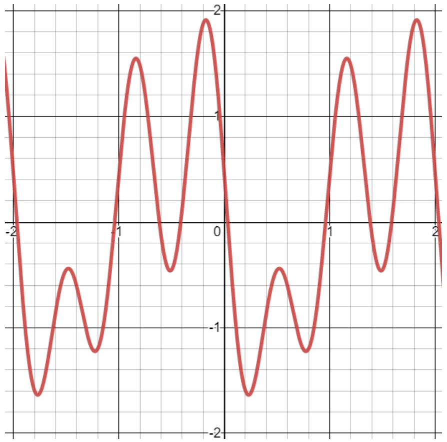
$$y(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{20} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2\pi n t - \pi t)$$

Was kann man damit jetzt machen?



$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$

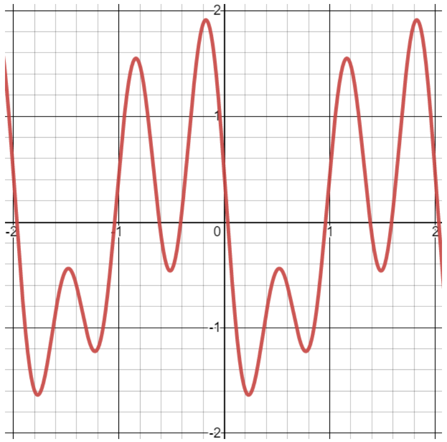
Was kann man damit jetzt machen?



$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$

$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$

Was kann man damit jetzt machen?



$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$

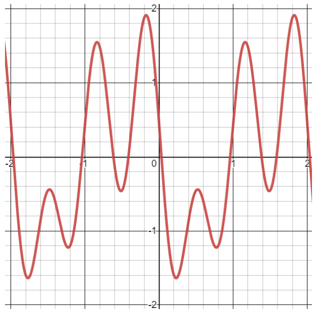
$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$

$A_1 = 0.5$, $f_1 = 2\pi$

$A_2 = 1$, $f_2 = 3\pi$

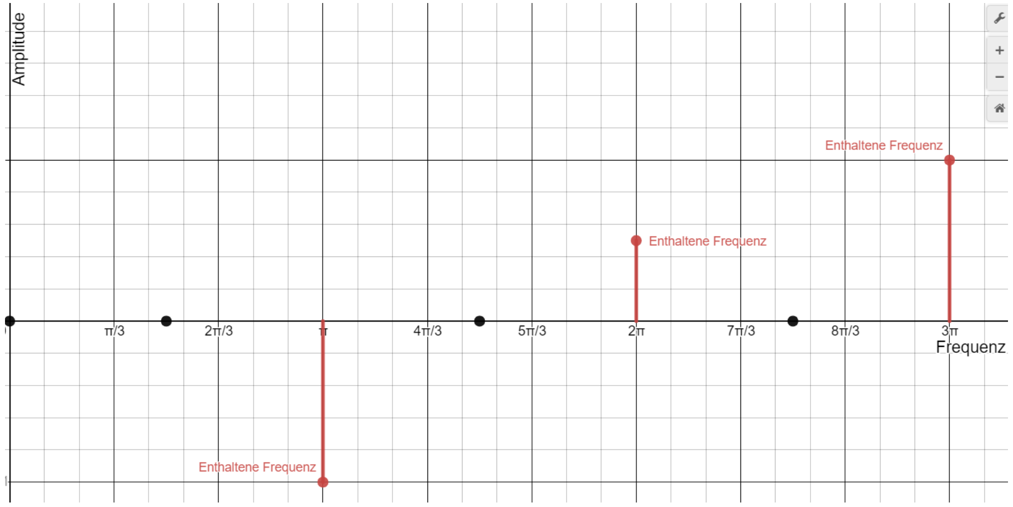
$A_3 = -1$, $f_3 = \pi$

Was kann man damit jetzt machen?



$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$

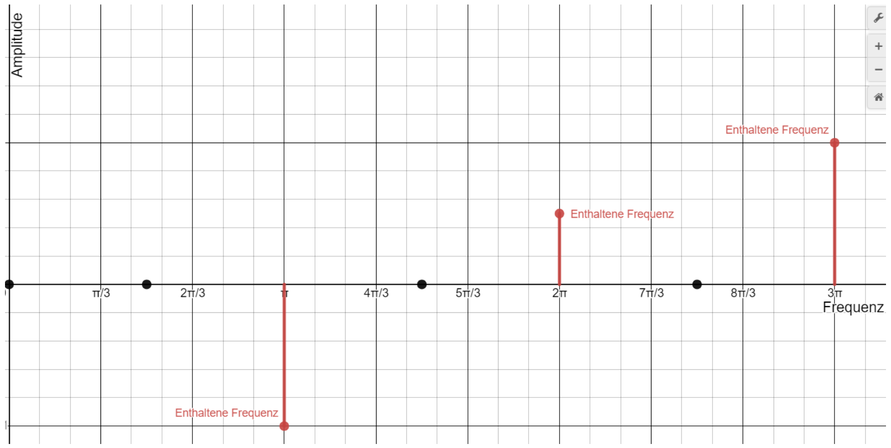
$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi x + 2) + 1 \cdot \sin(3\pi x - \pi) - 1 \cdot \sin(\pi x)$$



$A_3 = -1$ $f_3 = \pi$

$A_1 = 0.5$ $f_1 = 2\pi$

$A_2 = 1$ $f_2 = 3\pi$



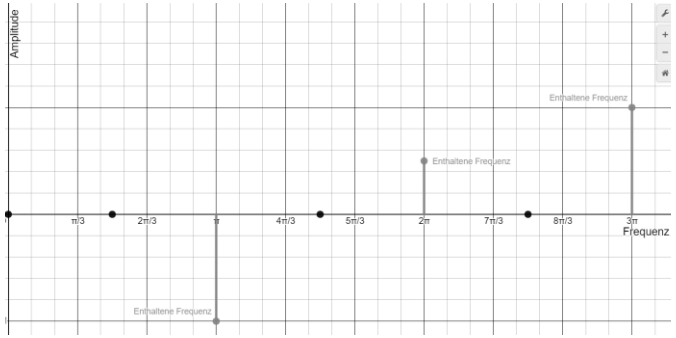
$A_3 = -1$
$f_3 = \pi$

$A_1 = 0.5$
$f_1 = 2\pi$

$A_2 = 1$
$f_2 = 3\pi$

Was kann man damit jetzt machen?

1. Bestimmte Frequenzen entfernen
   (indem wir den dazugehörigen Sinus in der Fourierreihe weglassen)
2. Bestimmte Frequenzen schwächen oder verstärken
   (indem wir die dazugehörige Amplitude verändern)



$A_3 = -1$ $\quad$ $A_1 = 0.5$ $\quad$ $A_2 = 1$

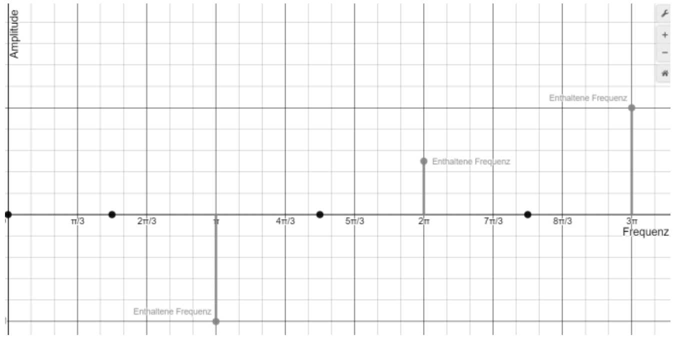
$f_3 = \pi$ $\quad$ $f_1 = 2\pi$ $\quad$ $f_2 = 3\pi$

Was kann man damit jetzt machen?

1. Bestimmte Frequenzen entfernen
   (indem wir den dazugehörigen Sinus in der Fourierreihe weglassen)
2. Bestimmte Frequenzen schwächen oder verstärken
   (indem wir die dazugehörige Amplitude verändern)

Die Fouriertransformation kann man auch umkehren!

So kriegen wir aus der modifizierten Funktion (veränderte oder entfernte Frequenzen) wieder ein Signal.



$A_3 = -1$ $A_1 = 0.5$ $A_2 = 1$

$f_3 = \pi$ $f_1 = 2\pi$ $f_2 = 3\pi$

Was kann man damit jetzt machen?

1. Bestimmte Frequenzen entfernen
   (indem wir den dazugehörigen Sinus in der Fourierreihe weglassen)
2. Bestimmte Frequenzen schwächen oder verstärken
   (indem wir die dazugehörige Amplitude verändern)

Die Fouriertransformation kann man auch umkehren!

So kriegen wir aus der modifizierten Funktion wieder ein Signal.

Und was bringt das alles in der Praxis?

Und was bringt das alles in der Praxis?

1. Audio Editing
   - Unerwünschte Töne rausschneiden (z.B. high pitch noise im Hintergrund
   - Wichtige Frequenzanteile verstärken (z.B. Sprachfrequenz in lautem Raum mit Störgeräuschen)
2. Bildbearbeitung
   - Bildrauschen entfernen (schärfen)
   - Farbanteile verändern
3. ....

Es gibt zahllose Anwendungen über alle Mediendisziplinen hinweg!