

作成者: りーぜんと (Twitter: @50m\_regent)

## 問題 1

(1)

$$\begin{aligned}\int \int_D x dx dy &= \int_a^b \int_0^{f(x)} x dx dy = \int_a^b x f(x) dx \\ \int \int_D dx dy &= \int_a^b \int_0^{f(x)} dx dy = \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

これらより、 $\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$  である。

□

(2)

$$\int \int_D y dx dy = \int_a^b \int_0^{f(x)} y dx dy = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx \text{ であるので、 } \bar{y} = \frac{\int_a^b f^2(x) dy}{2 \int_a^b f(x) dy}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_a^b x f(x) dx &= \int_a^b x e^{-\frac{x}{3}} dx = 3 \left( 3 - 4e^{-\frac{1}{3}} \right) \\ \int_a^b f^2(x) dx &= \int_a^b e^{-\frac{2}{3}x} dx = \frac{3}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2}{3}} \right) \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b e^{-\frac{x}{3}} dx = 3 \left( 1 - e^{-\frac{1}{3}} \right)\end{aligned}$$

$$\text{これらより、} (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{3 - 4e^{-\frac{1}{3}}}{1 - e^{-\frac{1}{3}}}, \frac{1 + e^{-\frac{1}{3}}}{4} \right)$$

## 問題 2

(1)

固有方程式を考えると、 $\det(A - \lambda E) = 0$  を  $\lambda = 0$  が満たすので、 $\det A = -2(a-1)(a-3) = 0$  であればよい。  $\therefore a = 1, 3$

(2)

固有方程式を考える。

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(4 - \lambda) = 0 \quad \therefore \lambda = \pm 2, 4$$

固有ベクトルを  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  と表す。

$\lambda = -2$  について、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_1 \text{は定数})$$

同様に  $\lambda = 2$  について、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (C_2 \text{は定数})$$

$\lambda = 4$  について、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_3 \text{は定数})$$

これらより、 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  と対角化できる。

(3)

$$\mathbf{x} = \frac{C_1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{C_3}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると (2) より、}$$

$$\mathbf{y} = -\frac{2}{\sqrt{3}} C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{2} C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4}{\sqrt{6}} C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{である。ここで、} |\mathbf{y}| \text{ が最大のとき、} \mathbf{y}^2 \text{ も最大である}$$

ので  $\mathbf{y}^2$  を考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^2 &= 4C_1^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}^2 + 4C_2^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^2 + 16C_3^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}^2 \quad (\because \text{各固有ベクトルは直交する}) \\ &= 4C_1^2 + 4C_2^2 + 16C_3^2 \\ &= 16 - 12(C_1^2 + C_2^2) \quad (\because |\mathbf{x}| = 1 \rightarrow C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = 1) \end{aligned}$$

よって、 $C_1^2 + C_2^2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2 = 0 \therefore \mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  のときに  $|\mathbf{y}|$  は最大値  $\sqrt{16} = 4$  を取る。

### 問題 3

(1)

$$\begin{aligned} & \{|A|, |B, C, D|\}, \{|A|, |B, D, C|\}, \{|B|, |C, D, A|\}, \{|B|, |C, A, D|\}, \\ & \{|C|, |D, A, B|\}, \{|C|, |D, B, A|\}, \{|D|, |A, B, C|\}, \{|D|, |A, C, B|\}, \\ & \{|A, B|, |C, D|\}, \{|A, C|, |B, D|\}, \{|A, D|, |B, C|\} \end{aligned}$$

(2)

1 人のグループがある場合の並び方の総数は  $S(n-1, k-1)$ 。

1 人のグループがない場合、ある 1 人を除いた並び方の総数は  $S(n-1, k)$  あり、除いていた学生は誰かの隣に並べばよいので、その総数は  $(n-1)S(n-1, k)$ 。

これらの和をとると、与式が成立することがわかる。

□

(3)

$$\begin{aligned} (2) \text{ より、} H_n &= \frac{S(n+1, 2)}{n!} = \frac{1}{n!} \{nS(n, 2) + S(n, 1)\} = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{n!}{1!} S(1, 1) + \frac{n!}{2!} S(2, 1) + \cdots + S(n, 1) \right\} \\ S(k, 1) &= (k-1)! \text{ なので、} H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(4)

$2^\alpha < n \leq 2^{\alpha+1}$  とすると、 $\lfloor \log_2 n \rfloor = \alpha$  である。以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \left( \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} \right) + \cdots + \frac{1}{n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{\alpha-1}{2} = \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{15} \right) + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\leq 1 + 1 + \cdots + 1 = 1 + \alpha = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor \end{aligned}$$

よって、与式が示された。

□