作成者: りーぜんと (Twitter: @50m_regent)

問題 1

(1)

(a)

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= y_1\frac{d^2y_2}{dt^2} - \frac{d^2y_1}{dt^2}y_2 \\
&= y_1\left\{-a(t)\frac{dy_2}{dt} - b(t)y_2\right\} - y_2\left\{-a(t)\frac{dy_1}{dt} - b(t)y_1\right\} \\
&= -a(t)z \\
\therefore z &= z(0)e^{-\int_0^t a(s)ds}
\end{aligned}
$$

(b)

条件 (*) より、$\dfrac{dy_1}{dt}(0) > 0$ であり、$z(0) < 0 \therefore z < 0$

また、$\dfrac{dy_1}{dt}(1) < 0$ であるので、$z(1) < 0$ であるためには $y_2(1) < 0$ である。 □

(2)

(a)

y_2 は常に正であると仮定する。条件 (*) より、$\dfrac{y_1}{y_2}$ は $t = 0, 1$ で 0、それ以外で正となる。ロルの定理より、$[0, 1]$ において $\dfrac{d}{dt}\dfrac{y_1}{y_2} = -\dfrac{W(y_1, y_2)}{y_2^2}$ は少なくとも一回は 0 となる。よって $W(y_1, y_2) = 0$ となる t が $[0, 1]$ に存在するので、y_1, y_2 は線形従属である。$y_2 = Cy_1$ として与式に代入すると、

$$
\frac{d^2y_1}{dt^2} + a\frac{dy_1}{dt} + b_1y_1 = C\left\{\frac{d^2y_1}{dt^2} + a\frac{dy_1}{dt} + b_1y_1\right\} = 0 \leftrightarrow y_1 = 0\ (\because b_1 < b_2)
$$

これは条件 (*) と矛盾するので、y_2 は常に正ではない。中間値の定理より、y_2 は $[0, 1]$ で少なくとも一回は 0 となる。 □

(b)

$a(t) = 0$ として 2 つの式を解くと、

$$
y_1 = C_1\sin\left\{\sqrt{b_1}t\right\}\ (\because y_1(0) = 0), y_2 = C_2\cos\left\{\sqrt{b_2}t\right\} + C_3\sin\left\{\sqrt{b_2}t\right\}
$$

となる。$y_1(1) = 0$ とするために $b_1 = \pi^2$ とする。

ここで、$y_2(0) > 0$ であるので $C_2 > 0$ である。$b_2 = 4\pi^2$ とすれば $y_2(1) > 0$ となる。

$$
\therefore a(t) = 0, b_1(t) = \pi^2, b_2(t) = 4\pi^2
$$

問題 2

(1)

固有方程式は次のようになる。

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda(\lambda+3)^2 = 0 \ \therefore \lambda = 0, -3$$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表す。

$\lambda = 0$ について、

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (C_1\text{は定数})$$

$\lambda = -3$ について、

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ (C_2, C_3\text{は定数})$$

よって、$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ とできる。

(2)

$Q^{-1}BQ = aI + bQ^{-1}AQ = E$ であるので、$Q = P$ とすれば、$E = aI + bD = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-3b & 0 \\ 0 & 0 & a-3b \end{pmatrix}$

(3)

$x = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ とする。$\alpha+\beta+\gamma = \alpha p + \beta q + \gamma r$ が任意の p, q, r で成り立つためには、

$\alpha = \beta = \gamma = 0 \therefore C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であれば良い。

(2) より、$B^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} a^n + 2(a-3b)^n & a^n - (a-3b)^n & a^n - (a-3b)^n \\ a^n - (a-3b)^n & a^n + 2(a-3b)^n & a^n - (a-3b)^n \\ a^n - (a-3b)^n & a^n - (a-3b)^n & a^n + 2(a-3b)^n \end{pmatrix}$ であるので、

$$B^n x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \{a^n + 2(a-3b)^n\}p + \{a^n - (a-3b)^n\}q + \{a^n - (a-3b)^n\}r \\ \{a^n - (a-3b)^n\}p + \{a^n + 2(a-3b)^n\}q + \{a^n - (a-3b)^n\}r \\ \{a^n - (a-3b)^n\}p + \{a^n - (a-3b)^n\}q + \{a^n + 2(a-3b)^n\}r \end{pmatrix}$$

$$\therefore ||B^n x||_1 = a^n ||x||_1$$

これが n に依存したいためには、$a = 0, 1$ であれば良い。

(4)

(3) より、$\lim_{n\to\infty}(a-3b)^n(p-q)=0$ となればよいので、$|a-3b|<1$ であれば良い。

問題 3

(1)

(a)

$(0,0,3),(0,1,2),(0,2,1),(0,3,0),(1,0,2),(1,1,1),(1,2,0),(2,0,1),(2,1,0),(3,0,0)$

(b)

(a) より、$(0,2,1),(2,1,0)$

(2)

(a)

$n=1$ の場合はその箱にすべてのボールを入れざるを得ないので、$S(m,n)=1$ である。

$n>1$ の場合、一つ目の箱に $m-i$ 個のボールを入れるとすると、残りの i 個のボールを残りの $n-1$ 個の箱に入れるので、分け方の総数は $S(i,n-1)$ すべての i について総和を取れば $S(m,n)$ になるので、$S(m,n)=\sum_{i=0}^{m}S(i,n-1)$ □

(b)

$S(m,n)$ は m 個のボールと $n-1$ 個の仕切りを並べる場合の数であるので、$S(m,n)={}_{m+n-1}C_{n-1}$ である。 □

(3)

右側 $n-3$ 個の箱にボールを分け方の総数は $S(m,n-3)$ 個。$(0,0,0,m,0,\cdots,0)$ はそのような分け方を辞書順に並べた場合に最後になるので、$S(m,n-3)$ 番目である。

左から 3 個目の箱に 1 つボールをいれ、残りをそれより右の箱に分ける分け方の総数は $S(m-1,n-3)$ 個。$(0,0,1,m-1,0,\cdots,0)$ はそのような分け方を辞書順に並べた場合に最後になるので、$S(m-1,n-3)$ 番目である。

分け方を辞書順に並べたときに、後者の分け方は前者の分け方の直後に続くので、$(0,0,1,m-1,0,\cdots,0)$ は、$S(m,n-3)+S(m-1,n-3)=\frac{(m+n-4)!}{(n-4)!m!}(2m+n-3)$ 番目である。