

作成者: りーぜんと (Twitter: @50m_regent)

問題 1

(1)

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

(2)

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz$$

(1) の変数変換を施す。

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\therefore I\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r \sin \theta e^{-r^2} dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi$$

(3)

(2) と同様に変数変換を施すと、 $I(\alpha) = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{r^{2(1-\alpha)}}{e^{r^2}} dr$ を得る。 $r^2 = t$ として変数変換を行う。

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= 4\pi \int_0^{\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{e^t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \left(\because dr = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \right) \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}-\alpha}}{e^t} dt \\ &= \frac{2\pi}{\frac{3}{2}-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}-\alpha}}{e^t} dt \quad (\text{部分積分}) \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}-\alpha} 2\pi \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}-(\alpha-1)}}{e^t} dt \\ &= \frac{I(\alpha-1)}{\frac{3}{2}-\alpha} \end{aligned}$$

$\frac{3}{2} - \alpha > 0$ であればこれは収束するので、求める範囲は、 $\frac{3}{2} > \alpha$

(4)

(2) と同様に変数変換を施すと、 $J(\alpha, \beta) = 2^{2-\beta} \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^{2(1-\alpha)}}{|\log r|^\beta} dr$ を得る。 $\log r = t$ として変数変換を行う。

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= 2^{2-\beta} \pi \int_{-\infty}^{-\log 2} \frac{e^{2(1-\alpha)t}}{|t|^\beta} e^t dt \quad (\because dr = e^t dt) \\ &= 2^{2-\beta} \pi \int_{-\infty}^{-\log 2} \frac{e^{2(\frac{3}{2}-\alpha)t}}{(-t)^\beta} dt \end{aligned}$$

$t < 0$ であることに注意すると、これも (3) と同様に $\frac{3}{2} - \alpha > 0$ で収束することがわかるので、求める条件は、
 $\frac{3}{2} > \alpha, -\infty < \beta < \infty$

問題 2

(1)

$$\det A = a^3 + a^2 + 1 - a - a - a^3 = (a-1)^2$$

(2)

$\text{rank } A = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0$ を満たせば良いので、(1) より、 $a \neq 1$

(3)

固有方程式は、

$$\det(A - \lambda E) = (a - \lambda)\{\lambda^2 - (2a + 1)\lambda + a - 1\} = 0 \quad (1)$$

である。 $\lambda = 0$ がこれを満たすので、(1) より、 $\det(A - \lambda E) = \det A = 0 \Leftrightarrow a = 1$ となる。固有方程式に代入すると、 $\lambda = 0, 3$ を得る。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表す。

$\lambda = 0$ について、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

$\lambda = 3$ についても同様に、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (C_3 \text{ は定数})$$

(4)

式 1 に $\lambda = 1$ を代入すると、 $a = -1$ を得る。 ($\because a < 0$) 同式にこれを代入すると、 $\lambda = 1, -2$ を得る。

(3) と同様に固有ベクトルを求める。

$\lambda = 1$ について、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_1 \text{は定数})$$

$\lambda = -2$ について、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (C_2, C_3 \text{は定数})$$

よって、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - (-2)^{n+1} & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^{n+1} & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題 3

(1)

$$\frac{1}{n}$$

(2)

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{n-m+1} = \frac{(n-m)!}{n!}$$

(3)

$N = 1$ のとき式 (i) が成り立ことは自明。

$N = t - 1$ のときに式が成り立っているとする。 $N = t$ のとき、

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{t-1}) + P(A_t) - P((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{t-1}) \cap A_t) \\
&= \sum_{l=1}^{t-1} (-1)^{l-1} S_l + P(A_t) + \\
&\quad (-1)^1 \sum_{k_1} P(A_{k_1} \cap A_t) + (-1)^2 \sum_{k_1 < k_2} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_t) + \cdots \\
&\quad + (-1)^{t-1} \sum_{k_1 < k_2 < \cdots < k_{t-1}} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_{t-1}} \cap A_t) \\
&= \sum_{l=1}^t (-1)^{l-1} S_l
\end{aligned}$$

□

(4)

式 (i) より、 $Q(1, n) = P(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} S_j$ である。 $S_j = {}_n C_j \frac{(n-j)!}{n!} = \frac{1}{j!}$ であるので、

$$Q(1, n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{1}{j!}$$

□

(5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(1, n) = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} + 1 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$