作成者: りーぜんと (Twitter: @50m_regent)

1

極値では、$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \wedge \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq 0$ を満たす。偏微分を行うと、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2 - 2y - 3 = 0 \leftrightarrow 2y = 6x^2 - 3 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -2x - 2y + 1 = 0 \leftrightarrow 2y = -2x + 1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 12x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2 \qquad \leftrightarrow x < -\frac{1}{6} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -2
\end{aligned}
$$

である。これらを解いて、$(x, y) = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$ を得る。この点で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ であることを鑑みると、極大値を取ることがわかり、その値は $\dfrac{13}{4}$ である。

2

$x^2 + 2xy + 5y^2 = (x+y)^2 + 4y^2$ である。$x + y = z$ とおくと、$D = \{(z, y) | z^2 + 4y^2 \leq 1\}$ となるので、

$$
I = \iint_D z^2 \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(z, y)}\right| dzdy = \iint_D z^2 dzdy
$$

と変換できる。次に $z = r\cos\theta, 2y = r\sin\theta$ とおくと、$D = \{(r, \theta) | r^2 \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ となるので、

$$
I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta \left|\frac{\partial(z, y)}{\partial(r, \theta)}\right| drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta drd\theta
$$

と変換できる。これを解いて、$\dfrac{\pi}{8}$ を得る。

3

(1)

固有方程式は、

$$
\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & -4-\lambda & 2 \\ -3 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0
$$

である。これを解いて、$\lambda = -2, 1, 4$

(2)

$\lambda = -2$ について、

$$A\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\-5 & -4 & 2\\-3 & -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2x\\-2y\end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$

斉次形の特性方程式は、$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ である。これを解いて、$\lambda = -1, 2$、斉次形の解

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \ (C_1, C_2 \text{は定数})$$

を得る。次に特解を $e^{2x}(Ax + Bx^2)$ とおいて元の式に代入すると、

$$3e^{2x}(A + 2Bx) + 2Be^{2x} = 18xe^{2x} \leftrightarrow A = -2, B = 3$$

を得る。さらに初期条件より、

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \leftrightarrow C_1 = -C_2$$
$$\frac{dy}{dx}(0) = -C_1 + 2C_2 - 2 = 0 \leftrightarrow C_1 = -\frac{2}{3}, C_2 = \frac{2}{3}$$

であるので最終的に、

$$y = e^{2x}\left(3x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}e^{-x}$$

を得る。