EVALUATION 2 DE MATHEMATQIUES CONFINEMENT 1ère 3,4 COURS HATTEMER

Mercredi 20;05;2020 Durée 1h15;1h25 Calculatrice autorisée

Question de Cours :3 Points

Si A et B sont deux événements indépendants alors les événements $\overline{A}$ $et\ \overline{B}$ $ainsi\ que\ A\ et\ \overline{B}$.

$Démontrer\ \ ces\ deux\ assertions$.

$indication : A\ et\ B\ sont\ indépendants\ \ alors\ P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et $P\left(\overline{\overline{A}}\right) = P(A)$.

A et B sont indépendants donc :

P(A∩B)=P(A)*P(B)

P($\overline{A}$∩$\overline{B}$)=P($\overline{A \cup B}$)=1-P(A∪B)

P($\overline{A}$∩$\overline{B}$)=1-(P(A)+P(B)-(P(A∪B))

P($\overline{A}$∩$\overline{B}$)=1-P(A)-P(B)+P(A∪B)

P($\overline{A}$∩$\overline{B}$)=1-P(A)-P(B)+P(A)*P(B)

P($\overline{A}$∩$\overline{B}$)=1-P(A)-P(B)(1-P(A))

P($\overline{A}$∩$\overline{B}$)=[1-P(A)][1-P(B)]=P($\overline{A}$)*P($\overline{B}$)

P(A∩$\overline{B}$)=P

P(A)=P(A∩B)+P(A∩$\overline{B}$)

P(A)=P(A)*P(B)+P(A∩$\overline{B}$)

P(A)-P(A)*P(B)=P(A∩$\overline{B}$)

P(A)[1-P(B)]= P(A∩$\overline{B}$)

Problème 1 : 10 Points

Dans un zoo , l'unique activité d'un manchot empereur est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.

On a observé que :

-Si un manchot choisit le toboggan , la probabilité qu'il le reprenne est 0,3 .

- Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8 .

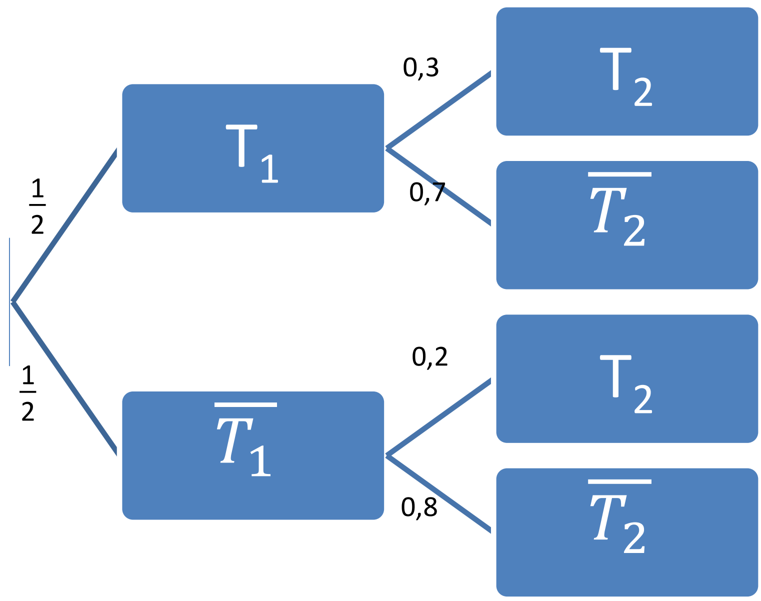
Lors du premier passage , les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $on\ désigne\ par$:

$* \; T_n$ $l'événement$: "le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage".

$* \; \overline{T_n}$ $l'événement$: " $le\ manchot\ utilise\ le\ plongeoir\ lors\ de\ son\ n - ième\ passage$ " .

1. Déterminer la probabilité de l'événement T_2 .
   Indication :
   $Construction\ d'un\ arbre\ commençant\ par\ T_1 et\ \overline{T_1}\ \ puis\ sur\ les\ deuxièmes\ branches\ T_2\ et\ \overline{T_2}$
   Ainsi que les probabilités conditionnelles afférentes .



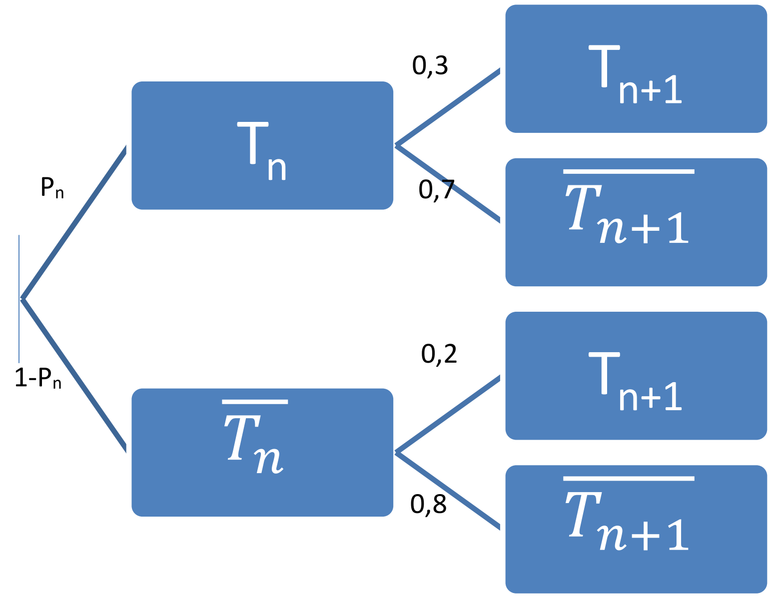
T_1 et $\overline{T_1}$ formant une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$P(T_2)=P(T_1 \cap T_2)+P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2})$

$P(T_2)=\frac{1}{2}*0{,}3+\frac{1}{2}*0{,}2=0{,}25$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, nous\ posons\ p_n = P(T_n)$.
   Montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = 0{,}1p_n + 0{,}2$

   Indication : Commencez par construire un arbre qui commence avec les branches
   $T_n\ \ et\ \overline{T_n}\ puis\ sur\ les\ deuxièmes\ branches\ \ T_{n+1}\ \ et\ \overline{T_{n+1}}$ ainsi que les probabilités conditionnelles afférentes .



$P(T_{n+1})=P(T_{n+1}\cap T_{n+1})+P(\overline{Tn}\cap T_{n+1})$

Donc $P_{n+1}=P_n*0,3+(1-P_n)*0,2$

$P_{n+1}=0,3P_n+0,2-0,2P_n$

D'où $P_{n+1}=0,1P_n+0,2$

3. On considère la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* : $u_n = p_n - \frac{2}{9}$.
   Justifier que (u_n)*est une suite géométrique dont vous préciserez la raison et le terme* Initial .
   En déduire p_n*en fonction de n . Donner une interprétation probabiliste de la limite de* p_n*notée* $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
   Commenter ce résultat.

$\forall_n\in\mathbb{N}^*$, $U_n=P_n-\frac{2}{9}$

$U_{n+1}=P_{n+1}-\frac{2}{9}$

Or $P_{n+1}=0,1P_n+0,2$

Donc $U_{n+1}=0,1+0,2-\frac{2}{9}$

$U_{n+1}=0,1P_n-\frac{1}{45}$

$U_{n+1}=0,1(P_n-\frac{2}{9})$

$U_{n+1}=0,1U_n$

Donc (U_n) est une suite géométrique de raison q=0,1 et de premier terme $U_1=P_1-\frac{2}{9}=\frac{1}{2}-\frac{2}{9}=\frac{5}{18}$

$\forall_n \in \mathbb{N}^*$, $U_n=U_1*q^{n-1}$

Donc $U_n=\frac{5}{18}*(0,1)^{n-1}$ et $P_n=U_n+\frac{2}{9}=\frac{5}{18}*(0,1)^{n-1}$

Et $P_n=U_n+\frac{2}{9}=\frac{5}{18}*(0,1)^{n-1}+\frac{2}{9}$

-1<0,1<1 donc $\lim\limits_{n \to +\infty}(0,1)^{n-1}=0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n=\frac{2}{9}$

A terme, la probabilité que le manchot utilise le toboggan est $\frac{2}{9}$.

<u>Problème 2</u> : 7 Points

Une urne contient 5 boules blanches et n boules noires , avec $n \geq 2$. $Les\ boules\ sont$

indiscernables et donc prélevées au hasard.

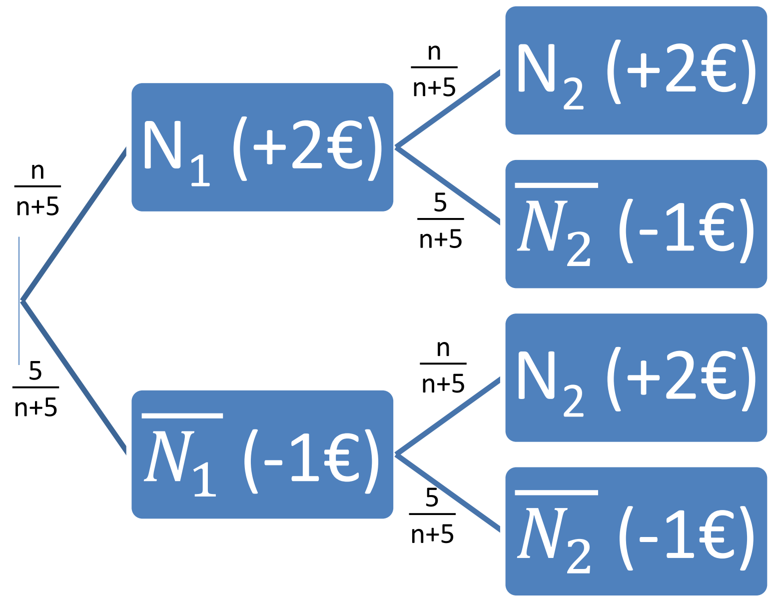
1. Un joueur tire deux boules dans l'urne , successivement avec remise .
   $*$ $Si\ une\ boule\ blanche\ est\ obtenue\ alors\ le\ joueur\ \ perd\ 1\ euro\ (1€).$
   $*$ $Si\ une\ boule\ noire\ est\ obtenue\ \ alors\ le\ joueur\ gagne\ 2\ euros\ (2€).$

Quelle est la loi de la variable aléatoire $X\ qui\ restitue\ le\ gain\ algébrique\ du\ joueur$?

Commencez par préciser l'ensemble des valeurs prises par $X\ noté\ X(\Omega) =$
$\{\dots\dots\dots\dots.\}\ et\ construire\ \ \ un\ arbre\ pondéré\ dans\ lequel\ les\ deux\ premières$

branches commencent par les événements $N_1\ \ et\ \overline{N_1}$ et les deuxièmes branches commencent par les événements $N_2\ \ et\ \overline{N_2}$ ainsi que les gains obtenus.

$\left\{\begin{array}{l}\text{S boules blanches} \\ \text{n boules noires}\end{array}\right)$ total de n+5 boules, (n≥2)



Tirage successif de 2 boules avec remise (l'urne contient toujours n+5 boules)

X est la variable aléatoire qui restitue le gain arithmétique du joueur.

$X(\Omega)=\{-2;+1;+4\}$

X_i	-2	+1	+4
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{5}{n+5}\right)^2$	$2*\frac{5n}{(n+5)^2}$	$\left(\frac{n}{n+5}\right)^2$

2. Calculer , en fonction de n , $l'espérance\ mathématique\ \ E(X)$.

$$E(X)=\left(\frac{5}{n+5}\right)^2*(-2)+\frac{10n}{(n+5)^2}*(1)+\left(\frac{n}{n+5}\right)^2*4$$

$$E(X)=\frac{-50+10n+4n^2}{(n+5)^2}$$

3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n\ le\ jeu\ est-il\ favorable$?

Le jeu est favorable au joueur lorsque E(X)>0

Soit $4n^2+10n-50>0$ avec $n\geq 2$

$\Delta=10^2-4*4*4(-50)=-900$

$$n_1=\frac{-10-\sqrt{900}}{2*4}=(-5)$$

$$n_2=\frac{-10+\sqrt{900}}{2*4}=\frac{5}{2}=2,5$$

n	2		2,5		+∞
E(X)		-	0	+	

Donc pour n≥3 boules noires, le jeu est favorable au joueur.

4. Le résultat est –il identique si le joueur tire deux boules dans l'urne , successivement sans remise ?

y_i	-2	+1	+4
$P(Y=y_i)$	$\frac{20}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

$$E(Y)=\frac{-40+10n+4n(n-1)}{(n+4)(n+5)}=\frac{4n^2+6n-40}{(n+4)(n+5)}$$

n	2		2,5	
$4n^2+6n-40$		-	0	+

Même résultat, E(Y)>0 pour n≥3.

5. Bonus :Exprimer la variance V(X) et l'écart-type σ(X) en fonction de n ainsi que pour des valeurs particulières de n que vous aurez à la question 3.

   BON COURAGE CHERS ELEVES !!! Bientôt la fin . OMJSTapez une équation ici.