作成者: りーぜんと (Twitter: @50m_regent)

## 問題 1

### (1)

$$\int\int_D xdxdy = \int_a^b \int_0^{f(x)} xdxdy = \int_a^b xf(x)dx$$
$$\int\int_D dxdy = \int_a^b \int_0^{f(x)} dxdy = \int_a^b f(x)dx$$

これらより、$\bar{x} = \dfrac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$ である。 □

### (2)

$\displaystyle\int\int_D ydxdy = \int_a^b \int_0^{f(x)} ydxdy = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$ であるので、$\bar{y} = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f^2(x)dy}{2\displaystyle\int_a^b f(x)dy}$

### (3)

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b xe^{-\frac{x}{3}}dx = 3\left(3 - 4e^{-\frac{1}{3}}\right)$$
$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b e^{-\frac{2}{3}x}dx = \frac{3}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{3}}\right)$$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b e^{-\frac{x}{3}}dx = 3\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)$$

これらより、$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{3 - 4e^{-\frac{1}{3}}}{1 - e^{-\frac{1}{3}}}, \dfrac{1 + e^{-\frac{1}{3}}}{4}\right)$

## 問題 2

### (1)

固有方程式を考えると、$\det(A - \lambda E) = 0$ を $\lambda = 0$ が満たすので、$\det A = -2(a-1)(a-3) = 0$ であればよい。$\therefore a = 1, 3$

(2)

固有方程式を考える。

$$\det(A-\lambda E)=(\lambda-2)(\lambda+2)(4-\lambda)=0 \ \therefore \lambda=\pm 2,4$$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表す。

$\lambda=-2$ について、

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (C_1\text{は定数})$$

同様に $\lambda=2$ について、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ (C_2\text{は定数})$$

$\lambda=4$ について、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ (C_3\text{は定数})$$

これらより、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ と対角化できる。

(3)

$\mathbf{x}=\dfrac{C_1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\dfrac{C_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\dfrac{C_3}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると (2) より、

$\mathbf{y}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\sqrt{2}C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\dfrac{4}{\sqrt{6}}C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。ここで、$|\mathbf{y}|$ が最大のとき、$\mathbf{y}^2$ も最大であるので $\mathbf{y}^2$ を考える。

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^2&=4C_1^2\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}^2+4C_2^2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}^2+16C_3^2\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}^2 \ (\because \text{各固有ベクトルは直交する})\\ &=4C_1^2+4C_2^2+16C_3^2\\ &=16-12\left(C_1^2+C_2^2\right) \ \left(\because |\mathbf{x}|=1\to C_1^2+C_2^2+C_3^3=1\right)\end{aligned}$$

よって、$C_1^2+C_2^2=0 \leftrightarrow C_1=C_2=0 \ \therefore \mathbf{x}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のときに $|\mathbf{y}|$ は最大値 $\sqrt{16}=4$ を取る。

## 問題 3

### (1)

$$
\begin{aligned}
&\{|A|,|B,C,D|\},\{|A|,|B,D,C|\},\{|B|,|C,D,A|\},\{|B|,|C,A,D|\},\\
&\{|C|,|D,A,B|\},\{|C|,|D,B,A|\},\{|D|,|A,B,C|\},\{|D|,|A,C,B|\},\\
&\{|A,B|,|C,D|\},\{|A,C|,|B,D|\},\{|A,D|,|B,C|\}
\end{aligned}
$$

### (2)

1 人のグループがある場合の並び方の総数は $S(n-1,k-1)$。

1 人のグループがない場合、ある 1 人を除いた並び方の総数は $S(n-1,k)$ あり、除いていた学生は誰かの隣に並べばよいので、その総数は $(n-1)S(n-1,k)$。

これの和をとると、与式が成立することがわかる。 □

### (3)

(2) より、$H_n = \dfrac{S(n+1,2)}{n!} = \dfrac{1}{n!}\{nS(n,2)+S(n,1)\} = \dfrac{1}{n!}\{\dfrac{n!}{1!}S(1,1)+\dfrac{n!}{2!}S(2,1)+\cdots+S(n,1)\}$

$S(k,1)=(k-1)!$ なので、$H_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

### (4)

$2^\alpha \le n < 2^{\alpha+1}$ とすると、$\lfloor \log_2 n \rfloor = \alpha$ である。以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
H_n &\ge 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}+1}+\cdots\frac{1}{2^a}\right)\\
&> 1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2} = 1+\frac{\alpha-1}{2} = \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor+1}{2}\\
H_n &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{15}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\\
&\le 1+1+\cdots 1 = 1+\alpha = 1+\lfloor \log_2 n \rfloor
\end{aligned}
$$

よって、与式が示された。 □