|  |  |
| --- | --- |
| 1ère 2 NSI | TD de Logique |

I] Initiation aux tables de vérités

1. Contraire : Le contraire de la proposition P est noté ¬P, ou P ou encore !P.

Exemples Compléter la table de vérité de la négation

|  |  |
| --- | --- |
| P | P |
| 1 | …. |
| 0 | …. |

Si la proposition P est « le chat est (tout) noir », (on note 1 pour « vrai » et 0 pour « faux ») la proposition est « …………….. »

(le chat peut être ...) Si la proposition Q est *x*>1, la proposition est *x….*.

1. Conjonction : la conjonction de P et Q, proposition notée P ∧ Q (ou P&Q), est vraie quand P et Q sont toutes les deux vraies, fausse dans tous les autres cas.

Exemples Compléter la table de vérité du connecteur ∧ .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P ∧ Q |
| 1 | 0 | … |
| 1 | 1 | … |
| 0 | 0 | … |
| 0 | 1 | … |

P : « le chat est noir », Q : « le chat dort »,

P ∧ Q : « … » ou

« …. » ou

« … »

Si le chat blanc dort, P ∧ Q est ….

P : *x*>1, Q: *x*<5. P ∧ Q : …<*x*<…

P : *x*>1, Q: *x*<0. P ∧ Q : …, *x*…..∅

c) Disjonction : la disjonction de P et Q, proposition notée P ∨ Q (ou P||Q), est fausse quand P et Q sont tous les deux fausses, et vraie dans tous les autres cas (*ou inclusif* de la langue : l'un ou l'autre ou les deux).

Exemples Compléter la table de vérité du connecteur ∨ .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P ∨ Q |
| 1 | 0 | … |
| 1 | 1 | … |
| 0 | 0 | … |
| 0 | 1 | … |

P : « le chat est noir », Q : « le chat dort »,

P ∨ Q : « …. » ou « … ».

Si le chat blanc dort, P ∨ Q est …. P : *x*>1, Q: *x*<5. P ∨ Q : *x*…ℝ .

P : *x*>1, Q: *x*<0. P ∨ Q : *x*…..

1. Propriété 1: le contraire d'une disjonction

revient à la conjonction des contraires .

Montrer cela avec les tables de vérité (pour conclure il faut que les deux colonnes grises soient identiques).

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | P ∨ Q |  |  |  | ∧ |
| 1 | 0 | … | … | 0 | 1 | … |
| 1 | 1 | … | … | 0 | 0 | … |
| 0 | 0 | … | … | 1 | 1 | … |
| 0 | 1 | … | … | 1 | 0 | … |

La négation de « riche ou célèbre » est … et …..

1. Propriété 2: le contraire d'une conjonction *P*∧*Q* revient à la disjonction des contraires

Montrer cela avec les tables de vérité (pour conclure il faut que les deux colonnes grises soient identiques).

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | P ∧ Q |  |  |  | ∨ |
| 1 | 0 | … | … | 0 | 1 | … |
| 1 | 1 | … | … | 0 | 0 | … |
| 0 | 0 | … | … | … | … | … |
| 0 | 1 | … | … | … | … | … |

La négation de « un temps chaud et humide » est « … ».

II] Implication, contraposée, réciproque & équivalence

1. L'implication : L'*implication* P0Q correspond à l'expression « si P alors Q ». Cela exprime la causalité, P est une condition *suffisante* pour que Q soit vraie. Pour P0Q, lorsque P est vraie, Q doit être vraie aussi mais rien ne dit ce qui se passe quand P est fausse (Q peut être vraie ou fausse). Voici la table de vérité de l'implication :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P⇒Q |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

Compléter avec VRAI ou FAUX

S'il pleut alors le trottoir est mouillé » est une implication … (…. ).

Si ABCD est un rectangle alors ABCD est un carré est une implication …. (…..).

Si ABCD est un rectangle alors AC=BD est une implication … (….).

Si AC=BD alors ABCD est un rectangle est une implication …. (…. ).

1. La contraposée : La proposition contraposée de PQ est la proposition…. .. Ces deux propositions ont les mêmes valeurs de vérité, elles sont équivalentes (si l'une des deux est vraie, l'autre est vraie aussi).

Établir la table de vérité de la contraposée vérifier qu'elle a même valeurs que l'implication P⇒Q. Vérifier aussi, à l'aide de la table de vérité que P ˅ Q a mêmes valeurs de vérité que l'implication P0Q.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | P⇒Q |  |  |  | ˅ Q |
| 1 | 0 | … | … | … | … | … |
| 1 | 1 | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | … | … | … | … | … |
| 0 | 1 | … | … | … | … | … |

1. La réciproque : La proposition réciproque de P⇒Q est la proposition Q⇒P. D'une façon générale, le fait qu'une proposition soit vraie n'entraîne pas nécessairement que sa réciproque soit vraie aussi. Exemple : L'implication « s'il pleut alors le trottoir est mouillé » est vraie ; sa réciproque « si le trottoir est mouillé alors il pleut » est fausse.

Donner un contre-exemple : le trottoir a été mouillé lors d'un arrosage de la voirie par des agents communaux.

1. L'équivalence : Lorsqu'une proposition P⇒Q et sa réciproque Q⇒P sont toutes les deux vraies, on parle d'*équivalence* et on note alors que P⇔Q. L'équivalence est ainsi le connecteur qui indique que P et Q sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

Compléter la table de vérité de l'équivalence :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P⇔Q |
| 1 | 0 | … |
| 1 | 1 | … |
| 0 | 0 | … |
| 0 | 1 | … |
|  |  |  |
|  |  |  |

Dresser la table de vérité de la formule (P⇒Q) pour établir qu'il s'agit de P⇒Q.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | P⇒Q | Q⇒P | ( | P⇔Q. |
| 1 | 0 | … | … | … | … |
| 1 | 1 | … | … | … | … |
| 0 | 0 | … | … | … | … |
| 0 | 1 | … | … | … | … |

Une autre façon de dire l'équivalence des propositions P et Q, n'utilisant que la conjonction et la négation est  . Prouver cela à l'aide d'une table de vérité.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q |  | P∧ |  |  | Q∧ |  |  | P⇔Q. |
| 1 | 0 | … | … | … | … | … | … | … | … |
| 1 | 1 | … | … | … | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | … | … | … | … | … | … | … | … |
| 0 | 1 | … | … | … | … | … | … | … | … |

III] À propos d'implications

a) Condition suffisante & condition nécessaire

►compléter avec les mots *nécessaire* ou *suffisant*

Dans l'implication P0Q la condition P est *suffisante* pour Q mais généralement pas *nécessaire*.

Exemple1 : Carré0Rectangle est une implication vraie.

La condition « carré » est *suffisante* pour avoir « rectangle », mais ce n'est pas une condition *nécessaire*.

Exemple2 : Rectangle0diagonales de même longueur est une implication vraie.

La condition « diagonales de même longueur » est une condition *nécessaire* pour avoir un rectangle.

En donner une autre : « avoir un angle droit » (ce n'est cependant pas *suffisant*).

« avoir deux angles droits » (ce n'est cependant pas *suffisant*).

« avoir trois angles droits » (c'est *suffisant* donc c'est *nécessaire* et *suffisant*).

Ne pas penser que si une implication est vraie, sa réciproque aussi : *x*=3⇒*x*²=9 est vraie mais il ne faut pas en déduire que la réciproque *x*²=9⇒*x*=3 est vraie aussi ; *x*=3 n'est pas une condition *nécessaire* pour que *x*²=9 (c'est cependant une condition *suffisante*).

►Entourer les conditions *suffisantes* pour que *x*²>4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x*>100 |  | | *x*>106 | |  |
| *x<−*10 | |  | | *x<−*2,1 | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x<−*2 |  | *x<−*2 ou *x>*2 |

|  |
| --- |
| *x<−*3ou *x>*3 |

*x*>1,9 *x<*0 *x<−*1

Parmi ces conditions *suffisantes* laquelle est *nécessaire*? *x<−*2 ou *x>*2 (c'est *nécessaire* et *suffisant*)

►Conditions suffisantes sur un forum mathématique :

Glob35 : « Je dois démontrer que ABCD est un parallélogramme et je ne sais pas comment m'y prendre » Les réponses à la question de Glob35 ne tardent pas :

P314159 : « Connais-tu une condition suffisante pour que ABCD soit un parallélogramme ? » Microb12 : « …=…

XY007 : « *AB*=*DC*

Coco75005 : « et colinéaires.

Bogoss123 : « (*AB*)//(DC)

E=mc² : «

Ami37 : « *AC* =*AB* + *AD*

Lesquelles des conditions énoncées sont vraiment suffisantes pour que ABCD soit un parallélogramme ? .

Énoncer une autre condition suffisante : ……...

Certaines des conditions énoncées ne sont que des conditions nécessaires. Lesquelles ?

*………………………..*

Énoncer d'autres conditions nécessaires : *…………..* . b) Quantificateur

Un énoncé utilisant le quantificateur universel ∀ peut être remplacé par une implication.

Pour prouver qu'une implication est fausse, il suffit qu'il existe ( ∃ ) un contre-exemple.

►Compléter : ∀ *M* ∈[ *AB*]*, AM* +*MB*=*AB* peut s'écrire si *M* ∈[ *AB*] alors *AM* …*MB*…*AB* .

►Énoncer l'implication Carré⇒Rectangle à l'aide du quantificateur universel : ….. Avec le quantificateur, on doit nommer les ensembles : ∀ *ABCD*… *Ecarré , ABCD*…*Erectangle* ►L'affirmation ∀ *n*∈ℕ\* *,*2*n*1 est premier est-elle vraie ou fausse ? ….

Prouver votre affirmation précédente en exhibant un contre-exemple 23…1=9=3×3 n'est pas … .

L'affirmation [ *AC*]⊥[ *BD*] 0 *ABCD* losange est-elle vraie ou fausse ? ….

Prouver votre affirmation (faire une figure) : Si [ *AC*]⊥[ *BD*] mais que [ *AC*] et [ *BD*] n'ont pas le même milieu, *ABCD* …..

c) Transitivité de l'implication: (P⇒Q) .

Montrer la transitivité de l'implication à l'aide d'une table de vérité.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | R | P⇒Q | Q⇒R | (P⇒Q) | P⇒R | (P⇒Q) |
| 1 | 1 | 1 | …. | … | … | … | … |
| 1 | 1 | 0 | … | … | … | … | … |
| 1 | 0 | 1 | … | … | … | … | … |
| 1 | 0 | 0 | … | … | … | … | … |
| 0 | 1 | 1 | … | … | … | … | … |
| 0 | 1 | 0 | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | 1 | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | 0 | .. | … | … | … | … |

NB : Ce que l'on vient de montrer est une tautologie (voir plus loin) : c'est toujours vrai.

Une autre propriété à démontrer à l'aide d'une table de vérité : la distributivité de la disjonction sur la conjonction : (P .

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | R | P∧Q | P∨R | Q∨R | (P∧Q)∨R | (P∨R)∧(Q∨R) |
| 1 | 1 | 1 | … | … | … | … | … |
| 1 | 1 | 0 | … | … | … | … | … |
| 1 | 0 | 1 | … | … | … | … | … |
| 1 | 0 | 0 | … | … | … | … | … |
| 0 | 1 | 1 | … | … | … | … | …. |
| 0 | 1 | 0 | … | … | … | …. | … |
| 0 | 0 | 1 | … | … | … | …. | … |
| 0 | 0 | 0 | … | … | … | … | … |

L’ INITIATION A LA LOGIQUE EST UNE ETAPE INDISPENSABLE DANS LE CHEMINEMENT DE VOTRE ESPRIT !!! Ne PANIQUEZ SURTOUT PAS !!! OMJS