

作成者: りーぜんと (Twitter: @50m\_regent)

## 問題 1

(1)

(a)

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= y_1 \frac{d^2 y_2}{dt^2} - \frac{d^2 y_1}{dt^2} y_2 \\ &= y_1 \left\{ -a(t) \frac{dy_2}{dt} - b(t) y_2 \right\} - y_2 \left\{ -a(t) \frac{dy_1}{dt} - b(t) y_1 \right\} \\ &= -a(t) z \\ \therefore z &= z(0) e^{-\int_0^t a(s) ds}\end{aligned}$$

(b)

条件 (\*) より、 $\frac{dy_1}{dt}(0) > 0$  であり、 $z(0) < 0 \therefore z < 0$

また、 $\frac{dy_1}{dt}(1) < 0$  であるので、 $z(1) < 0$  であるためには  $y_2(1) < 0$  である。□

(2)

(a)

$y_2$  は常に正であると仮定する。条件 (\*) より、 $\frac{y_1}{y_2}$  は  $t = 0, 1$  で 0、それ以外で正となる。ロルの定理より、 $[0, 1]$  において  $\frac{d}{dt} \frac{y_1}{y_2} = -\frac{W(y_1, y_2)}{y_2^2}$  は少なくとも一回は 0 となる。よって  $W(y_1, y_2) = 0$  となる  $t$  が  $[0, 1]$  に存在するので、 $y_1, y_2$  は線形従属である。 $y_2 = C y_1$  として与式に代入すると、

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + a \frac{dy_1}{dt} + b_1 y_1 = C \left\{ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + a \frac{dy_1}{dt} + b_1 y_1 \right\} = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0 \quad (\because b_1 < b_2)$$

これは条件 (\*) と矛盾するので、 $y_2$  は常に正ではない。中間値の定理より、 $y_2$  は  $[0, 1]$  で少なくとも一回は 0 となる。□

(b)

$a(t) = 0$  として 2 つの式を解くと、

$$y_1 = C_1 \sin \left\{ \sqrt{b_1} t \right\} \quad (\because y_1(0) = 0), y_2 = C_2 \cos \left\{ \sqrt{b_2} t \right\} + C_3 \sin \left\{ \sqrt{b_2} t \right\}$$

となる。 $y_1(1) = 0$  とするために  $b_1 = \pi^2$  とする。

ここで、 $y_2(0) > 0$  であるので  $C_2 > 0$  である。 $b_2 = 4\pi^2$  とすれば  $y_2(1) > 0$  となる。

$$\therefore a(t) = 0, b_1(t) = \pi^2, b_2(t) = 4\pi^2$$

## 問題 2

(1)

固有方程式は次のようになる。

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda(\lambda + 3)^2 = 0 \quad \therefore \lambda = 0, -3$$

固有ベクトルを  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  と表す。

$\lambda = 0$  について、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_1 \text{は定数})$$

$\lambda = -3$  について、

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (C_2, C_3 \text{は定数})$$

よって、 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  とできる。

(2)

$$Q^{-1}BQ = aI + bQ^{-1}AQ = E \text{ であるので、 } Q = P \text{ とすれば、 } E = aI + bD = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-3b & 0 \\ 0 & 0 & a-3b \end{pmatrix}$$

(3)

$x = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$  とする。 $\alpha + \beta + \gamma = \alpha p + \beta q + \gamma r$  が任意の  $p, q, r$  で成り立つためには、

$\alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \therefore C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  であれば良い。

(2) より、 $B^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a^n + 2(a-3b)^n & a^n - (a-3b)^n & a^n - (a-3b)^n \\ a^n - (a-3b)^n & a^n + 2(a-3b)^n & a^n - (a-3b)^n \\ a^n - (a-3b)^n & a^n - (a-3b)^n & a^n + 2(a-3b)^n \end{pmatrix}$  であるので、

$$B^n x = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \{a^n + 2(a-3b)^n\}p + \{a^n - (a-3b)^n\}q + \{a^n - (a-3b)^n\}r \\ \{a^n - (a-3b)^n\}p + \{a^n + 2(a-3b)^n\}q + \{a^n - (a-3b)^n\}r \\ \{a^n - (a-3b)^n\}p + \{a^n - (a-3b)^n\}q + \{a^n + 2(a-3b)^n\}r \end{pmatrix}$$

$$\therefore \|B^n x\|_1 = a^n \|x\|_1$$

これが  $n$  に依存しないためには、 $a = 0, 1$  であれば良い。

(4)

(3) より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a - 3b)^n (p - q) = 0$  となればよいので、 $|a - 3b| < 1$  であれば良い。

### 問題 3

(1)

(a)

$(0, 0, 3), (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 3, 0), (1, 0, 2), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0), (3, 0, 0)$

(b)

(a) より、 $(0, 2, 1), (2, 1, 0)$

(2)

(a)

$n = 1$  の場合はその箱にすべてのボールを入れざるを得ないので、 $S(m, n) = 1$  である。

$n > 1$  の場合、一つ目の箱に  $m - i$  個のボールを入れるとすると、残りの  $i$  個のボールを残りの  $n - 1$  個の箱に入れるので、分け方の総数は  $S(i, n - 1)$  すべての  $i$  について総和を取れば  $S(m, n)$  になるので、

$$S(m, n) = \sum_{i=0}^m S(i, n - 1) \quad \square$$

(b)

$S(m, n)$  は  $m$  個のボールと  $n - 1$  個の仕切りを並べる場合の数であるので、 $S(m, n) = {}_{m+n-1}C_{n-1}$  である。  $\square$

(3)

右側  $n - 3$  個の箱にボールを分け方の総数は  $S(m, n - 3)$  個。 $(0, 0, 0, m, 0, \dots, 0)$  はそのような分け方を辞書順に並べた場合に最後になるので、 $S(m, n - 3)$  番目である。

左から 3 個目の箱に 1 つボールをいれ、残りをそれより右の箱に分ける分け方の総数は  $S(m - 1, n - 3)$  個。 $(0, 0, 1, m - 1, 0, \dots, 0)$  はそのような分け方を辞書順に並べた場合に最後になるので、 $S(m - 1, n - 3)$  番目である。

分け方を辞書順に並べたときに、後者の分け方は前者の分け方の直後に続くので、 $(0, 0, 1, m - 1, 0, \dots, 0)$  は、 $S(m, n - 3) + S(m - 1, n - 3) = \frac{(m - 1)!}{(n - 3)!(m - n + 2)!} \left( \frac{m}{m - n + 3} + 1 \right)$  番目である。