作成者: りーぜんと (Twitter: @50m_regent)

問題 1

(1)

$$I_{1,k} = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^{k+1}}dx = \left[\frac{-1}{2k(1+x^2)^k}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2k}$$

(2)

部分積分を行う。

$$\begin{aligned}
I_{n,k} &= \int_0^\infty x^{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{k+1}}dx \\
&= \left[x^{2n-2}\frac{-1}{2k(1+x^2)^k}\right]_{x=0}^{x=\infty} + \frac{2n-2}{2k}\int_0^\infty \frac{x^{2(n-1)-1}}{(1+x^2)^{(k-1)+1}}dx \\
&= \frac{n-1}{k}I_{n-1,k-1} \ \left(\because n-1-k<0 \leftrightarrow \left[x^{2n-2}\frac{-1}{2k(1+x^2)^k}\right]_{x=0}^{x=\infty} = 0\right)
\end{aligned}$$

$\square$

(3)

(2) より、$I_{n,k} = \dfrac{n-1}{k}I_{n-1,k-1} = \dfrac{n-1}{k}\dfrac{n-2}{k-1}I_{n-2,k-2} = \cdots = \dfrac{I_{1,k-n+1}}{{}_k\mathrm{C}_{n-1}}$ $(\because n-1-k<0)$

(1) より、$I_{1,k-n+1} = \dfrac{1}{2(k-n+1)}$ なので、$I_{n,k} = \dfrac{1}{2{}_k\mathrm{C}_{n-1}(k-n+1)}$

(4)

与式を変形して、$\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{k+1} \geq C_k$ を得る。$x \geq 1$ において $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ は単調増加で、$x=1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$ を取る。よって、$C_k = \dfrac{1}{2^{k+1}}$ とすれば与式が満たされる。 $\square$

(5)

$$\begin{aligned}
I_{n,k} &= \lim_{L\to\infty}\int_0^L \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{k+1}}dx \\
&\geq \int_0^\infty \frac{C_k}{x^{2k-2n+3}}dx \\
&= \frac{C_k}{2(n-k-1)}\left[x^{2(n-k-1)}\right]_{x=0}^{x=\infty} \\
&= \infty \ (\because n-k-1 \geq 0)
\end{aligned}$$

$\square$

問題 2

(1)

$\det A = (a+1)(a-0.5) = 0$ を満たせば良いので、$a = -1, 0.5$

(2)

$a \neq -1, 0.5$ のとき、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(a+1)(a-0.5)} \begin{pmatrix} (a+0.5)b_1 - 0.5b_2 \\ -b_1 + ab_2 \end{pmatrix}$

$a = -1$ のとき、$\begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_1 - 0.5x_2) \\ x_1 - 0.5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ より、$b_1 = -b_2$ を満たさなければならない。このときの解は、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (C_1 \text{は定数})$$

同様に $a = 0.5$ のとき、$b_1 = 0.5b_2$ を満たさなければならない。このときの解は、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_2 \text{は定数})$$

(3)

固有方程式は、$\det(A - \lambda E) = \lambda - (a+1)\lambda - (a-0.5) = 0$ であるので、固有値は $a+1, a-0.5$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表す。

$\lambda = a+1$ について、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0.5 \\ 1 & a+0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1)x \\ (a+1)y \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (C_1 \text{は定数})$$

$\lambda = a - 0.5$ についても同様に、

$$\begin{pmatrix} a & 0.5 \\ 1 & a+0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-0.5)x \\ (a-0.5)y \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (C_2 \text{は定数})$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a-0.5 \end{pmatrix}$$

(4)

(3) より、

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a-0.5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (a+1)^n + 2(a-0.5)^n & (a+1)^n - (a-0.5)^n \\ 2(a+1)^n - 2(a-0.5)^n & 2(a+1)^n + (a-0.5)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5)

$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であればよいので、$(a+1)^n = 0$ かつ $(a-0.5)^n = 0$ を満たせば良い。

$$\therefore |a+1| < 0 \cap |a-0.5| < 0 \leftrightarrow -0.5 < a < 0$$

問題 3

(1)

二桁の平方数を全て調べれば良い。$(a,b) = (0,0),(0,1),(8,1)$

(2)

(2-1)

コインの枚数が増減する確率はそれぞれ $\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$、増減しない確率は $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

$$\begin{aligned} \therefore P_k &= \frac{9}{20}P_{k-1} + \frac{1}{10}P_k + \frac{9}{20}P_{k+1} \\ \leftrightarrow 2P_k &= P_{k-1} + P_{k+1} \end{aligned}$$

(2-2)

(2-1) より、$P_{k+1} - P_k = P_k - P_{k-1}$ なので、P_k は等差数列となる。$P_0 = 0, P_{10} = 1$ より、$P_k = \frac{k}{10}$

(2-3)

得点の期待値は、$\frac{k(10-k)^2}{10}$ である。これの極値を考える。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk}\frac{k(10-k)^2}{10} &= \frac{(10-k)(10-3k)}{10} \\ \therefore \frac{d}{dk}\frac{k(10-k)^2}{10} &= 0 \leftrightarrow k = \frac{10}{3}\ (\because 1 \leq k \leq 9) \end{aligned}$$

これに最も近い整数は $k=3$ で、$k=2,4$ を代入すると極大値を取ることがわかる。$\therefore k=3$