作成者: りーぜんと (Twitter: @50m_regent)

問題 1

(1)

$\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{t}}$ より、$x=\dfrac{1}{v(t)}+\dfrac{1}{t}$ を得る。これを与式に代入すると、$\dfrac{dv(t)}{dt}=4\dfrac{v(t)}{t}+2$ となる。

(2)

$\dfrac{d\bar{v}(t)}{dt}=4\dfrac{\bar{v}(t)}{t}$ を解くと、$\bar{v}(t)=t^4$ を得る。

(3)

$\dfrac{d}{dt}\left(C(t)\bar{v}(t)\right)=4\dfrac{C(t)\bar{v}(t)}{t}+\dfrac{dC(t)}{dt}t^4=4\dfrac{C(t)\bar{v}(t)}{t}+2\leftrightarrow\dfrac{dC(t)}{dt}=\dfrac{2}{t^4}$ となる。
これを解くと、$C(t)=-\dfrac{2}{3t^3}+C'$ を得る。

(4)

$x(t)=\dfrac{1}{v(t)}+\dfrac{1}{t}=\dfrac{3C't^3+1}{3C't^4-2t}$

(5)

$t=1$ を代入して、$\dfrac{3C'+1}{3C'-2}$ を得る。よって、$C'=\pm\infty$ のとき $x(1)=1$ となる。

問題 2

(1)

$F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1-b\end{pmatrix},F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\1+a-b\end{pmatrix}$ より、$F=\begin{pmatrix}a & b\\1-b & a\end{pmatrix}$

(2)

固有方程式は、$\det(A-\lambda E)=\lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2-b=0\ \therefore\lambda=a\pm\sqrt{b-b^2}$
これらが異なる実数値であるためには、a が実数かつ、$0<b<1$ であれば良い。

(3)

固有ベクトルを $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と表す。

$\lambda = a + \sqrt{b - b^2}$ について、

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+\sqrt{b-b^2})x \\ (a+\sqrt{b-b^2})y \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ \sqrt{1-b} \end{pmatrix} \ (C_1\text{は定数})$$

$\lambda = a + \sqrt{b - b^2}$ について、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-\sqrt{b-b^2})x \\ (a-\sqrt{b-b^2})y \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix} -\sqrt{b} \\ \sqrt{1-b} \end{pmatrix} \ (C_2\text{は定数})$$

$P = \begin{pmatrix} \sqrt{b} & -\sqrt{b} \\ \sqrt{1-b} & \sqrt{1-b} \end{pmatrix}$ とすれば、$P^{-1}FP = \begin{pmatrix} a+\sqrt{b-b^2} & 0 \\ 0 & a-\sqrt{b-b^2} \end{pmatrix}$ である。

(4)

$\begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ \sqrt{1-b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{b} \\ \sqrt{1-b} \end{pmatrix} = 1 - 2b = 0$ であれば良いので、$b = \dfrac{1}{2}$

(5)

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると、$Y = \begin{pmatrix} ax + \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{x}{2} + ay \end{pmatrix} \ \left(\because F = \begin{pmatrix} a & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & a \end{pmatrix}\right)$ であるので、$\dfrac{d_Y}{d_X}$ を計算すると、

$$\frac{d_Y}{d_X} = \sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2) + \frac{x^2+y^2}{4} + 2axy}{x^2+y^2}} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} + 2a\frac{xy}{x^2+y^2}}$$

となり、$\dfrac{xy}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$ に注意すると、$\dfrac{d_Y}{d_X}$ の最大値、

$$\frac{d_Y}{d_X} = \sqrt{a^2 + a + \frac{1}{4}} = a + \frac{1}{2} = a + b$$

を得る。

問題 3

(1)

$(1-p)^n(1-q)^n$

(2)

$$P(m) = {}_nC_m(1-p)^m(1-q)^m\{1-(1-p)(1-q)\}^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}(1-p)^m(1-q)^m(p+q-pq)^{n-m}$$

(3)

確率の総和なので、1

(4)

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{m=1}^{n} m \frac{n!}{m!(n-m)!}(1-p)^m(1-q)^m(p+q-pq)^{n-m} \\
&= n(1-p)(1-q)\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(m-1)!\{(n-1)-(m-1)\}!}(1-p)^{m-1}(1-q)^{m-1}(p+q-pq)^{(n-1)-(m-1)} \\
&= n(1-p)(1-q)\sum_{m=1}^{n} {}_{n-1}C_{m-1}\{(1-p)(1-q)\}^m\{1-(1-p)(1-q)\}^{n-m}
\end{aligned}
$$

二項定理を考えると、総和部分は $\{(1-p)(1-q)+1-(1-p)(1-q)\}^n = 1$ であるので、$E = n(1-p)(1-q)$

(5)

$P(m+1) < P(m)$ を満たす最小の m を考える。(2) より、

$$
P(m+1) < P(m) \leftrightarrow (n+1)(1-p)(1-q) - 1 < m \leftrightarrow m > 970.1702 \;\; \therefore m = 971
$$