大阪大学基礎工学部・H26 数学

作成者：sei0o (Twitter: @sei0o)

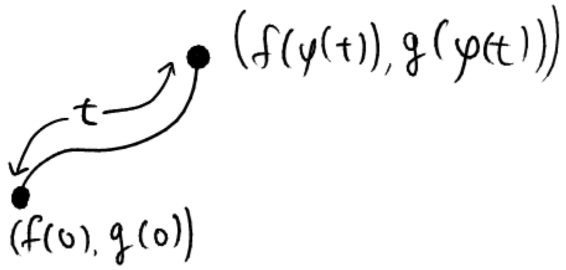
問題 1

(1)

$$
\begin{aligned}
l\left(b\right) &= \int_0^b \sqrt{\left(\frac{df}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dg}{ds}\right)^2} ds \\
&= \int_0^b \sqrt{\left(1 - \frac{\cosh^2 s - \sinh^2 s}{\cosh^2 s}\right) + \left(-\frac{\sinh s}{\cosh^2 s}\right)^2} ds \\
&= \int_0^b \frac{\sinh s \sqrt{1 + \sinh^2 s}}{\cosh^2 s} ds \\
&= \int_0^b \frac{\sinh s}{\cosh s} ds \\
&= \int_1^{\cosh b} \frac{1}{u} du \ (\cosh s = u \text{ と置換}) \\
&= \log \cosh b
\end{aligned}
$$

(2)

問題の条件を図示すると次の通り。$\varphi\left(t\right)$ が曲線のパラメータとなる。



(1) より、経路の長さについて $\log \cosh \varphi\left(t\right) = t$ が成り立つから、これを変形して、

$$
\begin{aligned}
\cosh \varphi &= e^t \\
\left(e^{\varphi}\right)^2 - 2e^t \cdot e^{\varphi} + 1 &= 0 \\
e^{\varphi} &= e^t \pm \sqrt{e^{2t} - 1} \\
\varphi\left(t\right) &= \log(e^t \pm \sqrt{e^{2t} - 1})
\end{aligned}
$$

問題 2

(1)

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると、${}^t\vec{x} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \overrightarrow{x} + c = 0$

(2)

固有値を λ とおいて、

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 6)(\lambda - 4) = 0 \\ \therefore \lambda &= 4, 6 \end{aligned}$$

(3)

$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ より、$\lambda = 6$ に対応する固有ベクトル $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a \quad (a \neq 0)$

$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ より、$\lambda = 4$ に対応する固有ベクトル $\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} b \quad (b \neq 0)$

$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると、P は直交行列で、$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

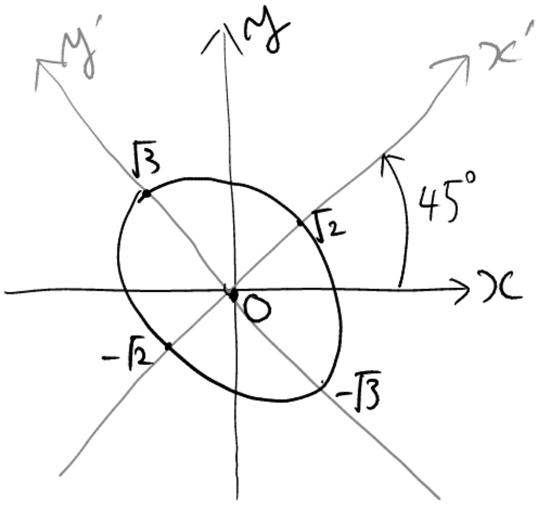
なお、固有ベクトルは固有方程式を用いて求めてもよい（2 次行列や 0 が多い場合は上記の方法が便利）。

(4)

(1) で得た式に $\vec{x'}$ を代入して、

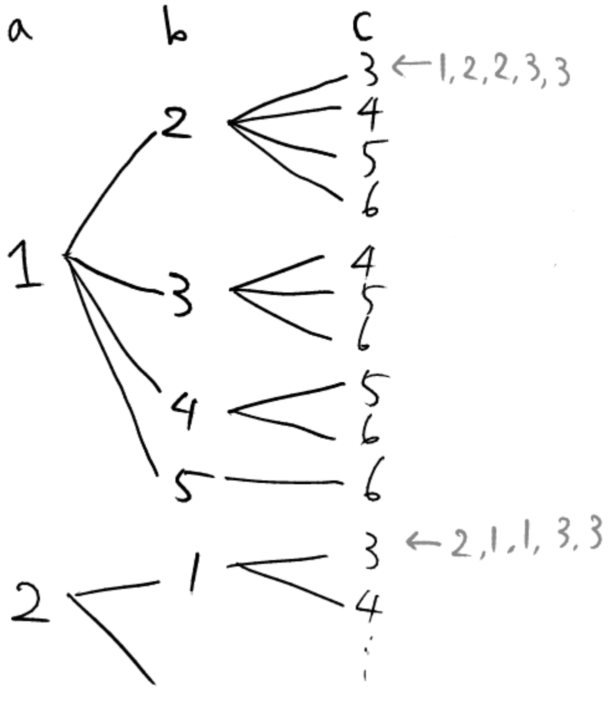
$$\begin{aligned} {}^t(P\vec{x'})AP\vec{x'} + c &= 0 \\ {}^t\vec{x'}{}^tPAP\vec{x'} + c &= 0 \\ {}^t\vec{x'}B\vec{x'} + c &= 0 (P^-1 = {}^tP) \\ 6(x')^2 - 4(y')^2 - 12 &= 0 \\ \left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{3}}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

この式は楕円を表す。ここで、$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$ で、これは回転行列。$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ だから、図示すると次の通り。



問題 3

3 種類の出る目を (a, b, c) とすると、5 回で出る目の組み合わせは (i) a, b, b, c, c か (ii) a, a, a, b, c の二通り。(i) で (a, b, c) の選び方を図示すると次の通り。



ここで、b と c（両方とも 2 回出る）を入れ替えたものは区別しないことに注意する。たとえば、$(a, b, c) = (1, 2, 3)$ と $(1, 3, 2)$ は区別しない。図より、$a = 1$ の場合は 10 通り。$a \geq 2$ も同じであるから、(i) での (a, b, c) の選び方は計 60 通り。(ii) の場合も同様に b, c（両方 1 回出る）を区別しないから、やはり選び方は

60 通り。

(1)

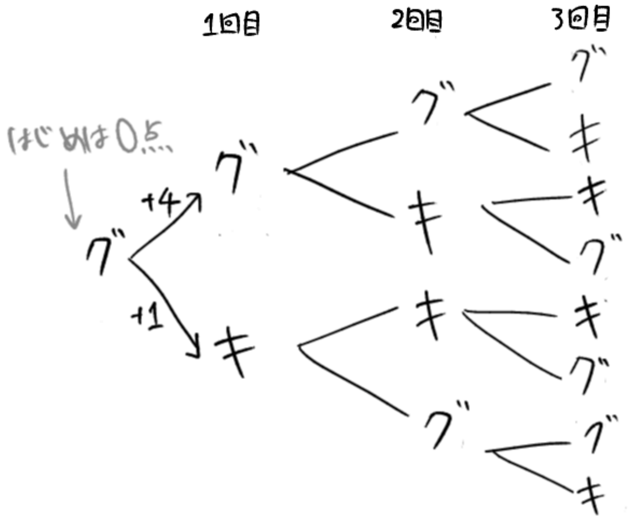
まず (a, b, c) の並べ方を考える。重複順列と見て、同じ文字に区別を設け (i) a, b_1, b_2, c_1, c_2 (ii) a_1, a_2, a_3, b, c とすると、並べ方は (i) $\frac{5!}{2!2!}$ 通り (ii) $\frac{5!}{3!}$ 通りとなる。このように a, b, c を並べたところに実際の出る目を入れていけばいいから、答えは $60 \times \frac{5!}{2!2!} + 60 \times \frac{5!}{3!} = 3000$ 通り。

(2)

順序を区別しない選び方だけを考えればいいので、$60 + 60 = 120$ 通り。

(3)

偶奇に注目して樹形図を描くと次のようになる（偶数を「グ」, 奇数を「キ」と略記)。上への移動は 3 以上の目が出た場合、下への移動は 2 以下の目が出ることに対応する。

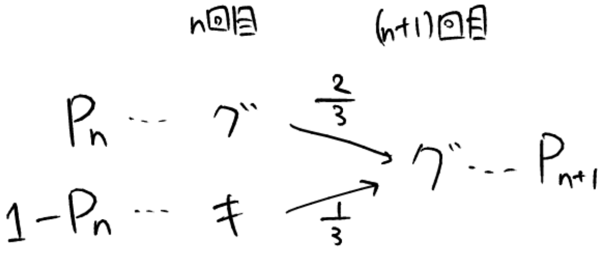


(a)

樹形図より、$P_1 = \frac{2}{3}$ また、$P_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{14}{27}$

(b)

前後の関係は次のように表される。



これを漸化式に起こす。

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{3}\left(1 - P_n\right) \\
&= \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

(c)

(b) で得た二項間漸化式を解く。特性方程式 $\alpha = \dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{1}{3}$ を解くと $\alpha = \dfrac{1}{2}$ を得る。これを使って漸化式を変形すると、

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{3}\left(P_n - \frac{1}{2}\right) \\
P_n - \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(P_0 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{2} \\
\therefore P_n &= \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}
\end{aligned}
$$