大阪大学基礎工学部・H28 数学

作成者：sei0o (Twitter: @sei0o)

問題 1

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると、$|\vec{x}| = 1$ より $a^2 + b^2 = 1 \cdots (*)$。$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2a+3b \\ 2b \end{pmatrix}$ だから、$|B\vec{x}| = \sqrt{(2a+3b)^2 + (2b)^2} = \sqrt{4b^2 + 12ab + 13b^2} = \sqrt{9b^2 + 12ab + 4}$。微分を簡単にするために 2 乗して、$f(a,b) = |B\vec{x}|^2 = 9b^2 + 12ab + 4$ の最大値を求める（$|B\vec{x}| > 0$ より、2 乗しても最大値をとる $\vec{x}$ は変わらない)。$(*)$ の束縛条件は閉曲線となり、$f(a,b)$ は連続だから最大値・最小値を持ち、それらをとる点で条件付き極値をとる。

ラグランジュの未定乗数法より、

$$\frac{12b}{2a} = \frac{18b + 12a}{2b}$$
$$\frac{6b}{a} = \frac{9b + 6a}{b} = \lambda$$

とおくと、$\begin{cases} \lambda a - 6b = 0 \\ 6a - (9 - \lambda)\, b = 0 \end{cases}$ を得る。行列の形にすると、$\begin{pmatrix} \lambda & -6 \\ 6 & 9-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。この連立一次方程式の自明な解 $a = b = 0$ は $(*)$ を満たさない。この行列を C とおくと、自明でない解が存在するためには、$|C| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 3)(x - 12) = 0$ であればよい。これを満たすのは $\lambda = 12, -3$ で、このとき極値をとりうる。それぞれの場合について、$(*)$ を満たす解を求める。

(i) $\lambda = 12$ のとき、$C = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから、解は $\vec{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$。

(ii) $\lambda = -3$ のとき、$C = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから、解は $\vec{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$。

それぞれの解を $f(a,b)$ に代入する。(i) $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 16$ (ii) $f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 1$

したがって f の最大値は 16。$f(a,b) = |B\vec{x}|^2$ だったから、$||B|| = 4$ であり、このとき $\vec{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$。

問題 2

(1)

A の相異なる固有値を λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 、それぞれに対応する固有ベクトルを $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ とおく。$AB = BA$ より、

$$
\begin{aligned}
AB\vec{x}_1 &= BA\vec{x}_1 \\
AB\vec{x}_1 &= B\lambda_1\vec{x}_1 \qquad \text{（固有値の定義）} \\
A(B\vec{x}_1) &= \lambda_1(B\vec{x}_1)
\end{aligned}
$$

したがって、$B\vec{x}_1$ は固有値 λ_1 についての A の固有ベクトル（の一つ）。これは初めに定義した $\vec{x}_1$ と平行だから、 $B\vec{x}_1 = \sigma_1\vec{x}_1$ （σ_1 は実数）と書ける。$\vec{x}_1$ は B の固有ベクトルでもあり、σ_1 はそれに対応する固有値となる。同様に B は固有ベクトル $\vec{x}_2$ を持つ。対応する固有値を σ_2 とする。

ここで、$\lambda_1 \neq \lambda_2$ より、$\vec{x}_1$ と $\vec{x}_2$ は線形独立。この 2 本のベクトルを正規直交化して並べて、直交行列 P を作ると、A, B はともに対角化される。すなわち、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$ となる。

(2)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ とおくと、$AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ が成り立つ。また、A の固有値を λ とすると、固有方程式 $|A - \lambda E| = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$ の解は $\lambda = 3, -2$ で異なる二つの固有値を持つ。よって (1) より、A, B は同じ直交行列によって対角化される。

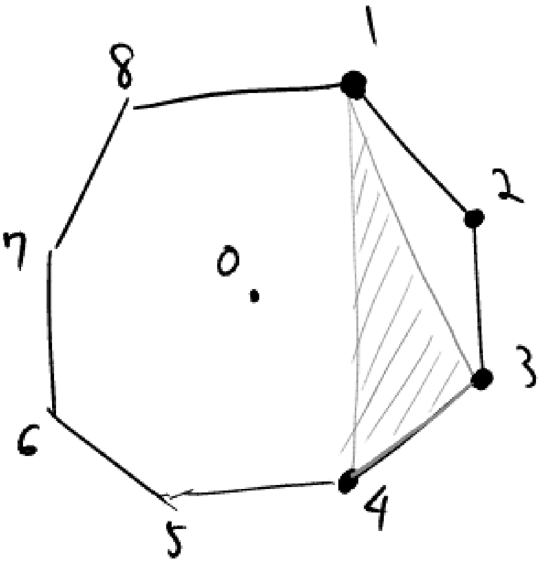
まず A を対角化する。$\lambda = 3$ について、$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} a \ (a \neq 0)$。$\lambda = 2$ について、$A - 2E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} b \ (b \neq 0)$。

したがって、直交行列 $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ によって A は対角化され、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ となる。

また B もこれにより対角化され、$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$。

問題 3

(1)



隣り合う 4 頂点から 3 つ選んで三角形を作れば、中心を通らない。まずは頂点 1 〜 4 について考える。頂点の選び方は $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\}$ の 4 通り（例として $\{1,3,4\}$ を図に示した）。

注目する 4 頂点をずらしながら一周させて頂点 2〜5, 3〜6, ..., 8〜3 についても同じことが言えるから、$8\times 4=32$ 通り。ところが、連続する 3 頂点の組み合わせ、たとえば $\{2,3,4\}$ は頂点 1〜4 と 2〜5 の 2 つから生まれ、重複が生じてしまう。このような組み合わせは $\{1,2,3\},\{2,3,4\},\dots\{8,1,2\}$ の 8 通りあるから、これを省いて $32-8=24$ 通り。

(2)

作りうる n 角形の総数は ${}_m\mathrm{C}_n$ 個。中心を通らない n 角形を作るには、まず頂点を一つ定め、次にその右側にある $(m-2)/2$ 個の頂点のうち残り $n-1$ 個を選べばよい。したがって、中心を通らないのは $m\times {}_{\frac{m-2}{2}}\mathrm{C}_{n-1}$ 個。

したがって、

$$
\begin{aligned}
P_{n,m} &= \frac{m \times {}_{\frac{m-2}{2}}\mathrm{C}_{n-1}}{{}_m\mathrm{C}_n} \\
&= \frac{m \cdot \dfrac{\left(\dfrac{m}{2}-1\right)!}{(n-1)!\left(\dfrac{m}{2}-n\right)!}}{\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}} \\
&= \frac{m}{m!}\frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{(m-n)!\left(\dfrac{m}{2}-1\right)!}{\left(\dfrac{m}{2}-n\right)!} \\
&= n \cdot \frac{\left(\dfrac{m}{2}-1\right)\left(\dfrac{m}{2}-2\right)\dots\left(\dfrac{m}{2}-n+1\right)}{(m-1)\,(m-2)\dots(m-n+1)}
\end{aligned}
$$

と表され、その極限は

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} P_{n,m} &= n \lim_{m\to\infty} \frac{\left(\dfrac{m}{2}-1\right)\left(\dfrac{m}{2}-2\right)\dots\left(\dfrac{m}{2}-n+1\right)}{(m-1)\,(m-2)\dots(m-n+1)} \\
&= n \lim_{m\to\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{m}\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{m}\right)\dots\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{n-1}{m}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\left(1-\dfrac{2}{m}\right)\dots\left(1-\dfrac{n-1}{m}\right)} \\
&= n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$