大阪大学基礎工学部・H31/R1 数学

作成者：sei0o (Twitter: @sei0o)

問題 1

(1)

$u\left(x,y\right)=e^{-2(x-y)}$ より、

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -2e^{-2(x-y)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{-2(x-y)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4e^{-2(x-y)} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = f'\left(x-y\right)\frac{\partial(x-y)}{\partial y} = -f'(x-y) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = f'\left(x-y\right)\frac{\partial(x-y)}{\partial x} = f'\left(x-y\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''\left(x-y\right)\frac{\partial(x-y)}{\partial x} = f''\left(x-y\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = g'\left(x-y\right)\frac{\partial(x-y)}{\partial x} = 2f\left(x-y\right)f'\left(x-y\right) - 2f'\left(x-y\right) - f''\left(x-y\right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = g'\left(x-y\right)\frac{\partial(x-y)}{\partial y} = -g'\left(x-y\right) \end{cases}$$

したがって、

$$\begin{aligned} w &= -f'(x-y) - \frac{1}{2}f''(x-y) + f(x-y)f'(x-y) \\ &= -\frac{1}{2}(2f + f'' - 2ff') \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

(3)

※自信なし。解けた方は解答が一致したか教えてくれると嬉しいです。

$g(x)$ の定義式に $g(x)=a^2-1$ を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= f^2 - 2f - a^2 + 1 \\ x &= \int \frac{df}{f^2 - 2f - a^2 + 1} \\ &= \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{f-1}{a} + C \quad (C \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

よって $f = a\cdot\tanh\left(ax - C\right) + 1$ だから、 $u(x,y) = f(x-y) = a\cdot\tanh\left\{a\left(x-y\right) - C\right\} + 1$

$y\to\infty$ とするとき $-\infty \le x-y \le 0$ だから、$\lim_{y\to\infty} u\left(x,y\right) = a\cdot\tanh\left(ax-C\right)+1 \quad (-\infty \le x \le 0)$

問題 2

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)

拡大係数行列に行基本変形を施す。

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -7 & 7 & k-15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

よって、$f(\vec{x}) = \vec{b}$ が解を持つには、$k = 1$ でなければならない。このとき、解は $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は実数)。

(3)

A に行基本変形を施して（実際には (2) の過程の式を使えばよい)、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって解は $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s$ （s は実数)。

(4)

B の固有値を λ とおくと、固有方程式は $|B - \lambda E| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = -(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0$ これを解いて $\lambda = 5, -1$

$\lambda = -1$ について、$B - (-1)E = A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ゆえに固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s \quad (s \neq 0)$

$\lambda = 5$ について、$B - 5E = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{13}{19} \\ -1 & 0 & \frac{14}{19} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ゆえに固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix} t \quad (t \neq 0)$

問題 3

(1)

$a(1-a)$

(2)

投げたコインが A である事象を A、表が出る事象を H とする。2 枚のコインから無作為に選ぶので、$P(A)=\frac{1}{2}$。ここで求める確率は条件付き確率 $P(A|H)=\frac{P(A\cap H)}{P(H)}=\frac{P(A\cap H)}{P\left(\overline{A}\cap H\right)+P(A\cap H)}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}(1-a)+\frac{1}{2}a}=a$

(3)

1 回目に投げたコインが A である確率は $P(A|H)$ で表される。同様に 1 回目に B を投げた確率は $P(\overline{A}|H)=1-P(A|H)=1-a$。1 回目に投げたコインが A であれば、$a$ の確率で 2 回目は表が出る。1 回目が B であれば、$1-a$ の確率で 2 回目も表が出る。したがって、求める確率は $a\cdot a+(1-a)(1-a)=2a^2-2a+1$

(4)

A か B かわからないコインを N 回投げて n 回表が出る事象を X とする。求める確率は

$$
\begin{aligned}
P(A|X) &= \frac{P(A\cap X)}{P(X)} \\
&= \frac{P(A\cap X)}{P\left(\overline{A}\cap X\right)+P(A\cap X)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}{}_N\mathrm{C}_n a^n(1-a)^{N-n}}{\frac{1}{2}{}_N\mathrm{C}_n a^n(1-a)^{N-n}+\frac{1}{2}{}_N\mathrm{C}_n(1-a)^n a^{N-n}} \\
&= \frac{a^n(1-a)^{N-n}}{a^n(1-a)^{N-n}+(1-a)^n a^{N-n}} \\
&= \frac{1}{1+(1-a)^{2n-N}a^{N-2n}}
\end{aligned}
$$