東京大学 H27 数学 @GLOBAL_SHUHEI

1 大問 1

(1)(a)特性方程式は、

$$\lambda^2-(a+2)\lambda+2a=0$$

$$\lambda=\frac{a+2\pm\sqrt{(a+2)^2-4\cdot 2a}}{2}$$

$$=\frac{a+2\pm\sqrt{a^2-4a+4}}{2}$$

$$=\frac{a+2\pm\sqrt{(a-2)^2}}{2}$$

$$=\frac{a+2\pm(\mathrm{a}-2)}{2}$$

$$=a,2$$

求める一般解は、$y=C_1e^{ax}+C_2e^{2x}\qquad \left(C_1,C_2 は任意定数\right)$

(b)A を定数として、一つの解を$y=Ae^{-3x}$と予想する。$\frac{dy}{dx}=-3Ae^{-3x},\frac{d^2y}{dx^2}=9Ae^{-3x}$

方程式に代入すると、$9Ae^{-3x}+3(a+2)Ae^{-3x}+2aAe^{-3x}=5e^{-3x}$

$$(5a+15)Ae^{-3x}=5e^{-3x}$$

$$A=\frac{1}{a+3}\quad(\because a<0)$$

求める一般解は、$y=C_1e^{ax}+C_2e^{2x}+\frac{1}{a+3}e^{-3x}\qquad \left(C_1,C_2 は任意定数\right)$

(2)$x=e^t$と置換すると、以下の方程式を得る。

$$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=0$$

この方程式の一般解は、$y=C_1e^{3t}+C_2e^{2t}\left(C_1,C_2 は任意定数\right)$

求める一般解は、$y=C_1x^3+C_2x^2$

(3)行列を用いると、問の方程式は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dy_1}{dx}\\ \frac{dy_2}{dx}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 14 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

左辺の行列は正則であるから、$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$を左から掛けると、

$$\begin{pmatrix}\frac{dy_1}{dx}\\ \frac{dy_2}{dx}\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 14 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}6 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix} = A$とする。

Aを対角化すると、対角化行列を$P = \begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$として、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

そこで、両辺に左からP^{-1}を掛け、$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$と置換する。

$$P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{dy_1}{dx}\\ \frac{dy_2}{dx}\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}6 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}PP^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{dz_1}{dx}\\ \frac{dz_2}{dx}\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}6 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$$

方程式に直すと、$\begin{cases}\frac{dz_1}{dx} = 3z_1\\ \frac{dz_2}{dx} = 4z_2\end{cases}$

これを解くと、$\begin{cases}z_1 = C_1e^{3x}\\ z_2 = C_2e^{4x}\end{cases}$　　$\left(C_1, C_2\text{は任意定数}\right)$

よって、

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6z_1 + 3z_2\\ -2z_1 + z_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}y_1 = 6C_1e^{3x} + 3C_2e^{4x}\\ y_2 = -2C_1e^{3x} + C_2e^{4x}\end{cases}$$

2　大問 2

(1) (a)$p^3(1-p)^2$

(b)$f(p)=\ {}_5C_3p^3(1-p)^2=10p^3(1-p)^2$

(c)$\frac{df}{dp}=30p^2(1-p)^2-20p^3(1-p)$

$=10p^2(1-p)(3(1-p)-2p)$
$=10p^2(1-p)(3-5p)$
$0<p<1$であるから、$f(p)$の極値は$p=\frac{3}{5}$のみであり

$$\lim_{p\to 0}f(p)=\lim_{p\to 1}f(p)=0$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{10\cdot 3^3\cdot 2^2}{5^5}>0$$

である。よって、$f(p)$は$p=\frac{3}{5}$で最大となる。

(2) (a)表が 3 回あるいは 4 回出る確率を求めればよい。

$$\begin{aligned}g(p)&=\ {}_4C_3p^3(1-p)+\ {}_4C_4p^4\\&=4p^3(1-p)+p^4\\&=4p^3-3p^4\\&=p^3(4-3p)\end{aligned}$$

(b)$\frac{dg(p)}{dp}=12p^2(1-p)$

$g(p)$は $0<\mathrm{p}<1$ で極値を持たない。

また、$\frac{dg\left(\frac{1}{2}\right)}{dp}=12\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{12}{2^3}>0$より、$g(p)$は $0<\mathrm{p}<1$ で単調増加である。

$$g\left(\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(4-3\cdot\frac{3}{5}\right)=\frac{297}{625}<\frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(4-3\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{27}>\frac{1}{2}$$

よって、中間値の定理より、

$$g(p)=\frac{1}{2}\to\frac{3}{5}<p<\frac{2}{3}$$

3　大問 4

(1)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 10$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 20i$$

$$e^{2iz} - 20ie^{iz} - 1 = 0$$

$$e^{iz} = 10i \pm \sqrt{(-10i)^2 + 1}$$

$$= \left(10 \pm \sqrt{99}\right)i$$

$$iz = \log\left(10 \pm \sqrt{99}\right) i$$

$$= \log\left(10 \pm \sqrt{99}\right) + i\frac{\pi}{2}$$

$$z = \frac{\pi}{2} - i \log\left(10 \pm \sqrt{99}\right)$$

(2)

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i\left(0+i\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi\right)} = e^{-\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi} (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$3^i = e^{i \log 3} = e^{i(\log 3 + i2n\pi)} = e^{-2n\pi}(\cos(\log 3) + i \sin(\log 3))$$

(3)$\frac{1}{z^2+1}$の特異点は、$z = i, -i$

各特異点における留数を計算すると、

$$Res(i) = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

$$Res(-i) = \frac{i}{2}$$

図の 1~8 のようにとった積分路 C について、積分路を反対に回った時は元の積分値の-1 倍になることに注意すると、留数定理より、

1:与式=$2\pi i Res(i) = \pi$

2:与式=$-\pi$

3:与式=$2\pi i Res(-i) = -\pi$

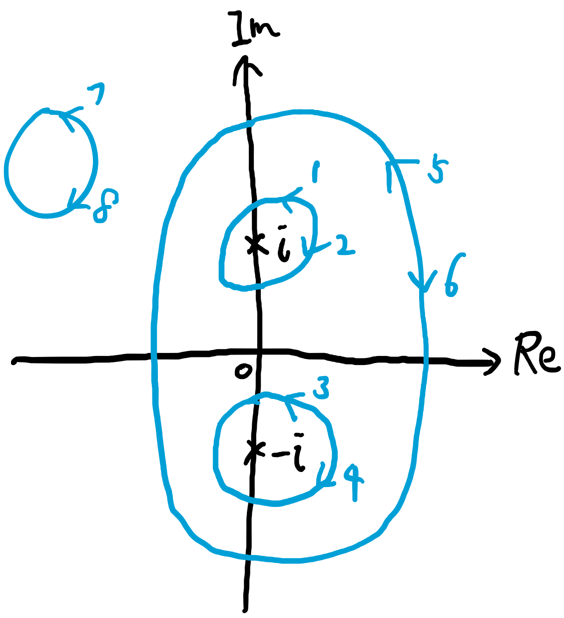
4:与式=π

5:与式=$2\pi i\left(Res(i) + Res(-i)\right) = 0$

6:与式=0

7:与式=0

8:与式=0



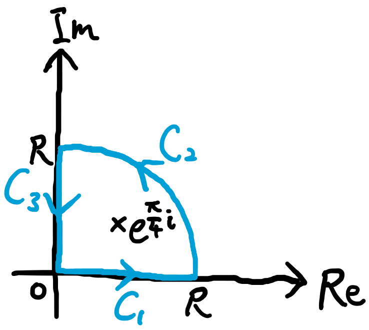
(4)$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

収束域が$1<|z|<2$のとき、$\frac{1}{2}<\left|\frac{z}{2}\right|<1$かつ$\frac{1}{2}<\left|\frac{1}{z}\right|<1$

$$\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right)-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\cdots\right)$$

収束域が$2<|z|$のとき、$\left|\frac{2}{z}\right|<1$、$\left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2}<1$



$$\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\cdots\right)-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\cdots+\frac{2^n-1}{z^n}+\cdots$$

(5)図のように積分路C_1,C_2,C_3を定め、$\mathrm{C}=\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3$とし、$\mathrm{f(x)}=\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}^4}$とおき、

$\int_{\mathrm{C}}\mathrm{f(z)dz}=\mathrm{I},\int_{\mathrm{C_i}}\mathrm{f(z)dz}=\mathrm{I_i}(\mathrm{i}=1,2,3)$とする。また、$\mathrm{R}>1$とする。

積分路Cの内部にある$f(z)$の極は、$z=e^{i\frac{\pi}{4}}$（1 位の極）

$$Res\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\left(z-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\frac{z}{1+z^4}=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\frac{z}{\frac{1+z^4}{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}}=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 2}}=\frac{1}{4i}$$

留数定理より、$I=2\pi iRes\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi}{2}$

次に、I_2について、$z=Re^{i\theta}$とおく。$dz=iRe^{i\theta}d\theta$

$$|I_2|\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{Re^{i\theta}}{1+R^4e^{i4\theta}}\right|\left|iRe^{i\theta}\right|d\theta\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2}{R^4-1}d\theta=\frac{R^2}{R^4-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{R^2-\frac{1}{R^2}}\to 0\left(R\to\infty\right)$$

以上より、$I_2\to 0\left(R\to\infty\right)$

I_3について、$z=ix$とおく。$dz=idx$

$$I_3=\int_R^0\frac{ix}{1+(ix)^4}idx=\int_0^R\frac{x}{1+x^4}dx=I_1$$

よって、$I = I_1 + I_2 + I_3 = 2I_1 + I_2 \to 2I_1 \left(R \to \infty\right)$

求める積分値は、$\lim_{R\to\infty} I_1 = \frac{I}{2} = \frac{\pi}{4}$

4　大問 5

(1)$(x+1)(x-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
(2)ケーリー・ハミルトンの定理より、$A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$
よって、$A^3 = 2A^2 + A - 2I$

また、両辺に A をかけると、$A^4 = 2A^3 + A^2 - 2A = 2(2A^2 + A - 2I) + A^2 - 2A = 5A^2 - 4I$

(3)$A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI$の両辺に$A$をかけると、

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= a_nA^3 + b_nA^2 + c_nA \\ &= a_n(2A^2 + A - 2I) + b_nA^2 + c_nA \\ &= (2a_n + b_n)A^2 + (a_n + c_n)A + (-2a_n)I \end{aligned}$$

以上より、$a_{n+1} = 2a_n + b_n$、$b_{n+1} = a_n + c_n$、$c_{n+1} = (-2a_n)$

(4)$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$と表せる。
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$ とする。Bは$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$として、$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$と対角化できる。このとき$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$である。

$$\begin{aligned} B^n &= P(P^{-1}BP)^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 + 8\cdot 2^n + (-1)^n & -3 + 4\cdot 2^n - (-1)^n & -3 + 2\cdot 2^n + (-1)^n \\ -3 - 3(-1)^n & 3 + 3(-1)^n & 3 - 3(-1)^n \\ -6 - 8\cdot 2^n + 2(-1)^n & 6 - 4\cdot 2^n - 2(-1)^n & 6 - 2\cdot 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 + 8\cdot 2^n + (-1)^n & -3 + 4\cdot 2^n - (-1)^n & -3 + 2\cdot 2^n + (-1)^n \\ -3 - 3(-1)^n & 3 + 3(-1)^n & 3 - 3(-1)^n \\ -6 - 8\cdot 2^n + 2(-1)^n & 6 - 4\cdot 2^n - 2(-1)^n & 6 - 2\cdot 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 + 2 \cdot 2^n + (-1)^n \\ 3 - 3(-1)^n \\ 6 - 2 \cdot 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$$