作成者: りーぜんと (Twitter: @50m_regent)

問題 1

(1)

ロピタルの定理を繰り返し適用する。

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-(1-x+x^2)}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{(1+x)^2}-(-1+2x)}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{(1+x)^3}-2}{6}=0\end{aligned}$$

□

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=0\end{aligned}$$

□

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\left(1-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^3}}$$ と変形し、$\dfrac{1}{n}=x$ とすれば、(1)(a) と同様にこれは 0 である。 □

(3)

(2) の式と比較して以下の関係が得られる。

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}\right)\right\}\geq\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\left(1-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}}$$

また、$\dfrac{1}{n}=x$ として (1)(b) の式と比較すると以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^2\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}\right)\right\} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e\left(1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{11}{24}x^2\right)}{x^2}\\ &\leq \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2}\end{aligned}$$

これらより、はさみうちの定理を適用すると、与式が示される。 □

問題 2

(1)

固有方程式は次のようになる。

$$\det(A-\lambda E)=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0 \ \therefore \lambda=\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2}$$

$(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+b^2$ であるので、A が異なる固有値を持つための条件は、$a\neq c \vee b\neq 0$

A の異なる固有値 λ_1, λ_2 それぞれに対する固有列ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とする。

$$\begin{aligned}&{}^t(A\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_2={}^t\boldsymbol{x}_1{}^tA\boldsymbol{x}_2={}^t\boldsymbol{x}_1A\boldsymbol{x}_2\ (\because A={}^tA)\\ &\leftrightarrow \lambda_1\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2\ (\because A\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2)\\ &\leftrightarrow \boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2=0\ (\because \lambda_1\neq\lambda_2)\end{aligned}$$

これより、異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。

(2)

標準化を行う。

$$7x^2-4xy+7y^2=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=5X^2+9Y^2=9\leftrightarrow\frac{X^2}{\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}+Y^2=1,$$

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4}\\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

これは楕円を回転させた図形なので、図 1 のように描ける。

(3)

$g(x,y)=x^2+y^2-1$ とすると、$\dfrac{\partial g}{\partial x}=2x, \dfrac{\partial g}{\partial y}=2y$

$g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ の極値を求める。ラグランジュの乗数法を用いると、

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial x}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}\leftrightarrow(4x+dy)\cdot 2y=(dx+6y)\cdot 2x\leftrightarrow dx^2+2xy-dy^2=0$$

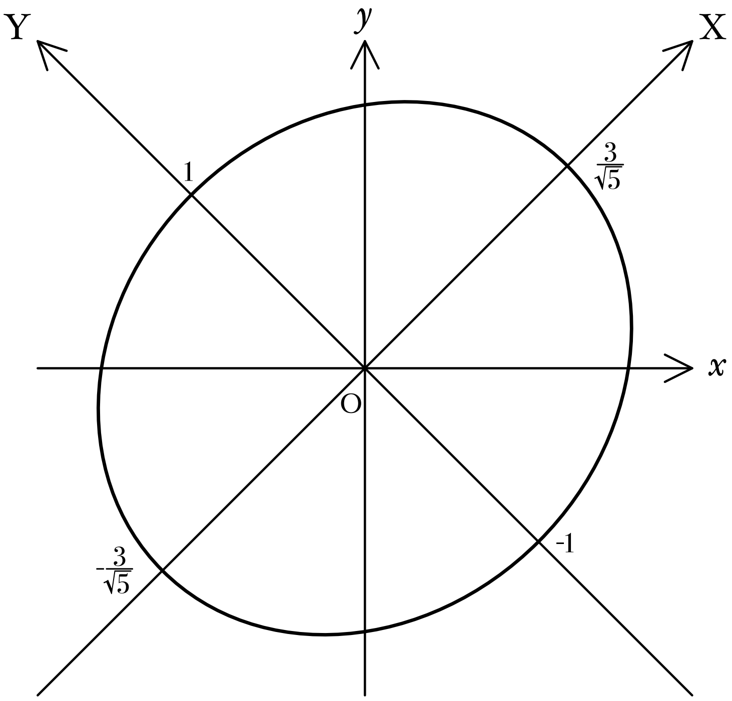

図 1　$7x^2 - 4xy + 7y^2 = 9$

$g(x, y) = 0$ より、$y^2 = 1 - x^2, y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ であるので、これを代入して、

$$2dx^2 \pm 2x\sqrt{1-x^2} - d = 0 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{d^2+1}}}{2}}, y = \pm\sqrt{\frac{1 \mp \frac{1}{\sqrt{d^2+1}}}{2}} \text{ (複号同順)}$$

与式に代入して、最大値 $\frac{1}{2}\left(5 + \frac{1}{\sqrt{d^2+1}} + d\sqrt{1 - \frac{1}{d^2+1}}\right)$, 最小値 $\frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{\sqrt{d^2+1}} - d\sqrt{1 - \frac{1}{d^2+1}}\right)$ を得る。

問題 3

(1)

$\frac{8}{33} = 0.\dot{2}\dot{4}$ であるので、$x_n \leq 0.24$ であれば良い。そのような x_n の場合の数は 21 なので、$\frac{21}{64}$

(2)

$x_{n-2} < 0.\dot{2}\dot{4}$ かつ $x_n > 0.\dot{2}\dot{4}$ である確率を p_{n-2} から引けば良い。
そのような確率は $\frac{1 - p_2}{8^{n-2}} = \frac{43}{8^n}$ なので、$p_n = p_{n-2} - \frac{43}{8^n}$

(3)

(2) より、

$$
\begin{aligned}
p_n &= p_{n-2} - \frac{43}{8^n} \\
\leftrightarrow 8^n p_n &= 64 \cdot 8^{n-2} p_{n-2} - 43 \\
\leftrightarrow 8^n p_n - \frac{43}{63} &= 64 \left(8^{n-2} p_{n-2} - \frac{43}{63} \right) = 8^{n-2} \left(64 p_2 - \frac{43}{63} \right) = 8^{n-2} \frac{1280}{63} \\
\leftrightarrow p_n &= \frac{20}{63} + \frac{43}{63 \cdot 8^n}
\end{aligned}
$$