

作成者: リーゼんと (Twitter: @50m_regent)

問題 1

(1)

与式の両辺を x で微分する。

$$2z \frac{\partial z}{\partial x} + z + (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - 4x = 0 \quad \therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x - z}{x + 2y + 2z}$$

同様に与式の両辺を y で微分する。

$$2z \frac{\partial z}{\partial y} + 2z + (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial y} - 1 - y = 0 \quad \therefore \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y - 2z + 1}{x + 2y + 2z}$$

(2)

停留点を求める。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 4x - z = y - 2z + 1 = 0 \quad \therefore y = 8x - 1, z = 4x$$

これを満たす点で極値を取ることがわかっているので、与式に代入する。

$$\begin{aligned} & (4x)^2 + (x + 2(8x - 1)) \cdot 4x - (4 + 2x^2 + 8x - 1 + \frac{(8x - 1)^2}{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow (x, y) &= \left(\frac{4 + \sqrt{191}}{50}, \frac{-9 + 4\sqrt{191}}{25} \right), z = \frac{8 + 2\sqrt{191}}{25} \quad (\because z \geq 0) \end{aligned}$$

(3)

$$f(x, y) = x + y - 1 = 0 \text{ とおくと、 } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1, y = 1 - x$$

$$\frac{\partial z}{\partial f} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \text{ であるので、(1) より、 } 4x - z = y - 2z + 1 \Leftrightarrow 4x - y + z - 1 = 0$$

$y = 1 - x$ を代入すると、 $z = 2 - 5x$ を得る。与式に代入して、

$$\begin{aligned} & (2 - 5x)^2 + \{x + 2(1 - x)\}(2 - 5x) - (4 + 2x^2 + 1 - x + \frac{(1 - x)^2}{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow (x, y) &= \left(\frac{1}{11}, \frac{10}{11} \right), z = \frac{17}{11} \quad (\because z \geq 0) \end{aligned}$$

問題 2

(1)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)

固有方程式は、 $\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda) = 0 \therefore \lambda = 1, 3, 4$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表す。

$\lambda = 1$ について、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C_1 \text{は定数})$$

$\lambda = 3$ について、

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_2 \text{は定数})$$

$\lambda = 4$ について、

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (C_3 \text{は定数})$$

(3)

$$(2) \text{ より、 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\mathbf{x}_n = A^{n-1} \mathbf{x}_1 \text{ である。 } A^{n-1} \text{ を求める。 (3) より、 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ なる}$$

ので、

$$A^{n-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 - 3^n + 4^{n-1} & -2 + 3^n - 4^{n-1} & -1 + 3^{n-1} \\ 3 - 3^n & -2 + 3^n & -1 + 3^{n-1} \\ -3^n + 3 \cdot 4^{n-1} & 3^n - 3 \cdot 4^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{よって、} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3^n + 4^{n-1} & -2 + 3^n - 4^{n-1} & -1 + 3^{n-1} \\ 3 - 3^n & -2 + 3^n & -1 + 3^{n-1} \\ -3^n + 3 \cdot 4^{n-1} & 3^n - 3 \cdot 4^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot 3^{n-1} \\ -1 + 2 \cdot 3^{n-1} \\ 2 \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

問題 3

(1)

$$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap \bar{C}) = P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C}) \quad \square$$

(2)

(1) における A を $A \cap B$ とすると、

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \cap B|C)P(C) + P(A \cap B|\bar{C})P(\bar{C}) \\ &= P(A|C)P(B|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(B|\bar{C})P(\bar{C}) \end{aligned}$$

\square

(3)

(1) の式に $P(A|C) = P(A|\bar{C})$ を代入すると、 $P(A) = P(A|C)(P(C) + P(\bar{C})) = P(A|C)$ となり、 A と C は独立である。 \square

(4)

$$(1) \text{ より、} P(A|\bar{C}) = \frac{P(A) - P(A|C)P(C)}{P(\bar{C})}, P(B|\bar{C}) = \frac{P(B) - P(B|C)P(C)}{P(\bar{C})}$$

(2) の式と、 A と B が独立であることより、

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) = P(A|C)P(B|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(B|\bar{C})P(\bar{C}) \\ &= P(A|C)P(B|C)P(C) + \frac{\{P(A) - P(A|C)P(C)\}\{P(B) - P(B|C)P(C)\}}{P(\bar{C})} \\ \Leftrightarrow -P(A)P(B)P(C) &= \{P(A|C)P(B|C) - P(A)P(B|C) - P(A|C)P(B)\}P(C) + P(A|C)P(B|C)P(C)^2 \\ &\Leftrightarrow \{P(A) - P(A|C)\}\{P(B) - P(B|C)\} = 0 \\ &\Leftrightarrow P(A) = P(A|C) \vee P(B) = P(B|C) \end{aligned}$$

これより、 A と C が独立であるか、または B と C が独立であることがわかる。 \square