作成者: りーぜんと (Twitter: @50m_regent)

$\boxed{1}$

(1)

偏微分を行うと、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2 + 6xy + 22x + 6y - 12 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 6x + 6y = 0$$

である。これを解いて、$(x, y) = (1, -1), (0, 2), (3, -3), (-5, -3)$ を得る。

(2)

2 階偏微分を行うと、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x + 6y + 22$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y + 6$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x + 6$$

である。極値は (1) の点の中で $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \geq 0$ を満たす点で取り得る。

$$\begin{vmatrix} 4x + 6y + 22 & 6x + 6 \\ 6x + 6 & -6y + 6 \end{vmatrix} = -3x^2 - 4x - 2xy - 3y^2 - 8y + 8 \geq 0 \leftrightarrow (x, y) = (1, -1)$$

$(1, -1)$ では $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ なので、極小値 $-\dfrac{16}{3}$ を取るとわかる。

$\boxed{2}$

両曲面の共通部分の曲線は、$z = -x^2 - 2y = y^2 - 3 \leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 4$ なので、積分範囲 S は $S = \{(x, y) | x^2 + (y + 1)^2 \leq 4\}$ と取れる。S 内において、$-x^2 - 2y \leq y^2 - 3$ なので、

$$V = \iint_S (x^2 + 2y + y^2 - 3) dxdy$$

である。極座標変換を施して、

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_S (x^2+2y+y^2-3)dxdy \\
&= \iint_S \{x^2+(y+1)^2-4\}dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (r^2-4)rd\theta dr \\
&= 8\pi^3(\pi^2-2)
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

固有方程式を解くと、

$$
\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \leftrightarrow \lambda = -1, 2
$$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする。

$\lambda=-1$ について、

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\ (C_1\text{は定数})
$$

$\lambda=2$ についても同様に、

$$
\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\ (C_2\text{は定数})
$$

これらの固有ベクトルを用いて、

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}
$$

と表せるので、

$$
A^n = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\right\}^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4(-1)^n-2^n & (-1)^n-2^n \\ 4(-1)^{n+1}+2^{n+2} & (-1)^{n+1}+2^{n+2} \end{pmatrix}
$$

$\boxed{4}$

斉次形の特性方程式は、$\lambda^2+2\lambda+5=0$ である。これを解いて、$\lambda=-1\pm 2i$、斉次形の解

$$
y = e^{-x}\{C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)\}\ (C_1, C_2\text{は定数})
$$

を得る。次に特解を $A\cos x + B\sin x$ とおいて元の式に代入すると、

$$
(4A+2B)\cos x + (4A-2B)\sin x = 5\sin x \leftrightarrow A = -\frac{1}{2}, B = 1
$$

を得る。さらに初期条件より、

$$y(0) = C_1 - \frac{1}{2} = 0 \leftrightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{dy}{dx}(0) = -C_1 + 2C_2 + 1 = 1 \leftrightarrow C_2 = \frac{1}{4}$$

であるので最終的に、

$$y = e^{-x}\left\{\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\right\} - \frac{1}{2}\cos x + \sin x$$

を得る。