作成者: りーぜんと (Twitter: @50m_regent)

問題 1

(1)

与式の両辺を x で微分する。

$$2z\frac{\partial z}{\partial x}+z+(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x}-4x=0 \ \therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x-z}{x+2y+2z}$$

同様に与式の両辺を y で微分する。

$$2z\frac{\partial z}{\partial y}+2z+(x+2y)\frac{\partial z}{\partial y}-1-y=0 \ \therefore \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-2z+1}{x+2y+2z}$$

(2)

停留点を求める。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0 \leftrightarrow 4x-z=y-2z+1=0 \ \therefore y=8x-1, z=4x$$

これを満たす点で極値を取ることがわかっているので、与式に代入する。

$$(4x)^2+(x+2(8x-1))\cdot 4x-(4+2x^2+8x-1+\frac{(8x-1)^2}{2})=0$$
$$\leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{4+\sqrt{191}}{50},\frac{-9+4\sqrt{191}}{25}\right), z=\frac{8+2\sqrt{191}}{25} \ (\because z\geq 0)$$

(3)

$f(x,y)=x+y-1=0$ とおくと、$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=1, y=1-x$

$\dfrac{\partial z}{\partial f}=\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\dfrac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ であるので、(1) より、$4x-z=y-2z+1 \leftrightarrow 4x-y+z-1=0$

$y=1-x$ を代入すると、$z=2-5x$ を得る。与式に代入して、

$$(2-5x)^2+\{x+2(1-x)\}(2-5x)-(4+2x^2+1-x+\frac{(1-x)^2}{2})=0$$
$$\leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{1}{11},\frac{10}{11}\right), z=\frac{17}{11} \ (\because z\geq 0)$$

問題 2

(1)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)

固有方程式は、$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0 \ \therefore \lambda = 1, 3, 4$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表す。

$\lambda = 1$ について、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (C_1\text{は定数})$$

$\lambda = 3$ について、

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (C_2\text{は定数})$$

$\lambda = 4$ について、

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \ (C_3\text{は定数})$$

(3)

(2) より、$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(4)

$\mathbf{x}_n = A^{n-1}\mathbf{x}_1$ である。A^{n-1} を求める。(3) より、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$ なので、

$$A^{n-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 - 3^n + 4^{n-1} & -2 + 3^n - 4^{n-1} & -1 + 3^{n-1} \\ 3 - 3^n & -2 + 3^n & -1 + 3^{n-1} \\ -3^n + 3 \cdot 4^{n-1} & 3^n - 3 \cdot 4^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

よって、$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3^n+4^{n-1} & -2+3^n-4^{n-1} & -1+3^{n-1} \\ 3-3^n & -2+3^n & -1+3^{n-1} \\ -3^n+3\cdot 4^{n-1} & 3^n-3\cdot 4^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2\cdot 3^{n-1} \\ -1+2\cdot 3^{n-1} \\ 2\cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}$

問題 3

(1)

$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap \bar{C}) = P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C})$ □

(2)

(1) における A を $A \cap B$ とすると、

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \cap B|C)P(C) + P(A \cap B|\bar{C})P(\bar{C}) \\ &= P(A|C)P(B|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(B|\bar{C})P(\bar{C}) \end{aligned}$$

□

(3)

(1) の式に $P(A|C) = P(A|\bar{C})$ を代入すると、$P(A) = P(A|C)(P(C) + P(\bar{C})) = P(A|C)$ となり、A と C は独立である。 □

(4)

(1) より、$P(A|\bar{C}) = \dfrac{P(A) - P(A|C)P(C)}{P(\bar{C})}, P(B|\bar{C}) = \dfrac{P(B) - P(B|C)P(C)}{P(\bar{C})}$
(2) の式と、A と B が独立であることより、

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A)P(B) &= P(A|C)P(B|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(B|\bar{C})P(\bar{C}) \\ &= P(A|C)P(B|C)P(C) + \frac{\{P(A) - P(A|C)P(C)\}\{P(B) - P(B|C)P(C)\}}{P(\bar{C})} \end{aligned}$$

両辺に $P(\bar{C})$ を掛けて整理する。

$$\begin{aligned} &-P(A)P(B)P(C) = P(A|C)P(B|C)P(C) - P(A)P(B|C)P(C) - P(A|C)P(B)P(C) \\ &\leftrightarrow \{P(A) - P(A|C)\}\{P(B) - P(B|C)\}P(C) = 0 \\ &\leftrightarrow P(A) = P(A|C) \vee P(B) = P(B|C) \ (\because P(C) \neq 0) \end{aligned}$$

これより、A と C が独立であるか、または B と C が独立であることがわかる。 □