# 東京大学　R2　数学

田中 柊平

2021 年 8 月 18 日

## 第 1 問

### (1)

　特性方程式は,

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

これを解くと,

$$\lambda = -3, 2$$

よって, 余関数は,

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

次に, 特解を

$$y = Axe^{-3x}$$

と予想すると,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (-3Ax + A)e^{-3x} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= (9Ax - 6A)e^{-3x} \end{aligned}$$

これらを方程式に代入すると,

$$\begin{aligned} (9Ax - 6A)e^{-3x} + (-3Ax + A)e^{-3x} - 6Axe^{-3x} &= e^{-3x} \\ -5Ae^{-3x} &= e^{-3x} \\ A &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

以上より, 問の方程式の一般解は,

$$y = \left(-\frac{1}{5}x + C_1\right) e^{-3x} + C_2 e^{2x}$$

両辺を 1 回微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{5}e^{-3x} - 3\left(-\frac{1}{5}x + C_1\right) e^{-3x} + 2C_2 e^{2x} \\ &= \left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{5} - 3C_1\right) e^{-3x} + 2C_2 e^{2x} \end{aligned}$$

初期条件を代入すると,

$$
\begin{aligned}
1 &= C_1 + C_2 \\
0 &= -\frac{1}{5} - 3C_1 + 2C_2
\end{aligned}
$$

これを解くと,

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{9}{25} \\
C_2 &= \frac{16}{25}
\end{aligned}
$$

求める解は,

$$
y = \left(-\frac{1}{5}x + \frac{9}{25}\right)e^{-3x} + \frac{16}{25}e^{2x}
$$

## (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y+y^3}{x} \\
\frac{1}{y(1+y^2)}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \\
\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \\
\ln y - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) &= \ln x + C \qquad (C\text{ は任意定数}) \\
\ln\left(\frac{y}{x\sqrt{1+y^2}}\right) &= C \\
\frac{y}{x\sqrt{1+y^2}} &= e^C \\
\frac{y^2}{1+y^2} &= e^{2C}x^2 \\
y^2 &= e^{2C}x^2(1+y^2) \\
y^2(1-Cx^2) &= Cx^2 \qquad (e^{2C} \to C\text{ と置きなおした}) \\
y &= \pm\frac{\sqrt{C}x}{\sqrt{1-Cx^2}} \\
&= \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}} \qquad (\pm\sqrt{C} \to C\text{ と置きなおした})
\end{aligned}
$$

## (3)

### (a)

問の上の式の両辺を 1 回微分して,

$$
\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt}
$$

この式と問の下の式から $\frac{dy}{dt}$ を消去すると,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4x$$

この式を解くと,

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

問の上の式を用いて,

$$y = -\frac{dx}{dt} = -2C_1e^{2t} + 2C_2e^{-2t}$$

以上より,

$$\begin{aligned}
4x^2 - y^2 &= 4(C_1e^{2t} + C_2e^{-2t})^2 - (-2C_1e^{2t} + 2C_2e^{-2t})^2 \\
&= 4C_1e^{2t} + 8C_1C_2 + 4C_2e^{-2t} - 4C_1e^{2t} - (-8C_1C_2) - 4C_2e^{-2t} \\
&= 16C_1C_2
\end{aligned}$$

となり,$4x^2 - y^2$ は $t$ によらず常に一定であることが示された.

(b)

$x, y$ にそれぞれ初期条件を代入すると,

$$\begin{aligned}
1 &= C_1 + C_2 \\
4 &= -2C_1 + 2C_2
\end{aligned}$$

これを解くと,

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{1}{2} \\
C_2 &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

以上より,

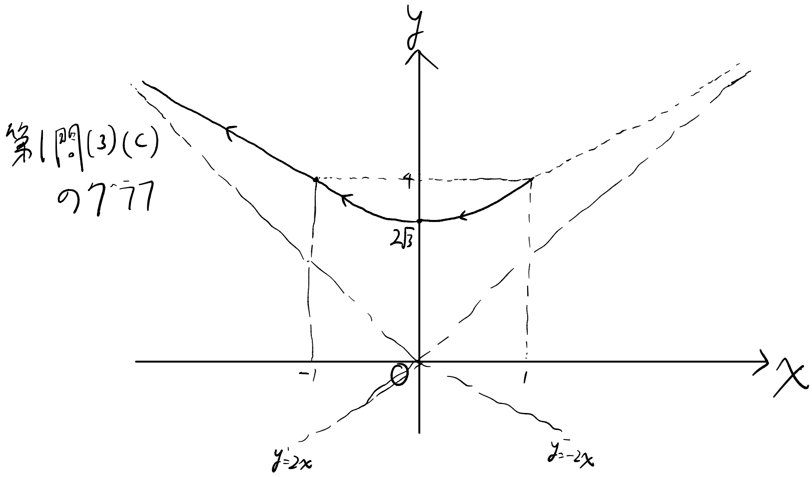
$$\begin{aligned}
x &= -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \\
y &= e^{2t} + 3e^{-2t}
\end{aligned}$$

(c)

$C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = \frac{3}{2}$ を $4x^2 - y^2 = 16C_1C_2$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
4x^2 - y^2 &= -12 \\
\frac{x^2}{\sqrt{3}^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} &= -1
\end{aligned}$$

$t \geq 0, y > 0, (x(0), y(0)) = (1, 4), \lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (-\infty, \infty)$ であることに注意すると, グラフは下のようになる.




## 第 2 問

上の辺を選ぶ確率は,

$$\int_0^1 ax + bdx = \frac{a}{2} + b \tag{1}$$

下の辺を選ぶ確率は,

$$\int_1^2 ax + bdx = \left[\frac{a}{2}x^2 + bx\right]_1^2 \tag{2}$$

$$= 2a + 2b - \frac{a}{2} - b \tag{3}$$

$$= \frac{3}{2}a + b \tag{4}$$

全事象の確率より,

$$\frac{a}{2} + b + \frac{3}{2}a + b = 2a + 2b = 1 \tag{5}$$

$$b = \frac{1}{2} - a \tag{6}$$

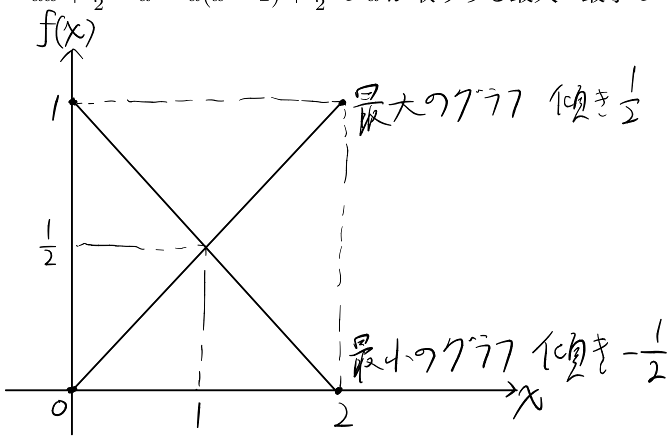
式 (6) を式 (1) と式 (4) に代入すると, 上の辺を選ぶ確率 $F_1$, 下の辺を選ぶ確率 $F_2$ はそれぞれ,

$$F_1 = \frac{1-a}{2} \tag{7}$$

$$F_2 = \frac{1+a}{2} \tag{8}$$

### (1) 怪

$0 \leq x \leq 2$ において, 図のように,$f(x) = ax + b = ax + \frac{1}{2} - a = a(x-1) + \frac{1}{2}$ の $a$ が取りうる最大・最小のグラフを考えると,$-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ となる.



## (2)

Aにいる確率は

$$\left(-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1-a)^2$$

最下段にいる確率は,

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+a)^2$$

中央段にいる確率は,

$$1-\frac{1}{4}(1-a)^2-\frac{1}{4}(1+a)^2=\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}$$

Aにいる確率が最下段にいる確率, 中央段にいる確率のいずれよりも大きければよいので,

$$\frac{1}{4}(1-a)^2>\frac{1}{4}(1+a)^2$$
$$\frac{1}{4}(1-a)^2>\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}$$

これらを $a$ について解くと, それぞれ,

$$a<0$$
$$a<-\frac{1}{3}\text{または}a>1$$

となる. $-\frac{1}{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$ を考慮すると, 求める範囲は,

$$-\frac{1}{2}\leq a\leq-\frac{1}{3}$$

## (3)

確率変数 $Y$ の確率分布は, 試行回数 $n$,1 回の試行における確率 $\frac{1}{2}+\frac{a}{2}$ の二項分布であると考えられる. よって,

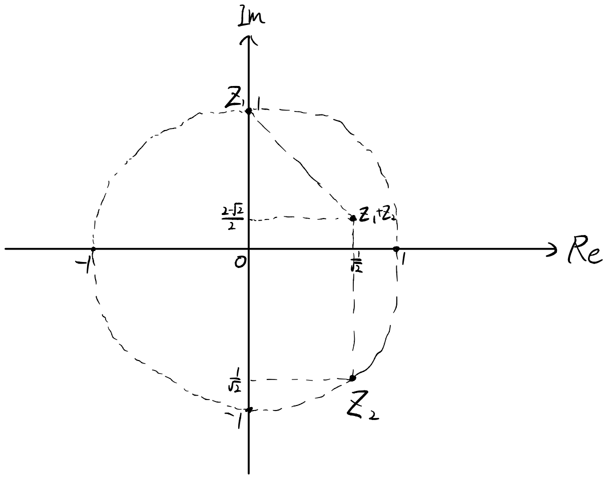
$$E[Y]=n\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)=\frac{n}{2}(1+a)$$

# 第3問

## (1)

### (a)

下図に示す.




(b)

原点,$z_1, z_1 + z_2, z_2$,原点を順に結ぶと, 辺の長さが全て等しいことからこれはひし形となる．原点と $z_1 + z_2$ を結ぶとこれはひし形の対角線となり, ひし形の対角線は端点の角を等分することから, 実軸と対角線のなす角は,

$$\left(\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \div 2 = \frac{\pi}{8}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{8} &= \tan\arg(z_1 + z_2) \\
&= \frac{\mathrm{Im}(z_1 + z_2)}{\mathrm{Re}(z_1 + z_2)} \\
&= \frac{\mathrm{Im}z_1 + \mathrm{Im}z_2}{\mathrm{Re}z_2} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{2} - 1
\end{aligned}$$

## (2)

(a)

コーシー・リーマンの関係式より,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{10}$$

式 (9) の両辺を $x$ で, 式 (10) の両辺を $y$ で偏微分すると,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ を消去して整理すると,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(b)

$u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ の両辺を $x, y$ でそれぞれ 2 回微分すると,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c$$

調和関数の関係より, 求める条件は,

$$2a + 2c = 0$$
$$a + c = 0$$

(c)

コーシー・リーマンの関係式より,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + by = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = bx + 2cy = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

よって,

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = 2axy + \frac{b}{2}y^2 + C_1(x) \qquad (C_1(x) \text{ は } x \text{ の任意関数}) \tag{11}$$
$$v = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{b}{2}x^2 - 2cxy + C_2(y) \qquad (C_2(y) \text{ は } y \text{ の任意関数}) \tag{12}$$

式 (11), 式 (12) と, 条件 $a + c = 0$ より,

$$v = 2axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2) + C_3 \qquad (C_3 \text{は任意定数})$$

以上より,

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= a(x^2 - y^2) + bxy + i(2axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2) + C_3) \\ &= a(x + iy)^2 - \frac{b}{2}i(x + iy)^2 + iC_3 \\ &= \left(a - \frac{b}{2}i\right) z^2 + iC_3 \end{aligned}$$

## (3)

(a)

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, ie^{i\theta}d\theta = dz$ より $d\theta = -i\frac{dz}{z}$ となる．これらを代入すると,

$$I = \int_C \frac{-i}{\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} + p\right)^2} \frac{dz}{z} = \int_C \frac{-4iz}{(z^2 + 2pz + 1)^2} dz$$

よって,

$$f(z)=\frac{-4iz}{(z^2+2pz+1)^2}$$

(b)

$z^2+2pz+1=0$ を解くと,$z=-p\pm\sqrt{p^2-1}$

$z$ は実数なので,$p\geq 1$ であり,$p=1$ のとき $z=1$ となりただ 1 つの極が積分路上に乗ってしまう．よって,$p>1$

このとき,$-p-\sqrt{p^2-1}\leq -1$ であることから, 積分路内の極は $\sqrt{p^2-1}-p$ ただ 1 つになる.

よって, 求める範囲は,$p>1$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(\sqrt{p^2-1}-p)&=\lim_{z\to\sqrt{p^2-1}-p}\frac{d}{dz}\frac{-4iz}{(z+p+\sqrt{p^2-1})^2}\\
&=4i\lim_{z\to\sqrt{p^2-1}-p}\left\{\frac{2z}{(z+p+\sqrt{p^2-1})^3}-\frac{1}{(z+p+\sqrt{p^2-1})^2}\right\}\\
&=4i\left\{\frac{2(\sqrt{p^2-1}-p)}{8(p^2-1)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4(p^2-1)}\right\}\\
&=\frac{p}{i(p^2-1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

よって, 留数定理より,

$$I=2\pi i\mathrm{Res}(\sqrt{p^2-1}-p)=2\pi p(p^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

# 第 4 問

## (1)

$A\vec{u_1}=\lambda_1\vec{u_1}$ より, $\begin{pmatrix} c \\ c \\ a \end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

これを解くと,$c=0,\lambda_1=a$

$A\vec{u_2}=\lambda_2\vec{u_2}$ より, $\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \\ 2a+2b \end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

これを解くと,$\lambda_2=\frac{3}{2}a,b=\frac{\lambda_2}{3}=\frac{a}{2}$

$A\vec{u_3}=\lambda_3\vec{u_3}$ より, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-2b \end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

これを解くと,$\lambda_3=0$

よって,

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & a \end{pmatrix} \\
\lambda_1 &= a \\
\lambda_2 &= \frac{3}{2}a \\
\lambda_3 &= 0
\end{aligned}
$$

## (2)

$A$ の固有多項式は,

$$x(x-a)\left(x-\frac{3}{2}a\right) = x^3 - \frac{5}{2}ax^2 + \frac{3}{2}a^2x = 0$$

ケーリーハミルトンの定理より,

$$
\begin{aligned}
A^3 - \frac{5}{2}aA^2 + \frac{3}{2}a^2A &= O \qquad (O \text{ は零行列}) \\
A^3 &= \frac{5}{2}aA^2 - \frac{3}{2}a^2A \\
\alpha_3 = \frac{5}{2}a, \beta_3 &= -\frac{3}{2}a^2, \gamma_3 = 0
\end{aligned}
$$

## (3)

$x^n$ を $x(x-a)\left(x-\frac{3}{2}a\right)$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $sx^2+tx+u \quad (s,t,u$ は実数$)$ とすると,

$$x^n = x(x-a)\left(x-\frac{3}{2}a\right)Q(x) + sx^2 + tx + u \tag{13}$$

と表せる．$x=0$ のとき,$u=0$ であるから,

$x=a$ のとき,$a^n = sa^2 + ta$

$x=\frac{3}{2}a$ のとき,$\left(\frac{3}{2}a\right)^n = s\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + t\left(\frac{3}{2}a\right)$

となる．よって,

$$
\begin{aligned}
a^n\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^2 & a \\ \frac{9}{4}a^2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \frac{a^n}{a^3 - \frac{9}{4}a^3}\begin{pmatrix} a & a \\ -\frac{9}{4}a^2 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = -\frac{4}{5}a^{n-2}\begin{pmatrix} 1+\frac{3}{2} \\ \left(-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\right)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a^{n-2} \\ \frac{3}{5}a^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

式 (??) に $s=-2a^{n-2}, t=\frac{3}{5}a^{n-1}, u=0$ を代入し, ケーリー・ハミルトンの定理を用いると,

$$
\begin{aligned}
A^n &= A(A-aI)\left(A-\frac{3}{2}aI\right)Q(A) - 2a^{n-2}A^2 + \frac{3}{5}a^{n-1}A \\
&= -2a^{n-2}A^2 + \frac{3}{5}a^{n-1}A
\end{aligned}
$$

以上より,

$$\alpha_n = -2a^{n-2}, \beta_n = \frac{3}{5}a^{n-1}, \gamma_n = 0$$

(4)

$x+ay-az=1$ を満たす $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し,

$$A\vec{x}-t\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+ay-t \\ \frac{a}{2}x+\frac{a}{2}y-at \\ \frac{a}{2}x+az+at \end{pmatrix}$$

が再び平面 $x+ay-az=1$ 上に乗るとすると,

$$\begin{aligned}(ax+ay-t)+a\left(\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}y-at\right)-a\left(\frac{a}{2}x+az+at\right)&=1\\ ax+a\left(1+\frac{a}{2}\right)y-a^2z-(1+2a^2)t&=1\\ x+\left(1+\frac{a}{2}\right)y-az&=(\frac{1}{a}+2a)t+\frac{1}{a}\end{aligned}$$

よって $1+\frac{a}{2}=a$ を満たすことが必要であり, これを解くと,$a=2$

したがって,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$