

# 大阪大学基礎工学部・H31/R1 数学

作成者: sei0o (Twitter: @sei0o)

## 問題 1

(1)

$u(x, y) = e^{-2(x-y)}$  より、

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -2e^{-2(x-y)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{-2(x-y)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4e^{-2(x-y)} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = f'(x-y) \frac{\partial(x-y)}{\partial y} = -f'(x-y) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-y) \frac{\partial(x-y)}{\partial x} = f'(x-y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-y) \frac{\partial(x-y)}{\partial x} = f''(x-y) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = g'(x-y) \frac{\partial(x-y)}{\partial x} = 2f(x-y)f'(x-y) - 2f'(x-y) - f''(x-y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = g'(x-y) \frac{\partial(x-y)}{\partial y} = -g'(x-y) \end{cases}$$

したがって、

$$\begin{aligned} w &= -f'(x-y) - \frac{1}{2}f''(x-y) + f(x-y)f'(x-y) \\ &= -\frac{1}{2}(2f + f'' - 2ff') \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

(3)

※自信なし。解けた方は解答が一致したか教えてくれると嬉しいです。

$g(x)$  の定義式に  $g(x) = a^2 - 1$  を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= f^2 - 2f - a^2 + 1 \\ x &= \int \frac{df}{f^2 - 2f - a^2 + 1} \\ &= \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{f-1}{a} + C \quad (C \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

よって  $f = a \cdot \tanh(ax - C) + 1$  だから、 $u(x, y) = f(x - y) = a \cdot \tanh\{a(x - y) - C\} + 1$   
 $y \rightarrow \infty$  とするとき  $-\infty \leq x - y \leq 0$  だから、 $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = a \cdot \tanh(ax - C) + 1 \quad (-\infty \leq x \leq 0)$

## 問題 2

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)

拡大係数行列に行基本変形を施す。

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -7 & 7 & k-15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

よって、 $f(\vec{x}) = \vec{b}$  が解を持つには、 $k = 1$  でなければならない。このとき、解は  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

( $t$  は実数)。

(3)

$A$  に行基本変形を施して (実際には (2) の過程の式を使えばよい)、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって解は  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s$  ( $s$  は実数)。

(4)

$B$  の固有値を  $\lambda$  とおくと、固有方程式は  $|B - \lambda E| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0$  これを解いて  $\lambda = 5, -1$

$\lambda = -1$  について、 $B - (-1)E = A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ゆえに固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s$  ( $s \neq 0$ )

$\lambda = 5$  について、 $B - 5E = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{13}{19} \\ -1 & 0 & \frac{14}{19} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ゆえに固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix} t$  ( $t \neq 0$ )

### 問題 3

(1)

$$a(1-a)$$

(2)

投げたコインが A である事象を  $A$ 、表が出る事象を  $H$  とする。2 枚のコインから無作為に選ぶので、 $P(A) = \frac{1}{2}$ 。ここで求める確率は条件付き確率  $P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{P(A \cap H)}{P(\bar{A} \cap H) + P(A \cap H)} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}(1-a) + \frac{1}{2}a} = a$

(3)

1 回目に投げたコインが A である確率は  $P(A|H)$  で表される。同様に 1 回目に B を投げた確率は  $P(\bar{A}|H) = 1 - P(A|H) = 1 - a$ 。1 回目に投げたコインが A であれば、 $a$  の確率で 2 回目は表が出る。1 回目が B であれば、 $1-a$  の確率で 2 回目も表が出る。したがって、求める確率は  $a \cdot a + (1-a)(1-a) = 2a^2 - 2a + 1$

(4)

A か B かわからないコインを  $N$  回投げて  $n$  回表が出る事象を  $X$  とする。求める確率は

$$\begin{aligned} P(A|X) &= \frac{P(A \cap X)}{P(X)} \\ &= \frac{P(A \cap X)}{P(\bar{A} \cap X) + P(A \cap X)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} {}^N C_n a^n (1-a)^{N-n}}{\frac{1}{2} {}^N C_n a^n (1-a)^{N-n} + \frac{1}{2} {}^N C_n (1-a)^n a^{N-n}} \\ &= \frac{a^n (1-a)^{N-n}}{a^n (1-a)^{N-n} + (1-a)^n a^{N-n}} \\ &= \frac{1}{1 + (1-a)^{2n-N} a^{N-2n}} \end{aligned}$$