

作成者: リーゼんと (Twitter: @50m_regent)

問題 1

(1)

ロピタルの定理を繰り返し適用する。

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - (1-x+x^2)}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} - (-1+2x)}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{(1+x)^3}{6} - 2} = 0\end{aligned}$$

□

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0\end{aligned}$$

□

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^2}\right)}{\frac{1}{n^3}} \text{ と変形し、 } \frac{1}{n} = x$$

とすれば、(1)(a) と同様にこれは 0 である。

□

(3)

(2) の式と比較して以下の関係が得られる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right) \right\} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

また、 $\frac{1}{n} = x$ として (1)(b) の式と比較すると以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right) \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2\right)}{x^2} \\ &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} \end{aligned}$$

これらより、はさみうちの定理を適用すると、与式が示される。 □

問題 2

(1)

固有方程式は次のようになる。

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0 \quad \therefore \lambda = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2}$$

$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + b^2$ であるので、 A が異なる固有値を持つための条件は、 $a \neq c \vee b \neq 0$
 A の異なる固有値 λ_1, λ_2 それぞれに対する固有列ベクトルを $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ とする。

$$\begin{aligned} {}^t(A\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2 &= {}^t\mathbf{x}_1 {}^tA\mathbf{x}_2 = {}^t\mathbf{x}_1 A\mathbf{x}_2 \quad (\because A = {}^tA) \\ &\leftrightarrow \lambda_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \quad (\because A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2) \\ &\leftrightarrow \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0 \quad (\because \lambda_1 \neq \lambda_2) \end{aligned}$$

これより、異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。

(2)

標準化を行う。

$$\begin{aligned} 7x^2 - 4xy + 7y^2 &= (X \ Y) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 5X^2 + 9Y^2 = 9 \leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2} + Y^2 = 1, \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これは楕円を回転させた図形なので、図 1 のように描ける。

(3)

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \text{ とすると、 } \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

$g(x, y) = 0$ のもとで $f(x, y)$ の極値を求める。ラグランジュの乗数法を用いると、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \leftrightarrow (4x + dy) \cdot 2y = (dx + 6y) \cdot 2x \leftrightarrow dx^2 + 2xy - dy^2 = 0$$

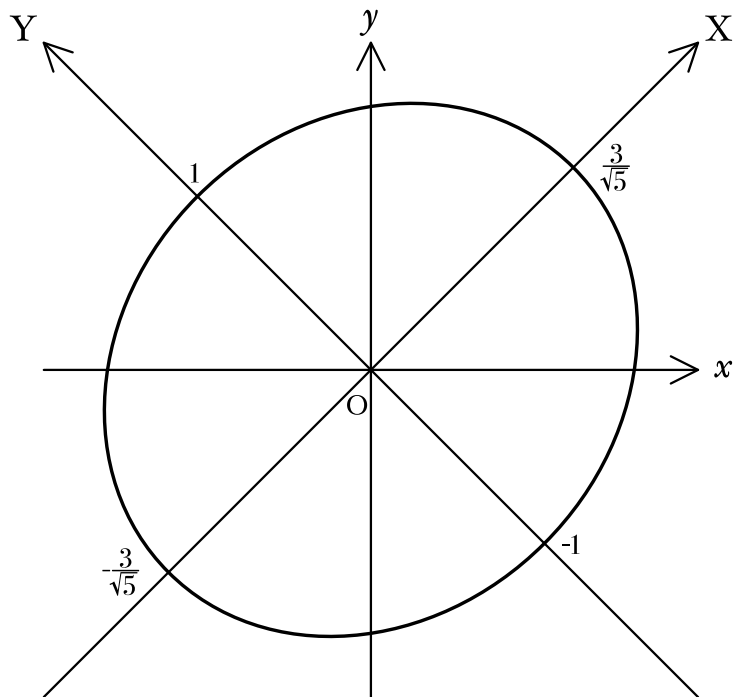


図1 $7x^2 - 4xy + 7y^2 = 9$

$g(x, y) = 0$ より、 $y^2 = 1 - x^2, y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ であるので、これを代入して、

$$2dx^2 \pm 2x\sqrt{1 - x^2} - d = 0 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{d^2+1}}}{2}}, y = \pm\sqrt{\frac{1 \mp \frac{1}{\sqrt{d^2+1}}}{2}} \quad (\text{複号同順})$$

与式に代入して、最大値 $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{d^2 + 1})$, 最小値 $\frac{1}{2}(5 - \sqrt{d^2 + 1})$ を得る。

問題 3

(1)

$\frac{8}{33} = 0.\dot{2}\dot{4}$ であるので、 $x_n \leq 0.24$ であれば良い。そのような x_n の場合の数は 21 なので、 $\frac{21}{64}$

(2)

$x_{n-2} < 0.\dot{2}\dot{4}$ かつ $x_n > 0.\dot{2}\dot{4}$ である確率を p_{n-2} から引けば良い。

そのような確率は $\frac{1 - p_2}{8^{n-2}} = \frac{43}{8^n}$ なので、 $p_n = p_{n-2} - \frac{43}{8^n}$

(3)

(2) より、

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-2} - \frac{43}{8^n} \\ \Leftrightarrow 8^n p_n &= 64 \cdot 8^{n-2} p_{n-2} - 43 \\ \Leftrightarrow 8^n p_n - \frac{43}{63} &= 64 \left(8^{n-2} p_{n-2} - \frac{43}{63} \right) = 8^{n-2} \left(64 p_2 - \frac{43}{63} \right) = 8^{n-2} \frac{1280}{63} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{20}{63} + \frac{43}{63 \cdot 8^n} \end{aligned}$$