問題 1

(1)

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

(2)

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$$

(1) の変数変換を施す。

$$x^2+y^2+z^2 = r^2, dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$\therefore I\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r\sin\theta e^{-r^2} drd\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr = 2\pi$$

(3)

(2) と同様に変数変換を施すと、$I(\alpha) = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{r^{2(1-\alpha)}}{e^{r^2}} dr$ を得る。$r^2 = t$ として変数変換を行う。

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= 4\pi \int_0^{\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{e^t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \quad \left(\because dr = \frac{dt}{2\sqrt{t}}\right) \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}-\alpha}}{e^t} dt \\ &= \frac{2\pi}{\frac{3}{2}-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}-\alpha}}{e^t} dt \text{ (部分積分)} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}-\alpha} 2\pi \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}-(\alpha-1)}}{e^t} dt \\ &= \frac{I(\alpha-1)}{\frac{3}{2}-\alpha} \end{aligned}$$

$\frac{3}{2} - \alpha > 0$ であればこれは収束するので、求める範囲は、$\frac{3}{2} > \alpha$

(4)

(2) と同様に変数変換を施すと、$J(\alpha,\beta) = 2^{2-\beta}\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^{2(1-\alpha)}}{|\log r|^{\beta}} dr$ を得る。$\log r = t$ として変数変換を行う。

$$\begin{aligned} J(\alpha,\beta) &= 2^{2-\beta}\pi \int_{-\infty}^{-\log 2} \frac{e^{2(1-\alpha)t}}{|t|^{\beta}} e^t dt \quad (\because dr = e^t dt) \\ &= 2^{2-\beta}\pi \int_{-\infty}^{-\log 2} \frac{e^{2(\frac{3}{2}-\alpha)t}}{(-t)^{\beta}} dt \end{aligned}$$

$t<0$ であることに注意すると、これも (3) と同様に $\dfrac{3}{2}-\alpha>0$ で収束することがわかるので、求める条件は、$\dfrac{3}{2}>\alpha, -\infty<\beta<\infty$

問題 2

(1)

$\det A = a^3+a^2+1-a-a-a^3=(a-1)^2$

(2)

rank $A=3 \leftrightarrow \det A \neq 0$ を満たせば良いので、(1) より、$a\neq 1$

(3)

固有方程式は、

$$\det(A-\lambda E)=(a-\lambda)\{\lambda^2-(2a+1)\lambda+a-1\}=0 \tag{1}$$

である。$\lambda=0$ がこれを満たすので、(1) より、$\det(A-\lambda E)=\det A=0 \leftrightarrow a=1$ となる。固有方程式に代入すると、$\lambda=0,3$ を得る。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表す。

$\lambda=0$ について、

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ (C_1, C_2\text{は定数})$$

$\lambda=3$ についても同様に、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (C_3\text{は定数})$$

(4)

式 1 に $\lambda=1$ を代入すると、$a=-1$ を得る。($\because a<0$) 同式にこれを代入すると、$\lambda=1,-2$ を得る。

(3) と同様に固有ベクトルを求める。

$\lambda=1$ について、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (C_1\text{は定数})$$

$\lambda=-2$ について、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ (C_2, C_3\text{は定数})$$

よって、

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow A^n = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n\\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n\\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^{n+1}\end{pmatrix}$$

問題 3

(1)

$$\frac{1}{n}$$

(2)

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n-m+1} = \frac{(n-m)!}{n!}$$

(3)

$N=1$ のとき式 (i) が成り立ことは自明。

$N=t-1$ のときに式が成り立っているとする。$N=t$ のとき、

$$\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_t) &= P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{t-1}) + P(A_t) - P((A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{t-1})\cap A_t)\\
&= \sum_{l=1}^{t-1}(-1)^{l-1}S_l + P(A_t) +\\
&\quad (-1)^1\sum_{k_1}P(A_{k_1}\cap A_t) + (-1)^2\sum_{k_1<k_2}P(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap A_t) + \cdots\\
&\quad +(-1)^{t-1}\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_{t-1}}P(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\cdots\cap A_{k_{t-1}}\cap A_t)\\
&= \sum_{l=1}^{t}(-1)^{l-1}S_l
\end{aligned}$$

□

(4)

式 (i) より、$Q(1,n) = P(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}S_j$ である。$S_j = {}_n\mathrm{C}_j \frac{(n-j)!}{n!} = \frac{1}{j!}$ であるので、

$$Q(1,n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{1}{j!}$$

$\square$

(5)

$$\lim_{n\to\infty} Q(1,n) = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!} + 1 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$