Chapitre 1: Trinôme du second degré

1) Définition

Toute fonction du trinôme f du second degré est de la forme: ℝ |---->ℝ

f:x|---> $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$

Si a=0 f(x)=bx+c

f(x)=mx+p

2) Forme canonique d'un trinôme du second degré.

Toute fonction trinôme du second degré f admet une forme canonique et se note $\boxed{f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta}$, $a\neq 0$

Λγδε

Démonstration 1:

Rappels:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$

$$f(x)=a\left(\underbrace{x^2+\frac{b}{a}}\ x+\frac{C}{a}\right)$$

$$f(x)=a[x^2+2*\frac{b}{2a}\ x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}]$$

$$f(x)=a[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}]$$

Rappels :

$f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$

$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta,\ a\neq 0$

$$f(x)=a[x^2+\frac{b}{a}\ x+\frac{c}{a}]$$

$$f(x)=a[x^2+2*\frac{b}{2a}\ *x+\frac{c}{a}]$$

$f(x)=a[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}]$

$f(x)=a[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+4a*\left(\frac{c}{4a}\right)^2]$

$f(x)=a[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-b^2+\left(\frac{4ac}{4a}\right)^2\right)]$

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-b^2+\frac{4ac}{4a}\right)$

$f(x)=a\left(x-\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2+\left(-b^2+\frac{4ac}{4a}\right)$

Posons $\boxed{\alpha=-\frac{b}{2a} \text{ et } \beta=-b^2+\frac{4ac}{4a}}$

Donc $\boxed{f(x)=a(x-\alpha^2+\beta)}$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(x^2+2*x*\frac{b}{2a}\right)^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$a^2+2ab=(a+b)^2-b^2$

<u>Trinôme 1:</u>

$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$f : x \mapsto y=f(x)=x^2+x-6$

a)

$f(x)=a(x-\beta^2+\lambda)$

$f(x)=x^2+x-6$: a=1, b=1 et c=-6

$f(x)=x^2+2*\frac{1}{2}*x-6$

$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-6$

$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{24}{4}$

$\boxed{f(x)=\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right)}$

$\beta=-\frac{1}{2}$ et $\lambda=-\frac{25}{4}$

b) Rappel : $\boxed{\forall x\in D_f,\ f(x)\geq m}$

or $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\geq -\frac{25}{4}$

$\Rightarrow f(x)\geq -\frac{25}{4}$

Par conséquent : f admet pour minimum M= $-\frac{25}{4}$ et il est atteint pour $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

c) Rappel

$\tau = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2},\ x_1\neq x_2$

- Si $\tau>0$ sur I $\Rightarrow$ f est croissante sur 1 ;
- Si $\tau<0$ sur I $\Rightarrow$ f est décroissante sur I ;
- Si $\tau=0$ sur I $\Rightarrow$ f est Constante sur I.

$\tau = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

$\tau = \frac{\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}}{x1-x2}$

$\tau = \frac{\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2}{x1-x2}$

$\tau = \frac{\left(x_1+\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2}\right)\left(x_1+\frac{1}{2}-\left(x_2+\frac{1}{2}\right)\right)}{x1-x2}$

$\tau = \frac{(x_1+x_2+1)\left(x_1+\frac{1}{2}-x_2-\frac{1}{2}\right)}{x1-x2}$

$\tau = \frac{(x_1+x_2+1)(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$

$\tau = x_1+x_2+1$

$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

$I=[-1;2\ ;+\infty[\quad \tau=]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}]$

$$\left.\begin{array}{l} x_1\in I \Leftrightarrow x_1 \geq -\frac{1}{2} \\ x_2\in I \Leftrightarrow x_2 \geq -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1+x_2\geq -1$$

$\Rightarrow\ x_1+x_2+1\geq 0$

Donc $\tau\geq 0$

Par conséquent pour tout $x\in[-\frac{1}{2}\ ;+\infty[$ f est croissante.

$$\left.\begin{array}{l} x_1\in \tau \Leftrightarrow x_1 \leq -\frac{1}{2} \\ x_2\in \tau \Leftrightarrow x_2 \leq -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1+x_2\leq -1 \Rightarrow x_1+x_2+1\leq 0$$

Donc $\tau\leq 0$.

Par conséquent f est décroissante sur J.

X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
F	$\searrow$	-25;4	$\nearrow$

Faire feuille TD n°1 : tout jusqu'au IV (exclu)

1) Trinôme 1
    a.
2) Trinôme 2
    a. $G(x)=-x^2+2x+4$
        i. Forme canonique $g(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$
            1. $G(x)=-(x^2-2x-4)$
            2. $G(x)=-[(x-1)^2-1^2-4]$
            3. $G(x)=-[(x-1)^2-5]$
            4. $G(x)=-(x-1)^2+5$
            5. $\alpha=1\ ;\ \beta=5$
        ii. En déduire l'extremum
            1. Pour tout $x \in D_g$:
                a. $(x-1)^2\geq 0$
                b. $-(x-1)^2\leq 0$
                c. $-(x-1)^2+5\leq 3$
                d. $G(x)\leq 5$

e. Donc la fonction g admet un maximum qui vaut M=5 et est atteint pour x=1.

iii. $\tau=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$, $x_1 \neq x_2$.

1. $\tau = \dfrac{(x_1-1)^2+5-[-(x_2-1)^2+5]}{x_1-x_2}$
2. $\tau = \dfrac{-(x_1-1)^2+5+(x_2-1)^2-5}{x_1-x_2}$
3. $\tau = \dfrac{(x_2-1)^2-(x_1-1)^2}{x_1-x_2}$

iv. I=]-∞ ;1] et τ =[1 ;+∞[

1. $\left.\begin{array}{l}\forall x_1 \in I \Leftrightarrow x_1 \leq 1\\ \forall x_2 \in I \Leftrightarrow x_2 \leq 1\end{array}\right\} \rightarrow x_1+x_2 \leq 2$ donc $x_1+x_2-2 \leq 0$

$-(x_1+x_2-2) \geq 0$
Alors $\tau \geq 0$
Par conséquent t …

3) Trinôme 3

Définition 1.2 : (sens de variation)

Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si et seulement si $\forall x_1,x_2 \in I$, $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Remarques :(v)On définit de même une fonction strictement décroissante sur I ($x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$)

- La fonction f est croissante « au sens large » (ou dit aussi croissante, sans précision) si, et seulement si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Il faut retenir qu’une fonction f est croissante sur I signifie (/v)que l’ordre des images et des antécédents est conservé

Propriété 1.2 : (Signe du taux d’accroissement de Variation)

Le signe du taux de variation (d’accroissement)

$\tau=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $x_1<x_2$ ou $x_1>x_1$;$x_1 \neq x_2$

D’une fonction f entre x_1 et x_2

Deux points de l’ensemble de définition de f (D_f,I) indique le sens de variation de f sur D_f ou I.

En particulier, si $\tau>0 \Leftrightarrow$ f est strictement croissante sur I.

$\tau<0 \Leftrightarrow$ f est strictement décroissante sur I.

Si $\tau \geq 0 \Leftrightarrow$ f est croissante sur I respectivement décroissante sur I. Si $\tau \leq 0$.

Démonstration 2 :

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0 \Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)$ et x_1-x_2 sont de même signe.

Supposons que : $x_1-x_2<0 \Leftrightarrow x_1<x_2$

On a alors $f(x_1)-f(x_2)<0$

$\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Par conséquent f est strictement croissante.

Supposons que $x_1-x_2>0 \Leftrightarrow x_1>x_2$.

Ou a alors $f(x_1)-f(x_2)>0 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Par conséquent f est strictement croissante.

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0 \Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)$ et x_1-x_2 sont des signes contraires.

Supposons que $x_1-x_2>0 \Leftrightarrow x_1>x_2$

On a alors $f(x_1)-f(x_2)<0 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Par conséquent f est décroissante.

Théorème 1.1 :

Les variations de la fonction polynôme du second degré f de la forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ dépendent du signe de a et de la valeur de α.

1er cas : a>0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	β ↗	$+\infty$

2ème cas : a<0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	β ↘	$-\infty$

Démonstration 3 :

$F(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

$\forall x_1 \in D_f, \forall x_2 \in D_f \; a \neq 0$

$\tau = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $x_1 \neq x_2$

$\tau = \dfrac{a(x_1-\alpha)^2+\beta-[a(x_2-\alpha)^2+\beta]}{x_1-x_2}$

$\tau = \dfrac{a(x_1-\alpha)^2+\beta-a(x_2-\alpha)^2-\beta}{x_1-x_2}$

$\tau = \dfrac{a(x_1-\alpha)^2-a(x_2-\alpha)^2}{x_1-x_2}$

$\tau = \dfrac{a[(x_1-\alpha)^2-(x_2-\alpha)^2]}{x_1-x_2}$

$\tau = \dfrac{a[x_1-\alpha+x_2-\alpha][x_1-\alpha-(x_2-\alpha)]}{x_1-x_2}$

$\tau = \dfrac{a(x_1+x_2-2\alpha)(x_1-\alpha-x_2+\alpha)}{x_1-x_2}$

$\tau = \dfrac{a(x_1+x_2-2\alpha)(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$

$\tau = a(x_1+x_2-2\alpha)$

$I =]-\infty ;\alpha]$

$\left.\begin{array}{l} \forall x1 \in I \Leftrightarrow x1 \leq 0 \\ \forall x2 \in I \Leftrightarrow x2 \leq \alpha \end{array}\right\}$

Ex 29 p 42 :

$f(x)=x^2-4x-3$

$\Leftrightarrow =(x-2)^2-4-3$

$f(x)=(x-2)^2-7$

$a=1$; $\alpha=2$; $\beta=-7$

$a=1>0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	-7 ↗	$+\infty$

$H(x)=2x^2+3x+1$

$H(x)=2(x^2+\frac{3x}{2})+1$

$H(x)=2[(x+\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}]+1$

$H(x)=2(x+\frac{3}{4})^2-\frac{9}{8}+1$

$H(x)=2(x+\frac{3}{4})^2-\frac{1}{8}$

$A=2$; $\alpha=\frac{3}{4}$; $\beta=-\frac{1}{8}$

$A=2>0$

X	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
F	$+\infty$	$-\frac{1}{8}$	$-\infty$

$K(x)=-3x^2+5x+2$

$K(x)=-3(x^2-\frac{5x}{3})+2$

$K(x)=-3[(x-\frac{5}{6})^2-\frac{25}{36}]+2$

$K(x)=-3(x-\frac{5}{6})^2+\frac{25}{12}+2$

$K(x)=-3(x-\frac{5}{6})^2+\frac{49}{12}$

$A=-3$; $\alpha=-\frac{5}{6}$; $\beta=\frac{49}{12}$

$A=-3<0$

X	$-\infty$	$-\frac{5}{6}$	$+\infty$
F		$\frac{49}{12}$	

$G(x)=2x^2-8x-1$

$G(x)=2(x^2-4x)-1$

$G(x)=2[(x-2)^2-4]-1$

$G(x)=2(x-2)-8-1$

$G(x)=2(x-2)-9$

$A=2$; $\alpha=2$; $\beta=-9$

$A=2>0$

X	$-\infty$	-2	$+\infty$
F		-9	

$I(x)=x^2-x$

$I(x)=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

$A=1$; $\alpha=\frac{1}{2}$; $\beta=-\frac{1}{4}$

$A=1>0$

X	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
F		$-\frac{1}{4}$	

Ex 33 p 43 :

$H(x)=2(x-5)^2+5$

$a=-2$; $\alpha=5$; $\beta=5$

comme $a=2>0$ donc d'après le théorème 1.

X	$-\infty$	5	$+\infty$
H	$+\infty$	5	$+\infty$

H admet un minimum, 5.

$H(x)=6-3(x-1)^2 = -3(x-1)^2+6$

A=-3, $\alpha=1$; $\beta=6$

Comme a=-3<0 donc d'après le théorème 1 :

X	$+\infty$	1	$-\infty$
H		6	
	$-\infty$		$-\infty$

H admet un maximum : 6.

$G(x)=-4(x-4)^2+4$

A=-4 ; $\alpha=4$; $\beta=4$

Comme a=-4<0 donc d'après le théorème 1

X	$-\infty$	4	$+\infty$
g		4	
	$-\infty$		$-\infty$

$K(x)=\frac{1}{4}(x-\frac{5}{2})^2+\frac{1}{2}$

$A=\frac{1}{4}$; $\alpha=\frac{5}{2}$; $\beta=\frac{1}{2}$

Comme $a=\frac{1}{4}>0$ donc d'après le théorème :

X	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
K	$+\infty$		$+\infty$
		$\frac{1}{2}$	

K admet un minimum de $\frac{1}{2}$

Ex 34

Cour

$F(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

$F(x)=a[(x-(\frac{-b}{2a}))^2-\frac{(b^2-4ac)}{4a^2}]$, $a\neq 0$

Posons $\Delta = b^2-4ac$: Delta

$F(x)=a[(x-(\frac{-b}{2a}))^2-\frac{\Delta}{4a^2}]$

Si $\Delta=0 \Leftrightarrow b^2-4ac = 0$

Donc $f(x)=a(x-(\frac{-b}{2a}))^2$

$F(x)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)^2=0$

$F(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$

Si $\Delta>0 \Leftrightarrow b^2-4ac>0$

$F(x)=a[(x-(\frac{-b}{2a}))^2-(\frac{\Delta}{2a})^2]$

$F(x)=a[(x-(\frac{-b}{2a}))-(\frac{\Delta}{2a})][(x-(\frac{-b}{2a}))+\frac{\Delta}{2a}]$

Ex 49 p 45 :

a)

$f(x)=-6x^2+5x+6$

$\alpha=\frac{-b}{2a}$

$\alpha=\frac{-5}{2*(-6)}$

$\alpha=\frac{5}{12}$

$\beta=f(\alpha)$

$\beta=-6*\left(\frac{5}{12}\right)^2+5*\frac{5}{12}+6$

$\beta=-6*\frac{25}{144}+\frac{25}{12}+6$

$\beta= -\frac{25}{24}+\frac{25}{12}+6$

$\beta=\frac{169}{24}$

$f(x)=-6\left(x+\frac{5}{12}\right)^2+\frac{169}{24}$

$a=-6$; $\alpha=\frac{5}{12}$; $\beta=\frac{169}{24}$

X	$-\infty$	$\frac{5}{12}$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$\frac{169}{24}$ ↘	$+\infty$

b)

$g(x)=8x^2-4x-3$

$\alpha=\frac{-b}{2a}$

$\alpha=\frac{-(-4)}{2*8}$

$\alpha=\frac{4}{16}$

$\alpha=\frac{1}{4}$

$\beta=g(\alpha)$

$\beta=8*\left(\frac{1}{4}\right)^2-4*\frac{1}{4}-3$

$\beta=8*\frac{1}{16}-1-3$

$\beta=\frac{1}{2}-4$

$\beta=-\frac{7}{2}$

a= 8 ; $\alpha=\frac{1}{4}$; $\beta=-\frac{7}{2}$

X	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
K	$+\infty$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$

Ex 51 p 45 :

a)

$H(x)=-\frac{2}{3}x^2+8x$

$\alpha=\frac{-b}{2a}$

$\alpha=\frac{-8}{2*\frac{2}{3}}$

$\alpha=\frac{-8}{-\frac{4}{3}}$

$\alpha=6$

$\beta=H(\alpha)$

$\beta=-\frac{2}{3}*-6^2+8*6$

$\beta=-\frac{2}{3}*36+48$

$\beta=-24+48$

$\beta=24$

a= $-\frac{2}{3}$; $\alpha=6$; $\beta=24$

X	$-\infty$	6	$+\infty$
H	$-\infty$	0	$+\infty$

b)

$I(x)=-2x^2-8x+1$

$\alpha=\frac{-b}{2a}$

$\alpha=\frac{-(-8)}{2*-2}$

$\alpha=\frac{8}{-4}$

$\alpha=-2$

$\beta=I(\alpha)$

$\beta=-2*-2^2-8*-2+1$

$\beta=-8+16+1$

$\beta=9$

$a=-2$; $\alpha=-2$; $\beta=9$

X	$-\infty$	-2	$+\infty$
H		9	
	$-\infty$ ↗	↘	$+\infty$

Cour :

$F(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq0$

$F(x)=a\left[\left(x-\left(\frac{b}{2a}\right)\right)^2+\frac{-(b^2-4ac)}{4a^2}\right]$

Posons $\Delta=b^2-4ac$ ← le discriminant

$\alpha=-\frac{b}{2a}$ $f(x)=a\left[(x-\alpha)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

1er cas : $\Delta=0$ $\Leftrightarrow b^2-4ac=0$

$F(x)=a(x-\alpha)^2$

$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)^2=0$

$\Leftrightarrow x=\alpha$

Donc $S=\{\alpha\}$

<u>2ème cas :</u> $\Delta>0 \Leftrightarrow b^2-4ac>0$

$$F(x)=a\left[\left(x-\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2-\frac{\sqrt{\Delta}}{4a^2}\right]$$

$$F(x)=a\left[\left(x-\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x-\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

$$F(x)=a\left[\frac{x+b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\frac{x+b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{x+b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \text{ ou } \frac{x+b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$$

$$\Leftrightarrow x_1=-b-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x_2=-b+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc $S=\{x_1\,;x_2\}$.

<u>exercice d'application :</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $4x^2-8x+1=0$
   a. $\Delta=b^2-4(ac)$
   b. $\Delta=-8^2-4(4*1)$
   c. $\Delta=64-16$
   d. $\boxed{\Delta=16}$
   e. $\Delta>0 \rightarrow x_1\,;\,x_2$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2*4}$	$x_2=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2*4}$
$x_1=\frac{8-\sqrt{16}}{8}$	$x_2=\frac{8+\sqrt{16}}{8}$
$x_1=\frac{8-4}{8}$	$x_2=\frac{8+4}{8}$
$x_1=\frac{4}{8}$	$x_2=\frac{12}{8}$
$\boxed{x_1=\frac{1}{2}}$	$\boxed{x_2=\frac{3}{2}}$

2) $x^2+4x+4=0$
   a. $\Delta=b^2-4(ac)$
   b. $\Delta=4^2-4(1*4)$
   c. $\Delta=16-16$

d. $\boxed{\Delta=0}$
e. Comme $\Delta=0$ alors x_0
f. $x_0=\frac{-b}{2a}$
g. $x_0=\frac{-4}{2*1}$
h. $\boxed{x_0=-2}$
i. Donc S={-2}

Quelques indications utiles pour pouvoir faire la partie 1 du devoir maison :

Rappels :

$A(x_a ; y_a)$ et $B(x_b ;y_b)$

$x_A \neq x_B$

(AB) :y=mx+p

(AB) :y=ax+b

$M=a=\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}$

$A\in(AB) \Leftrightarrow y_A=m*x_A+p$

$\Leftrightarrow p=b=y_A-m*x_A$

$M(x ; y)\in C_f \Leftrightarrow y = f(x)$

$AB=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$

II

$Y=\frac{1}{x}$: L'inverse

$\frac{1}{x}$=hyperbole

(D)⊥(D)

Ex 60 p 46 :

a) $2x^2-8=0$
   a. $\Delta=b^2-4(ac)$
   b. $\Delta=-8^2-4(2*0)$
   c. $\Delta=64$
   d. $\Delta>0$ ➔ x_1 et x_2

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-8)-\sqrt{64}}{2*2}$	$x_2=\frac{-(-8)+\sqrt{64}}{2*2}$
$x_1=\frac{8-8}{4}$	$x_2=\frac{8+8}{4}$
$x_1=\frac{0}{4}$	$x_2=\frac{16}{4}$
$x_1=0$	$x_2=4$

b) $-3x^2+6x=0$

a. $\Delta=b^2-4(ac)$
b. $\Delta=6^2-4(-3*0)$
c. $\Delta=36$
d. $\Delta>0$ ➔ x_1 et x_2

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1=\frac{-6-\sqrt{36}}{2*(-3)}$	$x_2=\frac{-6+\sqrt{36}}{2*(-3)}$
$x_1=\frac{-6-6}{-6}$	$x_2=\frac{-6+6}{-6}$
$x_1=\frac{-12}{-6}$	$x_2=\frac{0}{-6}$
$x_1=2$	$x_2=0$

c) $-2x^2-3=0$

a. $\Delta=b^2-4(ac)$
b. $\Delta=(-3)^2-4((-2)*0)$
c. $\Delta=9$
d. $\Delta>0$ ➔ x_1 et x_2

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1=\frac{-(-3)-\sqrt{9}}{2*(-2)}$	$x_2=\frac{-(-3)+\sqrt{9}}{2*(-2)}$
$x_1=\frac{3-3}{-4}$	$x_2=\frac{3+3}{-4}$
$x_1=\frac{0}{-4}$	$x_2=\frac{6}{-4}$
$x_1=0$	$x_2=\frac{3}{-2}$

d) $2x^2-5x=0$

a. $\Delta=b^2-4(ac)$
b. $\Delta=(-5)^2-4(2*0)$
c. $\Delta=25$
d. $\Delta>0$ ➔ x_1 et x_2

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{25}}{2*2}$	$x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{25}}{2*2}$
$x_1=\frac{5-5}{4}$	$x_2=\frac{5+5}{4}$
$x_1=\frac{0}{4}$	$x_2=\frac{10}{4}$
$x_1=0$	$x_2=2,5$

Ex 61 p 46 :

a) $2x-5x+8=0$
   a. $\Delta=b^2-4(ac)$
   b. $\Delta=(-5)^2-4(2*8)$
   c. $\Delta=25-4(16)$
   d. $\Delta=25-64$
   e. $\Delta=-39$
   f. $\Delta<0$ ➔ ∅
b) $-8x^2+8x-2=0$
   a. $\Delta=b^2-4(ac)$
   b. $\Delta=8^2-4((-8)*(-2))$
   c. $\Delta=16-64$
   d. $\Delta=-48$
   e. $\Delta<0$ ➔ ∅
c) $-2x^2+5x=3$
   a. $-2x^2+5x-3=0$
   b. $\Delta=b^2-4(ac)$
   c. $\Delta=5^2-4((-2)*(-3))$
   d. $\Delta=25-24$
   e. $\Delta=1$
   f. $\Delta>0$ ➔ x_1 et x_2

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1=\frac{-5-\sqrt{1}}{2*(-2)}$	$x_2=\frac{-5+\sqrt{1}}{2*(-2)}$
$x_1=\frac{-5-1}{-4}$	$x_2=\frac{-5+1}{-4}$
$x_1=\frac{-6}{-4}$	$x_2=\frac{-4}{-4}$
$x_1=\frac{6}{4}$	$x_2=1$

d) $2x^2=6-x$
   a. $2x^2-6+x=0$
   b. $\Delta=b^2-4(ac)$
   c. $\Delta=(-6)^2-4(2*1)$
   d. $\Delta=36-8$
   e. $\Delta=28$
   f. $\Delta>0$ ➔ x_1 et x_2

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1=\frac{-(-6)-\sqrt{28}}{2*2}$ $x_1=\frac{6-\sqrt{28}}{4}$	$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-(-6)+\sqrt{28}}{2*2}$ $x_2=\frac{6+\sqrt{28}}{4}$

Savoir-faire 5 p 37 :

$f(x)=3x^2-2x-8$

pour $x=1$

$f(1)=3*1^2-2*1-8$

$f(1)=3-2-8$

$f(1)=-7$

Aide aux DM1 : Rappels

1) Du 1

$\forall M\binom{x}{y}\in C_f \Leftrightarrow y_M=f(x_M)$

(phi)(x)=1/2x²+1/2

A(0 ;1)

$M(m\ ;y_m)\in(\text{phi}) \rightarrow y_M=f(x_M)$

$AM=\sqrt{.......}$

2) $y=x^2$

(D) :y=mx+p

(D) :y=m'x+p'

$(D)//(D') \Leftrightarrow m=m'$

Partie 2

Y=1/x   x>0

Donc partie positive de l'hyperbole

$A\binom{Xa}{Ya}$

$B\binom{Xb}{Yb}$

$X_A \neq x_B$

(AB) : y=mx+p=ax+b

M=a=$\frac{Yb-ya}{xb-xa}$

B∈(AB)⇔ yb=m*xb+p

⇔p=y_b-m*X_B

Cour :

F(x)=a[(x-(-b/2a))²-(b²-4ac)/4a²]

(r)Δ=b²-4ac

F(x)=a[(x+b/2a)²-Δ/4a²], a≠0

$3^{ème}$ cas : Δ<0(/r)➔ -Δ>0

Ainsi -Δ/4a²>0 (r)et (x+b/2a)²≥0

F(x)=0 f(x)<0 ou f(x)>0 donc cette équation est impossible dans ℝ. S=∅.

Représentation graphique de ces cas :

1^{er} cas : Si Δ=0 f(x)=0 admet une solution double x=α (/r)

Représentation graphique des différentes possibilités

(r)$2^{ème}$ cas : (/r)

Δ>0

Image des possibilités es courbes

(r)$3^{ème}$ cas : Δ<0 (/r)

Image des différentes possibilités de Δ<0

(r) résolution algébrique d'une inéquation du second degré : (/r)

F(x)=ax²+bx+c, a≠0

(r)f(x)=a[(x+b/2a)²-Δ/4a²]

1^{er} cas : Δ=0 (/r) L'équation f(x)=0 admet (/r) une solution double

x=α (/r)

X	-∞	α	+ ∞
F(x)	(r)signe de a	0	Signe de a (/r)

(r)$2^{ème}$ cas : Δ>0 (/r) f(x)=0

X_1=-b-(r-Δ-)/2a et x_2=-b+(r-Δ-)/2a (r) x_1<x_2

F(x)=a(x-x_1)(x-x_2) : forme factorisée

(r)x	$-\infty$	X_1 x_2	$+\infty$
(/r)f(x)(r)	Signe de a 0	Signe de -a 0	Signe de a (/r)

(/r) f(x)=a[(x+b/2a)²-((r-Δ-)/2a)²]

(r) f(x)=a(x+/2a-(r-Δ-)/2a) (x+b/2a+(r-Δ-)/2a)

F(x)=0 ⇔x+b/2a-(r-Δ-)/2a=0 ou x+b/2a+(r-Δ-)/2a=0 (/r)

⇔ x=-b+(r-Δ-)/2a ou x=-b-(r-Δ-)/2a (r)

⇔$x=x_2$ ou $x=x_1$

⇔$x-x_2=0$ ou $x-x_1=0$(/r)

F(x)=a(x-(r)x_1)(/r)(x-(r)x_2)

a>0

X	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$
$x-x_1$	(v) -	0	+	+(/v)
$x-x_2$	(v)-	-	0	+(/v)
A	(v)+	+	+	(/v)
F(x)	(v)+	0 -	0	+ (/v)

(v)a<0

(v all)

X	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$
$x-x_1$	(v) -	0	+	+(/v)
$x-x_2$	(v)-	-	0	+(/v)
A	(v)-	-	-	(/v)
F(x)	(v)-	0 +	0	- (/v)

(/v all)

(r) 3ème cas : Δ<0 (v) f(x) sera du signe de a_0 (/v)

Exercice 61 p 46 :

F(x)=2x²-5x+8

a) F(x)=0
b) Résoudre l'inéquation f(x)<0, f(x)>0 donc s=ℝ {toujours vrai}(/r)
a) A=2 b=-5 c=8 Δ<0
   Δ=b²-4ac
   Δ=(-5)²-4(2*8)
   Δ=25-64
   Δ -39
   Donc l'équation n'admet solution réelles
b) F(x)<0 or a=2 donc f(x)>0 alors S=∅.

Ex 69 p 47 :

1) $M \in [AB]$, $AM=x$ et $AB=6$

Donc $0 \leq x \leq 6$

Donc $x \in [0\ ;\ 6]$

2) $\mathcal{A}_{AMD} = \dfrac{AM*AD}{2} = \dfrac{x*6}{2} = 3x$

$\mathcal{A}_{BNM} = \dfrac{BM*BN}{2} = \dfrac{(6-x)*x}{2} = \dfrac{6x-x^2}{2} = 3x-\dfrac{x^2}{2} =$

$\mathcal{A}_{CDN} = \dfrac{CD*CN}{2} = \dfrac{6(6-x)}{2} = /*3(6-x)*/ = \dfrac{36-6x}{2} = 18-3x.$

3) $\mathcal{A}_{MND} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{AMD} + \mathcal{A}_{BNM} + \mathcal{A}_{CDN})$

$\mathcal{A}_{MND}=36-(\cancel{3x}+\dfrac{6x-x^2}{2}+18\cancel{-3x})$

$\mathcal{A}_{MND}=36-(3x-\dfrac{x^2}{2}+18)$

$\mathcal{A}_{MND}=36-3x+\dfrac{x^2}{2}-18$

$\mathcal{A}_{MND}=\dfrac{x^2}{2}-3x+18=A_{(x)}$

4) $A_{(x)}=26$

$\dfrac{x^2}{2}-3x+18-26=0$

$\dfrac{x^2}{2}-3x-8=0$

$2\left(\dfrac{x^2}{2}-3x-8\right)=0$

$x^2-6x-16=0$

$\Delta=(-6)^2-4*(1*(-16))=100$

L'équation admet deux solutions réelles distinctes

$x_1=\dfrac{-(-6)-\sqrt{100}}{2*1} = \dfrac{-4}{2} = -2$

$x_2=\dfrac{-(-6)+\sqrt{100}}{2*1} = \dfrac{16}{2} = 8$

or $0 \leq x \leq 6$

donc impossible.

5) $A_{(x)}=\dfrac{1}{2}x^2-3x+18$

$A_{(x)}=\frac{1}{2}(x^2-6x+36)$

$A_{(x)}=\frac{1}{2}[(x-3)^2-9+36] = \frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{27}{2}$

$a=\frac{1}{2}x$

donc l'aire du triangle MND est minimale pour x=3 et ce minimum a pour valeur $\frac{27}{2}$=13,5cm².

x	0		3		6
$A_{(x)}$		↘	$\frac{27}{2}$	↗	

L'aire minimale pour x=3 est $\frac{27}{2}$.

Ex 61 p 46 :

a) $2x^2-5x+8=0$

$\Delta = b^2-4(ac)$

$\Delta=(-5)^2-4(2*8)$

$\Delta=25-64$

$\Delta<0$ donc $\emptyset$

x	$-\infty$	$+\infty$
Δ	-	

b) $-8x^2+8x-2=0$

$\Delta = b^2-4(ac)$

$\Delta=8^2-4(-8*-2)$

$\Delta=64-64$

$\Delta=0$

$\Delta=0$ donc x_0

$x_0=\frac{-b}{2a}$

$x_0=\frac{-8}{2*(-8)}$

$x_0=\frac{-8}{-16}$

$x_0==\frac{8}{16}$

$x_0=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Δ		+	0	+	

c) $-2x^2+5x=3$

$-2x^2+5x-3=0$

$\Delta = b^2-4(ac)$

$\Delta=5^2-4(-2*-3)$

$\Delta=25-24$

$\Delta=1$

$\Delta>0$ donc x_1 et x_2

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \frac{-5-\sqrt{1}}{2(-2)}$ $x_1 = \frac{3}{2}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-5+\sqrt{1}}{2(-2)}$ $x_2=1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Δ		+	0	+	

d) $2x^2=6-x$

$2x^2+1x-6=0$

$\Delta = b^2-4(ac)$

$\Delta=1^2-4(2*-6)$

$\Delta=1+48$

$\Delta=49$

$\Delta>0$ donc x_1 et x_2

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2*2}$ $x_1 = \frac{-1-7}{4}$ $x_1 = \frac{-8}{4}$ $x_1 = -2$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-1+\sqrt{49}}{2*2}$ $x_2 = \frac{-1+7}{4}$ $x_2 = \frac{6}{4}$ $x_2 = \frac{3}{2}$

Ex 70 p 47 :

1)

Le cout est exprimé en milliers

$C_{(q)} \geq 100$

$\Leftrightarrow 0,001q^2+q \geq 100$

$\Leftrightarrow 0,001q^2+q-100 \geq 0$

a=0,001 ; b=1 ; c=-100

$\Delta=1^2-4((-100)*0,001)$

$\Delta=1+4$

$\Delta=1,4$

q_1=-1+(-r-1,4)/0,002 ≈91,6 A partir de 92 Jeux fabriqués le cout de fabrication est d'au moins 100 000 €

q=-1-(r-1,4)/0,002 ≈ -1096

q	0		q_1		$+\infty$
$C_{(q)}$		-	0	+	

$S=[q_1 ;+\infty[$

$C_{(92000)} \approx 100\ 460$ €

2 Un jeux est vendu 60€ donc q jeux sont à 60q

B(q)=60q-C(q)

$B(q)=60q-0,001q^2-q$

$B(q)=-0,001q^2+59q$

3 B(10 000)=490 000

B(q)>0

$-0{,}001q^2+59q>0$

$A=-0{,}001$; $b=59$

$q_1=-59+59/-0{,}002 = 0$

$q_2=-59-59/-0{,}002 = 54\ 000$

x		q_1 q_2	$+\infty$
(/r)f(x)(r)	0	+ 0	-

$S=]q_1 ;q_2[$

Il faut vendre entre 0 et 59 000 jeux pour que le bénéfice soit positif.

Ex 102 p 50 :

$f(x)=2x^2-6x+3$

1 $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

$f(x)=2(x^2-3x+3/2)^2$

$f(x)=2[(x-3/2)^2-(3/2)^2+3/2]$

$f(x)=2[(x-3/2)^2-9/4+6/4]$

$f(x)=2[(x-3/2)^2-3/4]$

$f(x)=2(x-3/2)^2-3/2$

$a=2$; $\alpha=3/2$; $\beta=-3/2$

x	0	$\frac{3}{2}$	6
f	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$	$+\infty$

$f(0)=3$

$f(x)=3 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)$

$\Leftrightarrow 2x(x-x_2)=3$

$\Leftrightarrow 2x(x-3)+3=3$

$\Leftrightarrow 2x(x-3)=0$

$\Leftrightarrow 2x=0$ ou $x-3=0$

$S=\{0 ;3\}$

$f(x)\leq 3 \Leftrightarrow 2x^2-6x-3-3\leq 0$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x\leq 0$

x	-∞	0 3	+∞
(/r)f(x)(r)	+ 0	- 0	+

Donc S=[0 ;3].

Ex 99 p 50 :

a)

$2(x-1)^2<0$

S=∅

Car un carré est toujours positif (≥0)

b)$-2x^2+3x-3<0$

a=-2 ; b=3 et c=-3

Δ=9-4(-2*-3)

Δ=9-24

Δ=-15<0

a=-2<0 donc $-2x^2+3x-3<0$

Alors (sq)S=ℝ

c)

$-2x^2+3x-1\geq0$

(r)a=-2(/r) ; b=3 et c=-1

Δ=9-4(-2*-1)

Δ=9-8

Δ=1≥0

X1=-3-1/-4

X1=1

X2=-3+1/-4

X2=1/2

Donc S=[1/2 ; 1]

x	-∞	1/2 1	+∞
$-2x^2+3x-1$	- 0	+ 0	-

D)

$-2x^2+4x-2\geq0$

DM n°1

I) Parabole, foyer et direction

a) $\Psi : y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

$M(m ;\frac{1}{2}m^2+ \frac{1}{2})\in\Psi$

$A(0 ;1)$

a)b) $AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}$

$AM=\sqrt{(m-0)^2+\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}-1\right)^2}$

$AM=\sqrt{m^2+\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}\right)^2}$

La distance de M à l'axe des abscisses est $\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}$ (ordonnée du point M) :

$\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}=\sqrt{m^2+\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}\right)^2}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}\right)^2=m^2+\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow\cancel{\frac{1}{4}m^4}+\frac{1}{2}m^2+\cancel{\frac{1}{4}}=m^2+\cancel{\frac{1}{4}m^4}-\frac{1}{2}m^2+\cancel{\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}m^2=\frac{1}{2}m^2$

L'égalité est vraie pour tout $m\in\mathbb{R}$ donc le cercle C est tangent à l'axe des abscisses.

c)

II) Triangles tangents sous hyperbole

a. $\mathcal{H} : y=\frac{1}{x}, x>0$

$M(m ; \frac{1}{m})\in \mathcal{H}$

$H(m ; 0)$ et $k(0 ; \frac{1}{m})$, équation de la droite (HK) ; $y=ax+b$

$a=\frac{y_H-y_K}{x_H-y_K} = \frac{0-\frac{1}{m}}{m-0} = - \frac{1}{m^2}$

donc $y= - \frac{1}{m^2}x+b$

avec $H(m ;0)$, on a $0= - \frac{1}{m^2}*m+b$

$\frac{1}{m}=b$ d'où $\boxed{(HK) : y= - \frac{1}{m^2}x+\frac{1}{m}}$

(D)//(HK) donc (D) : $y=-\frac{1}{m^2}x+b'$ avec $M(m ;\frac{1}{m})$, on a $\frac{1}{m} = - \frac{1}{m^2}*m+b'$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=b'$, $b'=\frac{2}{m}$

$\boxed{D : y= - \frac{1}{m^2}x+\frac{2}{m}}$

b) Intersection de D avec $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{m^2}x + \dfrac{2}{m} \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

On égalise les y :

$-\dfrac{1}{m^2}x + \dfrac{2}{m} = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

$-x^2 + 2mx = m^2$

$X^2 - 2mx + m^2 = 0$

$(x-m)^2 = 0$

$x = m$

D et $\mathcal{H}$ se coupent en un seul point de coordonnées $(m ; \dfrac{1}{m})$ soit le point M

III) π : y=+c

ex 77 p 48 :

1) a)
   b) f(0)=
2) d

ex 81 p 48 :

ex 100 p 50 :

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

1) $3x^2-5x+3/5x^2-3x+1\leq0$
   a. 1 recherche des valeurs interdites :
   b. G est définie si et seulement si $5x^2-3x+1\neq0$
   c. $\Delta=(-3)^2-4*5*1=9-20=-11<0$
   d. Or a=5>0 donc $5x^2-3x+1>0$ Dg=ℝ
2) 1/x-1<x+1/x-2
   a. Etudions le signe de $3x^2-5x+3$
   b. $3x^2-5x+3=0$
   c. $\Delta=(-5)^2-4*3*3=25-36=-11<0$
   d. Or a=3>0 donc $3x^2-5x+3>0$
   e. Par conséquent g(x)>0
   f. Alors 5=∅

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

1) $\sqrt{9-x^2}=2x-3$
   a. 1/x-1<x+1/x-2 ⇔ 1/x-1 – (x+1)/x-2 <0
   b. ⇔(x-2)/(x-1)(x-2) – (x+1)(x-1)/(x-1)(x-2)<0
   c. ⇔x-2-(x^2-1)/(x-1)(x-2) <0
   d. ⇔-x^2+x-1/(x-1)(x-2) <0
   e. Les valeurs interdites sont : x≠1 et x≠2
   f. D=]-∞ ;1[(U)]1 ;2[(U)]2 ; +∞[
   g. (a) $-x^2+x-1=0$
   h. Δ=1-4*((-1)(-1))
   i. Δ=-3<0
   j. Or <= -1 <0
   k. Donc $-x^2+x-1<0$
   l. (x-1)(x-2)(r)=x^2-3x+2 ; a=1>0 (/r)

X	-∞	1	2	+∞
$-x^2+x-x_1$	-	-	-	
(x-1)(x-2)	+	0-	0	+

$-x^2+x-1/(x-1)(x-2)$	-	+	|-	
F(x)	(v)+	0 -	0	+ (/v)

m.

2) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-5}=7$

Ex 105 p 51 :

1)

x de AB peut appartenir à l'intervalle [0 ; 7]

Si x=0

DA=DN=0

A et N = 7

$f(x)=\frac{b*h}{2}$

$f(x)=\frac{7*12}{2}$

$f(x)=\frac{84}{2}$

f(x)=42cm

pour x =7

AD=7

DN=12

AB-Ax=12-7=5=MB

BN=7

Je considère le triangle MNB :

D'après le théorème de Pythagore, je calcule l'hypoténuse MN

$MN^2=NB^2+BM^2$

$MN^2=7^2+5^2$

$MN^2=49+25$

$MN^2=74$

$MN=\sqrt{74}$

MN≈8,60cm

J'applique le théorème de Pythagore pour le triangle DMA, je calcule l'hypoténuse DM :

$DM^2=AM^2+AD^2$

$DM^2=7^2+7^2$

$DM^2=49+49$

$DM^2=98$

$DM=\sqrt{98}$

DM≈9,89cm

2)

Ex 105 p 51 :

1)

AM=BN=x

DC=AB=12cm

BC=DA=7cm

$x\in[0\ ;7]$

donc $D_f=[0\ ;7]$

3)

$(A)_{AMD}(x)=b*h/2=AM*AD/2=x*7/2$

$(A)_{BMN}(x)=b*h/2=BN*BM/2=x*(AB\text{-}AM)/2=x*(12\text{-}x)/2$

$(A)_{CND}(x)=b*h/2=CN*CD/2=(7\text{-}x)*12/2=6(7\text{-}x)$

$(A)_{MDN}=(A)_{ABCD}\text{-}((A)_{AMD}(x)+(A)_{BMN}(x)+(A)_{CMN}(x))$

$=12*7\text{-}(7x/2+12x\text{-}x^2/2+7*12\text{-}12x/2)$

$=84\text{-}3,5x\text{-}6x\text{-}1/2x^2\text{-}42+6x$

$=42\text{-}3,5x+1/2x^2$

$=1/2x^2\text{-}7/2+42$

4)

$F(x)>40 \Leftrightarrow 1/2x^2-7/2x+42>40$

$\Leftrightarrow 1/2x^2-7/2x+2>0$

$\Delta=(-7/2)^2-4*1/2*2$

$\Delta=49/4-4$

$\Delta=49-16/4=33/4$

$x_1=7/2-(r-33-)/4 = 7/2 – (r-33-)/2$

$x_2=7/2+(r-33-)/2$

x 0 x_1 x_2 7

f(x) +0| - |0 +

entrée enpremière G3

(r)Interprétation a, b, c, trois nombres réels tels que $a\neq0$. Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont les abscisses x_1 et x_2 (ou x_0 s'il n'y en a qu'une) des point d'intersection : quand ils existent de la courbe représentative de f : x|-→ax²+bx+c et de l'axe des abscises.

Tableau des différents deltas

(r)Théorèmes 1.4 : (/r)

Soit ax^2+bx+c avec $a\neq0$ un polynôme du second degré. Le signe de ce polynôme dépend du signe de Δ et du signe de a.

Si Δ>0, le polynôme est du signe de a. (r) « à l'extérieur des racines » (/r) et dus igne de -a « (r) à l'extérieur des racines » (/r)

x	$-\infty$	x_1 x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	Signe de a	0 Signe de -a	0 Signe de a

Si Δ=0, le polynôme est toujours du signe de a. (r) Il s'annule sans changer de signe en son unique racine. (/r)

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	Signe de a	0	Signe de a

Si Δ<0 le polynôme est du signe de a.

Exercice : Etudier le signe du polynôme suivant :

$g(x)=-x^2+4x-1$

Pour $g(x)=0$

$G(0)=-0^2+0-1$

$G(0)=-1$

$\Delta=b^2-4(ac)$

$\Delta=4^2-4(-1*-1)$

$\Delta=16-4$

$\Delta=12$

$\Delta>0$ ➔ x_1 et x_2

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{12}}{2*-1}$ $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{12}}{-2}$	$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{12}}{2*-1}$ $x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{12}}{-2}$

G : |→ 3x-4/(r--x²+4x-1-)

G est définie si et seulement si $-x^2+4x-1>0$ donc D_g=]2-(r-3-) ; 2+(-3-)[

(r) f) Somme et produits des racines(/r)

(r)Propriété 1.5 : (/r)

(Somme Lorsqu'un trinôme ax^2+bx+c, admet deux racines (solutions) x_1 et x_2, soit $\Delta>0$, on a :
(r)Somme : x_1+x_2=-b+(r-Δ-)/2a + (-b-(r-Δ-)/2a)

= -b+(r-Δ-)-b-(r-Δ-)/2a

= -2b/2a

=-b/a

Produit : x_1*x_2=(-b+(r-Δ-)/2a)*(-b-(r-Δ-)/2a)

= (-b+(r-Δ-))(-b-(r-Δ-))/4a²

= (-b)²-((r-Δ-))²/4a²

=b²-Δ/4a²

Or $\Delta=b^2-4ac$

⇔ $4ac=b^2-\Delta$

Donc x_1*x_2=4ac/4a²(/r)=4*a*c/4*a*a = c/a.

(r)Propriété 1.6 : (équation connaissant S et p) (/r)

Lorsqu'on sait la somme S et le produit p de deux nombres, alors ces deux nombres sont des solutions de l'équation (r) $\boxed{x^2-Sx+p=0}$ $S=x_1+x_2$, $p=x_1*x_2$. (/r)

(r)Démonstration :(/r)

Les racines d'un trinôme se notent x_1 et x_2 quand elles existent. Ecrivons l'équation polynomiale (de degré 2) associée, à savoir : (r)$(x-x_1)(x-x_2)=0$ avec a=1

$(x-x_1)(x-x_2)=0$

⇔ $x^2-x*x_2-xx_1+x_1*x_1=0$

⇔ x^2(/r)$-x(x_1+x_2)+x_1x_2=0$

D'après la propriété 1.5

$S=x_1+x_2$ et $p=x_1*x_2$

⇔$x^2-xs+p=0$

(r)Exercices d'application : (/r)

Existe-t-il deux nombres a et b tels que a+b=100 et ab=25 ?

(r)Donc d'après la propriété précédente, ces nombres, s'ils existent sont solution de l'équation $x^2-100x+25=0$.

$\Delta=b^2-4(ac)$

$\Delta=100^2-4(1*25)$

$\Delta=10\ 000 - 100$

$\Delta= 9900>0$

$S_a=-b+(r-\Delta-)/2a$

$S_a=100+(r-9900-)/2$

$S_b=-b-(r-\Delta-)/2a$

$S_b=100-(r-9900-)/2$

$\sqrt{9900}=\sqrt{9*11*100}$

$\sqrt{9900}=\sqrt{9}*\sqrt{11}*\sqrt{100}$

$\sqrt{9900}=3*10*\sqrt{11}$

$\sqrt{9900}=30\sqrt{11}$

$a=100+30\sqrt{11}/2$ et $b=50-15\sqrt{11}$

$a=100/2 + 30\sqrt{11}/2$

$a=50+15\sqrt{11}$

Vérification :

$a+b=50+15\sqrt{11}+50-15\sqrt{11}$

$a+b=100$

$a*b=(50+15\sqrt{11})^2$

$a*b=50^2-(15\sqrt{11})^2$

$a*b=2500-15^2*11$

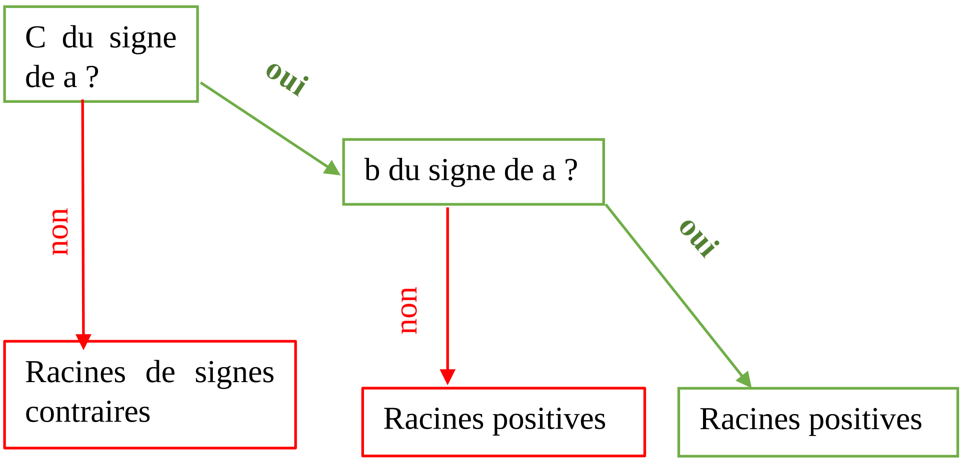
$a*b=2500-225*11$

$a*b=2500-2475$

$a*b=25$

étude du signe des racines :

(/r)Le produit des racines est du signe de $\frac{c}{a}$ mais aussi de ac. Si ac>0 alors ((r) C est du même signe que a) (/r) alors les racines ont le même signe. Celui-ci est donné par le signe de la somme (r) $\frac{-b}{a}$ qui est aussi celui de -ab. (/r) Quand ac>0, si ab>0 ((r)b et a ont le même signe)(/r), alors les racines sont négatives, sinon elles sont positives.



Correction du DST n°1 du mercredi 25 septembre 2019 :

Problème 1 :

a)

$f(x)=-5x^2+10x+1,5$

$\alpha=\frac{-b}{2a}$

$\alpha=\frac{-20}{-10}$

$\beta=f(2)$

$\beta=-5*2^2+20*2+1,5$

$\beta=-20+41,5$

$\beta=21,5$

donc $f(x)=-5(x-2)+21,5$

b)

$a=-5<0$ donc

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	(crois)	21,5	(dèc)

Ou

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(x-2)^2\geq 0$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $-5(x-2)^2\leq 0$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $-5(x-2)^2+21,5\leq 21,5$

$f(x)\leq 21,5$

$\tau=f(x_1)-f(x_2)/x_1-x_2$, $x_1\neq x_2$

$\tau=-5(x_1-2)^2+21,5-[-5(x_2-2)^2+21,5]/x_1-x_2$

$\tau=-5(x_1-2)^2+21,5+5(x_2-2)^2-21,5/x_1-x_2$

$\tau=-5(x_1-2)^2+5(x_2-2)^2/x_1-x_2$

$\tau=$(r)-(/r)5[(r)$(x_1-2)^2-(x_2-2)^2$]$/x_1-x_2$

$\tau=-5[(x_1-2)-(x_2-2)][(x_1-2)+x_2-2]/x_1-x_2$

$\tau=-5(x_1-x_2)(x_1+x_2-4)/x_1-x_2$ (/r)

(squarre)$\tau=-5(x_1+x_2-4)$

$I=]-\infty ;2]$

$\forall x_1\in I \Leftrightarrow x_1\leq 2$

$\forall x_2 \in I \Leftrightarrow$

```
-∞                         0               ]                         +∞
-/-/-/- :- :----------------------|--------------------]------------------------------>
                                           2
```

$\forall x_1 \in I \Leftrightarrow x_1 \leq 2 ; \forall x_2 \in I \Leftrightarrow x_2 \leq 2 \quad \Rightarrow x_1+x_2 \leq 4$

Ainsi $x_1+x_2-4 \leq 0$

Donc $-5(x_1+x_2-4) \geq 0$

Alors $\tau \geq 0$

Par conséquent f est croissante sur I

c)

x	-1		2		5
f		(croiss)	21,5		
	-23,5			(dèc)	-23,5

F(-1)=-5-20+1,5

F(-1)=-23,5

F(5)=-5*25+100+1,5

F(5)=-23,5

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		(croiss)	21,5		
				(dèc)	

d)

$f(x)=0 \Leftrightarrow -5(x-2)^2+21,5=0$

$\Leftrightarrow -5[(x-2)-4,3]=0$

$\Leftrightarrow -5[(x-2)^2-\sqrt{4,3}^{\,2}]=0$

⇔$-5(x-2-\sqrt{4,3})(x-2+\sqrt{4,3})=0$

⇔$x=2+\sqrt{4,3}$ ou $x=2-\sqrt{4,3}$

$\Delta=20^2-4*(-5)*1,5$

$\Delta=400+30$

$=430$

$x_1=-20-\sqrt{430}/-10$

$x_1=20+\sqrt{430}/10$

$x_1=20/10+\sqrt{430}/10$

$x_1=2+\sqrt{430}/\sqrt{100}$

$x_1=2+\sqrt{\frac{430}{100}}$

$=2+\sqrt{4,3}$

$\sqrt{a}/\sqrt{b}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, $b>0$ et $a\geq 0$

$x_2=2-\sqrt{4,3}$

PB :

e)

h=f(x)

?hauteur lance balle

Au moment du lancer, on a x=0, donc h=f(0)=1,5m.

?moment balle atteindre h max.

Lorsque x=2s, la balle atteint sa hauteur maximale à 21,5 m.

h=f(x)=0

$x_1=2+\sqrt{4,3}\approx 4,07$s

$x_2=2-\sqrt{4,3}\approx$ ~~-0,07s~~

Problème 2 :

Partie A :

Partie B :

a)

Le terrain rectangulaire mesure 30m par 16m, l'allée mesure x de large. L'aire de la double allée est donc (r)16*x+30x-x²=46x-x² (Le dernier terme pour enlever ce qui a été conté 2 fois)

On a : $46x-x^2 = \frac{30*16}{2} = 15*16 = 240$

La Largeur x doit vérifier l'équation : $-x^2+46x-240=0$

$\Delta=46^2-4(-1*-240)$

$\Delta=2116-960$

$\Delta=1156$

$\Delta=34^2$

$x_1=-46-(r-34^2-)/-2$

$x_1=\frac{46+34}{2} = \frac{-46-34}{-2} = \frac{-80}{-2}$

$x_1=40$

$x_2=-46+34/-2$

$x_2=\frac{-12}{-2}$

$\boxed{x_2=6}$

La largeur de la bande est de 6mètres.

<u>Ex 72 p 47:</u>

Soit f un polynôme du second degré de la forme x^2+bx+c avec x1=-2 et x2=5.
déterminer les coefficients de f.
$f(x)=x^2+bx+c$, a=1
f(x)=a(x-x1)(x-x2)
f(x)=1[x-(-2)][x-(5)]
f(x)=1(x+2)(x-5)
$f(x)=1(x^2-5x+2x-10)$
$f(x)=x^2-5x+2x-10$
$f(x)=x^2-3x-10$
b=-3, c=-10

<u>Ex 73 p 47:</u>
1) 1 est racine de la fonction f(1)=0
$f(x)=x^2+5x-6$
$f(x)=1^2+5*1-6$
f(x)=1+5-6
f(x)=0

2)
$x_1+x_2=S=\frac{-b}{a}$

$1+x_2=\frac{-5}{1}$

$1+x_2=-5$
$x_2=-5-1$
$x_2=-6$

<u>Ex 74 p 47:</u>

a)
$f(x)=x^2-x-2$
La racine évidente est (-1)
$x_1*x_2=\frac{-2}{1}$

$x_1*x_2=-2$
$-1*x_2=-2$
$x_2=\frac{-2}{-1}$

$x_2=2$

b) $f(x)=3x^2+4x+1$
$x_1=(-1)$
$x_1*x_2=\frac{c}{a}$

$x_1*x_2=\frac{1}{3}$

$-1*x_2=\frac{1}{3}$

$x_2=-\frac{1}{3}$

c)
$f(x)=7x^2-14x+7$
$x_1=1$
$1*x_2=\frac{c}{a}$
$x_2=\frac{7}{7}$
$x_2=1$

<u>Ex 122 p 53:</u>

1)
$0\leq x\leq\frac{21}{7}=10{,}5$

2)

$f(x)=(21-2x)(29{,}7-2x)$
$f(x)=623{,}7-42x-59{,}4x+4x^2$
$f(x)=4x^2-101{,}4x+623{,}7$

3)
$f(x)=4x^2-101{,}4x+623{,}7$
sommet $x_S=\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{101{,}4}{8}=12{,}675$
$a=4>0$
$yS=\beta=f(12{,}675)=-18{,}9225$

x	$-\infty$	0	1,5	α	$+\infty$
f	↘			β	↗

donc :

x	0	x_0	10,5
f	f(0)=623,7 ↘	360	f(10,5)=0

4)
a)
f(x)=360

b)
f(0)=623,7 et f(10,5)=0
f est décroissante sur [0; 10,5] et f(10,5)≤ 360≤f(0)
donc f(x)=360 admet une unique solution x0∈[0; 10,5]
Δ=b²-4(ac)
Δ=

c)
$$\left.\begin{array}{l} f(2)=436,9 > 360 \\ f(3)= 355,5 < 360 \end{array}\right\} 2<x0<3$$

5) a) Le rôle de ce programme est de calculer les dimensions des marges de ses cases.

5) b) solution (3) renvoie

Ex 72 :

F(x)=<u>x²+bx+c</u>

$\boxed{P=x_1+x_2}$

$\boxed{x_1*x_2=\frac{c}{a}}$

$-2*5=\frac{C}{1}$

C=-10

$S=x_1+x_2$

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$

-2+5=-b

-b=3

b=-3

$\boxed{\text{Donc : c=-10 et b=-3}}$

Ex 13

$F(x)=x^2+5x-6$

$F(1)=1^2+5*1-6$

$F(1)=1+5-6$

$F(1)==0$

$x_1=1$; Donc 1 est une racine de l'équation.

2) $x^2-Sx+p=0$

$-S=5 \Leftrightarrow S=-5$

$\Leftrightarrow x_1+x_2=-5$

$\Leftrightarrow 1+x_2=-5$

$\Leftrightarrow x2=-1-5$

$\Leftrightarrow x_2=-6$

Ex 73

1) $F(x)=x^2-x-2$
   $F(-1)=1-(-1)-2$
   $F(-1)=0.$
   Donc -1 est une racine évidente de $f(x)=0$.
   $x_1=-1$

$S=x_1+x_2$

$S=\frac{-b}{a}$ donc $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$

Alors : $x_2=\frac{-b}{a}-x_1$

$x_2=\frac{-(-1)}{1}-(-1)$

$x_2=\frac{1}{1}+1$

$x_2=2$

b)

$f(x)=3x^2+4x+1$

$a=3$; $b=4$; $c=1$

$f(1)=3+4*(-1)+1$

$f(-1)=3-4+1$

$f(-1)=0$

donc $x_1=-1$

$x_2=\frac{-b}{a}-x_1$

$x_2=\frac{-4}{3}+1$

$x_2=\frac{-4}{3}+\frac{3}{3}$

$x_2=\frac{-1}{3}$

Forme factorisée :

$F(x)=3(x-x_1)(x-x_2)$

$F(x)=3(x+1)(x+\frac{1}{3})$

c) $f(x)=7x^2-14x+7$

$a=7$; $b=-14$; $c=7$

$f(1)=7*1-14+7$

$f(1)=14-14$

$f(1)=0$

donc $x_1=1$

$x_2=\frac{-b}{a}-x_1$

$x_2=\frac{14}{7}-1$

$x_2=2-1$

$x_2=1$

$f(x)7(x^2-2x+1)$

$f(x)=7(x-1)^2$

$f(x)=7(x-1)(x-1)$

$f(x)=7(x-1)^2$.

Ex 81 p 48-49 :

$F(x)=-2x(x+1)+x+3$

1)

a)

$f(x)=-2x^2-2x+x+3$

$f(x)=-2x^2-x+3$

b)

$a(x+\alpha)^2+\beta$

$-2\left(x+\frac{-b}{2a}\right)+\frac{-(b^2-4(ac))}{4a}$

$-2\left(x+\frac{-(-1)}{2*-2}\right)+\frac{-((-1)^2-4((-2)*(3)))}{4*(-2)}$

$-2\left(x+\frac{1}{-4}\right)+\frac{-(1-24)}{-8}$

$-2\left(x+\frac{1}{-4}\right)+\frac{23}{-8}$

$-2x+\frac{2}{-4}+\frac{23}{-8}$

$-2x-2+\frac{23}{-8}$

$-2x-\frac{16}{8}-\frac{23}{8}$

$-2x-\frac{16-23}{8}$

$-2x-\frac{39}{8}$

c)

$f(x)=-2x^2-x+3$

Je calcule Δ

Δ=b²-4(ac)

Δ=(-1)²-4((-2)*3)

Δ=25

Δ>0 donc je calcule x_1 et x_2 :

x_1=-b-√Δ/2a x_1=-(-1)-√25/2*-2 x_1=-4,0/-4	x_2=-b+√Δ/2a x_2=-(-1)+√25/2*-2 x_2=6,0/-4

La forme factorisée est P(x) = a (x - x_1) (x - x_2)

P(x) = -2(x - -4,0/-4) (x – 6,0/-4)

2)

a)

ex 86 p 49 :

1) Si x_1+x_2=S alors S-x_1=x_2.

Correction de l'exercice 122 :

1) x∈[0 ;21]

α=-b/2a = 101,4/8 = 12,675

I=[12,675 ; 21]

2)

A est l'air de la partie colorée

A=L*l

A=(21-2x)(29,7-2x)

A=623,7-42x-59,4x+4x²

A(x)=4x²-101,4x+623,3

3)

Méthode 1 : Exprimons le taux d'accroissement

F(x)=4x²-101,4x+623,7

T=f(x_1)-f(x_2)/x_1-x_2 avec x_1≠x_2

$\forall x_1 \in D_f$ $\forall x_2 \in D_f$

$T=(4x_1^2-101,4x_1+623,7)-(4x_2^2-101,4x_2+623,7)/x_1-x_2$
$T=4x_1^2-4x_2^2-101,4x_1+101,4x_2/x_1-x_2$
$T=4(x_1^2-x_2^2)-101,4(x_1-x_2)/x_1-x_2$
$T=4(x_1-x_2)(x_1+x_2)-101,4(x_1-x_2)/x_1-x_2$
$T=(x_1-x_2)[4(x_1+x_2)-101,4]/x_1-x_2$
$T=4(x_1+x_2)-101,4$
$T=4(x_1+x_2-25,35)$

$\forall x1 \in I \Leftrightarrow 12,675 \leq x1 \leq 21$
$\forall x2 \in I \Leftrightarrow 12,675 \leq x2 \leq 21$

Ainsi $25,35 \leq x1+x2 \leq 42$
$25,35-25,35 \leq x_1+x_2-25,35 \leq 42-25,35$
$0 \leq x_1-x_2-25,35 \leq 16,65$
$0 \leq \underbrace{4(x_1+x_2-25,35)}_{\tau}$

$\tau \geq 0$ alors f est croissante que I.
pour tout $x \in [0 ; 12,675]$ f est décroissante. De plus $[0 ; 10,5] \subset [0 ; 14635]$
donc f est décroissante avec [0, 10,5].

$A \subset B$: A est inclus dans B
$A \supset B$: A contient B

2nd méthode :
$F(x)=4x^2-101,4x+623,7$
a=4 ; b=-101,4 et c=623,7
$\alpha=-b/2a$ et $\beta=f(\alpha)$
$\alpha=12,675$ $\beta=f(12,675)$
P=-18,92
Donc $f(x)=4(x-12,675)^2-18,92$
a=4>0

x	0	α	21
f	623,7 (dèc)	-18,92	(croiss) 258,3

Pour tout $x \in [0 ; 12,675]$
F est décroissante or $[0 ; 10,5] \subset [0 ; 12,675]$ alors f est décroissante sur [0 ; 10,5].

4)a)
$4x^2-101,4x+623,7$
Pour résoudre le souhait de l'éditeur :
$4x^2-101,4x+623,7=360$
$\Leftrightarrow 4x^2-101,4x+263,7=0$

$\Delta=b^2-4ac$
$\Delta=10281,96-[4*4*263,7]$
$\Delta=6062,76$
Alors $\Delta>0$, par conséquent :
$x_1=-b-\sqrt{1}\,/2a$
$x_1=101,4+\sqrt{6062,76}\,/8$

$x_2=101,4-\sqrt{6062,76}\,/8$

Ex vecteur Guez, OMJS
$\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{BC}=0$
$\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=0$
$\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}=0$
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

$3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BB'}$ et $3\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BB}$
(r) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{BB'}+\cancel{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B'C}}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{0}$

$3\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'G})=2\overrightarrow{BB'}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BB'}+3\overrightarrow{B'G}=2\overrightarrow{BB'}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BB'}-2\overrightarrow{BB'}=-3\overrightarrow{B'G}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{GB'}$

$3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CC}$
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$
$\Leftrightarrow(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{GC}=0$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=0$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC}+(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'A})(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'B})=0$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{CC'}+\underbrace{\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}}_{\overrightarrow{0}}=0$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{CC'}$
$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{CG}=-2\overrightarrow{CC'}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CC'}$

$3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CC'}$
$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'G})=2\overrightarrow{CC'}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{CC'}+3\overrightarrow{C'G}=2\overrightarrow{CC'}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{C'G}=-\overrightarrow{CC'}$
$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{GC'}=-\overrightarrow{CC'}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{CC'}$

$3\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{CC'}$
En déduire que G∈($\overrightarrow{AA'}$)
$3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ $k=\frac{2}{3}$
Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires et ont un point commun qui est A. Donc les points A, G et A' sont Alignés. Par Conséquent G appartient à la droite $\overrightarrow{AA'}$.

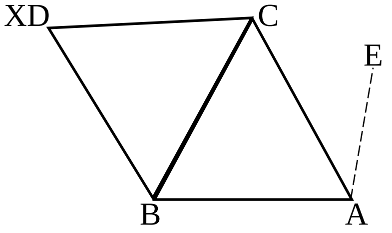
$3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BB'}$ En déduire que G∈($\overrightarrow{BB'}$)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{BB'}$, k=3
/*Les vecteurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont colinéaires et ont un point commun qui est B. Donc les points G, B et B' sont alignés. Par conséquent G appartient à la droite ($\overrightarrow{BB'}$).
En déduire que G∈($\overrightarrow{CC'}$)
$\overrightarrow{GC}$*/

Ex par OMJS :

a) Tracer un triangle ABC quelconque. Placer le point E tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le point F tel que $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$.
b) Démontrer que $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.
c) En déduire que les droites $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont parallèles
d) Quelle est la valeur du rapport $\overrightarrow{BF}$ sur $\overrightarrow{EC}$. $\frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{EC}}$

Rappels
D(O ;M)=|x|=x, si x>0;-x, si x≤0

1) Soit ABC un triangle quelconque. Construire les points D et E tels que :
   a. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
   b. $\overrightarrow{EA}=1/2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$
2) A, B, C, D et E cinq points tels que :
   a. $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}$
   b. Montrer que ABCD est un parallélogramme.



Montrer que ABCD est un parallélogramme revient à : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}$
$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$
Et $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}$

(1)=(2) ⇔ $\vec{EC}+\vec{CA}+\vec{EA}\ \vec{AC}=\vec{EA}+\vec{AB}+\vec{EA}+\vec{AD}$
⇔$\vec{EC}+\vec{CA}+\vec{EA}+\vec{AC}-\vec{EA}-\vec{AB}-\vec{EA}=\vec{AD}$
⇔$\vec{EC}+\vec{CA}+\cancel{\vec{EA}}+\vec{AC}+\cancel{\vec{AE}}+\vec{BA}+\vec{AE}=\vec{AD}$
⇔$\cancel{\vec{EA}}+\vec{AC}+\cancel{\vec{AE}}+\vec{BA}=\vec{AD}$
⇔$\vec{AC}+\vec{BA}=\vec{AD}$
$\vec{AC}-\vec{AB}=\vec{AD}$
$\vec{EA}+\vec{EC}=\vec{EB}+\vec{ED}$ ⇔ $\vec{EA}+\vec{EA}+\vec{AC}=2\vec{EA}+\vec{AB}+\vec{AD}$
⇔ $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$
BACD est un parallélogramme et C est le 4ème sommet.

Soit G le centre de gravité d'un triangle de gravité d'un triangle ABC : $G_A+G_B+G_C=0$.

a) On nomme A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].
Exprimer $\vec{BB'}$ en fonction de $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$.
$\vec{A'B}+\vec{A'C}=0$
$\vec{B'C}+\vec{B'A}=0$
$\vec{C'A}+\vec{C'B}=0$
$\vec{AB'}=-\vec{B'C}$

I milieu de [AB]
$\forall_{M\in P}\ \vec{MA}+\vec{MB}=2\vec{MI}$
$\forall_{B\in P}$, $2\vec{BB'}=\vec{BA}+\vec{BC}$
$\vec{BB'}=1/2(\vec{BA}+\vec{BC})$
$\vec{BA}+\vec{BC} = \vec{BB'}+\vec{B'A}+\vec{BB'}+\vec{B'C}$
$= 2\vec{BB'}+\vec{B'A}+\underbrace{\vec{B'C}}_{\vec{0}}$
$\vec{BA}+\vec{BC} = 2\vec{BB'}$
$\vec{AA'}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:
$\vec{AB}+\vec{AC} = \vec{AA'}+\vec{A'B}+\vec{AA'}+\vec{A'C}$
$= 2\vec{AA'}+\vec{A'B}+\vec{A'C}$
$\vec{0}$
$= 2\vec{AA'}$
Donc $\vec{AA'}=1/2(\vec{AB}+\vec{AC})$
C
Δ
A B
A(0 ;0) ; B(1 ;0) ; C(0 ;1)
$\vec{EA}+\vec{EC}=\vec{EB}$+EDC ⇔ $\vec{EA}+\vec{EA}+\vec{AC}=2\vec{EA}+\vec{AB}+\vec{AD}$
⇔ $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$
BACD est un parallélogramme et C est le 4ème sommet.
A'$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; AA'$\left(\frac{1}{2}\right)$
Montrer que GA+GB+GC=0
$\vec{GA'}+\vec{GB'}+\vec{GC'}$=(GA+$\vec{AA'}$)+($\vec{GB'}+\vec{BB'}$)+($\vec{GC'}+\vec{CC'}$)

E) Caractérisation analytique :

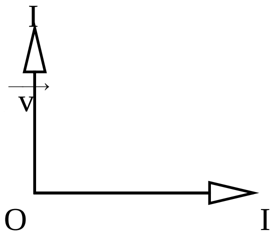
Définition :

On appel base tout couple ($\vec{i}$, $\vec{j}$) de vecteurs non colinéaires. Un repère est un triplet (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$) où o est un point appelé origine et ($\vec{i}$, $\vec{j}$) une base.

Remarque :

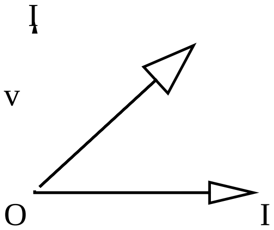
- Un triplet (O, $\vec{I}$, $\vec{J}$) de point non aligné constitue le repère (O ; $\vec{OI}$; $\vec{OJ}$) où la base associée est le couple de vecteurs ($\vec{OI}$; $\vec{OJ}$). Ce repère est indifféremment noté :(O ; $\vec{OI}$; $\vec{OJ}$), (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) ou (O ; $\vec{I}$; $\vec{J}$).
- Dire que la base ($\vec{OI}$; $\vec{OJ}$) est nommée, signifie que : $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$ sont de même longueur. Ils sont de norme unitaire : $\|\vec{OI}\|=\|\vec{OJ}\|=1$
  $\|\vec{OI}\|= OI$
  $\|\vec{OJ}\|= OJ$
  $\|.\|$=la notation de la longueur du vecteur
- La base ($\vec{OI}$; $\vec{OJ}$) est orthonormée si, et seulement si elle est normée et orthogonale :
- $\vec{OI} = \vec{OJ} = 1$
- $(OI)\perp(OJ)$
  On peut calculer les distances.

Interprétation graphique



Base orthonormée

Base orthogonale



Base quelconque

Théorème 1 :

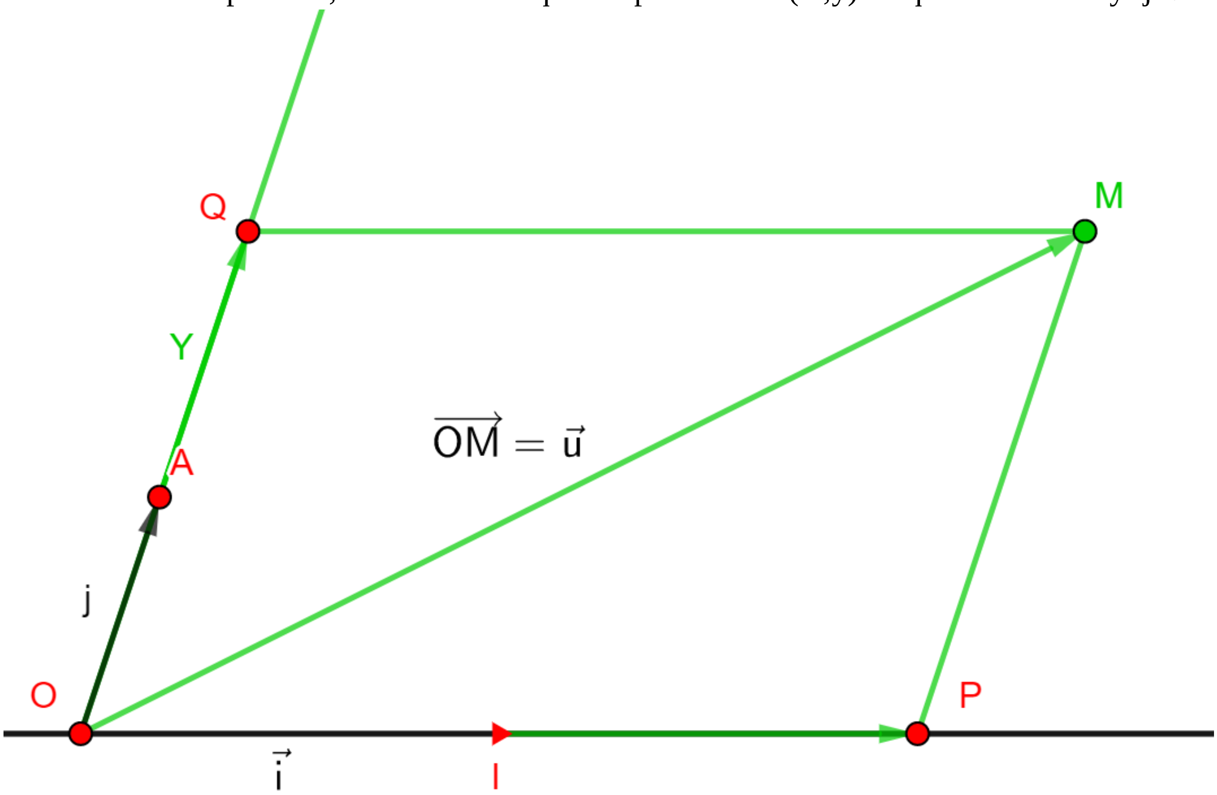
Soit (i,j) une base quelconque et O un point.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels (x ;y) tels que : $u = x\vec{i} + y\vec{j}$
.
- Pout tout point M, il existe un unique couple de réels (x ; y) tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
  $M\binom{x}{y}$ ou M(x ;y).
- E

<u>Théorème :</u>

Soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$) une base et O un point.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels x, y tel que : $u = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Pour tout point M, il existe un unique couple de réels (x ;y) tel que $OM = x\vec{i} + y\vec{j}$.



I, J et M les points définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$; $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non colinéaires (OI) et (OJ) ne sont pas parallèles. La parallèle à (OJ) passant pas M coupe la droite (OI) en un unique point P. De même, la parallèle à (OI) coupe la droite (OJ) en un unique point Q. Par construction du parallélogramme OPMQ, donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, or $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires, il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$. De même $\overrightarrow{OQ}$ et j sont colinéaires, il existe un réel y tel que $\overrightarrow{OQ} = y\vec{j}$.

Par conséquent :

$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}}$

d'où l'existance du couple (x ;y).

<u>unicité :</u> Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe deux couples (x ;y) et (x' ;y') tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ $x \neq x'$; $y \neq y'$
$\vec{u} = x'\vec{i} + y\vec{j}$

<u>Rappel :</u>

$u\binom{x}{y}$; $v\binom{x'}{y'}$

$u=v \Leftrightarrow x=x'$ et $y=y'$

on a : $x\vec{i}-x'\vec{i}=(\vec{u}-y\vec{j})-(\vec{u}-y'\vec{j})$

$\Leftrightarrow (x-x')\vec{i}=-y\vec{j}+y'\vec{j}$

$\Leftrightarrow (x-x')\vec{i}=(y'-y)\vec{j}$

α, β des réels

$(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

Or i et j ne sont pas colinéaires, cette égalité ne peut être vérifiée que si : $(x-x')$ et $(y'-y)$ sont nuls :

$$\begin{cases} x-x'=0 \\ y'-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y'=y \end{cases}$$

Ce qui contredit le fait (x ;y) et (x' ;y') soient distincts.

Donc la décomposition de $u=x\vec{i}+y\vec{j}$ est unique.

(livre à lire :SENEQUE) « Les choses ne sont pas difficile par ce que l'on ne sait pas les faire mais par ce que l'on ose pas les faire. »

Exercice :

A
Δ
B C

ABC est un triangle quelconque. On définit A', B' et C' respectivement sur les droites (BC),(AC) et (AB) en posant : A'C=r A'B, C'B=p C'A et B'A=q B'C où p, q et r sont trois réels différents de 1.

1) Exprimer AB' en fonction de AC ; CA' en fonction de CB et BC' en fonction de BA
2) Déterminer p, q et r dans le cas où on a B milieu de [AC], C' sur [BA] tel que : $BC'=\frac{2BA}{5}$ et A' sur [BC] tel que : $CA'=\frac{CB}{3}$.

1)

$B'A=qBC \Leftrightarrow -AB'=q(B'A+AC)$

$\Leftrightarrow -AB=-qAB'+qAC$

$\Leftrightarrow qAB'-AB'=qAC$

$\Leftrightarrow (q-1)AB'=qAC$

(Square)$\Leftrightarrow AB=\frac{q}{q-1}AC$

(r)$qAB'-AB'=(q-1)AB'$(/r)

2)

$A'C=rA'B \Leftrightarrow A'C=r(A'C+CB=$

$\Leftrightarrow A'C=rA'C+rCB$

$\Leftrightarrow -CA'-rA'C=rCB'$

$\Leftrightarrow (r-1)CA'=rCB$

$\Leftrightarrow CA' = \frac{r}{F1}$

Problème 1 :
c) A' milieu de [BC]
écrire $\overrightarrow{AA'}$ sous la forme $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$
AA'=xAB+yAC
AB+AC=AA'+A'B+AA'+A'C
AB+AC=2AA'+A'B+A'C
0
Donc AA'=1/2AB+1/2AC

BB'=xBA+yBC
BA+BC=BB'+B'A+BB'+B'C
BA+BC=2BB'+B'A+B'C
0
Donc BB'=1/2BA+1/2BC

B' milieu de [CA] : B'C+B'A=0
(r)Dans le repère (A ; AB ; AC)
$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $AB\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $AC\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$(/r)
$AA'=1/2*\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1/2*\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$
(r)$A'\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ (/r)
Si dans le repère (B ;BA ;BC)
(A,B,C)=(A,AB,AC)
$B'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
$BB'=\frac{1}{2}BA+\frac{1}{2}$((r)BE+AC)
$BB'=\frac{1}{2}BA+\frac{1}{2}BA+\frac{1}{2}AC$
$BB'=BA+\frac{1}{2}AC$
$BB'=-AB+\frac{1}{2}AC$ (/r)donc $B'=\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix}$(r)
$BB'=-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$
$BB'=\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix}$
(/r)AA'=1/2BA+A/2(AB+BC)
$AA'=0*BA+\frac{1}{2}BC$ (r)=x*BA+y*BC (/r)
Donc A'((r)$\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x-x'=0\\y-y'=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x'\\y'=y\end{cases}$
(r)Ce qui contredit le fait que (x;y) et (x';y') soient distincts. (/r)
Donc $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ (r)est unique.
Propriété :(/r) Soient $(o ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère et deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

(r)1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A;y_B-y_A)$.
2. Le milieu J de [AB] a pour coordonnées $(x_A+x_B/2 ; y_A+y_B/2)$.(/r)
Démonstration 1 :
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{AB}=x_B\ \overrightarrow{i}+y_B\ \overrightarrow{j}-(x_A\ \overrightarrow{i}+y_A\ \overrightarrow{j})$
$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\ \overrightarrow{i}+(y_B-y_A)\ \overrightarrow{j}$
Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

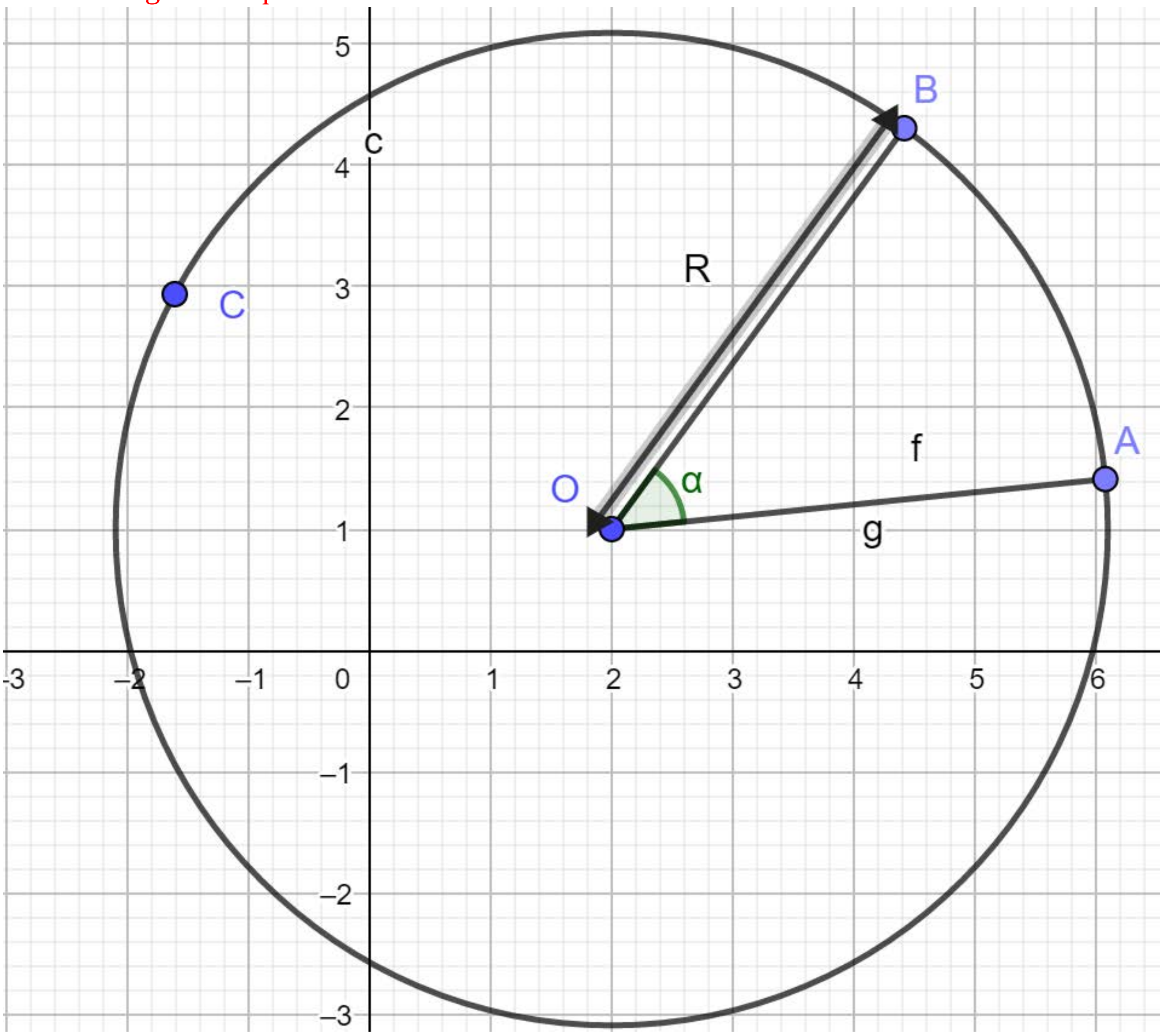
Démonstration 2 :
OA+OB=OJ+JA+OJ+JB
OA+OB=2OJ+JA+JB
OA+OB=2OJ+ 0
Donc $OJ=\frac{1}{2}OA+\frac{1}{2}OB$
$OJ=\frac{1}{2}OA+\frac{1}{2}OB$
$OJ=\frac{1}{2}x_Ai+\frac{1}{2}y_Aj+\frac{1}{2}x_Bi+\frac{1}{2}y_Bj$
$OJ=(x_A+x_B/2)i+(y_A+y_B/2)j$
Donc $J(x_A+x_B/2;y_A+y_B/2)$

(r)Propriété :
Condition de colinéarité(/r)
Soient u(x;y) et v(x';y') sont colinéaires si, et seulement si le déterminent des deux vecteurs est nul, soit det(r)(u;v)=0(/r)
Démonstration 3 :
(r)➔ : implique :(/r)Définition(r)
🡐 : La réciproque : (/r)
➔ : u et v sont colinéaires
Il existe
⇔ $\exists k\in\mathbb{R}$, u=k*v
⇔ $\exists k\in\mathbb{R}$(r),$x\ \overrightarrow{i}+y\ \overrightarrow{j}=k(x'\ \overrightarrow{i}+y'\ \overrightarrow{j})$(/r)
⇔ $\exists k\in\mathbb{R}$, $x\ \overrightarrow{i}+y\ \overrightarrow{j}=kx'\ \overrightarrow{i}+ky'\ \overrightarrow{j}$
⇔ $\exists k\in\mathbb{R}$, x(r) $\overrightarrow{i}-kx'\ \overrightarrow{i}=ky'\ \overrightarrow{j}-y\ \overrightarrow{j}$.(/r)
⇔ $\exists k\in\mathbb{R}$, (r)$(x-kx')\ \overrightarrow{i}=(ky'-y)\ \overrightarrow{j}$.(/r)
⇔ $\exists k\in\mathbb{R}$, (x-kx')i-(ky'-y)j=0
⇔ $\exists k\in\mathbb{R}$, (x-kx')i+(y-ky')j=0
Or i et j ne sont pas colinéaires, ce qui implique : $\begin{cases}x-kx'=0\\y-ky'=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=kx'\\y=ky'\end{cases}$
Det(u;v)=x*y'-y*x'
Det(u;v)=(r)kx'*y'-ky'*x'(/r)
Det(u;v)(r)=0(/r)

(r)II angle orientés :(/r)
(r)a) cercles trigonométriques
Définition 1 : (Radian) (/r)
Le radian (rad) est une unité de mesure des angles qui est proportionnelle au degré : (r)πrad=180°(/r)

- Un angle de mesure αradian au centre d'un cercle de rayon (r)R(/r), intercepte un arc (v)AB de longeur R*α(/v)
- Un secteur angulaire d'angle αradians et de rayon R a une (r)aire égale à $\frac{R^2*(alpha)}{2}$.

Illustration géométrique :



(r)Mesure d'angles en radians et mesures d'angles correspondantes en degrés : (/r)

Mesures en degrés (°)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°	x°	$\frac{180y°}{\pi}$
Mesures en radian (Rad)	0rad	$\frac{\pi}{6}$rad	$\frac{\pi}{4}$rad	$\frac{\pi}{3}$rad	$\frac{\pi}{2}$rad	πrad	2πrad	$\frac{2\pi rad}{180}$	yrad

$180°$ → πrad

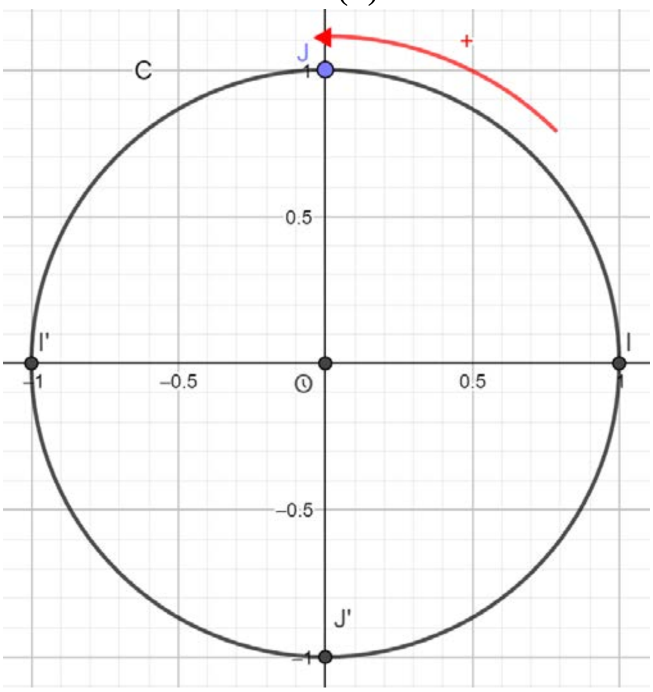
$\frac{180y°}{\pi}$ → ?x

$x=\frac{180*y*\pi}{\frac{\pi}{180}}$ rad

$x=\frac{180y}{180}=y$

(r)Définition 2 : Cercle trigonométrique (/r)

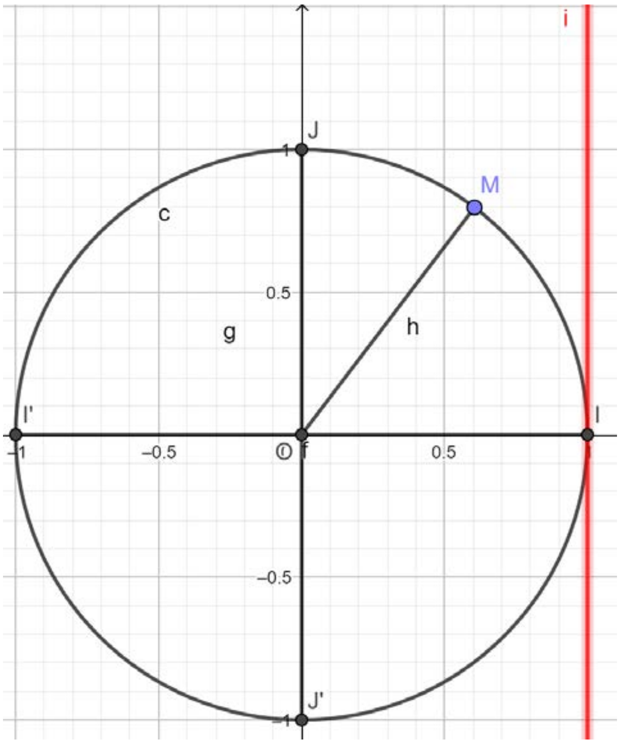
Le cercle trigonométrique C est un cercle de rayon 1, orienté dans le (r) sens contraire des aiguilles d'une montre « sens positif »,(/r) sur lequel on choisit un point de départ I. (r)Le centre de ce cercle C est noté O. (/r)



(r) Définition 3 : Enroulement de l'axe réel (/r)

Soient (O ;I, J) un repère orthonormé du plan et C le cercle trigonométrique de centre O.

La parallèle (d) à (OJ) passant par I, étant munie d'un repère (I, (vec)OJ), est un axe gradué contenant tous les réels. L'enroulement de cet axe autour du cercle trigonométrique conduit à associer un réel x de (d) à un point M de C. Dans la notation M(x) (r)qui traduit cette association, le réel x est appelé « (/r)abscisse curviligne » de M sur le cercle C.

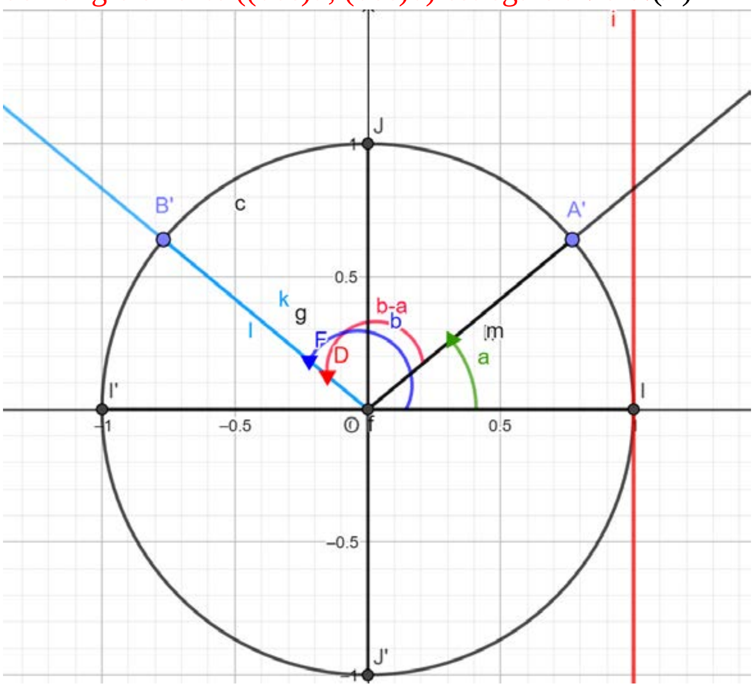


(r)Propriété 1 : Abscisses curvilignes d'un point (/r)

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x. Alors (r)M est aussi associé à tout les réels de la forme x+2kπ, où k∈(|Z)={-x ;-2 ;-1 ;0 ;1 ;2 ;3 ;4 ; …}

b. Angles orienté

Définition 4 : (/r) Soit (vec)u et (vec)v deux vecteurs non nuls, A et B deux points tel que (vec)OA=(vec)uvet (vec)OB=(vec)v, A' et B' les intersections respectives des demi-droites (r)[OA) et [OB)(/r) avec le cercle trigonométrique. L'angle orienté de vecteur ((vec)u, (vec)v)=((vec)OA, (vec)OB)=((vec)OA', (vec)OB'). Sa mesure est celle de l'arc (r)orienté (arc)A'B'.(/r) Si les abscisses curvilignes de A' et B' sont a et b, (r)alors la mesure en radians de l'angle orienté ((vec)u, (vec)v) est égale à : b-a.(/r)



((vec)OI, (vec)OA')=a
((vec)OI, (vec)OB')=b
((vec)OA',(vec)OB')=((vec)OI,(vec)OB')-((vec)OI, (vec)OA')=b-a.
(r)Remarques :(/r)
Comme A' est associé aux réels α+2kπ, et B' aux réels b+2k'π avec k∈(|Z) et k'=(|Z).
Pour traduire que le réel α est une mesure de l'angle ((vec)u, (vec)v), les écritures suivantes sont équivalentes : ((vec)u, (vec)v)={(gr)(r)α+2kπ, avec k∈(|Z);αmodulo 2π;α[2π]
Définition 5 : Mesure principale (/r)
La mesure principale d'un angle orienté ((vec)u, (vec)v) est parmi toutes les mesures, (r)la seule qui appartient à l'intervalle]-π ;π].
Exercice d'application : (/r) ex 29 p 208 :
Petit 1 :
Pour chacun des réels α suivants, trouver un réel β∈]-π ;π] ayant la même image de α sur le cercle trigonométrique.

a) $\alpha=\frac{7\pi}{3}$

$\frac{7}{3}>1$

$\frac{7\pi}{3}> \pi$

$\frac{7\pi}{3}$(/apart/)]- π ;π]

b) $\alpha=\frac{11\pi}{6}$

$\alpha=\frac{7\pi}{3}=\frac{6\pi+\pi}{3}$

$\alpha=\frac{6\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$

$\alpha=\frac{\pi}{3}+2\pi$

or $\frac{\pi}{3}\in]-\pi ;\pi]$

donc mes$\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$

c) $\alpha=-\frac{19\pi}{3}$

exemple ($\alpha=\frac{11\pi}{6}=\frac{12\pi-\pi}{6}=\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$.

$\alpha=2\pi-\frac{\pi}{6}$

$-\frac{1}{6}>-1$

$-\frac{\pi}{6}>-\pi$

donc $-\frac{\pi}{6}\in]-\pi ;\pi]$

alors mes$\left(\frac{11\pi}{6}\right)$=-$\frac{\pi}{6}$.)

α=-$\frac{19\pi}{3}$

α=$\frac{-18\pi-\pi}{3}$

α=$\frac{-18\pi}{3}$-$\frac{\pi}{3}$

α=2*(-3π)-$\frac{\pi}{3}$

-$\frac{\pi}{3}$=-$\frac{1}{3}$*π

-$\frac{1}{3}$*π

-$\frac{1}{3}$>-1 et -$\frac{1}{3}$<1

-$\frac{\pi}{3}$>- π et -$\frac{\pi}{3}$< π

Donc -$\frac{\pi}{3}$∈]- π ; π]

Alors mes$\left(\frac{-19\pi}{3}\right)$=-$\frac{\pi}{3}$

d) α=-$\frac{21\pi}{4}$

α=$\frac{-20\pi}{4}$-$\frac{\pi}{4}$

α=-5π-$\frac{\pi}{4}$

α=-5π-$\frac{\pi}{4}$+2π

α=-3π-$\frac{\pi}{4}$

-3π-$\frac{\pi}{4}$+2π=-π-$\frac{\pi}{4}$=-$\frac{5\pi}{4}$<- π

$\frac{-5\pi}{4}$+2π=$\frac{3\pi}{4}$<π

(r)c) propriété des angles orientés : (/r)
(r)Propriété 1 : vecteurs coolinéaires(/r)
Soit (vec)u et (vec)v deux vecteurs non nuls.

(i) (vec)u et (vec)v sont coolinéaires et de même sens ⇔ (r)si et seulement si ((vec)u, (vec)v)=0+2kπ avec k ∈(Z|)(/r)
(ii) (vec)u et (vec)v sont coolinéaires et de sens contraire si et seulement si ⇔ (r)((vec)u, (vec) $\vec{v}$)=π+2kπ, avec k∈(Z|).(/r)

(r)Remarques : (/r)

- En particulier, si (vec)u≠(vec)0, on a ((vec)u, (vec)u)=0[2π] et ((vec)u, -(vec)u)=π[2π]
- Conséquence immédiate : Soient A, B et C trois points distincts. A, B et C sont alignés si, et seulement si : (r)((vec)AB, (vec)AC)=0[2π] ou ((vec)AB, (vec)AC)=π[2π] (/r). Soit ((vec)AB, (vec)AC)=0[π].

(r)Propriété 2 : Relation de Chasles (/r)

Pour tous vecteurs non nuls (vec)u, (vec)v et (vec)w, on a : (r)((vec)u, (vec)v)=((vec)u, (vec)w)+((vec)w, (vec)v)(/r)

Démonstration : D'après la définition 4.

Si A(a), B(b) et C(c) sont des points du cercle trigonométrique tel que (vec)OA=(vec)u, (vec)OB=(vec)v et (vec)OC=(vec)w, alors modulo π : ((vec)u, (vec)w)+((vec)w, (vec)v)=((vec)OA, (vec)OC)+((vec)OC, (vec)OB) = (r)(c-a)+(b-c)=b-a=((vec)OA ; (vec)OB)= ((vec)u, (vec)v). (/r)

« ((vec)OA ; (vec)OB)=b-a »

(r)Conséquences immédiates(/r)

1) ((vec)u, (vec)u)= ((vec)u, (vec)v)+((vec)v, (vec)u) = (vec)0 [2π]

Donc (square)((vec)v, (vec)u)=-((vec)u, (vec)v)[2π]

2) (-(vec)u, (vec)v)=(- (vec)u, (vec)u)+((vec)u, (vec)v)=

(square(r/r))(r)(- (vec)u, (vec)v)(/r)=π+((vec)u, (vec)v)[2π]

3) (-(vec)u, -(vec)v)=(- (vec)u, (vec)u)+((vec)u,- (vec)v)=π+((vec)u, -(vec)v)=π+(r)((vec)u, (vec)v)+((vec)v,- (vec)v)[2π]=2π+((vec)u, (vec)v)=((vec)u, (vec)v)[2π](/r)

(r)Définition : (/r)

(i) (vec)u et (vec)v colinéaires et de même sens ⇔ ((vec)u ; (vec)v)=0+2kπ, avec k∈(Z|).

(ii) (vec)u et (vec)v colin »aires et de sens contraires ⇔ ((vec)u ; (vec)v)=π+2kπ, avec k∈(Z|)

Pour tout vecteurs non nuls (vec)u, (vec)v et (vec)w, on a donc (square)((vec)u; (vec)w)=((vec)u; (vec)w)+((vec)w; (vec)v)

(r)conséquences immédiates (/r)

1)

((vec)u; (vec)u)=((vec)u; (vec)v)+((vec)v; (vec)u)=0

Donc ((vec)v; (vec)u)=-((vec)u;(vec)v) [2π]

2)

(-(vec)u; (vec)v)=(-(vec)u; (vec)u)+((vec)u; (vec)v)

(-(vec)u; (vec)v)=π+((vec)u; (vec)v)[2π]

3)

(-(vec)u;- (vec)v)=(- (vec)u; (vec)u)+((vec)u;-(vec)v)=π+((vec)u; -(vec)v)=π ((vec)u;(vec)v)+((vec)v;- (vec)v) [2π] = π+((vec)u; (vec)v)+π = 2π+((vec)u;(vec)v)=((vec)u ;(vec)v) [2π].

Exercice 10 :

Dans un pentagone, les angles interceptant les côtés du pentagone mesurent chacun 2π/5.

1) ((vec)OA; (vec)OB)=2π/5

2) ((vec)OA; (vec)OC)=((vec)OA;(vec)OB)+((vec)OB;(vec)OC) à l'aide de la relation de Chasles

= 2π/5+2π/5

= 4π/5 ∈]-π;π]

3) ((vec)OA; (vec)OD)=((vec)OA; (vec)OE)+((vec)OE; (vec)OD)

= 2π/5-2π/5

= -4π/5

4) ((vec)OA;(vec)OE)=-2π/5

Ex 11 :

1) Dans un hexagone régulier, les angles au centre interceptant les côtés de l'hexagone mesurent chacun 2π/6=π/3.
   ((vec)OA;(vec)OB)=π/3
   Le triangle OAB étant équilatéral ((vec)AB;(vec)AO)=π/3
   ((vec)AB;(vec)AF)=((vec)AB;(vec)AO)+((vec)AO;(vec)AF)
   ((vec)AB;(vec)AF)=π/3+π/3
   ((vec)AB;(vec)AF)=2π/3
2) Le quadrilatère OAFE est un losange et [AE) est la bissectrice de ((vec)AO;(vec)AF), ainsi ((vec)AE;(vec)AF)=1/2*((vec)AO;(vec)AF)=1/2*π/3=π/6.
3) ABDE est un parallélogramme, (vec)AB=(vec)ED
   Donc ((vec)AB, (vec)DE)= (vec)ED ; (vec)DE)=((vec)ED ;- (vec)ED)=π car (vec)ED et -(vec)ED sont colinéaires.
4) ((vec)OA; (vec)OE)=((vec)OA; (vec)OF)+((vec)OF;(vec)OE)=- π/3-π/3=-2π/3
5) ABCD est un parallélogramme, (vec)AB=(vec)OC d'où ((vec)AB ; (vec)DC)=((vec)OC; (vec)DC)
6) OBCD est un parallélogramme, ainsi (r) (vec)DC=(vec)OB, d'où ((vec)OC;(vec)DC)=((vec)OC;(vec)OB) donc ((vec)AB;(vec)DC)=((vec)OC;(vec)OB)=-π/3 ((vec)AB;(vec)CD)=((vec)AB;(vec)DC)+((vec)DC;(vec)CD)=-π/3+((vec)DC;-(vec)DC)=-π/3+3π/3=2π/3.(/r)
7) ((vec)BC ;(vec)BF)=((vec)BC ;(vec)BO)+((vec)BO ;(vec)BA)+((vec)BA ;(vec)BF)(r) =π/3+π/3+1/2((vec)BA; (vec)BO)=2π/3+1/2*(-π/3)=2π/3-π/6=4π/6-π/6=3π/6=π/2(/r)

Exercice 12 :

((vec)BE; (vec)CD)

Exercice 13 : (questions)

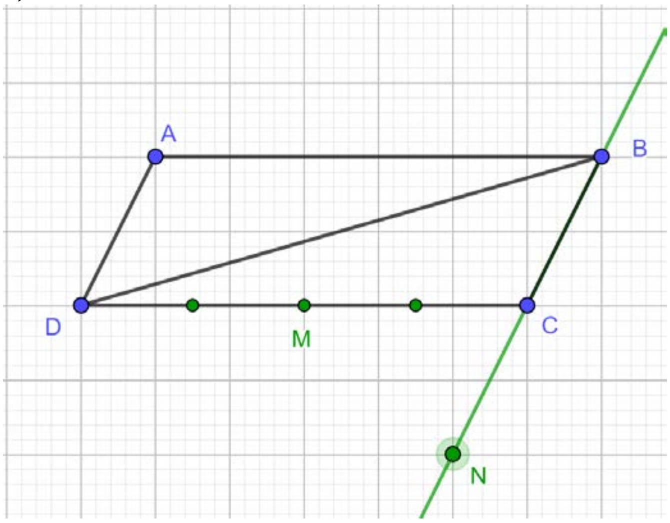
1) Donner la mesure des deux angles orientés suivants : (r)((vec)AJ; (vec)AD) et ((vec)DJ; (vec)DA).
2) En déduire la mesure de l'angle orienté ((vec)DC; (vec)DJ).
3) Donnez la mesure de l'angle orienté ((vec)CD;(vec)CI). En déduire la mesure de l'angle orienté ((vec)DC; (vec)DI)
4) En déduire que les points D, J et I sont alignés. (/r)

Exercice 1 :

ABCD et x∈ℝ, x≠0.

(vec)DM=x(vec)DC et N, N∈(BC) tel que (vec)BN=1/x (vec)BC
(v) (vec)BN=1/2/5 (vec)BC
(vec)BN=5/2 (vec)BC (/v)

a)



b)
(D ; (vec)DC, (vec)DA)

- D(0 ;0) ; C(1 ;0) ; A(0 ;1)
  (vec)DB=(vec)DC+(vec)DA
  (vec)DB=1*(vec)DC+1*(vec)DA

(v)donc B(1 ;1)
(vec)DM=x(vec)DC+O*(vec)DA
Donc M(x ;0)
(vec)DN=(vec)DB+(vec)BN
(vec)DN=(vec)DC+(vec)DA+1/x (vec)BC
(vec)DN=(vec)DC+(vec)DA-1/x (vec)DA
(vec)DN=1*(vec)DC+(1-1/x)* (vec)DA
Donc N(1 ;1-1/x)
c) (vec)AM(x_M-x_A ;y_M-y_A)
(vec)AM(x ;0-1
(vec)AM=(x ;-1)
(vec)AN(x_N-x_A ;y_M-y_A)
(vec)AN(1 ;1-1/x-1)
(vec)AN(1 ;-1/x)

Det ((vec)AM ; (vec)AN)= $\begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & -1/x \end{vmatrix}$

=x*(-1/x)-(-1)*1
=-x/x+1
=-1+1
=0

(vec)AM et (vec)AN sont colinéaires et ont un point A, donc A,M et N sont alingés.

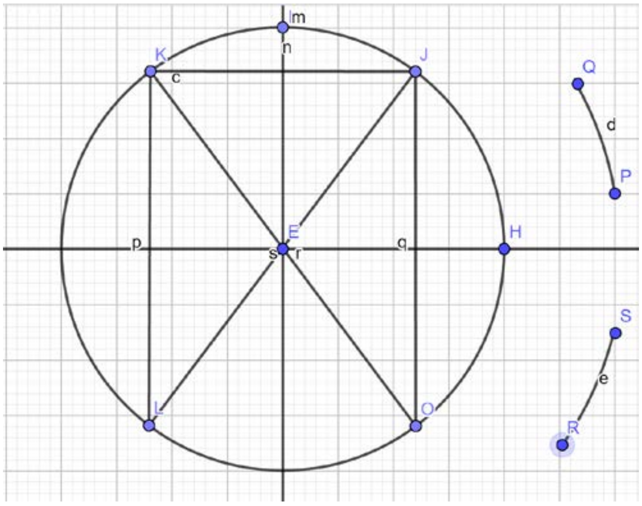
Exercice 2 :

$\alpha=11\pi/3=12\pi-\pi/3=12\pi/3 - \pi/3 = 4\pi-\pi/3=2*2\pi-\pi/3$
de plus $-\pi/3 \in]-\pi ;\pi]$ donc mes $(11\pi/3)=-\pi/3$

$\alpha= -14\pi/5 = -10\pi+4\pi/5 = -10\pi/5 - 4\pi/5 = -2\pi - 4\pi/5$
de plus $-4\pi/5 \in]-\pi ;\pi]$ donc mes$(-14\pi/5)=-4\pi/5$

$\alpha=202\pi/7 = 7*28\pi+6\pi/7 = 28\pi+6\pi/7 = 14*2\pi+6/7\pi$
4/7 (part)$]-\pi ;\pi]$ donc mes $(202\pi/7)=6\pi/7$

$\alpha= 208\pi/6$ et $\beta=76\pi/3 = 76*2\pi/6 = 152\pi/6$
$\alpha-\beta=208\pi/6-152\pi/6 = 56\pi/6 = 48\pi+8\pi/6 = 48\pi/6 + 8\pi/6 = 8\pi+4\pi/3$ or $4\pi/3$ /∈/$]-\pi ;\pi]$
$4\pi/3 -2\pi= 4\pi/3 -6\pi/3 = -2\pi/3$
Donc mes $(\alpha-\beta)=- 2\pi/3$



Exercice 12 (du polycop A3) :

Le but de l'exercice est de montrer (CB)//(CD) :
« ((vec)BE ; (vec)CD)=0 ou π »
((vec)BE ; (vec)CD)=((vec)BE ; (vec)BA)+((vec)BA ; (vec)BC)+((vec)BC ; (vec)CD).
(r)1) calculons ((vec)BE ; (vec)BA) (/r)
((vec)AB ; (vec)AE)=((vec)AB ; (vec)AC)+((vec)AC ; (vec)AD)+((vec)AD ; (vec)AE)
((vec)AB ; (vec)AE)=$\pi/4+\pi/3+\pi/4$
((vec)AB ; (vec)AE)=$2\pi/4+\pi/3$
((vec)AB ; (vec)AE)=$\pi/2+\pi/3$
((vec)AB ; (vec)AE)=$5\pi/6$

Le triangle ABE étant isocèle en A, d'où : ((vec)BE ; (vec)BA)=((vec)EA ; (vec)EB)
De plus dans le triangle ABE, on a :
((vec)BE ; (vec)BA)+((vec)AB ; (vec)AE)+((vec)EA ; (vec)EB)=π
(r)((vec)BE ; (vec)BA)+$5\pi/6$+((vec)BE ; (vec)BA)=π

2*((vec)BE ; (vec)BA)=π- 5π/6
2*((vec)BE ; (vec)BA)=π/6
Donc ((vec)BE ; (vec)BA)=π/12.

Or (chap)A=(chap)C
(chap)B+(chap)A+(chap)C=π
π/2+2(chap)A=π
2(chap)A=π-π/2
2(chap)A=π/2
(chap)A=π/4
B A
Triangle rec en B

C
Dans le triangle ACB rectangle et isocèle en B : on aura ((vec)BA ; (vec)BC=- π/2.

Exercice 12 :
ACD :((vec)AC ;(vec)AD)=π/3
Montrons que : (EB)//(CD)
« ((vec)BE ;(vec)CD)=0 ou π »
((vec)BE ;(vec)CD)
((vec)BE ;(vec)CD)=((vec)BE ;(vec)BA)+((vec)BA ;(vec)BC)+((vec)BC ;(vec)CD)
1) ((vec)BE ; (vec)BA)
((vec)AB ;(vec)AE)=((vec)AB ;(vec)AC)+((vec)AC ;(vec)AD)+((vec)AD ;(vec)AE)
((vec)AB ;(vec)AE)=π/4+π/3+π/4
((vec)AB ;(vec)AE)=2π/4+π/3
((vec)AB ;(vec)AE)=π/2+π/3
((vec)AB ;(vec)AE)=5π/6

((vec)BE ; (vec)BA)=(- (vec)EB ;- (vec)AB)
((vec)BE ;(vec)BA)=((vec)EA ; (vec)EB) car ABE est un triangle isocèle en A.
Dans le triangle ABE ; on a :
((vec)BE ; (vec)BA)+((vec)AB ; (vec)AE)+((vec)EA ; (vec)EB)=π
{{{{{{{{{{{{{{{{
=

2*((vec)BE ; (vec)BA)+5π/6=π
Donc 2*((vec)BE ; (vec)BA)=π-5π/6
2*((vec)BE ; (vec)BA)=6π-5π/6
2*((vec)BE ; (vec)BA)=π/6
Donc ((vec)BE ; (vec)BA)=π/12

2) ((vec)BA ; (vec)BC)=-π/2 car le triangle ABC est rectangle isocèle en B
B A
Rect B

C

3) Calculons ((vec)BC ; (vec)CD)=((vec)BC ; (vec)CB)+((vec)CB ; (vec)CA)+((vec)CA ; (vec)CD)
((vec)BC ; (vec)CD)=((vec)BC ;-(vec)BC)-π/4-π/3
((vec)BC ; (vec)CD)=π-π/4-π/3
((vec)BC ; (vec)CD)=π-7π/12
((vec)BC ; (vec)CD)=12π/12 -7π/12
((vec)BC ; (vec)CD)=5π/12
1)+2)+3)=π/12-π/2+5π/12
1)+2)+3)=6π/12-π/2
1)+2)+3)=π/2-π/2
1)+2)+3)=0
1)+2)+3)=((vec)BE ;(vec)CD)
Donc (EB)//(CD)

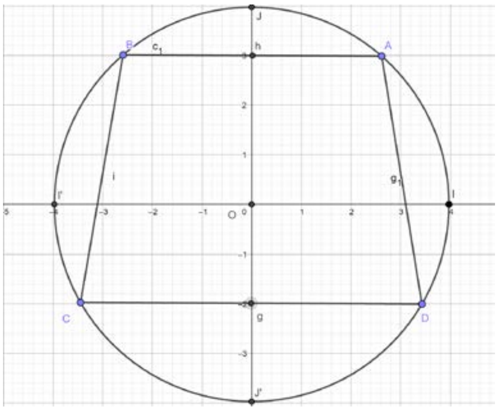
Exercice 13 :
Décomposer les angles, AJ ;AD et DJ ;DA
1)
((vec)AJ ; (vec)AD)=((vec)AJ ; (vec)AB)+((vec)AB ; (vec)AD)
((vec)AJ ; (vec)AD)=-π/3+π/2
((vec)AJ ; (vec)AD)=-2π/6+3π/6
((vec)AJ ; (vec)AD)=π/6
ABJ est un triangle équilatéral : AB=AJ
ABCD est un carré : AB=AD
Le triangle ADJ est isocèle en A.
((vec)DJ ; (vec)DA)+((vec)AD ; (vec)AJ)+((vec)JA ; (vec)JD)=π
((vec)DJ ;vDA)=((vec)JA ; (vec)JD)
« ((vec)v ; (vec)u)=-((vec)u ; (vec)v) »
((vec)AD ; (vec)AJ)=-((vec)AJ ; (vec)AD)
2*((vec)DJ ; (vec)DA)-π/6=π
2*((vec)DJ ; (vec)DA)=π+π/6
2*((vec)DJ ; (vec)DA)=7π/6
Donc ((vec)DJ ; (vec)DA)=7π/12

2)
((vec)DC ; (vec)DJ)=((vec)DC ; (vec)DA)+((vec)DA ; (vec)DJ)
((vec)DC ; (vec)DJ)=((vec)DC ; (vec)DA)-((vec)DJ ; (vec)DA)
((vec)DC ; (vec)DJ)=π/2-7π/12
((vec)DC ; (vec)DJ)=6π/12-7π/12
((vec)DC ; (vec)DJ)=-π/12

3)
((vec)CD ; (vec)CI)=((vec)CD ; (vec)CB)+((vec)CB ; (vec)CI)
((vec)CD ; (vec)CI)=π/2+π/3
((vec)CD ; (vec)CI)=3π/6+2π/6
((vec)CD ; (vec)CI)=5π/6.

Dans le triangle CDI :
((vec)CD ; (vec)CI)+((vec)IC ; (vec)ID)+((vec)DI ; (vec)DC)=π or ((vec)DI ; (vec)DC)=((vec)IC ; (vec)ID)
((vec)CD ; (vec)CI)+2*((vec)DI ; (vec)DC)=π
5π/6+2*((vec)DI ; (vec)DC)=π
2*((vec)DI ; (vec)DC)=π-5π/6
2*((vec)DI ; (vec)DC)=6π-5π/6
2*((vec)DI ; (vec)DC)=π/6
Donc ((vec)DI ; (vec)DC)=π/12
Alors ((vec)DC ; (vec)DI)=-((vec)DI ; (vec)DC)
((vec)DC ; (vec)DI)=-π/12

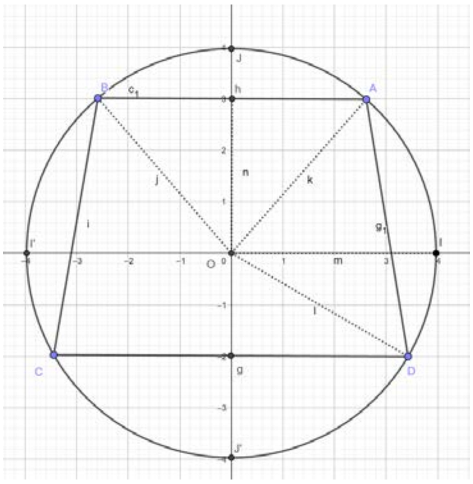
4)
((vec)DC ; (vec)DJ)=-π/12 et ((vec)DC ; (vec)DI)=- π/2
Donc ((vec)DC ; (vec)DJ)=((vec)DC ; (vec)DI)
Par conséquent, D, J et Z sont alignés.



(AB)//(CD)
a) Déterminez a,b,c et d, les abscisses curvilignes des points A,B,C et D.
OAJ et OID sont des triangles équilatéraux.
B et C sont tels que :
(OB)//(IJ)
Et (OC)//(IJ’)
Montrer que : a+b=c+d[2π]
OAJ étant équilatéral, on a :
(angle)AOJ=π/3 et (angle)IOA=π/6
Donc ((vec)OI ;(vec)OA)=π/6
Alors a=π/6[2π]
OID étant équilatéral, (angle) IOD=π/3 d’où((vec)OI ;(vec)OD)=π/3 donc d=-π/3[2π].
(angle)IOB=π/4+π/2=π/4+2π/4=3π/4
Donc ((vec)OI ; (vec)OB=3π/4[2π] alors b=3π/4[2π]
((vec)OI ;(vec)OC)=-3π/4 donc c=-3π/4 [2π]
a+b=-π/6+3π/4 [2π] = 11π/12 [2π]
c+d=-3π/4-π/3 [2π]
c+d=-13π/12

a+b-(c+a)=11π/12+13π/12=24π/12=2π=0[2π]

((vec)OI ;(vec)OP) = ((vec)OI ;(vec)OA)+((vec)OA ;(vec)OP)=a+ (b-a)/2 [2π]=2a+b-a/2=a+b/2 [2π].
((vec)OI ;(vec)OQ)=c+d/2 [2π]



Correction de la compo n°1 de math :
Problème 1 :
Partie A :
D=[0 ;10]
$C(x)=5x^2+10x+100$

a)
B(x)=R(x)-C(x)
$B(x)=70*x-(5x^2+10x+100)$
$B(x)=-5x^2+60x-100$

b)
$B(10)=-5*10^2+60*10-100$
B(10)=-500+600-100
B(x)=0

c)
Méthode 1 :
$B(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
B(x)=-5(x-10)(x-2)

Méthode 2 :
$\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-60}{10}=6$
β=B(α) = B(6) = 80
$B(x)=-5(x-6)^2+80 = -5[(x-6)^2-16] = -5[(x-6)^2-4^2] = -5[(x-6-4)(x-6+4)]$
B(x)=-5(x-10)(x-2)

c)

$B(x)=-5(x-6)^2+80$

$a=-5<0$

x	0	6	10
B	(croiss)	80	(dèc) B(10)=0

$B(0)=-5*36+80=-100$

x	0 2	10	
B(x)	- 0	+ 0	-

$B(x)=0 \Leftrightarrow -5(x-10)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x-10=0$ ou $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=10$

$B(x)=78,75$

$\Leftrightarrow -5x^2+60x-100=78,75$

$\Leftrightarrow -5x^2+60x-178,75=0$

$\Delta=60^2-4(-5*-178,75)$

$\Delta=3600-357,5=25$

$x1=-60-5/-10 = 65/10 = 6,5$

$x2=-60+5/-10=55/10=5,5$

PB :

$f(x)=x^4-x^3-5x^2-2x+11$

$g(x)=-x^3+5x^2-2x+2$

a)

$h(x)=f(x)-g(x)$

$h(x)=x^4\cancel{-x^3}-5x^2\cancel{-2x}+11-(\cancel{-x^3}+5x^2\cancel{-2x}+2)$

$h(x)=x^4-5x^2-5x^2+11-2$

$h(x)=x^4-10x^2+9$

b)

$h(x)=0 \Leftrightarrow x^4-10x^2+9=0$

$\Leftrightarrow (x^2)^2-10x^2+9=0$

$\Leftrightarrow X^2-10X+9=0$

$X=x^2$

$\Delta=(-10)^2-4*1*9$

$\Delta=100-36$

$\Delta=64$

$x1=-(-10)+8/2 = 18/2 = 9 \Leftrightarrow x^2=9$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x= -3$

$x2=10-8/2 = 2/2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2=1$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

f=a(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)
f=1(x-1)(x-3)(x+1)(x+3)

x	-∞ -3	-1	1	3 +∞
x+3	- 0	+	+	+ +
x+1	-	- 0	+	+ +
x-1	-	-	- 0	+ +
x-3	-	-	-	0 +
h(x)	+ 0	- 0	+ 0	-0 +

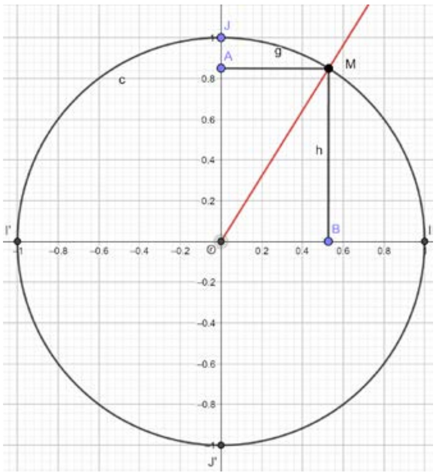
d) f(x)>g(x)
h(x)=f(x)-g(x)
h(x)>0 ⇔ f(x)-g(x)>0
h(x)>0 ⇔ f(x)>g(x)
Donc S=]-∞ ;-3[U]-1 ;1[U]3 ; +∞[

La courbe représentative de f est au-dessus de la coure représentative de g dans S.

PC (Partie C) :
P :y=f(x)=ax²+bx+c
S(3/2 ; 9/4)
E(4 ;1)∈P
y=a(x-α)²+β
y=a(x-3/2)²+9/4
E∈P⇔f(4)=1
⇔a(4-3/2)²+9/4=1
⇔a(5/2)²+9/4=1
⇔a*25/4 + 9/4=1
⇔25a/4 = 1-9/4
⇔25a/4=4/4 – 9/4
⇔25a/4=-5/4
⇔a=-5/4/25/4
⇔a=-5/4 * 4/25
⇔a=-5/25 = -1/2
Donc P : y=-1/5(x-3/2)² + 9/4

(r)III) Trigonométrie
a) Ligne trigonométrique(/r)
une ligne trigonométrique est une (r)expression (/r) désignant une des fonctions trigonométriques, à savoir : (r)Cosinus, sinus ou tangente (/r).

(r)Définition 6 : (/r)
Soit (O ; OI, OJ) un repère orthonormé du plan, x un réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x. (r) Le cosinus de x est le réel noté cos(x) égal à l'abscisse du point M. Le sinus de x est le réel noté sin(x) égale à l'ordonné de M. Si x≠π/2[π], la tangente est le réel noté tangente de x(/r) est le réel noté tan(x) égal au coefficient directeur de la droite (OM) ; Soit au rapport sin(x)/cos(x).



La longueur de l'hypoténuse.

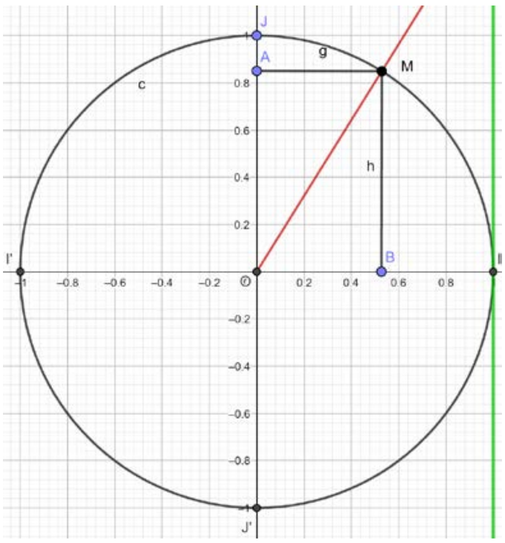
Cos(α)=(r)x/OM(/r)

Cos(α)=(r)x/1 donc square(x=cos((/r)α(r)))(/r)

Sin(α)=$\dfrac{\text{La longueur de côté opposé à } \alpha}{\text{La longueur de l'hypothénuse}}$

Sin(α)=(r)$\dfrac{y}{OM}$ donc y=sin(α)

Sin(α)=$\dfrac{y}{1}$(/r)



(O ;OI,OJ)

OM=x_{OI}+y_{OJ}

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(r)M$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$(/r)

M$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

(r)tan(α)(/r)

$m=\frac{y_M-y_O}{x_M-x_O}=\tan(\alpha)$

$\boxed{m=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\tan(\alpha)}$

Propriété 3 :

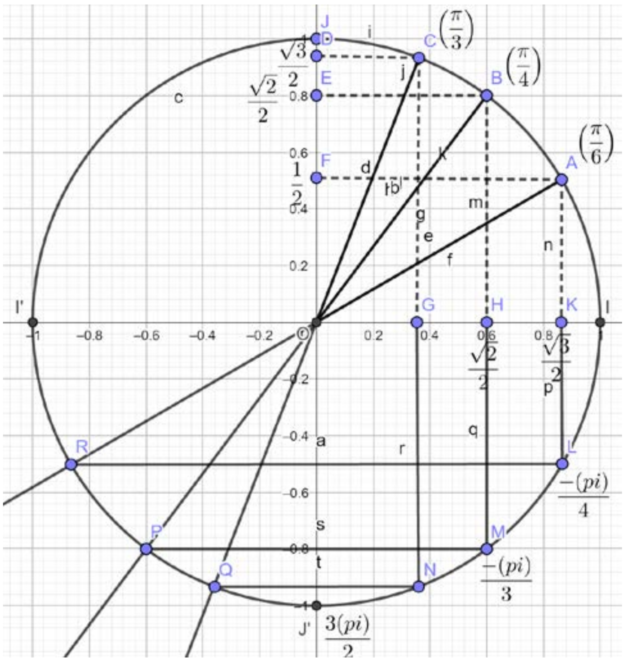
Pour tout x ∈ℝ et tout k∈(|Z) ℤ, on a :

1) $-1\leq\text{Cos}(\alpha)\leq1$

2) $-1\leq\sin(\alpha)\leq1$

3) $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha)$

4) $\sin(\alpha+2k\pi)\sin(\alpha)$



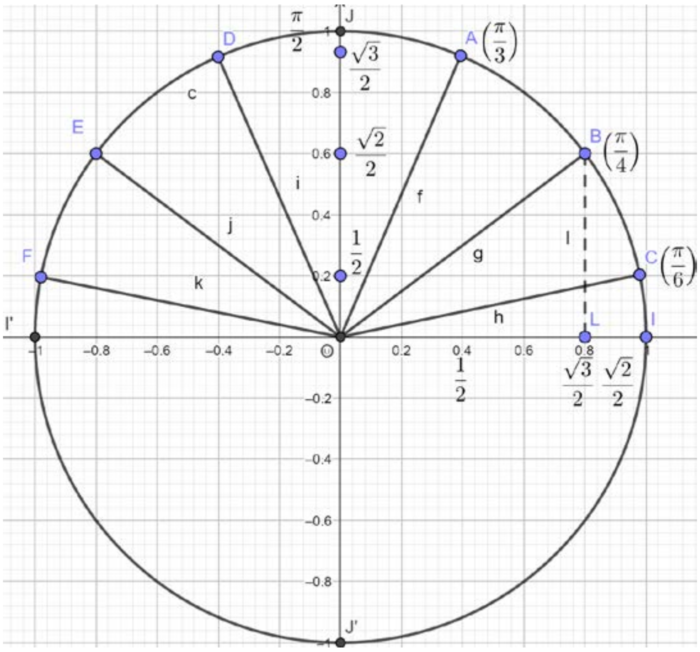
α	π/2	π/3	π/4	π/6	0	2π	2π/3	3π/4	5π/6
cos(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
sin(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ M∈C(O; R=1)

$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$

$M\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\end{pmatrix}$ M(α)



$\text{Cos}\left(\pi\text{-}\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$(r)-cos$\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (/r)

$\text{Cos}\left(\pi\text{-}\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$=-(rac)2/2 (r)= -cos$\left(\frac{\pi}{4}\right)$

1) ∀α∈ℝ Cos(π-α)=-cos(α). (/r)

$\text{Sin}\left(\pi\text{-}\frac{\pi}{3}\right)$=(b)sin$\left(\frac{2\pi}{3}\right)$=(rac)3/2 (/b)(v)=sin$\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\text{Sin}\left(\pi\text{-}\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$=(rac)2/2=sin$\left(\frac{\pi}{4}\right)$(/v)

(r)2) ∀α∈ℝ, sin(π-α)=sin(α)

Cos(- π/3)=cos(π/3)=1/2

Cos(- π/4)=cos(π/4)=(rac)2/2

3) ∀α∈ℝ, Cos(-α)=Cos(α)(/r)

On dit **que la fonction cosinus est paire. Sa courbe représentative est symétrique à l'axe des ordonnées.**

(v)sin$\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$=-sin$\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{-1}{2}$

$\text{Sin}\left(\frac{-3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$=-(rac)2/2 (/v)

∀α∈ℝ, sin(-α)=-sin(α). On dit que la fonction sinus est impaire. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du cercle.

5) Angles associés

Soit α un réel. On a :

a) cos(α+2π)=cos(α).

b) cos(α+2kπ)=cos(α), k∈(|Z).

c) sin(α+2kπ)=sin(α), k∈(|Z).

d) Cos$\left(\frac{\pi}{2}\text{-}\alpha\right)$=sin(α)

e) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$.

f) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin(\alpha)$.

g) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha)$

(r)1) $x=\frac{\pi}{5}$

$\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}+2\pi=\frac{11\pi}{5}, \frac{\pi}{5}-2\pi=-\frac{\pi}{5}$

$\frac{\pi}{5}+4\pi=\frac{21\pi}{5}$ etc…

$x=\frac{\pi}{5}+2k\pi$, k∈(|Z)

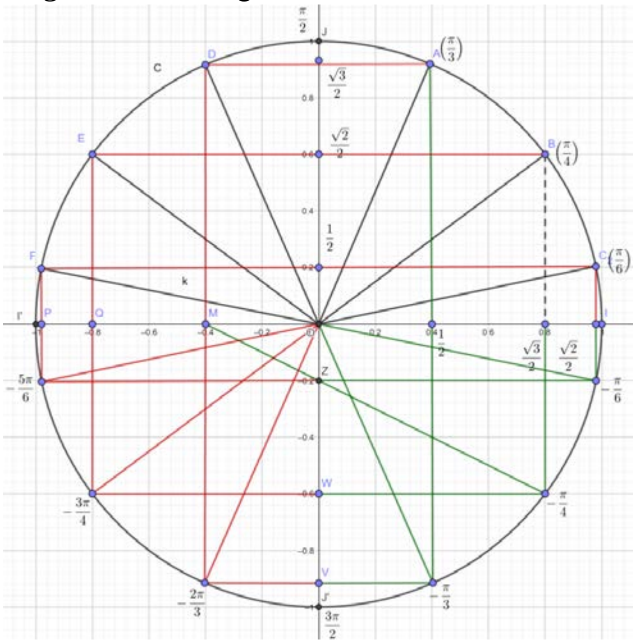
b)

angle IOM_1 $x=\frac{\pi}{5}$

angleIOM_1=angle IOM

$-\frac{\pi}{5}$, $-\pi$ etc…

c) angleIOM_2=π-angleIOM = π-π/5 = 4π/5
4π/5, 4π/5+2π=14π/5, 4π/5 -2π=-6π/5
4π/5+4π=24π/5, etc …
4π/5+2kπ
AngleIOM_3=π+angleIOM = π+π/5 = 6π/5.



(r)Ex 35 p 209 :

Cos(π/8)=1/2 (rac)(((rac)2)+2)(/r)

B(π/8)(r), C(7π/8)

1) C'est le symétrique de B par rapport à l'axe des ordonnées.
2) $C\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)\\ \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\end{pmatrix}$

   $\text{Cos}\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\text{Cos}\left(\frac{8\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right) = \text{Cos}\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right) =-\text{Cos}\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
3) $\text{Sin}\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right) =\text{Sin}\left(\frac{\pi}{8}\right)$

   Or $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$

   $\text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

   Sin²(π/8)=1-[1/2(rac)((rac)(2)+2)]²
   Sin²(π/8)=1-1/4((rac)(2)+2)
   Sin²(π/8)=1-(rac)(2)/4 -1/2
   Sin²(π/8)=1/2-(rac)(2)/4
   Donc Sin(π/8)=(rac)(1/2-(rac)(2)/4)
   Ou sin(π/8)=-(rac)(1/2-(rac)(2)/4)
   Par conséquent C(-1/2(rac)((rac)(2)+2);(rac)(1/2-(rac)(2)/4))

Exercice 3(/r)6(r)p209 :

(/r)sin(π/12)=(rac)(6)-(rac)(2)/4

B(π/12) et C(13π/12)

1) C(Cos(13π/12);Sin(13π/12))
   Sin(13π/12)=sin(12π/12+π/12)
   Sin(13π/12)=sin(π+(π/12))
   Sin(13π/12)=-sin(π/12)
   Sin(13π/12)=-((rac)(6)-(rac)(2))/4
   Sin(13π/12)=(rac)(2)-(rac)(6)/4
   $\forall x\in\mathbb{R}$, cos(π+x)=-Cos(x)
   $\forall x\in\mathbb{R}$ sin(π+x)=-sin(x)
2) Cos(13π/12) ?
   Or Cos²(13π/12)+Sin²(13π/12)=1
   Cos²(13π/12)=1-sin²(13π/12)
   Cos²(13π/12)=1-((rac)(2)-(rac)(6)/4)²
   Cos²(13π/12)=16-(2-2(rac)(12)+6)/16
   (r)Cos²(13π/12)=8+4(rac)(3)/16=2+(rac)(3)/4
   (/r)1-((rac)(2)-(rac)(6))²/4=1((rac)(2)-(rac)(6))²/16=16/16-((rac)(2)²-2*(rac)(2)*(rac)(6)+(rac)(6)²)/16
   (r)16/16 – (2-2(rac)(12)+6)/16
   Cos²(13π/12) = 8+4(rac)(3)/16 = 2+(rac)(3)/4

Donc Cos(13π/12)=(rac)(2+(rac)(3)/4) ou = - (rac)(1+(rac)(3)/4)
Alors Cos(13π/12)=(rac)(2+(rac)(3))/2 ou –(rac)(2+(rac)(3))/2
C(-(rac)(2+(rac)(3))/2;(rac)(2)-(rac)(6)/4)
a≥0, x²=a, ⇔x=(rac)(a) ou x=-(rac)(a)(/r)

Ex 38 p 210 :

Cos(π/8)=1/2(rac)(2+(rac)(2))

Sin(π/8)=1/2(rac)(2-(rac)(2))

B(π/8); C(3π/8) et D(5π/8)

B(Cos(π/8);sin(π/8))(r)=((rac)(2+(rac)(2))/2;(rac)(2-(rac)(2))/2) (/r)

$$C\begin{pmatrix}\mathrm{Cos}\left(\frac{3\pi}{8}\right)\\ \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\end{pmatrix}$$

$$\frac{3\pi}{8}3=2\pi+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}$$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=(r)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\ (/r)$$

$$\mathrm{Sin}\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)(r)=\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\text{ donc }C\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\frac{5\pi}{8}=8\pi-\frac{3\pi}{8}$$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\mathrm{Cos}\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=-\mathrm{Cos}\left(\frac{3\pi}{8}\right)=(r)-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Ex 57 p 211 :

1)

Sin(π/8)=1/2(rac)(2+(rac)(2))

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$$

2)

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\mathrm{Cos}\left(\frac{8\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\mathrm{Cos}\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Ex 58 p 211 :

$(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2 = \text{Cos}\alpha^2+2\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha^2+\cos\alpha^2-2\cos\alpha\sin\alpha^2+\sin\alpha^2$

Ex 59 p 211 :

$\text{Cos}(\pi/2 - \alpha)+\sin(-\alpha)+\sin(\pi/2 +\alpha)$

Correction du contrôle :

Ex 1 :

a) $\alpha=\frac{2018\pi}{3}\text{rad} = \frac{672\pi+2\pi}{3}=\frac{672\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=336*2\ \pi+\frac{2\pi}{3}$

donc $\text{mes}(\alpha)=\frac{2\pi}{3}\text{rad}$

$\beta=2018°$

$x=\frac{2018*2\pi}{360} = \frac{2018\pi}{180}=\frac{1009\pi}{90}\approx 11{,}211\pi\text{rad}$

voir TD2 : $\gamma\in[2017\pi\ ;2018\pi]$: $\text{mes}(\gamma)=-\frac{\pi}{8}$

$-\frac{\pi}{8}+2018\pi=\frac{-\pi+8*2018\pi}{8}=\frac{16143\pi}{8}=2017{,}875\pi\text{rad}$

b)

γ=(angle)IOM et $\gamma\in[\pi\ ;2\pi]$

$\text{Cos}(\gamma)=-\frac{(\text{rac})2}{2}$

$\gamma=-\frac{3\pi}{4}$

c)

$\alpha\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ et $\sin(\alpha)=-\frac{1}{3}$

$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

$\cos^2(\alpha) = 1-\sin^2(\alpha)$

$=1-(-\frac{1}{3})^2$

$= 1-\frac{1}{9}$

$=\frac{9-1}{9}$

Donc cos(α)=$\frac{8}{9}$

Donc cos(α)=(rac)($\frac{8}{9}$) ou cos(α)=-(rac)($\frac{8}{9}$)

Cos(α)=$\frac{(rac)(8)}{(rac)(9)}$ ou cos(α)=-$\frac{(rac)(8)}{(rac)(9)}$

= $\frac{2(rac)(2)}{3}$ ou (square)(=-$\frac{2(rac)(2)}{3}$)

α=arcos(+$\frac{2(rac)(2)}{3}$)+π

α=$\cos^{-1}$(-$\frac{2(rac)(2)}{3}$)+π

α≈2,800 rad.

II

a)

A=3cos(x-π)-2cos(-x)+cos-π+x)-5cos(2018π+x)

A=3cos(-(π-x))-2*cos(x)+(-cos(x))-5cos(x)

(r) {{{{{

y

A=(r)3cos(-y)-2cos(x)-cos(x)-5cos(x)

A=3cos(y)-8cos(x)

A=3cos(π-x)-8cos(x)

A=-3cos(x)-8cos(x)

A=-11cos(x) (/r)

b)

$B=\sin(x+\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$

$B=$(r)$\cos(x)+\cos(x)+\sin(\pi+\frac{\pi}{2}+x)$

$B=2\cos(x)+\sin(\frac{\pi}{2}+(\pi+x))$

(/r) {{{{{

Y

$=2\cos(x)+\sin(\frac{\pi}{2}+y)$

(r)$=2\cos(x)+\cos(y)$

$B=2\cos(x)+\cos(\pi+x)$

$B=2\cos(x)-\cos(x)$

$B=\cos(x)$

$\mathrm{Sin}(\frac{3\pi}{2}+x)$

$=\sin(-\frac{\pi}{2}+x)$

(r)$=\sin(-(\frac{\pi}{2}-x))$

{{{

Y

$=\sin(-y)$

$=-\sin(y)$(/r)

$=-\sin(\frac{\pi}{2}-x)$

$=-\cos(x)$

Donc $B=2\cos(x)-\cos(x)=\cos(x)$.

c)

$\sin^2(\frac{\pi}{8})+\sin^2(\frac{3\pi}{8})=+\sin^2(\frac{5\pi}{8})+\sin^2(\frac{7\pi}{8})=2$

$\frac{3\pi}{8}=\frac{4\pi-\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

$\frac{5\pi}{8}=\frac{4\pi+\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

$\frac{7\pi}{8}=\frac{8\pi-\pi}{8}=\frac{8\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

$\mathrm{Sin}^2(\frac{\pi}{8})+\sin^2(\frac{3\pi}{8})+\sin^2(\frac{5\pi}{8})+\sin^2(\frac{7\pi}{8})$

$=(\sin(\frac{\pi}{8}))^2+(\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}))^2+(\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}))^2+(\sin(\pi-\frac{\pi}{8}))^2$

$=\sin^2(\frac{\pi}{8})+((r)\cos(\frac{\pi}{8}))^2+(\cos(\frac{\pi}{8}))^2+(\sin(\frac{\pi}{8}))^2$

$=\sin^2(\frac{\pi}{8})+\cos^2(\frac{\pi}{8})+\cos^2(\frac{\pi}{8})+\sin^2(\frac{\pi}{8})$

$=1+1$

$=2(/r)$

$\mathrm{Cos}(2x)=2(\cos(x))^2-1$

$\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{12})$ et $\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{(rac)(3)}{2}$

$2*\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$

$\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{6})=2(\cos(\frac{\pi}{12}))^2-1$

$\frac{(rac)(3)}{2}+1=2\cos^2(\frac{\pi}{12})$

$\frac{(rac)(3)+2}{2}=2\cos^2(\frac{\pi}{12})$

$\mathrm{Cos}^2(\frac{\pi}{12})=\frac{(rac)(3)+2}{4}$

$\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{12})=(rac)(\frac{(rac)(3)+2}{4})$ ou $-(rac)(\frac{(rac)(3)+2}{4})$

$\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{12})=\boxed{\frac{(rac)((rac)(3)+2)}{2}}$ ou $\cancel{\cos(\frac{\pi}{12})=-\frac{(rac)((rac)(3)+2)}{2}}$

(r)$0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$(/r)

Le cout moyen = $\frac{\text{le cout total de prod}}{x}$

Ex : $\frac{2x^3-3x^2+2x}{x}$

$=\frac{2x^3}{x}-\frac{3x^2}{x}+\frac{2x}{x}$

$\boxed{CM(x)=2x^2-3x+2}$

$CM(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+2=0$

$Cm(x)=\frac{C(x+1)-C(x)}{x+1-x}=\frac{C(x+1)-C(x)}{1}$

$C(x)=3x^3-2x^2+x+1$

$C(x+1)=3(x+1)^3-2(x+1)^2+(x+1)+1$

$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$

$=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$

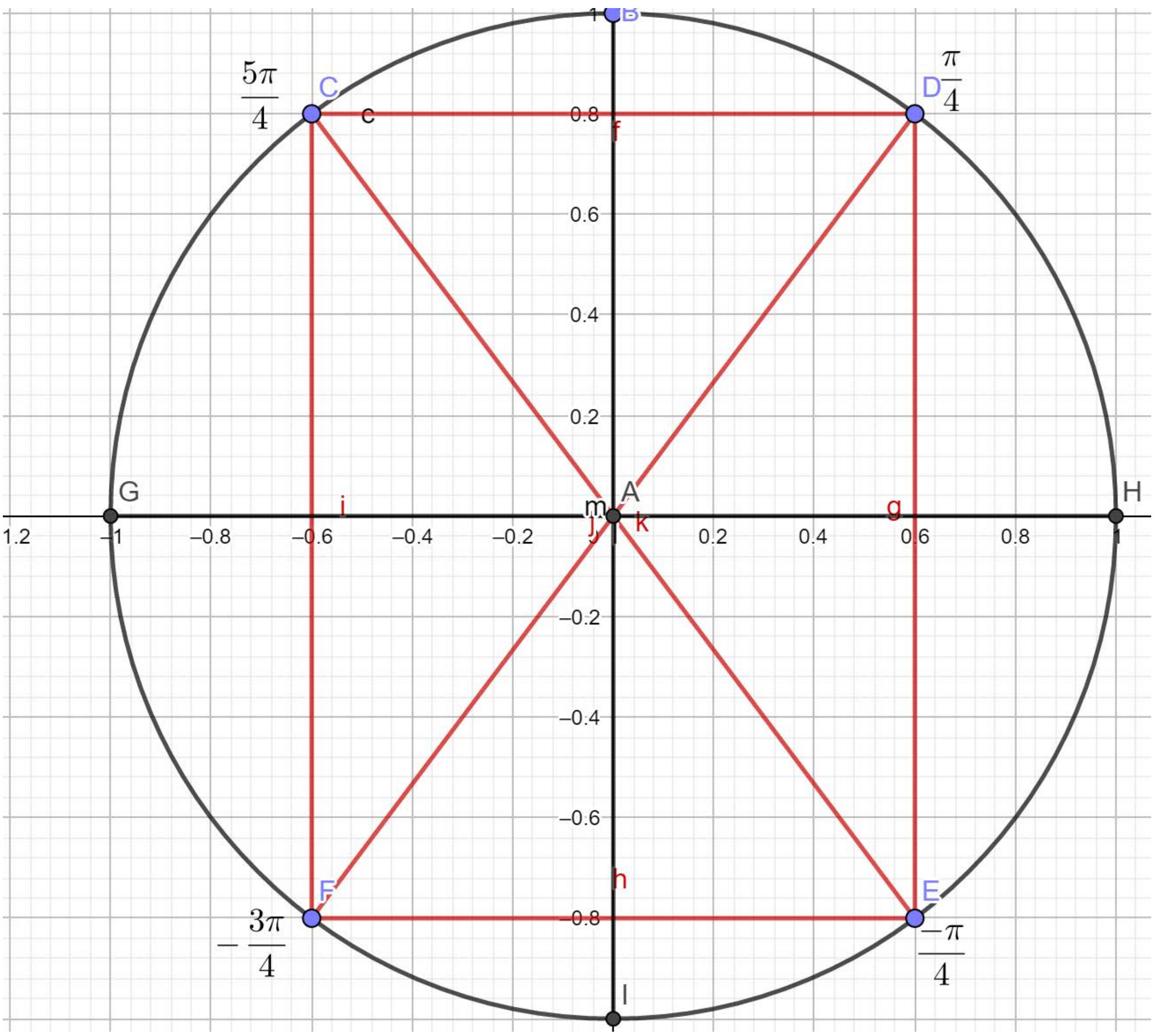
$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

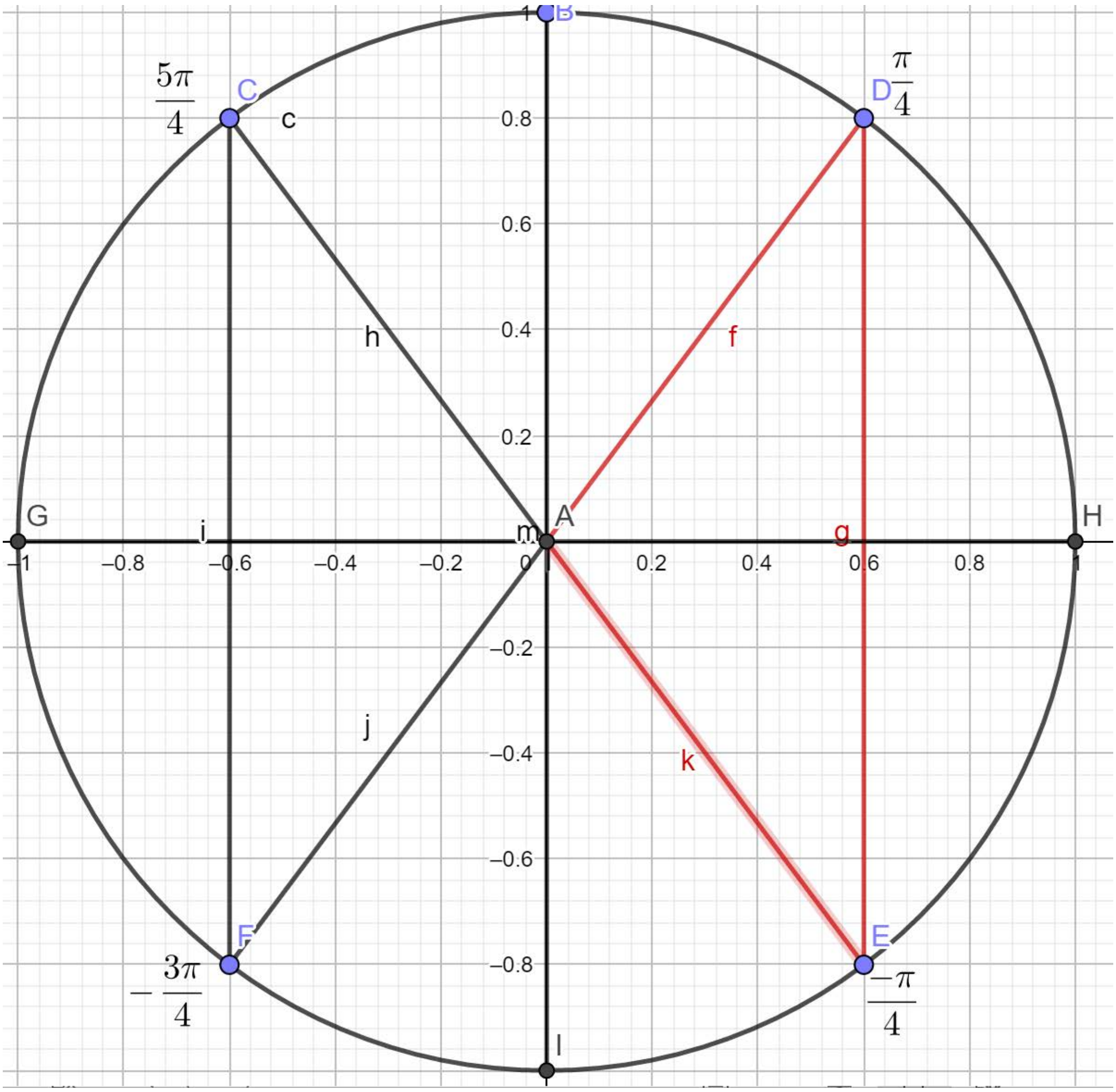
(r)6) Equation trigonométriques :(/r)

Cos(x)=cos(a) avec |cos(a)|≤1.

- Si |a|>1 (r)alors l'équation n'admet aucune solution(/r) car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x)| \leq 1$. ⇔ $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.
- Si |a|=1, l'équation a une solution dans $]-\pi ;\pi]$ et dans $\mathbb{R}$;
- Si a=1, $x=0[2\pi]$ et si a=1, $x=\pi[2\pi]$.
- Si |a|<1, il existe deux points du cercle trigonométrique qui ont pour abscisse (r)a(/r).
  (r)M(cos(x);sin(x)) et N(-a;sin(x))
  M(a;sin(x))(/r) Dans $\mathbb{R}$: $S=\{a+2k\pi;-a+2k\pi\}$ $\forall k \in$ (|Z).

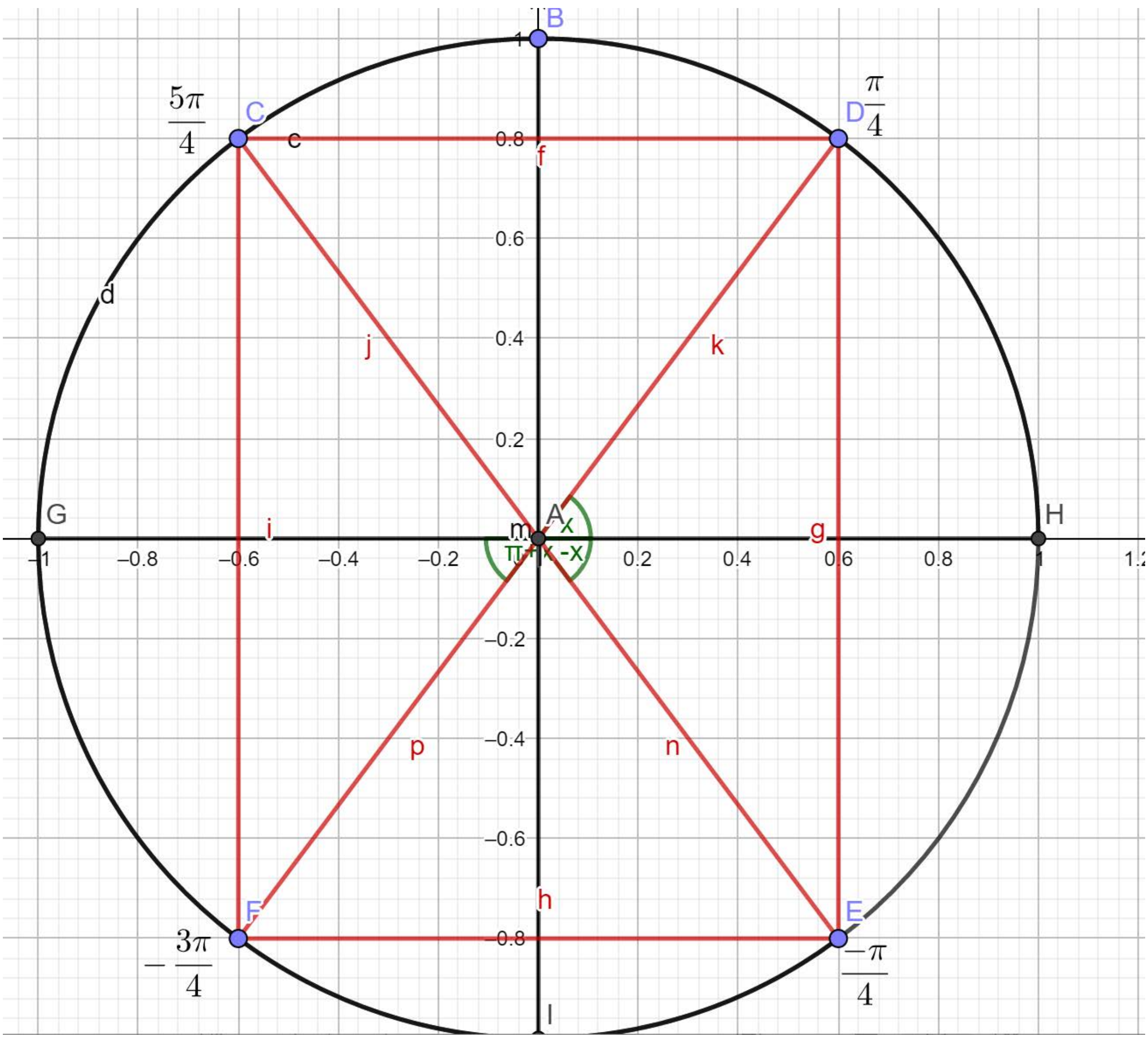


B
C
D
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
c
f
A
m
G
H
i
g
j
k
h
F
E
I
$-\frac{3\pi}{4}$
$\frac{-\pi}{4}$
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1



Sin(x)=a (r)⬄x=a+2kπ ou x=π-a+2kπ ∀k∈(|Z)(/r)

|a|<1



a) $\cos(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x)=\cos(\frac{\pi}{3})$ ou $\cos(x)=\cos(-\frac{\pi}{3})$

$\boxed{\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi}$

(r)donc $S=\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ donc $[0; \pi]$

$I=[0;12\pi]$

Photo non représentée

$x\in[0\ ;12\pi] \Leftrightarrow 0\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq12\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\leq2k\pi\leq12\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{35\pi}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}/2\pi \leq k \leq \frac{35\pi}{3}/2\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}*\frac{1}{2\pi} \leq k \leq \frac{35\pi}{3}*\frac{1}{2\pi}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \boxed{k} \leq \frac{35}{6}$

k={0;1;2;3;4;5}

k=0 : $x=\frac{\pi}{3}$

k=1 : $x=\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$

k=2 : $x=\frac{\pi}{3}+4\pi = \frac{13\pi}{3}$

k=3 : $x=\frac{\pi}{3}+6\pi=\frac{19\pi}{3}$

k=4 : $x=\frac{\pi}{3} +8\pi=\frac{25\pi}{3}$

k=5 : $x=\frac{\pi}{8}+10\pi= \frac{31\pi}{3}$

$x=\frac{\pi}{3}+2k\,\pi$

$x\in[0 ;12\,\pi]$

$\Leftrightarrow 0\leq- \pi/3 +2k\,\pi\leq 12\,\pi$

$\Leftrightarrow \pi/3\leq 2k\,\pi\leq 12\,\pi+ \pi/3$

$\Leftrightarrow \pi/3/2\,\pi\leq k\leq 37\,\pi/3/2\,\pi$

$\Leftrightarrow 1/3 * ½\leq k\leq 37/6$

(r)$\frac{\frac{\pi}{3}}{2\,\pi} = \frac{\pi}{3}*\frac{1}{2\pi} = \frac{\cancel{\pi}*1}{3*2*\cancel{\pi}} = \frac{1}{6}$

$1/6\leq k\leq 37/6$

K=1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6

K=1 : $x=- \pi/3 + 2\,\pi = 5\,\pi/3$

K=2 : $x=- \pi/3 + 4\,\pi = 11\,\pi/3$

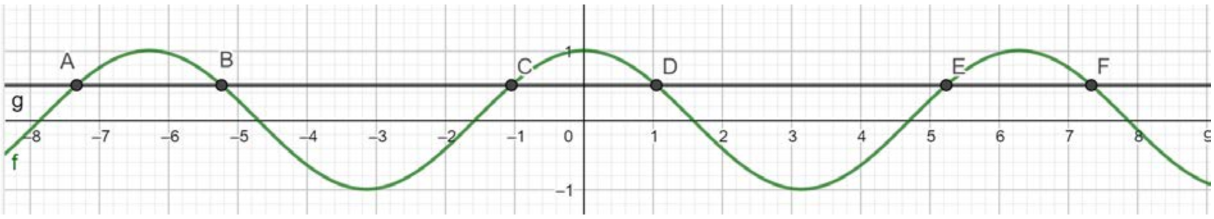
K=3 : x=- π/3 + 6 π = 17 π/3

K=4 : x=- π/3 + 8 π = 23 π/3

K=5 : x=- π/3+10 π = 28 π/3

K=6 : x=- π/3 + 12 π = 35 π/3

Donc S={$\frac{\pi}{3}$;$\frac{5\pi}{3}$;$\frac{11\pi}{3}$;$\frac{13\pi}{3}$;$\frac{17\pi}{3}$;$\frac{19\pi}{3}$;$\frac{23\pi}{3}$;$\frac{25\pi}{3}$;$\frac{29\pi}{3}$;$\frac{31\pi}{3}$;$\frac{35\pi}{3}$}



b)

sin(2x)=-$\frac{(rac)(3)}{2}$ ⇔ sin(2x) = sin(-$\frac{\pi}{3}$)

⇔ 2x=-$\frac{\pi}{3}$+2k π ou 2x=π-(-$\frac{\pi}{3}$)+2kπ

= π+$\frac{\pi}{3}$+2kπ

= $\frac{4\pi}{3}$+2kπ

⇔x=(-$\frac{\pi}{3}$+2kπ)/2 ou x=($\frac{4\pi}{3}$+2kπ)/2

⇔x=-$\frac{\pi}{6}$+kπ ou x=$\frac{4\pi}{6}$+kπ = $\frac{2\pi}{3}$+kπ

Donc S={- $\frac{\pi}{6}$+k π ;$\frac{2\pi}{3}$+kπ}

Or -$\frac{\pi}{6}$ ∉ [-$\frac{\pi}{2}$;$\frac{\pi}{2}$] et $\frac{2\pi}{3}$∈[-$\frac{\pi}{2}$;$\frac{\pi}{2}$]

Donc α=$\frac{2\pi}{3}$+kπ

J=[-2 π ;2π]

x∈J ⇔ -2 π≤-$\frac{\pi}{6}$+kπ≤2 π

⇔ -2π+$\frac{\pi}{6}$≤kπ≤2 π+$\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{11\pi}{6} \leq k\pi \leq \frac{13\pi}{6}$

$\Leftrightarrow (-\frac{11\pi}{6})/\pi \leq k \leq (\frac{13\pi}{6})/\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{11}{6} \leq k \leq \frac{13}{6}$

K=-1 ;0 ;1 ;2

K=-1 : $x=-\frac{\pi}{6}-\pi = -\frac{7\pi}{6}$

K=0 :$x=-\frac{\pi}{6}$

K=1 :$x=-\frac{\pi}{6}+\pi$ $x=\frac{5\pi}{6} \in J$

K=2 :$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi = \frac{11\pi}{6}$

Donc $S_1=\{-\frac{7\pi}{6} ;-\frac{\pi}{6} ;\frac{5\pi}{6} ;\frac{11\pi}{6}\}$

$x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$

$x \in [-2\pi ;2\pi]$

$\Leftrightarrow -2\pi \leq \frac{2\pi}{3}+k\pi \leq 2\pi$

$\Leftrightarrow -2\pi-\frac{2\pi}{3} \leq k\pi \leq 2\pi-\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{8\pi}{3}/\pi \leq k\pi \leq \frac{4\pi}{3}/\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{8}{3} \leq k \leq \frac{4}{3}$

$k \in \{-2 ;-1 ;0 ;1\}$

k=-2

$x=\frac{2\pi}{3}-2\pi = -\frac{4\pi}{3}$

k=-1

$x=\frac{2\pi}{3}-\pi$

$x=-\frac{\pi}{3}$

k=0

$x=\frac{2\pi}{3}$

k=1

$x=\frac{2\pi}{3}+\pi$

$x=\frac{5\pi}{3}$

Donc $S_2=\{-\frac{4\pi}{3};-\frac{\pi}{3};-\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\}$

Par conséquent :

$S=\{-\frac{4\pi}{3};-\frac{7\pi}{6};-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{3};\frac{11\pi}{6}\}$

C)

$\text{Sin}(3x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

(r)« Rappels : cos(x)=a et sin(x)=a »

Cos(x)=a ⇔ cos(x)=cos(α)

$\text{Cos}(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$

$\text{Cos}(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin(x)$

$\text{Sin}(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$

$\text{Sin}(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(x)$

$\text{Sin}(3x)=\cos(\frac{\pi}{2}-3x)$(/r)

$\text{Sin}(3x)=\cos(\frac{\pi}{4}-x) \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2}-3x)=\cos(\frac{\pi}{4}-x)$

$\Leftrightarrow$(r)$\frac{\pi}{2}-3x=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2}-3x=-(\frac{\pi}{4}-x)+2k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+2k\pi=3x-x$ ou $\frac{\pi}{2}-3x=-\frac{\pi}{4}+x+2k\pi$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi = 3x+x=4x$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}/2+\frac{2k\pi}{2}=\frac{\pi}{8}+k\pi$

$4x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

$x=\frac{3\pi}{4}/4+\frac{2k\pi}{4}=\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$

donc $S=\{\frac{\pi}{8}+k\pi ;\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\}$

$x=\frac{\pi}{8}+k\pi$

$x\in[0 ;2\pi] \Leftrightarrow 0\leq\frac{\pi}{8}+k\pi\leq 2\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{8}\leq k\pi\leq 2\pi-\frac{\pi}{8}=\frac{15\pi}{8}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{8}/\pi\leq k\leq\frac{15\pi}{8}/\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{8}*\frac{1}{\pi}\leq k\leq\frac{15\pi}{8}*\frac{1}{\pi}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}\leq k\leq\frac{15}{8}$

$-\frac{1}{8}=-0,125$ et $\frac{15}{8}\approx 1,875$

k=0, k=1

$x=\frac{\pi}{8}$ et $x=\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9\pi}{8}$

donc $S_1=\{\frac{\pi}{8} ;\frac{9\pi}{8}\}$

$x\in[0 ;2\pi] \Leftrightarrow 0\leq\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\leq 2\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{16}*2\leq\frac{k\pi}{2}\leq 2\pi-\frac{3\pi}{16}=\frac{32\pi-3\pi}{16}=\frac{29\pi}{16}$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{16}*2 \leq k\pi \leq \frac{29\pi}{16}*2$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} \leq k\pi \leq \frac{29\pi}{8}$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} \leq k \leq \frac{29\pi}{8}$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq k \leq \frac{29}{8}$

$k \in \{0 ;1 ;2 ;3\}$

$k=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{16}$ $k=1 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{16}$

$k=2 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{16}+\frac{2\pi}{2} = \frac{19\pi}{16}$

$k=3 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}=\frac{27\pi}{16}$

Donc $S_2=\{\frac{3\pi}{16} ;\frac{11\pi}{16} ;\frac{13\pi}{16} ;\frac{27\pi}{16}\}$

Par conséquent $S=\{\frac{\pi}{3} ;\frac{9\pi}{8} ;\frac{3\pi}{16} ;\frac{11\pi}{16} ;\frac{19\pi}{16} ;\frac{27\pi}{16}\}$

Ex 40 p 210 :

a) Sin $(\alpha)=\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

donc $\alpha=\frac{\pi}{6}$ ou $\alpha=\pi-\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

donc $\mathbb{R}$ $S=\left\{\begin{matrix}\frac{\pi}{6}+k*2\pi \\ \frac{5\pi}{6}+k*2\pi\end{matrix}\right\} k\in(|Z)$

b)

TD4

d) $\mathrm{Cos}(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$

<u>Rappels de cours :</u>

$\cos(x)=\sin(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \cos(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}+2k\pi$ ou $x=-(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})+2k\pi$, avec k∈(|z)

$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi-2\pi}{10}+2k\pi$ ou $x=+\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{10}+2k\,\pi$ ou $x=-\frac{3\pi}{10}+2k\pi$

$I=[0\ ;2\pi]$

$0\leq\frac{3\pi}{10}+2k\pi\leq2\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{10}\leq2k\pi\leq2\pi-\frac{3\pi}{10}$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{10}\leq2k\pi\leq\frac{17\pi}{10}$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{10}/2\pi\leq k\leq\frac{17\pi}{10}/2\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{10}*\frac{1}{2\pi}\leq k\leq\frac{17\pi}{10}*\frac{1}{2\pi}$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{20}\leq k\leq\frac{17}{20}$

$-\frac{3}{20}\approx-0,15$

$\frac{17}{10}\approx0,85$

$k=0\ ;\ x=\frac{3\pi}{10}$

Rappel de cours :

$\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{2}-x)=\mathrm{Sin}(x)$

$\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}-x)=\mathrm{Cos}(x)$

$\mathrm{Cos}(3x)=\mathrm{Sin}(x) \Leftrightarrow \mathrm{Cos}(3x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$ ou $3x=-(\frac{\pi}{2}-x)+2k\pi$.

Donc $S=\{\frac{3\pi}{10};\frac{17\pi}{10}\}$

Rappel :

$\text{Cos}(x)=a \Leftrightarrow \text{Cos}(x)=\text{Cos}(\alpha)$

$\Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi$ ou $x=-\alpha+2k\pi$

Avec $|a|<1$

$\text{Cos}(3x)=\text{Sin}(x) \Leftrightarrow \text{Cos}(3x)=\text{Cos}(\frac{\pi}{2}-x)$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$ ou $3x=-(\frac{\pi}{2-x}-x)+2k\pi$

$\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $3x=-\frac{\pi}{2}+x+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}*\frac{1}{4}+2k\pi*\frac{1}{4}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi/2$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{Q\pi}{2}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}*\frac{1}{2}+2k\pi*\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Rappel de Cours :

Sin3x=cos2x

$\Leftrightarrow \text{Sin}3x=\text{Sin}(\frac{\pi}{2}-2x)$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{2}-2x+2k\pi$ ou $3x=\pi-(\frac{\pi}{2}-2x)+2k\pi$

$\Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $3x=\frac{1v}{2}+2x+2k\pi$

$x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ $\qquad$ $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

(r)$\sin(x)=a \Leftrightarrow \sin(x)=\sin(\alpha)$

Avec $|a|<1 \Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi$ ou $x=\pi-\alpha+2k\pi$(/r)

$\text{Sin}(2x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$

Rappel :

$\text{Cos}(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$

$\text{Sin}(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$

$\text{Cos}(x)=\cos(\alpha) \Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi \text{ ou } -\alpha+2k\pi$

$\text{Sin}(2x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-2x=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2}-2x=-(x-\frac{\pi}{3})+2k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+2k\pi=2x+x \text{ ou } \frac{\pi}{2}-2x=-x+\frac{\pi}{3}+2k\,\pi$

$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}+2k\pi=3x \text{ ou } \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi=2x-x$

$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{6}+2k\pi=3x \text{ ou } \frac{3\pi}{6}-\frac{2\pi}{6}+2k\pi=x$

$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}/3+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}*\frac{1}{3}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$I=[0\,;\,2\,\pi[$

$K=0 : x=\frac{5\pi}{18}<2\pi$

$x=\frac{\pi}{6}<2\pi.$

Correction de l'ex 40 p 210 :

a)

Sin (α)=$\frac{1}{2}$ ⇔ sin(α)=sin$\left(\frac{\pi}{6}\right)$

⇔ a=$\frac{\pi}{6}$+2kπ ou a=π-$\frac{\pi}{6}$+2kπ=$\frac{5\pi}{6}$+2kπ, k∈(|z)

Il s'agi des points associées aux réels $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$

Donc l'ensemble des solutions est S=$\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi, \frac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}$

b) Sin (α)=-$\sqrt{\frac{5}{2}}$

⇔sin(α)=sin$\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

⇔a=-$\frac{\pi}{3}$+2kπ ou a=π-$\left(-\frac{\pi}{3}\right)$+2kπ

a= π+$\frac{\pi}{3}$+2kπ = $\frac{4\pi}{3}$+2kπ = - $\frac{2\pi}{3}$+2kπ.

Il s'agit des points associés -$\frac{2\pi}{3}$ et -$\frac{\pi}{3}$.

Donc l'ensemble des solutions est S=$\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$

c) Cos (α)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

⇔cos(α)=cos$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ou cos(α)=cos$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

⇔a=$\frac{\pi}{4}$+2kπ ou α= -$\frac{\pi}{4}$+2kπ

Il s'agit des points associés $\frac{\pi}{4}$ et -$\frac{\pi}{4}$.

Donc l'ensemble des solutions S=$\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi, -\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\}$

d) cos (α)=1⇔cos(α) ou cos(α)=cos(2π)

$\Leftrightarrow\alpha=2k\pi$ ou $2\pi+2k\pi$

Il s'agit des points associés des points $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Ex 41 :

Dans $[0\ ;2\pi[$

$\text{Sin}(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow\sin(\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $2=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

Pour K=0

$\alpha=\frac{\pi}{4}$; $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

Pour k=1

$\alpha=\frac{\pi}{'}+2\pi$

$\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}>2\pi$

Donc $S=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$

Pour K=-1

$\alpha=\frac{\pi}{4}-2\pi$

$\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{8\pi}{'}$

$\alpha=-\frac{7\pi4}{}<2\pi$

2)

$\text{Sin}(\alpha)=-1$

$\Leftrightarrow\sin(\alpha)=\sin(\pi)$

$\Leftrightarrow\alpha=\pi+2k\pi$ ou $\alpha=\pi-\pi+2k\pi=2k\pi$

Pour K=0

$\alpha=\pi$ et $\alpha=0$

Pour K=1

$\alpha=\pi+2k\pi=3\pi>2\pi$

$\alpha=2\pi$

Donc $S=\{0, \pi\}$

$\cos(\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos(\alpha)=\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow$ $\alpha=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $\alpha=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

Pour K=0

$\alpha=-\frac{\pi}{4}$ et $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$

Pour K=1

$\alpha=-\frac{\pi}{4}+2\pi \quad \alpha=-\frac{3\pi}{4}+2\pi$

$\alpha=-\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{4} \quad \alpha=-\frac{3\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}$

$\alpha=\frac{7\pi}{4} \qquad \alpha=\frac{5\pi}{4}$

Pour K=-1

$\alpha=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\alpha=-\frac{\pi}{4}-\frac{8\pi}{4}$

$\alpha=-\frac{9\pi}{4}<0$

$\frac{7\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=2\pi-\frac{\pi}{4}$

$\text{Cos}\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{5\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$

$\text{Cos}\,\frac{5\pi}{4} = \cos(\pi+\frac{\pi}{4})=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S=\left\{\cancel{-\frac{3\pi}{4}}, \frac{5\pi}{4}, \cancel{-\frac{\pi}{4}}, \cancel{\frac{7\pi}{4}}\right\}$

$S=\left\{\frac{5\pi}{4}\right\}$

(r)<u>E) Périodicité :</u>

<u>Définition :</u> (/r) une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est (r)T-périodique (T>0) si $\forall x\in\mathbb{R}$, f(x+T)=f(x) où T est le plus petit réel positif non nul vérifiant l'égalité.(/r)

(v)<u>Remarques :</u>

- Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ peut être périodique comme la fonction sin(), cos() et plusieurs autres.
- Il existe également des fonctions périodiques sur la réunion d'intervalles de la forme]a+kT, a+(k+1)T[où k∈(|z). exemple : (/v) $a=-\frac{\pi}{2}$ et T=π

$I=]-\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi[$

- (v)Si $\forall x\in\mathbb{R}$, f(x+T)=f(x) alors $\forall x\in\mathbb{R}$, ∀k∈(|z), f(x+kT)=f(x).
- Comme sin() est périodique, de période 2 π. On a : sin(x)=sn(x+2 π)=sin(x+4 π)=sin(x-2π)=…
- Exemple : g(x)=tan(x). Montrons que la fonction tangente est π-périodique. (/v) g(x)=tan(x)
  $g(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
  « g(x+ π)=g(x) » ?
  $g(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$
  $g(x+\pi)=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
  (carré)(g(x+ π)=g(x))

Propriété : Les réels $a \neq 0$ et b étant fixés, les fonctions $S_{a,b}$ et $C_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\left.\begin{array}{l} S_{a,b}(x)=\sin(ax+b) \\ C_{a,b}(x)=\cos(ax+b) \end{array}\right\}$ sont périodiques et leur période $T=\frac{2\pi}{a}$.

Démonstration 1 :

$T=\frac{2\pi}{a}$

$S_{a,b}\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)=\sin\left(a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)+b\right) = \sin\left(a*x+a*\frac{2\pi}{a}+b\right) = \sin(ax+2\pi+b) = \sin(ax+b+2\pi)=\sin(ax+b)$

Donc $S_{a,b}(x)$ est bien $\frac{2\pi}{a}$ périodique. $C_{a,b}\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)=\cos\left(a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)+b\right) = \cos\left(a*x+a*\frac{2\pi}{a}+b\right) = \cos(ax+2\pi+b) = \cos(ax+b+2\pi) = \cos(ax+b)$

Exercice :

$f(x)=\sin\left(10x+\frac{\pi}{3}\right)$

$a=10 \quad T=\frac{2\pi}{10}$

$T=\frac{\pi}{5}$

Donc f est $\frac{\pi}{5}$ périodique.

Vérifions $f\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(10*\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(10x+10*\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(10x+2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(10x+\frac{\pi}{3}+2\pi\right) = \sin\left(10x+\frac{\pi}{3}\right) = f(x)$

Correction de l'exercice du TD4 :

$F_1(x)=\sin(3x+1)$ a=3

$T_1=\frac{2\pi}{3}$

$F_2(x)=\cos(5x-3)$ a=5

$T_2=\frac{2\pi}{5}$

$F(x)=F_1(x)+F_2(x)$

Cherchons le premier multiple commun de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{5}$.

$M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$:$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$, …

$M\left(\frac{2\pi}{5}\right)$:$\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{10\pi}{5}$, etc…

$\frac{6\pi}{3}=\frac{10\pi}{5}=2\pi$

La période F est 2π.

$F(x+2\pi)=F(x)$

$G(X)=\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)$

$G_1(x)= \cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)$

$T_1=\frac{2\pi}{4}$

$T_1=\frac{\pi}{2}$

$G_2(x)=\cos\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)$

$T_2=\frac{2\pi}{6}$

$T_2=\frac{\pi}{3}$

Multiples de $\frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}= \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{2}=2\pi, \frac{5\pi}{2}$, etc…

Multiples de $\frac{\pi}{3}$: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}=\pi$

Donc G est π-périodique.

(r)4) Produit scalaire

a) Produit scalaire de deux vecteurs

Définition 1 : (/r)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, (r)on a :

$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|*\|\vec{v}\|*\cos(\vec{u};\vec{v})}$ (/r)

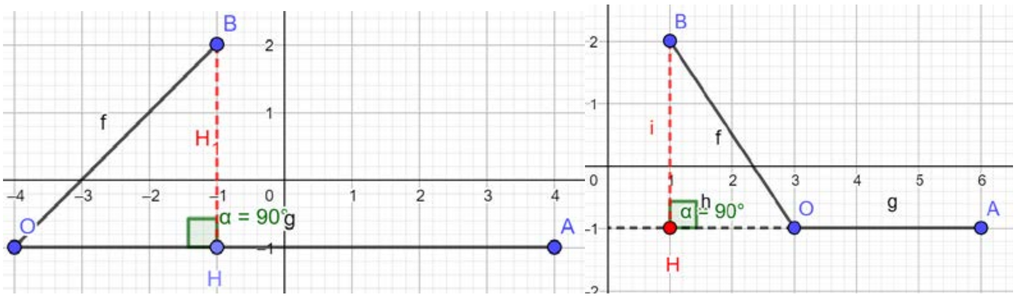
Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ (r)est un nombre réel. (/r) $||\vec{u}||$: La longueur du déplacement de $\vec{u}$.

$||\vec{AB}||$=AB

(r)b) Définition 2 : Projection orthogonale (/r)

Soient O, A et B trois points non alignés du plan. Le projeté orthogonal de b sur la droite (OA) est le point d'intersection de (OA) et la perpendiculaire à (OA) passant par B.

Illustration géométrique :



(r)Définition 3 : (/r) (Produit scalaire) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et O un point. On note A et B les points tels que $\vec{OA}=\vec{u}$ et $\vec{OB}=\vec{v}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le réel, tel que :

- (r)Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}$=0
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}=\vec{0}$ alors, en notant H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA), on a donc deux cas :
    - (/r) si $\vec{OA}$ et $\vec{OH}$ sont colinéaire et de même sens alors (r)$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=OA*OH}$(/r)
    - Si $\vec{OA}$ et $\vec{OH}$ sont colinéaires et de sens contraires alors (r)$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=-OA*OH}$ (/r)

Démonstration :

$\vec{u}.\vec{v}=\vec{OA}.\vec{OB}$

$\vec{u}.\vec{v}=\vec{OA}.(\vec{OH}+\vec{HB})$

$\vec{u}.\vec{v}=\vec{OA}.\vec{OH}+\vec{OA}.\vec{HB}$

}}}}}}

0

$\vec{u}.\vec{v}=\vec{OA}.\vec{OH}$

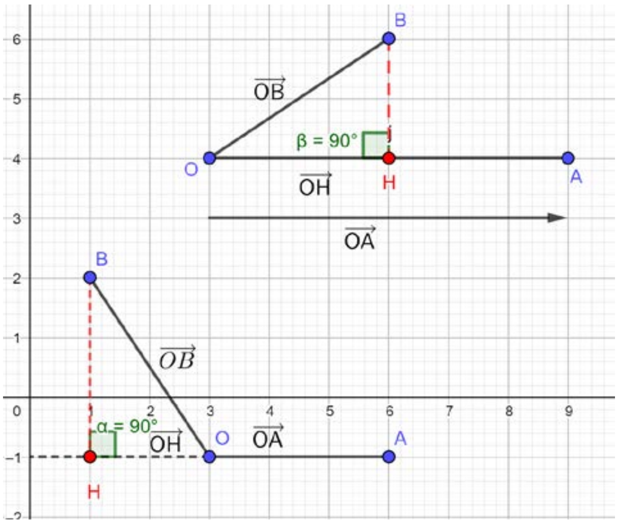
$\vec{u}.\vec{v}=||\vec{OA}||*||\vec{OH}||*\cos(\vec{OA};\vec{OH})$

$\vec{u}.\vec{v}$=OA*OH*cos(0)

$\vec{u}.\vec{v}$=OA*OH*1=OA*OH

(or $\vec{HB}\perp\vec{OA}$;donc$\vec{OA}.\vec{HB}$=0)

($\vec{OA}$;$\vec{OH}$)=O



(r)Propriété : (/r) Si deux vecteurs $\vec{V_1}$et $\vec{V_2}$ se projettent orthogonalemnt de la même façon sur la direction d'un vecteur $\vec{u}$, alors (r)$\boxed{\vec{u}.\vec{V_1}=\vec{u}.\vec{V_2}}$ (/r)

(r)4) cas particulier(/r)

$\vec{u}=\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{u}$

$\vec{u}.\vec{v}$=||$\vec{u}$||*||$\vec{u}$||*cos($\vec{u}$;$\vec{u}$)

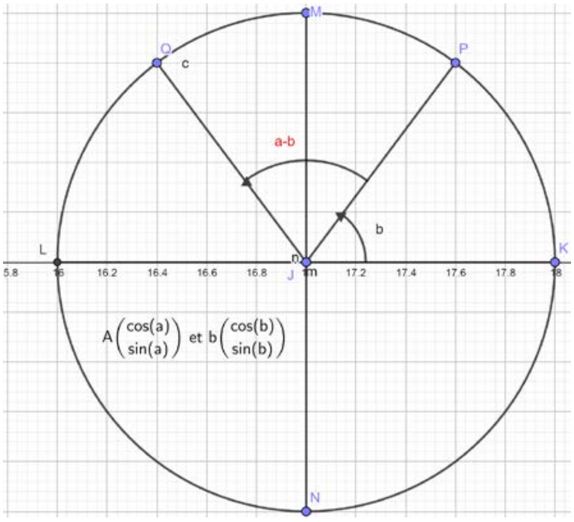
$\vec{u}.\vec{v}$=||$\vec{u}$||²*cos(0)

$\vec{u}.\vec{v}$=||$\vec{u}$||*1

$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=||\vec{u}||^2}$

Par convention $\vec{u}^2=||\vec{u}||^2$

c) application du produit scalaire en trigonométrie



$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=||\overrightarrow{OA}||*||\overrightarrow{OB}||*\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA*OB*\cos(a-b)$

(r)Dans un repère orthonormé (O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$) : (/r) $\overrightarrow{u}$(x;y) et $\overrightarrow{v}$(x';y')

$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=x*x'+y*y'}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=1*1*\cos(a-b)$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\cos(a-b)$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\cos(a)*\cos(b)+\sin(a)*\sin(b)$

Donc $\boxed{\cos(a-b)=\cos(a)*\cos(b)+\sin(a)*\sin(b)}$.

Exercice 1 :

1) Calculer la valeur exacte de Cos(-97π/4) puis sin(27π/3)

2) Soit A=[cos(35π/4)-cin(-29π/6)]/sin(17π/3)

a) cos(-α)=cos(α)

b) cherchons la mesure principale de α∈]-π;π]

c) Calculons cos(π+α) ou cos(π-α)

cos(-97π/4 = 100π-3π/4 = 100π/4 – 3π/4 = 25π – 3π/4 = 24π+π- 3π/4 = 24π+π/4 = 12*2π+π/4

mes(97π/4)=π/4

cos(97π/4)=cos(2*12π+π/4)=cos(π/4)=(rac)(2)/2

27π/3=24π+3π/3=24π/3+3π/3= 8π+π

mes(27π/3)=π

sin(27π/3)=sin(π)

sin(α+2kπ)=sin(α)

sin(2*4π+π)=sin(π)

2)

A=[cos(35π/4)-sin(-29π/6)]/sin(17π/3)

Cos(35π/4)

35π/4=36-π/4= 36π/4-π/4= 9π-π/4=8π/4=cos(2π)

Correction :

Cos(35π/4)=32π+3π/4 = 8π + 3π/4=2*4π+3π/4= cos(3π/4)=-(rac)(2)/2

Sin(-29π/6)=-sin(29π/6)=29π/6=30π-π/6=30π/6 – π/6 = 5π-π/6 = cos(4π/6)=

Correction :

Sin(-29π/6)=-sin(29π/6)=30π/6 – π/6 = 5π- π/6 = 4π+π-π/6=4π+5π/6 = -sin(5π/6)=-1/2

17π/3=18π/3 – π/3 = 6π-π/3 donc mes(17π/3)=-π/3 sin(17π/3)=sin (-π/3) =-sin(π/3)=-(rac)(3)/2

A=[-(rac)(2)/2 – (-1/2)]/-(rac)(3)/2

A=-(rac)(2)/2 + 1/2/-(rac)(3)/2 = (-(rac)(2)/2 + ½)*(-2/(rac)(3)) = (rac)(2)-1/(rac)(3) = ((rac)(2)-1)/(rac)(3)*(rac)(3)/(rac)(3) = (rac)(6)-(rac)(3)/3

Exercice 2 :

Simplifier l'expression suivante :

F=cos(x+$\frac{3\pi}{2}$)+sin(x+π)-sin(x-$\frac{\pi}{2}$)

F=cos(x-π/2)-sin(x)-sin(-($\frac{\pi}{2}$-x))

F=cos(-($\frac{\pi}{2}$-x))-sin(x)-sin(-($\frac{\pi}{2}$-x))

F=cos(-α)-sin(a)-sin(-α)

F=cos(α)-sin(x)-(-sin(α))

F=cos($\frac{\pi}{2}$-x)-sin(x)+sin($\frac{\pi}{2}$-x)

F=sin(x)-sin(x)+cos(x)=cos(x)

Sin(π/2 -x)=cox(x)

Cos($\frac{\pi}{2}$-x)=sin(x)

(r)Propriété : (Analitiquement)(/r)

Si, dans un repère orthonormé (O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$) les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on pour composantes $\overrightarrow{u}$ (x;y) $\overrightarrow{v}$(x';y') alors :

(r)(square)($\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$=xx'+yy')(/r)

Démonstration :

Dans la base ($\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$)

$\overrightarrow{u}$=x$\overrightarrow{i}$+y$\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{v}$=x'$\overrightarrow{i}$+y'$\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$=(x$\overrightarrow{i}$+y$\overrightarrow{j}$).(x'$\overrightarrow{i}$+y'$\overrightarrow{j}$)

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$=x$\overrightarrow{i}$.x'$\overrightarrow{i}$+x$\overrightarrow{i}$.y'$\overrightarrow{j}$+y$\overrightarrow{j}$.x'$\overrightarrow{i}$+y$\overrightarrow{j}$.y'$\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$=x*x'$\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i}$+y'y$\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j}$(b)+xy'$\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}$+yx'$\overrightarrow{j}.\overrightarrow{i}$

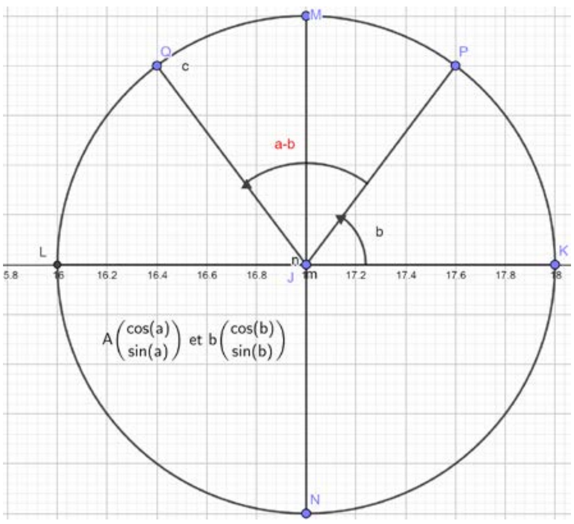
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$=xx'$\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i}$+y'y$\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$=xx'+yy'(/b)

$\overrightarrow{i}\perp\overrightarrow{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}$=0
$\|\overrightarrow{i}\|$=$\|\overrightarrow{j}\|$=1
$\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i}$=$\|\overrightarrow{i}\|^2$=1
$\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j}$=$\|\overrightarrow{j}\|^2$=1

(r)c) Formules d'addition(/r)

Propriété :



Soient (O ; $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$) un repère orthonormé, C le cercle trigonométrique associé a et b deux réels. A(Cos(a);Sin(a)), B(Cos(b);Sin(b)).

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=||\overrightarrow{OA}||*||\overrightarrow{OB}||*\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$=OA*OB*cos(a-b)

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$=1*1*cos(a-b)

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$=cos(a-b) (1)

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$=(Cos(a);Sin(a)).(Cos(b);Sin(b))(2)

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$=Cos(a)*Cos(b)+Sin(a)*Sin(b)

Donc (square)(Cos(a-b)=Cos(a)*Cos(b)+Sin(a)*Sin(b)) (1)

(r)Posons b'=-b(/r) ➔ (b)b=-b(/b)

Cos(a-b)=cos(a+(b)b')(/b)

Cos(a+b')=Cos(a)*Cos(-b')+Sin(a)*Sin(-b')

(square)((b)Cos(a+b')=cos(a)*cos(b')-sin(a)*sin(b')(/b))

(r)2) Quels que soient les réels a et b, on a :

(square)(Cos(a+b)=cos(a)*cos(b)-sin(a)*sin(b))

3) (square)(sin(a+b)=sin(a)*cos(b)+sin(b)*cos(a))

4) (square)(sin(a-b)=sin(a)*cos(b)-sin(a)*cos(b))

a=π et b=x

Cos(a-b)=cos(π-x)=cos(π)*cos(x)+sin(π)*sin(a) (r)=-cos(x)(/r)

Cos(π+x)=cos(π)*cos(x)-sin(π)*sin(x) = -cos(x)

Cos(π/2 -x)=cos(π/2)*cos(x)+sin(π/2)*sin(x) = (r)sin(x)(/r)

Exercice 1 :

1) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}=1*0+0*(-10)=0$

Donc $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{u'}$

2) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}=\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}*\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{2}+\sqrt{5}*\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}}{2*2}-\frac{\sqrt{5}}{4}$

$$= \frac{\sqrt{(3)^2-(\sqrt{2})^2}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} \neq 0$

3) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \cos(x) \\ 1-\sin(x) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 1+\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}=\cos(x)*(1+\sin(x))+(1-\sin(x))*\cos(x)$

$= \cos(x)+\text{sn}(s)\cos(x)+\cos(x)-\sin(x)\cos(x)$

$= 2\cos(x)$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, k∈(|z)

Exercices 2 :

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1-k \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 2k \\ k-1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{u'} \Leftrightarrow -3*2k+(1-k)(k-1)=0$

$\Leftrightarrow -6k+k-1-k^2+k=0$

$\Leftrightarrow -k^2-4k-1=0$

$\Leftrightarrow k^2+4k+1=0$

$\Delta=4^2-4(1*1)$

$\Delta=12\geq 0$

$k'=\frac{-4-\sqrt{12}}{2*1}=\frac{-4}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}$

$k''=\frac{-4+\sqrt{12}}{2*1}=\frac{-4}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}$

Exercice 3 :

1) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=-1*3+2*2=1$

2) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||*||\overrightarrow{v}||*\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=2*1*\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2*\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

3) $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|*\|\vec{v}\|*\cos(\vec{u},\vec{v})=1*1*\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1*0=0$

4) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)=\frac{1}{2}(1^2-1^2-2^2)=-2$

5) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ donc $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(1^2+1^2-2^2)=-1.$

Exercice 5 :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH'}=AB*\frac{AB}{2}=\frac{AB^2}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\frac{4^2}{2}=\frac{16}{2}=8$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH'}=BA*\frac{BA}{2}=\frac{BA^2}{2}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}=\frac{4^2}{2}=8$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH'}=AB*\frac{AB}{2}=\frac{AB^2}{2}=\frac{4^2}{2}=8$

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CG}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG})=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BG}$

$= 0-BA*BG-AD*CB+0=-4*3-3*3=-12-9=-21$

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}=ED*EC*\text{Cos}\,(\widehat{DEC})=4*4*\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=16*\frac{1}{2}=8$

Exercice 6 :

$\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC}=OD*\frac{OD}{2}=\frac{OD^2}{2}=\frac{4^2}{2}=8$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}=-\frac{AO}{2}*AO=-\frac{AO^2}{2}=-\frac{4^2}{2}=-8$

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=-AB^2=-4^2=-16$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BO}=-BA*BO*\cos(\widehat{OBA}) = -4*4*\text{Cos}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-16*\frac{1}{2}=-8$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OE}=2*OD*OE*\cos(\widehat{DOE}) =2*4*4*\text{Cos}\left(\frac{\pi}{3}\right)=32*\frac{1}{2}=16$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FD}=0$ car ADF est un triangle rectangle en F.

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{OC}=0$ car $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{OC}$

(r)Rappels : Formule de duplication(/r)

Quels que soient les réels a et b :

1) Cos(a+b)=Cos(a)*Cos(b)-sin(a)*sin(b)

2) Cos(a-b)=Cos(a)*Cos(b)+sin(a)*sin(b).

3) sin(a-b)=sin(a)*cos(b)-sin(b)*cos(a)

4) sin(a+b)=sin(a)*cos(b)+sin(b)*cos(a)

(r)Propriété : Formule de duplication :(/r)

Si a∈ℝ, alors on a :

(r)Cos(2x)=cos(x+x)

=Cos(x)*Cos(x)-sin(x)*sin(x)

=Cos²(x)-sin²(x)

Cos(2x)=Cos²(x)-sin²(x)

Cos(2x)=1-sin²(x)-sin²(x)

$\boxed{\text{Cos(2x)=1-2sin²(x)}}$ (/r)

∀x∈ℝ, cos²(x)+sin²(x)=1

$\boxed{\text{Sin²(x)=1-cos²(x)}}$

(r)cos(2x)=cos²(x)-sin²(x)

Cos(2x)=cos²(x)-(1-cos²(x))

Cos(2x)=cos²(x)-1+Cos²(x)

$\boxed{\text{Cos(2x)=2cos²-1}}$ (/r)

« $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$ »

$\text{Cos}(4x)$(r)$\text{Cos}^2(2x)-\sin(2x)$

$\text{Cos}(4x)=2\cos^2(2x)-1$

$\text{Cos}(4x)=1-2\sin^2(2x)$ (/r)

$\text{Sin}(a+b)=\sin(a)*\cos(b)+\sin(b)*\cos(a)$

(r)$\sin(2x)=\sin(x+x)$

$\text{Sin}(2x)=\sin(x)*\cos(x)+\sin(x)*\cos(x)$

$\boxed{\text{Sin}(2x)=2\sin(x)\cos(x)}$ (4) (/r)

DM3 : $\text{Cos}(3x)=4(\cos(x))^3-3\cos(x)$

(r)$\cos(3x) =\cos(2x+x)$

$=\text{Cos}(2x)*\cos(x)-\sin(2x)*\sin(x)$

$=\text{Cos}(2x)*\cos(x)-2\sin(x)*\cos(x)*\sin(x)$

$=(\cos^2(x)-\sin^2(x))*\text{Cos}(x)-2\sin^2(x)*\cos(x)$

$=(\cos^2(x)-(1-\cos^2(x)))*\cos(x)-2(1-\cos^2(x))*\cos(x)$

$=(2\cos^2(x)-1)*\cos(x)-2(\cos(x)-\cos^3(x))$

$=2\cos^3(x)-\cos(x)-2\cos(x)+2\cos^3(x)$

$=4\cos^3(x)-3\cos(x)$.(/r)

(r)Propriété : Formule de linéarisation :(/r)

Si $a\in\mathbb{R}$, alors on a :

(r) $\boxed{\text{Cos}^2(a)=\frac{\text{Cos}(2a)+1}{2}}$ (/r)

Remarque : $\text{Cos}(2x)=2\cos^2(x)-1$

$\Leftrightarrow \text{Cos}(2x)+1=2\cos^2(x)$

$\Leftrightarrow \text{Cos}^2(x)=\frac{\text{Cos}(2x)+1}{2}$

$\text{Cos}(2x)=1-2\sin^2(x)$

$\Leftrightarrow 2\sin^2(x)=1-\cos(2x)$

$\Leftrightarrow \sin^2(x)=\frac{1-\text{Cos}(2x)}{2}$

Si $a\in\mathbb{R}$, on a :

(r) $\boxed{\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}}$

Exercice d'application(/r)

$\text{Cos}\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$\text{Cos}^2(a)=\frac{\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)+1}{2}=\frac{\cos\frac{2\pi}{16}+1}{2}=\frac{\cos\frac{2\pi}{16}+1}{2}$

Correction :

$\text{Cos}(2*\frac{\pi}{8})=2\cos^2(\frac{\pi}{8})-1$

$\text{Cos}(\frac{\pi}{4})+1=2\cos^2(\frac{\pi}{8})$

$\text{Cos}^2(\frac{\pi}{8})=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}$

$\text{Cos}^2(\frac{\pi}{8})=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$

$\text{Cos}(\frac{\pi}{8})=\sqrt{\frac{(rac)(2)+2}{4}}$ ou $\cos(\frac{\pi}{8})=-\sqrt{\frac{(rac)(2)+2}{4}}$

$\text{Cos}(\frac{\pi}{8})=\frac{(rac)((rac)(2)+2)}{(rac)(4)}$ ou $\cos(\frac{\pi}{8})=-\frac{(rac)((rac)(2)+2)}{(rac)(4)}$

$\text{Cos}(\frac{\pi}{8})=\frac{(rac)((rac)(2)+2)}{2}$ ou $\cos(\frac{\pi}{8})=-\frac{(rac)((rac)(2)+2)}{2}$

Ro $\frac{\pi}{8}\in[0\ ;\frac{\pi}{2}]$

Donc $\boxed{\text{Cos}(\frac{\pi}{8})=\frac{(rac)((rac)(2)+2)}{2}}$

$x^2=a\Leftrightarrow x=a$ ou $x=-a$.

(r)Propriété : Propriété Algébrique(/r)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et $k \in \mathbb{R}$, on a :

(r)1) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$ (commutativité)

2) $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}\,.\,\vec{v})$

3) $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,\vec{w}$ (DISTRIBUTIVITE)

Remarques :(/r)

A l'aide de ces propriétés, nous allons pourvoir effectuer des calculs vectoriels.

Par exemple : $(\vec{u}-\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}\,.\,\vec{w} - \vec{v}\,.\,\vec{w}$ (r)3)(/r)

$\vec{u}.(2\vec{u}+3\vec{v}) = \vec{u}.2\vec{u} + \vec{u}.3\vec{v}$ (r)2)(/r)

$\vec{u}(2\vec{u}+3\vec{v}) = 2(\vec{u}\,.\,\vec{u}) + 3(\vec{u}\,.\,\vec{v})$ (r)Cas particuliers(/r)

$\vec{u}(2\vec{u}+3\vec{v}) = 2\|\vec{u}\|^2 + 3(\vec{u}\,.\,\vec{v})$ (r)Cas particulier(/r)

On a aussi les identités remarquables équivalentes :

$$\begin{cases} (\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} \\ (\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v} \\ \\ (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \end{cases}$$

$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v}$

$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v}$

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}.(\vec{u}-\vec{v}) + \vec{v}.(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\,.\,\vec{u} - \underbrace{\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}\,.\,\vec{u}}_{0} - \vec{v}\,.\,\vec{v}$$

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

(r)Propriété :(/r) Les normes.

$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2$

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v}$

a)=b) $\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v}$

$\Leftrightarrow 2\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

⇔ $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2]$ 1)

Illustration géométrique

$(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ c)

$(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$ d)

C=d ⇔ $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$

⇔$2\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

⇔2) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2]$

f(e)=$12+3,1\sin(\frac{\pi}{3}(e-80))$

1) Tracer f à l'aide de la calculatrice. C sur l'intervalle [-π ; π]

2) Déterminer T

$S_{a,x}=sn(ax+b)$

$F(e)=12+3,1\sin(\frac{\pi}{3}*e-\frac{\pi}{3}*80)$

$a=\frac{\pi}{3}$ et $b=-\frac{80\pi}{3}$

$T=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{\pi}/3=2\pi*\frac{3}{\pi}=6.$

Exercice 1 de la feuille :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}$

Rappel : soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\vec{v}=x*x'+y*y'=1*0+0*(-10)=0$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ($\vec{u}\perp\vec{v}$)

2) $\vec{u}\ \frac{3-2}{2};\sqrt{5}$ et $\vec{v}\ \frac{3+2}{2};-\frac{1}{4}$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}\right)*\left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{2}\right)+\sqrt{5}*\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{3^2-\sqrt{2}^2}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{9-2}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{4}$$

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\cos(x)\\1-\sin(x)\end{pmatrix}\ \vec{u'}\begin{pmatrix}1+\sin(x)\\\cos(x)\end{pmatrix}$$

$\vec{u}\,.\,\vec{u'}=\cos(x)*(1+\sin(x))+(1-\sin(x))*\cos(x)=\cos(x)+\cos(x)*\sin(x)+\cos(x)-\sin(x)*\cos(x)=2\cos(x)$

Exercice 2 :

$\vec{u}$ -3;1-K et $\vec{u'}$ 2K;K-1

$\vec{u}\perp\vec{u'}\Leftrightarrow\vec{u}\,.\,\vec{u'}=0$

$\Leftrightarrow -3*2K+(1-K)*(K-1)=0$

$\Leftrightarrow -6K+[K-1-K^2+K]=0$

$\Leftrightarrow -6K-K^2+2K-1=0$

$\Leftrightarrow -K^2-4K-1=0$

$\Leftrightarrow K^2+4K+1=0$

$\Delta=b^2-4(ac)=4^2-4(1*1)=16-4=12$

$$k_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{12}}{2}=\frac{-4-\sqrt{4*3}}{2}=\frac{-4-\sqrt{4}*\sqrt{3}}{2}=\frac{-4-2*\sqrt{3}}{2}=\frac{-4}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}$$

$$k_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-2+\sqrt{3}$$

Donc $\vec{u}_{k1}\begin{pmatrix}-3\\1-(-2-\sqrt{3})\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}_{k1}\begin{pmatrix}2*(-2-\sqrt{3})\\-2-\sqrt{3}-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}_{k1}\begin{pmatrix}-3\\1+2+\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{u'}_{k1}\begin{pmatrix}-4-2\sqrt{3}\\-3\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\vec{u}_{k1}\begin{pmatrix}-3\\3+\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\vec{u}_{k2}\begin{pmatrix}-3\\1-(-2*\sqrt{3})\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{u'}_{k2}\begin{pmatrix}2*(-2+\sqrt{3})\\-2+\sqrt{3}-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}_{k2}\begin{pmatrix} -3 \\ 1+2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\vec{u'}_{k2}\begin{pmatrix} -4+2\sqrt{3} \\ -3+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\vec{u}_{k2}\begin{pmatrix} -3 \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

2)

$||\vec{u}||=2;\ ||\vec{v}||=1$ et $(\vec{u}, \vec{v})=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\vec{u}.\vec{v}=||\vec{u}||*||\vec{v}||*\cos(\vec{u};\vec{v}) = 2*1*\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2*1*\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

3)

$||\vec{u}||=1;||\vec{v}||=1$ et $(\vec{v};\vec{v})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\vec{u}.\vec{v}=||\vec{u}||*||\vec{v}||*\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1*1*0=0$

Donc $\vec{u}\perp\vec{v}$.

4) $||\vec{u}||=1$; $||\vec{v}||=2$ e $||\vec{u}+\vec{v}||=1$

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2]$

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[1^2-1^2-2^2]$

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}*(-4)$

$\vec{u}.\vec{v}=-2$

5) $||\vec{u}||=1$; $||\vec{v}||=1$ et $||\vec{u}-\vec{v}||=2$

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2] = \frac{1}{2}[1+1-4] = -1$

(r) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2]$ (1)

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2]$ (2)

(1)+(2) ⇔ $2\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2]$

⇔ $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}[||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2]$ (3)

6) $||\vec{u}+\vec{v}||=5$ et $||\vec{u}-\vec{v}||=1$

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}[5^2-1^2]=\frac{1}{4}*24=6.$

Exercice 4 :

$||\vec{u}||=2$; $||\vec{v}||=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=3$

$(\vec{u}+\vec{v}).(-2\vec{u}+3\vec{v})=\vec{u}.(-2\vec{u}+3\vec{v})+\vec{v}.(-2\vec{u}+3\vec{v}) = \vec{u}.(-2\vec{u})+\vec{u}.(3\vec{v})+\vec{v}.(-2\vec{u})+\vec{v}.(3\vec{v}) = -2\vec{u}.\vec{u}+3\vec{u}.\vec{v}-2\vec{v}.\vec{u}+3\vec{v}.\vec{v} = -2\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+3\vec{v}^2 = -2*||\vec{u}||^2+3+3*||\vec{v}||^2 = -2*4+3+3*16 = 43.$

$||\vec{u}||=2$; $||\vec{v}||=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=3$

$\vec{u}(-2\vec{u}+3\vec{v})=-2\vec{u}.\vec{u}+3\vec{u}.\vec{v} = -2\vec{u}^2+9 = -2*4+9 = 1$

$||\vec{u}||=2$; $||\vec{v}||=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=3$

$(-2\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+3\vec{v})= -2\vec{u}.(\vec{u}+3\vec{v})+\vec{v}.(\vec{u}+3\vec{v}) = -2\vec{u}.\vec{u}+(-2\vec{u}).3\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.(3\vec{v}) = -2\vec{u}^2-6\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+3\vec{v}.\vec{v} = -2||\vec{u}||^2-18+3+3||v||^2 = -8-18+3+3*16 = 25$

$||\vec{u}||=2$; $||\vec{v}||=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=3$

$(\vec{u}+2\vec{v})^2=\vec{u}^2+2*\vec{u}.(2\vec{v})+(2\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2+4*\vec{u}.\vec{v}+4*||\vec{v}||^2 = 4+4*3+4*16 = 80$

$||\vec{u}||^2=2$; $||\vec{v}||=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=3$

$(3\vec{u}-2\vec{v})^2=(3\vec{u})^2-2*3\vec{u}.(2\vec{v})+(2\vec{v})^2=9\vec{u}^2-12\vec{u}.\vec{v}+4\vec{v}^2=9||\vec{u}||^2-12*3+4||\vec{v}||^2 = 36-36+64 = 64.$

Exercice 5 :

$\vec{AB}.\vec{AH}$

1ère dèm :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}.(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}) = \overrightarrow{AB}.(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$
$.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}*AB^2+0$ (car $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$) $= \frac{1}{2}*16=8$

2ème Dèm : (conf cour projection orthogonale du produit scalaire).

D est le projeté orthogonale de A sur la droite DC,

Donc on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}$

(r)Théorème : (médiane) (/r)

Soient A et B deux points du plan (P) ; I leurs milieu.

(r)$\forall_{M\in(P)}$, on a :

- $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}}$ (1)
- $\boxed{MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}}$ (2)
- $\boxed{MA^2+MB^2=2MI+\frac{AB^2}{2}}$ (3)(/r)

Démonstration 1 :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}.(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}$
$+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI}^2+\underbrace{\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{MI}}_{0}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

$=MI^2+0+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

I est le milieu de [AB]

$\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}=MI^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = MI^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 = MI^2-\frac{AB^2}{4}.$

Démonstration 2 :

$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2$

$MA^2=(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM})^2$

$MA^2=\overrightarrow{IA}^2-2*\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}^2$

$MA^2=IA^2-2\,\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}+IM^2$ (a)

$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$

$MB^2=(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM})^2=IB^2-2\,\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM}+IM^2$ (b)

(a)-(b) $\Leftrightarrow$ $MA^2-MB^2=$(r)$IA^2-2\,\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}+IM^2-(IB^2-2\,\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM}+IM^2=IA^2-IB^2-2\,\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}+2\,\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM}$ +O

Or $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$IB^2=\frac{1}{4}AB^2 \quad IA^2=\frac{1}{4}AB^2$

Donc $MA^2-MB^2=\underbrace{\frac{1}{4}AB^2-\frac{1}{4}AB^2}_{0}-2\,\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}+2\,\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM}$ (/r)

$=2\,\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM}-2\,\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM} = 2\,\overrightarrow{IM}.(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}) = 2\,\overrightarrow{IM}.(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}) = 2\,\overrightarrow{IM}.(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}) = 2\,\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

(r)Exercice d'application :(/r) Lignes de niveau

A et B sont deux points quelconques et $k\in\mathbb{R}$ (fixé). Quel est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$?

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k \Leftrightarrow \frac{AB^2}{4}=k$

$\Leftrightarrow MI^2=k+\frac{AB^2}{4}$

$\Leftrightarrow MI=\sqrt{k+\frac{AB^2}{4}}$

1er cas : $k+\frac{AB^2}{4}\geq 0 \Leftrightarrow k\geq -\frac{AB^2}{4}$

Donc $J=\left\{\forall M\in C\left(\begin{matrix} I \\ R=\sqrt{k+\frac{AB^2}{4}}\end{matrix}\right)\right\}$

2ème cas : $k=-\frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow k+\frac{AB^2}{4}=0$

Donc $MI=0 \Leftrightarrow M=I$

3ème cas : $k<-\frac{AB^2}{4}$ ➔ $k+\frac{AB^2}{4}<0$ **(impossible)**

Quel est l'ensemble des points M du plan, tel que : $MA^2+MB^2=k$?

$MA^2+MB^2=k^2 \Leftrightarrow 2MI^2+\frac{AB^2}{2}=k$

$\Leftrightarrow 2MI^2=k-\frac{AB^2}{2}=\frac{2k}{2}-\frac{AB^2}{2}$

$\Leftrightarrow MI^2=\frac{\frac{2k-AB^2}{2}}{2}$

$\Leftrightarrow MI^2=\frac{2k-AB^2}{2}*\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow MI^2=\frac{2k-AB^2}{4}$

1er Cas : $k-\frac{AB^2}{2}>0$

$\Leftrightarrow k>\frac{AB^2}{2}$

Donc $MI=\sqrt{\frac{2k-AB^2}{4}}$

Par conséquent l'ensemble recherché est un cercle de centre I et de rayon $\mathbb{R}=\sqrt{\frac{2k-AB^2}{4}}$

Exercice 47 p 261 :

Soient A et B, tels que AB=6.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-5$.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{Mb}=-5 \Leftrightarrow MI^2-\frac{AB^2}{4}=-5$

$\Leftrightarrow MI^2-\frac{36}{4}=-5$

$\Leftrightarrow MI^2-9=-5$

$\Leftrightarrow MI^2=4$

$\Leftrightarrow MI=2$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon 2.

2) Justifier qu'il n'existe pas de point M tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-10$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=x*x'+y*y'$

$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x \\ y' \end{pmatrix}$

(r)$1^{ère}$ méthode :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow MI^2-\frac{AB^2}{4}=0$

$\Leftrightarrow MI^2=\frac{AB^2}{4}$

$\Leftrightarrow MI=\frac{AB}{2}$

$\Leftrightarrow MIMI=\frac{\sqrt{(3-(-1))^2+(2-3)^2}}{2}$

$\Leftrightarrow MI=\frac{\sqrt{16+1}}{2}$

$\Leftrightarrow MI=\frac{\sqrt{17}}{2}$

<u>Correction de l'évale du 30 01 2020 :</u>

Questions de cour :

1)

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$

$MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$

Exercice 1 :

$MA^2-MB^2=12$

a)

$MA^2-MB^2=\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$

b)

$MA^2-MB^2=12 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=12 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=\frac{12}{2}=6$

c)

H soit le projeté de M sur (AB)

$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=6 \Leftrightarrow (\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HM}).\overrightarrow{AB}=6$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{AB}=6$

{{{{{{

0 car $\overrightarrow{HM}\perp\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}=6$

d)

$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=6 \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}=6$ or $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens.

$\Leftrightarrow IH*AB=6$

$\Leftrightarrow IH*2=6$

$\Leftrightarrow IH=3$

e)

$MA^2-MB^2=4 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=4$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=2$

H étant le projeté orthogonal de M sur (AB), on a :

$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}=2$

$\Leftrightarrow IH*AB'=2$

$\Leftrightarrow IH=\frac{2}{2}=1$

Exercice 2 :

$||\overrightarrow{u}||=5$, $||\overrightarrow{v}||=3$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=-2$

1) $\overrightarrow{u}^2=||\overrightarrow{u}||^2$

$=5^2$

$=25$

$(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v})$

$=\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v})-\overrightarrow{v}.(\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v})$

$=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}.4\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}.4\overrightarrow{v}$

$=25+4(-2)+2-4\overrightarrow{v}^2$

$=25-8+2-4*||\overrightarrow{v}||^2$

$=19-4*9$

$=19-36$

$=-17$

$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$

$||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|^2=25+2*(-2)+9$

$=30$

2)

$||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2=30 \Rightarrow ||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||=\sqrt{30}$

$||\overrightarrow{u}||+||\overrightarrow{v}||=5+3$

$=8$

Donc $||\overrightarrow{u}||+||\overrightarrow{v}||>||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2$

$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$

$=\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}.(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$

(r)Définition : Vecteurs normal(/r)

La droite (D) étant donnée, tout vecteurs non nul, orthogonal à un vecteur directeur de (d) est appelé (r) vecteur normal à (D), $\vec{n} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{AB}=0$(/r)

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, un couple de réels (a;b) et un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ étant donnés, la droite passant par A de vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne

(r)$\boxed{ax+by+c=0 \text{ où } C=-(ax_A+by_A)}$ (/r) Réciproquement, toute droite d'équation ax+by+c=0 admet $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

<u>Démonstration :</u> Commençons par la réciproque :

$(a;b)\neq(0;0)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ n'est pas nul et le vecteur $\vec{n} \perp \vec{u}$ donc la droite (D) qui passe par A et ayant $\vec{u}$ pour vecteur directeur, alors $\vec{n}$ est normal à (D).

L'implication :

➔ $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ $\vec{n} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{AB}=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}=0$

(r)$\Leftrightarrow a*(x_B-x_A)+b*(y_B-y_A)=0$

$\Leftrightarrow ax_B-ax_A+by_B-by_A=0$

(/r)$ax_B+by_B-ax_A-by_B=0$(r)

$\Leftrightarrow \boxed{ax+by+c=0}$ (/r)

Exercice 25 p 258 :

Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur normal $\vec{M}$.

a) $A\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(D) : ax+by+C=0

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix} \frac{5}{3}=a \\ \frac{1}{2}=b \end{pmatrix}$

$C=-\left(a*x_A+b*y_A\right)$

$C=-\left(\frac{5}{3}*3+\frac{1}{2}*(-2)\right)$

$C=-\left(5-1\right)=-4$

(D) : $\frac{5}{3}x+\frac{1}{2}y+C=0$

$\boxed{(D) : \frac{5}{3}x+\frac{1}{2}y-4=0}$

b) $A\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

(D) : ax+by+C=0

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix} 0=a \\ 7=b \end{pmatrix}$

$C=-\left(a*x_A+b*y_A\right)$

$C=-\left(0*3+7*(-2)\right)$

$C=-\left(-14\right)$

C=14

Donc (D)=7y+14=0

Exercice 3 :

I est le milieu de [AB]

$I\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$

$I\begin{pmatrix}\frac{2+4}{2}=3\\ \frac{1-1}{2}=0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-2\\ -1-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-3\\ y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}=0$

(r)$\Leftrightarrow$2(x-3)+y*(-2)=0

$\Leftrightarrow$2x-6-2y=0

$\Leftrightarrow$2x-2y-6=0

$\Leftrightarrow$x-y-3=0

Donc (Δ) : x-y-3=0 ou 2x-2y-6=0 (/r)

2)

$\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{Ac}(r)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow x-x_B;y-y_B).(x_C-x_A\ ;y_C-y_A)=0$

$\Leftrightarrow$(x-4 ;y+1).((0-2 ;-2-1)=0

$\Leftrightarrow$(x-4)*(-2)+(y+1)*(-3)=0

$\Leftrightarrow$-2x+8-3y+5=0

$\Leftrightarrow$2x+3y-5=0

Equation cartésienne d'un cercle :(/r)

Soient $\Omega\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, R>0

$\Omega M^2=R^2 \Leftrightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$

- R est le rayon du cercle
- Ω est le centre du cercle

Ex 42 p 260 :

Déterminer l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan.

a) $C_1 :(x+4)^2+(y-3)^2-29=0$
$C1 :(x-(-4))^2+(y-3)^2=29=\sqrt{29}^2$
$C1 :=\{ \forall_M \in (P)/C(\Omega\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},R=\sqrt{29} \}$

b) $C_2 :x^2+y^2=7$
$C2 :x^2+y^2=7 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=\sqrt{7}^2$
$C2=\{ \forall_M \in (P)/C(\Omega\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, R=\sqrt{7} \}$

c) $C_3 :(x-3)(x+2)+(y-3)(y+1)=0$
$C3 :x^2+2x-3x-6+y^2+-3y-3=0$
$\Leftrightarrow x^2-x-6+y^2-2y-3=0$
$(r)\Leftrightarrow x^2-x+y^2-2y-9=0$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2-1^2-9=0$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2-\frac{1}{4}-1-9=0$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2-\frac{1}{4}\frac{40}{4}=0$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{41}{4}=\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2(/r)$
$C3 : \{ \forall_M \in (P)/C(\Omega\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, R=\frac{\sqrt{41}}{2} \}$

d) $C_4 :x^2+y^2+5x-6y-9=0$
$C4 : x^2+5x+y^2-6y-9=0$
$\Leftrightarrow x^2+2*\frac{5}{2}*x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+y^2-2*3*y+3^2-3^2-9$
$\Leftrightarrow (x+\frac{5}{2})^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2-18=0$
$\Leftrightarrow (x+\frac{5}{2})^2+(y-3)^2-\frac{25}{4}-18=0$
$\Leftrightarrow (x-(-\frac{5}{2}))^2+(y-3)^2-\frac{97}{4}=0$
$\Leftrightarrow (x-(-\frac{5}{2}))^2+(y-3)^2=\frac{97}{4}=\left(\frac{\sqrt{97}}{2}\right)^2$

C4={ $\forall_M \in (P)/C(\Omega\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$, R=$\frac{\sqrt{97}}{2}$ }

e) C_5 :x²+y²+4x-2y+6=0
C5 :x²+4x+y²-2y+6=0
⇔x²+2*2*x+2²+y²-2*1*y+1²-1+6=0
⇔(x+2)²+(y-1)²+5=0
⇔(x+2)²+(y-1)²+1=0
⇔(x+2)²+(y-1)²=-1 or le rayon ne peut pas être négatif.

f) C_6 :(x-2)²+(y-1)²=0 comme le rayon est égal à 0 alors ce cercle est un point.

Ex 37 p 249 :

A(-2 ;4), B(2 ;3), C(1 ;1)

1)

On détermine l'équation de la hauteur h_A. $\overrightarrow{CB}(1;2)$ est un vecteur normal à h_A. Donc h_A a une équation de la forme x+2y+C=0 où C est un réel. On utilise les coordonnées du point A pour déterminer la valeur de c : -2+2*4+c=0 d'où c =-6

x+2y-6=0 est donc une équation de la hauteur h_A.

2) De même on détermine une équation de h_C à l'aide du vecteur normal $\overrightarrow{AB}(4;-1)$. L'équation de h_C est de la forme 4x-y+C'=0 où C'=-4*1+1=-3 car C∈h_C. 4x-y-3=0 est une équation de h_C.

Ex 41 p 260 :

a) C1 de centre A$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et R=$\sqrt{5}$

$\forall_M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C1 \Leftrightarrow AM=\sqrt{5}$
$\Leftrightarrow AM^2=\sqrt{5}^2=5$
$\Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=5$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-(-1))^2=5$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=5$

b) C2 est le cercle de diamètre [AB] où A$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\forall_M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in C2=IM=\frac{AB}{2}=R$

$\Leftrightarrow IM^2=R^2$

$\Leftrightarrow(x-x_1)^2+(y-y_I)^2=\left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}$

$I\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\\frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$

$I\begin{pmatrix}\frac{-2+3}{2}\\\frac{4+1}{2}\end{pmatrix}$

$I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(3+2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{25+(-3)^2}=\sqrt{34}$

3) C3 est le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$C\Omega=R$

$\forall_M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in C3\Leftrightarrow\Omega M=C\Omega=R$

$\Leftrightarrow\Omega M^2=C\Omega^2$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=(x_\Omega-x_C)^2+(y_\Omega-y_C)$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=(-1-3)^2+(2+1)^2$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=16+9=25$

I est le milieu de [AB]

$J\frac{XA+XB}{2};\frac{YA+YB}{2}$ M x;y

$J\ \frac{4+10}{2}=7;\frac{-4+8}{2}=2$

$\forall_M\in(\Delta),\ \overrightarrow{JM}\perp\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-7\\y-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}X_B-X_A\\Y_B-Y_A\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-7\\y-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}10-4\\8+4\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow(x-7)*6+(y-2)*12=0$

$\Leftrightarrow 6x-42+12y-24=0$

$\Leftrightarrow 6x+12y-66=0$

(Δ) :y=-0,5x+5,5
⇔y+0,5x-5,5=0
⇔0,5x+y-5,5=0
⇔x+2y-11=0

(r)Suites numériques(/r)

(r)Objectifs : (/r)

- Découvrir les différents types de suites et savoir les représenter graphiquement
- Mettre ne œuvre un algorithme pour obtenir les termes d'une suite et la somme de ces termes.
- Savoir définir une suite arithmétique ou géométrique ; savoir les propriétés sur les suites.
- Etudier les propriétés d'une suite : monotomie, bornes, limite et période éventuelles.

(r)1) Généralités(/r)

(r)a) Définition (/r)

(r)Définition 1 : Suite numrique(/r)

Une suite est une fonction de |N{0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;…} vers ℝ à partir d'un certain rang noté n_0.

L'image d'un entier n par la suite u est (r) notée u (et se lit u indice n)(/r) on dira que u_n (r)est le terme général de la suite(/r). $(U_n)_{n\geq n_0}$.

$(U_n)_{n\geq n_0}$: U_0 ;U_1 ;U_2 ;U_3 ;… ;U_n ;U_{n+1} ;…

}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}

Liste de nombres

(r)exemples :(/r)

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} |N \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n=n^2 \end{cases}$

n=0 : $U_0=0^2=0$

n=1 : $U_1=1^2=1$

…

n=4 : $U_4=16$

(U_n) : $U_n=f(n)=n^2$

f : $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

$U_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1$

$(V_n)_{M\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} \mathbb{N}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto \dfrac{3n^2+2M+1}{n} \\ V_M=g(M) \end{cases}$

g := $\left\{ x \mapsto \dfrac{3x^2+2x+1}{x} \right.$

(r)b les différents types de définitions d'une suite :(/r)

(r)Definition 2 :(/r) Suite définie explicitement.

Soient a(aprt)ℕ, et f une fonction définie sur l'intervalle (r)[a ;+∞[(/r).

La suite (U_n) de terme général (r)$U_n=f(n)$(/r) est une suite défoni explicitement (r)par la fonction.(/r)

Autrement dit ; toute suite définie en fonction de ℕ est explicite.

$U_n=\dfrac{3n+4}{2n+5}=f(n)$

$U_0=\dfrac{3*0+4}{2*0+5}=\dfrac{4}{5}$

$U_4=\dfrac{3*4+4}{2*4+5}=\dfrac{16}{13}$

(r)Définition 3 :(/r) Suite définie par récurrence. Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que :

(r)f(I)⊂ I, et soit a∈I.(/r)

LA suite $(U_n)_n$ est définie par : (U_n) : $\begin{cases} \text{(r)}U_0=a \\ \text{pour } n\in\mathbb{N} \\ U_{n+1}=f(U_n)\text{(/r)} \end{cases}$

(r)Remarques : (/r)

- La condition (r)f(I)⊂ I est indispensable.(/r) Sans elle, l'existence d'une telle suite ne peut être garantie.

(r)exemples :(/r)

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} U_0=128 \\ U_{n+1}=\dfrac{2}{Un} \end{cases}$

$U_1=\dfrac{2}{U0}=\dfrac{2}{128}=\dfrac{1}{64}$

$U_1=U_{0+1}=\dfrac{2}{U0}=\dfrac{2}{128}=\dfrac{1}{64}$

$U_2=U_{1+1}=\dfrac{2}{U1}=\dfrac{2}{\frac{1}{64}}=\dfrac{2}{1}*\dfrac{64}{1}=128$

$U_3=U_{2+1}=\dfrac{2}{U2}=\dfrac{2}{128}=\dfrac{1}{64}$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} U_0=-2 \\ U_{n+1}=-3n+U_n \end{cases}$

$U_1=U_{0+1}=3*0+U_0=-2$

$U_2=U_{1+1}=-3*1+U_1=-3+(-2)=-5$

$U_3=U_{2+1}=-3*2+U_2=-6-5=-11$

Ex 30 à 40 p 133 :

EX 30 p 133 :

1) $U_n=4n+5$, $n\in\mathbb{N}$

$U_0=0+5=5$

$U_1=4+5$

$U_1=9$

$U_2=4*2+5=8+5=13$

$U_3=4*3+5=12+5=17$

$U_{10}=4*10+5=40+5=45$

2) $U_n=(-2)^n$, $n\in\mathbb{N}$

$U_0=(-2)^0=1$

$U_1=(-2)^1=-2$

$U_2=(-2)^2=4$

$U_3=(-2)^3=-8$

$U_{10}=(-2)^{10}=1024$

Ex 31 p 133 :

1) $U_n=\frac{n-1}{n-2}$, $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 3$

$U_3=\frac{3-1}{3-2}=\frac{2}{1}=2$

$U_4=\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}=1,5$

$U_5=\frac{5-1}{5-2}=\frac{4}{3}=$

$U_6=\frac{6-1}{6-2}=\frac{5}{4}=1,25$

$U_{10}=\frac{10-1}{10-2}=\frac{9}{8}\approx 1,13$

2) $U_n=3n-7$, $n\in\mathbb{N}$

$U_0=3*0-7=0-7=-7$

$U_1=3*1-7=3-7=-4$

$U_2=3*2-7=6-7=-1$

$U_3=3*3-7=9-7=2$

$U_{10}=3*10-7=30-7=23$

Ex 32 p 133 :

1) $U_n=n^2$, $n\in\mathbb{N}$

$U_0=0^2=0$

$U_1=1^2=1$

$U_2=2^2=4$

$U_3=3^2=9$

$U_{10}=10^2=100$

2) $U_n=\frac{n}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$

$U_0=\frac{0}{0+1}=\frac{0}{1}=0$

$U_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=0,5$

$U_2=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$

$U_3=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}=0,75$

$U_{10}=\frac{10}{10+1}=\frac{10}{11}$

Ex 33 p 133 :

$U_n=4n+5$

1)

$U_{n+1}=4(n+1)+5=4n+4+5=4n+9$

$U_{2n}=4(2n)+5=8n+5$

$U_{2n+1}=4(2n+1)+5=8n+4+5=8n+9$

$U_{n^2}=4(n^2)+5=4n^2+5$

2) $U_n=3n^2+5$

$U_{n+1}=3(n+1)^2+5=3n^2++6n+3+5=3n^2+6n+8$

$U_{2n}=3(2n)^2+5=12n^2+5$

$U_{2n+1}=3(2n+1)^2+5=12n^2+12n+3+5=12n^2+12n+8$

$U_{n^2}=3(n)^2+5=3n^4+5$

Ex 34 p 133 :

1) 2 choix possibles pour le premier jeton et un choix possible pour le second jeton. Soit 2*1 rangements possibles.

2) 3*2*1

3) 4*3*2*1

4) n*n-1*(n-2)*…*2*1 = n ! (factoriel n)

5) Pour tout entier n≥1, U_n

$U_1=1\ !=1$

$U_2=2!=2*1=2$

$U_3=3!=3*2*1=6$

$U_4=4!=24$

$U_5=5!=120$

$U_6=6!=720$

$U_7=7!=5040$

$U_8=8!=40320$

Ex 35 p 133 :

1) Il y a 5 choix possible pour le secrétaire et 4 choix possibles pour le trésorier (secrétaire ≠trésorier) soit 5*4=20 possibilités mais il n'y a pas d'ordre dans le tirage des deux nombres soit $\frac{20}{2}=10$ comités possibles.

2) Pour n personnes, $\frac{n*(n-1)}{2}$ comités possibles.

3) pour tout entier $n\geq 2$, $U_n=\frac{n(n-1)}{2}$

$U_2=\frac{2(2-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

$U_3=\frac{3(3-1)}{2}=\frac{3*2}{2}=3$

$U_4=\frac{4*3}{2}=6$

$U_5=\frac{5*4}{2}=10$

$U_6=\frac{6*5}{2}=15$

$U_7=\frac{7*6}{2}=21$

$U_8=\frac{8*7}{2}=28$

$U_9=\frac{9*8}{2}=36$

Ex 36 p 133 :

a) $U_0=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=2U_n+3$

$U_1=2U_0+3=2*1+3=5$

$U_2=2U_1+3=2*5+3=13$

$U_3=2U_2+3=2*13+3=29$

b) $V_0=3$

pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V_n=5V_{n-1}+1$

$V_1=5V_0+1=5*3+1=16$

$V_2=5V_1+1=5*16+1=81$

$V_3=5V_2+1=5*81+1=406$

c) $W_0=1$

$W_{n+1}=2W_n^2$

$W_1=2W_0^2=2*1^2=2$

$W_2=2W_1^2=2*2^2=8$

$W_3=2W_2^2=2*8^2=128$

Ex 37 p 133 :

1) $\begin{cases} U_0=128 \\ U_{n+1}=\frac{2}{U_n}+1 \end{cases}$ $(U_n\neq 0)$

$U_1=\frac{2}{U_0}+1=\frac{2}{128}+1=\frac{65}{64}$

$U_2=\frac{2}{U1}+1=\frac{2}{\frac{65}{64}}+1=\frac{193}{65}$

$U_3=\frac{2}{U2}+1=\frac{2}{\frac{193}{65}}+1=\frac{323}{193}$

2) $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=2(U_n)^2-4 \end{cases}$

$U_1=3U_0-2=4*2-2=6$

$U_2=3U_1-2*1=3*6-2=16$

$U_3=3U_2-2*2=3*16-4=44$

Ex 38 p 133 :

1) $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=-U_n+3 \end{cases}$

$U_1=-U_0+3=-3+3=0$

$U_2=-U_1+3=-0+3=3$

$U_3=-U_2+3=-3+3=0$

2) $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=U_n+\frac{3}{n+1} \end{cases}$

$U_1=U_0+\frac{3}{0+1}=0+3=3$

$U_2=U_1+\frac{3}{1+1}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

$U_3=U_2+\frac{3}{2+1}=\frac{9}{2}+1=\frac{11}{2}$

Ex 40 p 133 :

a) $U_0=5$

$U_1=2U_0+3=2*5+3=13$

$U_2=2U_1+3=2*13+3=29$

$U_3=2U_2+3=2*29+3=61$

b) $U_1=5$

$U_2=2U_1+3=2*5+3=13$

$U_3=2U_2+3=2*13+3=29$

$U_4=2U_3+3=2*29+3=61$

c) $U_3=5$

$U_4=2U_3+3=2*5+3=13$

$U_5=2U_4+3=2*5+3=29$

$U_6=2U_5+3=2*29+3=61$

Ex 39 p 133 :

1) $\begin{cases} U_0=128 \\ U_{n+1}=\dfrac{2}{U_n}+1 \end{cases}$ $(U_n \neq 0)$

$U_1=\dfrac{2}{U_0}+1=\dfrac{2}{128}+1=\dfrac{65}{64}$

$U_2=\dfrac{2}{U_1}+1=\dfrac{2}{\dfrac{65}{64}}+1=\dfrac{193}{65}$

$U_3=\dfrac{2}{U_2}+1=\dfrac{2}{\dfrac{193}{65}}+1=\dfrac{323}{193}$

2) $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=2(U_n)^2-4 \end{cases}$

$U_1=2(U_0)^2-4=2*(2)^2-4=4$

$U_2=2(U_1)^2-4=2(4)^2-4=28$

$U_3=2(U_2)^2-4=2(28)^2-4=1564$

Ex 40 p 133 :

a) $U_0=5$

$U_1=2U_0+3=2*5+3=13$

$U_2=2U_1+3=2*13+3=29$

$U_3=2U_2+3=2*29+3=61$

b) $U_1=5$

$U_2=2U_1+3=2*5+3=13$

$U_3=2U_2+3=2*13+3=29$

$U_4=2U_3+3=2*29+3=61$

c) $U_3=5$

$U_4=2U_3+3=2*5+3=13$

$U_5=2U_4+3=2*13+3=29$

$U_6=2U_5+3=2*29+3=61$

(r)Rappels :(/r)

$(U_n)_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} ; n \mapsto U_n$

$U_n=f\mathbb{N}$: définie de manière explicite

$U_{n+1}=f(U_n)$: définie par récurrence

II Suites géométriques

II.1.Définition d'une suite géométrique (/r)

$\frac{a}{b}=\frac{1}{b}*a$

Exercice :

$U_{n+1}=\frac{Un+2Vn}{3}$

$U_0=1$; $V_0=2$ et $U_{n+1}=\frac{Un+2Vn}{3}$ et $V_{n+1}=\frac{Un+3Vn}{4}$

b) $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} : W_n=V_n-U_n$

« $W_{n+1}=q*W_n$ »

$W_{n+1}=V_{n+1}-U_{n+1}=\frac{Un+3Vn}{4}-\frac{(Un+2Vn)}{3}=\frac{3Un+9Vn}{12}-\frac{(4Un+8Vn)}{12}$

$W_{n+1}=\frac{3Un-4Un+9Vn-8Vn}{12}=\frac{-Un+Vn}{12}=\frac{Vn-Un}{12}=\frac{1}{12}*(Vn-Un)$

Donc $W_{n+1}=\frac{1}{12}*W_n$.

Par conséquent la suite (W_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{12}$ et de terme initial $W_0=V_0-U_0=2-1=1$.

Ex 81 p 169 :

3) Soit (V_n) une suite définie pour tout entier naturel n par : $V_n=\frac{Un-2}{Un+1}$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}},\begin{cases} U_{n+1}=\frac{2}{Un}+1 \\ U_0=5 \end{cases}$$

a) Montrer la suite (Vn) est géométrique de raison $q=-\frac{1}{2}$ et V_0.

b) Exprimer V_n en fonction de n puis U_n.

a) Montrons que « $V_{n+1}=q*Vn$ »

$$V_{n+1}=\frac{Un+1-2}{Un+1}=\frac{\frac{2}{Un}+1-2}{\frac{2}{Un}+2}=\frac{\frac{2}{Un}-1}{\frac{2}{Un}+2}=\frac{\frac{2}{Un}-\frac{Un}{Un}}{\frac{2}{Un}+\frac{2Un}{Un}}=\frac{\frac{2-Un}{Un}}{\frac{2+2Un}{Un}}=\left(\frac{2-Un}{Un}\right)*\frac{Un}{2+2Un}=\frac{2-Un}{2+2Un}=\frac{2-Un}{2(1+Un)}$$

$$=\frac{1}{2}*\left(\frac{2-Un}{1+Un}\right)=-\frac{1}{2}*\left(\frac{-2+Un}{1+Un}\right) \text{ donc } V_{n+1}=-\frac{1}{2}V_n.$$

$$\mathbf{V_n=\frac{Un-2}{Un+1}} \quad \Big| \quad \mathbf{\frac{a}{b}=\frac{1}{b}*a}$$

Par conséquent la suite (V_n) est bien géométrique pour tout entier n avec pour raison $q=-\frac{1}{2}$ et de terme initiale :

$V_0=\frac{U0-2}{U0+1}$

$V_0=\frac{5-2}{5+1}$

$V_0=\frac{1}{2}$

b) $V_n=V_0*q^n$

$V_n=\frac{1}{2}*\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$Vn=\frac{Un-2}{Un+1} \Leftrightarrow Vn*(Un+1)=Un-2$

$\Leftrightarrow Vn*Un+Vn=Un-2$

$\Leftrightarrow Vn+2=Un-Vn*Un$

$\Leftrightarrow Vn+2=Un(1-Vn)$

$\Leftrightarrow Un=\frac{Vn+2}{1-Vn}$

$\Leftrightarrow \boxed{U_n=\frac{\frac{1}{2}*\left(-\frac{1}{2}\right)^n+2}{1-\frac{1}{2}*\left(-\frac{1}{2}\right)^n}}$

Ex 64 p 167 :

$U_0=20$

$n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=0,3*U_n+3$

$V_n=U_n-\frac{30}{7}$

1) $V_0=U_0-\frac{30}{7}$

$V_0=20-\frac{30}{7}$

$V_0=\frac{20*7}{7}-\frac{30}{7}$

$V_0=\frac{140-30}{7}$

$\boxed{V_0=\frac{110}{7}}$

2)

$V_n=$

Ex 65 p 167 :

$U_0=-6$

$U_{n+1}=-\frac{2}{3}U_n+3$

V_n, $n\in\mathbb{N}$, $V_n=U_n-\frac{9}{5}$

1)

$V_{n+1}=U_n-\frac{9}{5}$

$V_{n+1}=(-\frac{2}{3}U_n+3)-\frac{9}{5}$

$V_{n+1}=-\frac{2}{3}\,(U_n+-\frac{9}{5})=-\frac{2}{3}V_n.$

$V_0=U_0-\frac{9}{5}$

$V_0=-6-\frac{9}{5}$

$V_0=-\frac{30}{5}-\frac{9}{5}$

$\boxed{V_0=\frac{-39}{5}}$

2) $V_0=-\frac{39}{5}*\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

D'où $U_n=-\frac{39}{5}*\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{9}{5}$

3) On conjecture que (U_n) tends vers $\frac{9}{5}\left(\frac{2}{3}<1\right)$.

Ex 78 (1 et 2) p 168 :

1)

(r) Rappels : (/r) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique, si pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=q*U_n$.

(r)$U_n=U_p*q^{n-p}$ pour tout $n\geq p$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$.(/r)

P=0 : $U_n=U_0*q^n$

P=1 : $U_n=U_1*q^{n-1}$

P=2 : $U_n=U_2*q^{n-2}$.

(r)Propriété :(/r) une suite géométrique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 9 est :

- (r)Croissante $\overbrace{\text{si } U_0>0}^{\text{Graph 1}}$ et $q>1$ ou bien si $U_0<0$ et $0<q<1$
- Décroissante $\underbrace{\text{si } U_0>0}_{\text{Graph 2}}$ et $0<q<1$ ou bien si $U_0<0$ et $q>1$.(/r)

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q<0$ (r)n'est ni croissante, ni décroissante(/r).

$U_n=3*2^n$

$U_{n+1}=3*2^{n+1}$

$U_{n+1}=3*2^n*2$

$U_{n+1}=2*U_n$

Pour tout entier naturel n, (U_n) est géométrique de raison q=2 et $U_0=3*2^0$, $U_0=3>0$.

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout entier naturel n.

$U_n=-4*2^n$

$U_{n+1}=-4*2^{n+1}$

$U_{n+1}=-4*2^n*2$

$U_{n+1}=2*U_n$

$U_0=-4*2^0=-4$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q=2 et $U_0=-4$.

Donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour tout entier naturel n.

(r)Propriété :(/r) Somme des termes d'une suite géométrique.

La somme S_n de n termes d'une suite géométrique de raison q (r)est le produit du premier terme U_p par le rapport à $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, Soit : $\boxed{S_n=U_p*\frac{(1-q^{n+1})}{1-q},\ q\neq 1}$ (/r)

$S_n=U_0+U_1+U_2+U_3+\ldots+U_{25}$

$S_n=U_0+U_0*q+U_1*q+U_2*q+\ldots+U_{14}*q$

$S_n=U_0*q^0+U_0*q^1+U_0*q*q+U_0*q^3+\ldots+U_0*q^{25}$

$S_n=U_0*q^0+U_0*q^1+U_0+q^2+U_0*q^3+\ldots+U_0*q^{25}$

(r)$=U_0*(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{25})$

$=U_0*\left(\frac{1-q^{26}}{1-q}\right)$

$=-4*\left(\frac{1-2^{26}}{1-2}\right)$

$=-4*(1-2^{26})$

Démonstration exigible :(/r)

« $1+q+q^2+\ldots+q^N=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ »

$(1-q)(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+q^n)$

=(r)$1+\cancel{q+q^2+q^3}+\ldots+\cancel{q^{n-1}+q^n}$(/r)(v)$-(\cancel{q+q^2+q^3}+q^4+\ldots+\cancel{q^n}+q^{n+1})$

$=1-q^{n+1}$ (/v)

Donc $1+Q+q^2+q^3+\ldots+q^{n+1}+q^n=(r)\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remaque :(/r) Avec la notation synthétique, la somme de n termes commençant par le rang p d'une suite géométrique de raison q s'écrit :

(r)$U_p+U_{p+1}+U_{p+2}+\ldots+U_n$

$=\sum_{k=p}^{k-n} Uk \sum_{k=p}^{k-n}$: ($signifie\ que\ la\ somme\ de\ condensée\ des\ termes\ allant\ de\ p$ à n

$S=1+3+3^2+\ldots+3^{13}$

$S=\frac{1-3^{14}}{1-3}$

$S=\frac{1-3}{-2}$

$S=-\frac{(1-3^{14})}{2}$

$=2391484$

Problème à faire pour le 28 02 2020

Soit la suite U_n définie par : $U_{n+1}=\frac{U_n+6}{U_n+2}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_0=1$

1) Exprimer $\frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}+3}$ en fonction de $\frac{U_n-2}{U_n+3}$

   $\frac{U_n-2}{U_n+3}=\frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}+3}$

2) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n=\frac{U_n-2}{U_n+3}$
   a. Montrez que la suite (V_n) est géométrique. Vous préciserez la raison q et le terme initial V_0.

      $V_{n+1}=\frac{Un+1-2}{Un+1+3}=\frac{(Un+6)-2}{(Un+2)+3}=\frac{Un+4}{Un+5}$
   b. Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si, pour tout entier naturel n, il existe (r)un réel r appelé la raison tel que $\boxed{U_{n+1}=U_n+1}$ (/r)

(r)Théorème :(/r) Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétiue de premier terme U_0 et de raison r.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :
  - (r)$U_n=U_0+n*r$

    $\boxed{U_n=a+n*1}$ (/r)
  - Pour tout $n\geq p$ (entier naturel) (v) $\boxed{\text{(r)}U_n=U_p+\text{(/r)(v)}(n-p)*1\text{(/v)}}$ (/v)
    - P=0 :
      - $U_n=U_0+(n-0)*r$
      - $=U_0+n*r$
    - P=1 :
      - $U_n=U_1+(n-1)*r$
    - P=3 :
      - $U_n=U_3+(n-3)*r$

→ : $U_{n+1}=U_n+r$

$U_{n+1}=$(v)$U_{n+1}+r$(/v)$+r$

$U_{n+1}=$(v)$U_{n-1}+2*r$(/v)

U_{n+1}(v)$=U_{n-2}+r+$(/v)21

$U_{n+1}=$(v)U_{n-2}(/v)$+3r$

…

$U_{n+1}=U_0+n*r$ pour tout n $\in\mathbb{N}$

« $U_{n+1}=U_n+r$ »

$U_3=5$ et $U_7=13$

$U_3=U_0+3*r=5$

$U_7=U_0+7*r=13$

$U_3=U_2+r=U_0+2*r+r = U_0+3r$

$$\begin{cases} U_0+3r=5 \ (1) \\ U_0+7r=13 \ (2) \end{cases}$$

(2)-(1) ⇔ 4r=8

⇔ $r=\frac{8}{4}=2$

$U_0+3*2=5$

$U_0=5-6 = -1$

2) $U_n=U_0+n*r$

$U_{100}=U_0+100*2=-1+200=199$

(r)Propriété (1) :(/r)une suite arithmétique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est (r)croissante si r>0, décroissante si r<0.

Propriété 2 : (/r) Somme des termes d'une suite arithmétique.

La somme Sn de n termes d'une suite arithmétique est le prodit de n par la demi-spmme du 1er et du dernier terme, en Commençant au terme d'indice p :

$S_n=U_p+U_{p+1}$+(r)…+(/r)$U_{p+n}+U_{p+n-1}$.

(r)S_n(/r)=(r)n*$\left[\frac{Up+Up+n-1}{2}\right]$ $\forall_{n\geq p}$(/r)

$U_n=2n-3$

$U_{n+1}=2(n+1)-3$

$U_{n+1}=2n+2-3$

$U_{n+1}=U_n+2$

(U_n) est arithmétique de raison r=2>0 donc (r)elle est croissante

A	B
n	U_n(/r)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
…	…

$U_n=2n-3$

→ :

$S_n=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

S=1+2+3+4+…+n-1+n

S=n+n-1+n-2+…+…+2+1

2S=(n+1)+(n+1)+(n+1)+…+(n+1)

n fois

2S=n*(n+1)

Donc $\boxed{S=\frac{n(n+1)}{2}}$

$S_{348}=1+2+\ldots+348 = \frac{348*349}{2}=60726$

S=33+36+39+…+267

$S=33+(33+3)+(36+3)+\ldots+U_n$

S=33+33+3*1+33+3*2+…+33+3*n

33+3n=267

3n=267-33

234

$N=\frac{234}{3}=78$

S=33+33+3*1+33+3*2+…+33+3*78

S=33*79+3(1+2+…+78)

$S=33*79+\frac{3*78*79}{2}$

S=33*79+3*39*79

S=11850

Problème :

Partie A : (U_n) : $U_4=14$ et $U_6=87,5$ déterminer U_0 et préciser la relation de récurrence donnant U_{n+1} en fonction de U_n dans les cas suivants :

1) (U_n) est arithmétique ;
2) (U_n) est géométrique ;
3) $U_{n+1}=a*U_n+168$, a= ?

1)

« $U_{n+1}=U_n+r$ »

$U_n=U_0+n*1$

$U_6=U_5+r = U_4+r+r$

$U_6=U_4+2*r$

87,5=14+25

2r=87,5-14

2r=73,5

$r=\frac{73,5}{2}$

r=36,75

$U_{n+1}=U_n+36,75$

$U_4=U_0+4*36,75$

$14=U_0+147 = -133$

Donc la suite (U_n) est arithmétique de raison r=36,75 et $U_0=-133$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2)

« $U_{n+1}=q*U_n$ »

$U_6=U_5*q$

$U_6=U_4*q*q$

$U_6=U_4*q^2$

$87,5=14*q^2$

$q^2=\frac{87,5}{14}$

$q^2=6,25$

$q=\sqrt{6,25}$ ou $q=-\sqrt{6,25}$

q=2,5 ou q=-2,5

3)

$U_{n+1}=2,5*U_n$ ou $U_{n+A}=-2,5*U_n$

$U_n=U_0*q^n$

$U_4=U_0*(2,5)^4$ ou $U_4=U_0*(-2,5)^4$

$14=U_0*39,0625$

$U_0=\frac{14}{39,0625} = 0,3584$

$U_0=-0,3584$

S=590490+393660+262 440+…+10240

$S=U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n$.

Si $U_0=590490$ $U_1=393660$

$\frac{U1}{U0}=\frac{393660}{590490}=\frac{2}{3}$

$\frac{U2}{U1}=\frac{262440}{393660}=\frac{2}{3}$

$q=\frac{2}{3}$

$U_n=U_0*q^n$

$10240=590490*\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{10240}{590490}$

Fonction

$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$

Tableau de valeurs

x=10

$\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=\frac{10240}{590490}$

$S=U_0+\ldots+U_{10} = U_0*\frac{(1-q11)}{1-q}=590490*\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$

$S=3*590490*\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right) = 17450990$

Bébé lapins

Nombre de Mois	Bébé	Adolescent	Adultes	Total
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
2	1	0	1	2
3	1	1	1	3
4	2	1	2	5
5	3	2	3	8

$U_0=1$; $U_1=1$;$U_2=2$;$U_3=3$;$U_4=5$;$U_5=8$

U_n est donc la liste de tous les nombres. On dit que U_5 est le terme de al suit (U_n) de rang 5. U_1 n'est pas le premier terme de la suite car on a U_0. Attention à ne pas confondre (U_n) qui est la liste de tous les nombre et U_n qui est le terme général de la suite ou encore U_n qui est le nombre dans la liste qui a pour rang n.

On créé une suite de nombre : {1,1,2,

Savoir faire :

$U_n=2n^2+3$

$U_0=2*0^2+3=3$

$U_1=2*1^2+3=5$

$U_2=11$

$U_5=2*5^2+3=53$

$U_{100}=20\ 003$

$U_{n+1}=2*(n+1)^2+3=2(n^2+2n+1)+3 = 2n^2+4n+2+3 = 2n^2+4n+5$

$U_n = f(n)$

$U_{n+1}-U_n = 2n^2+4n+5-(2n^2+3) = 4n+2>0$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$U_n=2n^2+3$

$U_{2n}=2(2n)^2+3=2*4n^2+3 = 8n^2+3$

$U_{2n+1}=2*(2n-1)^2+3=2*(4n^2-4n+1)+3 = 8n^2-8n+5 = 2*(2n+1)^2$

$U_{2n+1}= 2*(4n^2+4n+1)+3 = 8n^2+8n+2+3 = 8n^2+8n+5.$

$2U_n+1 = 2*(2n^2+3)+1 = 4n^2+6+1 = 4n^2+7$

$-U_{n+1}+3=-(2(n+1)^2+3)+3 = -(2(n^2+2n+1)+3)+3 = -(2n^2+4n+2+3)+3 = -2n^2-4n-5+3 = -2n^2-4n-2$

Problème 2, Partie A :

$U_n=f(n) = 2^n-n.$

$T=\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} = U_{n+1}-U_n = 2^{n+1}-(n+1)-(2^n-n) = 2^{n+1}-2^n-n-1+n = 2^{n+1}-2^n-1 = 2^n*2^1-2^n*1-1 = 2^n(2-1)-1 = 2^n*1-1 = 2-1\geq 0$ donc la suite est croissante pour tout $n \in\mathbb{N}$

$n=0$

$2^0-1=0$

$n=1$

$2^1-1=1$

Correction du problème 1 de la composition :

1)

Résoudre dans r puis dan l'intervalle [0 ;2π[.

$\text{Sin}(3x+\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)$

$\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-2+2k\pi$ ou $3x+\frac{\pi}{3}=\pi(\frac{2\pi}{3}-x)+2k\pi$

$\Leftrightarrow 3x+x=-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $3x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{2\pi}{3}+x+2k\pi$

$\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $3x-x=-\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4}$ ou $2x=-\pi+\pi+2k\pi$

Donc $S=\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} ;k\pi\}$ dans $\mathbb{R}$

(r)I=[0 ;2π]

$x\in[0 ;2\pi] \Leftrightarrow 0\leq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\leq 2\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}\leq\frac{k\pi}{2}\leq 2\pi-\frac{\pi}{12}$

$\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{12}\leq k\pi\leq 4\pi-\frac{2\pi}{12}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}\leq k\pi\leq 4\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{23\pi}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\leq k\leq\frac{23}{6}$

$k\in\{0 ;1 ;2 ;3\}$

(/r)

$k=0 : x=\frac{\pi}{12}$

$k=1 : x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}+\frac{6\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$

k=2 : $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{2}=\frac{\pi}{12}+\frac{12\pi}{12}=\frac{13\pi}{12}$

k=3 : $x=\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{18\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}$

donc $S=\{\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12};\frac{13\pi}{12};\frac{19\pi}{12}\}$

(r)$x\in[0;2\pi]$ ⇔ $0\leq k\pi\leq 2\pi$

⇔$0\leq k\leq 2$ (/r)

$k\in\{0;1;2\}$

(r)k=0 :x=0

k=1 :$x=\pi$

k=2 :$x=2\pi$

(/r)

Ex2 :

$2\sin^2(x)+3\sin(x)+1=0$

(r)y=sin(x) l'equation devient $2y^2+3y+1=0$

$\Delta=3^2-`*2*1$ $\Delta=9-8$ $\Delta=1$	$y_1=\frac{-3-1}{4}$ $y_1=-1$ ⇔sin(x)=-1

⇔$\sin(x)=\sin(\frac{3\pi}{2})$ ou $\sin(-\frac{\pi}{2})$

⇔$x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$y_2=\frac{-3+1}{4}$

$y_2=-\frac{1}{2}$ ⇔ $\sin(x)=-\frac{1}{2}$ ⇔ $\sin(x)=\sin(-\frac{\pi}{6})$

⇔ $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-(-\frac{\pi}{6})+2k\pi$

$=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

3)

(r)

Sin(a-b)=Sin(a)*cos(b)-sin(b)*cos(a)

(E_3) : $\sin(x)-\sqrt{3}*\cos(x)=\sqrt{3}$

Indication : $\forall x\in\mathbb{R}$:

$\text{Sin}(x)-\sqrt{3}*\cos(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$

$2\sin(x-\frac{\pi}{3})$=(/r)2*(r)[(/r)$\sin(x)*\cos(\frac{\pi}{3})$-(r)$\sin(\frac{\pi}{3})*\cos(x)$]

$=2*[\sin(x)*\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}*\cos(x)]$(/r)

$=\sin(x)-\sqrt{3}*\cos(x)$

(r)$\sin(x)-\sqrt{3}*\cos(x)=\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sin(x-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(/r)$\sin(x-\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow$(r)$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}$+(/r)$2k\pi$ ou $x=\pi+2k\pi$(r)

k=0 :$x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\pi$(/r)

k=1 :$x=\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{8\pi}{3}$(v)>$2\pi$(/v) $x=\pi+2\pi$(r)$=3\pi$(apart pas)[0 ;2 π](/r)

k=2 : (r)$x=\frac{2\pi}{3}+4\pi=\frac{14\pi}{3}>2\pi$ donc S=(/r)(v){$\frac{2\pi}{3}$;π}

b)

$f_1(x)=\sin(9x+\frac{\pi}{3})$

$T_1=\frac{2\pi}{a}$ $\quad f_2(x)=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$T_1=\frac{2\pi}{9}$ $T_2=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$f=f_1+f_2$ $T=\frac{2\pi}{3}$

$T_1 : \frac{2\pi}{9} ; \frac{4\pi}{9} ; \frac{6\pi}{9}=\frac{2\pi}{3}$

$T_2 : \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}$

PB :

1)

La hauteur h_A issue de A a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}(x_c-x_b ; y_c-y_b)$

$B\in 22 \Leftrightarrow Y_b=\frac{1}{b}$

$C\in 22 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{BC}(c-b ; \frac{1}{c}-\frac{1}{b})$

Donc $M(x ; y) \in h_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}=0$

Ex 6 p 154 :

On considère la suite (U_n) :

$$\begin{cases} U_1=0 \\ U_{n+1}=\frac{1}{2-U_n} \end{cases}$$

a)

$U_2=U_{1+1}=\frac{1}{2-U_1}=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$

$U_3=U_{2+1}=\frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$

$U_4=U_{3+1}==\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{6}{3}-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{4}}{3}=\frac{3}{4}$

$U_5=U_{4+1}=\frac{1}{2-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{5}}{4}=\frac{4}{5}.$

b)

On pose $V_n=\frac{1}{U_n-1}$

« $V_{n+1}=V_n+r$ »

$$V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}-1}=\frac{1}{\frac{1}{2-U_n}-1}=\frac{1}{\frac{1}{2-U_n}-\frac{(2-U_n)}{2-U_n}}$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{\frac{1-2+U_n}{2-U_n}}=\frac{1}{\frac{-1+U_n}{2-U_n}}=\frac{2-U_n}{U_n-1}=\frac{1+1-U_n}{U_n-1}=\frac{1-Un+1}{Un-1}=\frac{1-Un}{Un-1}+\frac{1}{Un-1}=\frac{-(Un-1)}{Un-1}+Vn$$

Donc $\boxed{V_{n+1}=V_n-1}$

$V_1=\frac{1}{U1-1}=-1$

Par conséquent la suite (V_n) est arithmétique de raison r=1 et de terme initial $V_1=-1$.

C)

$V_n=V_p+(n-p)*r$

$V_n=V_1+(n-1)*(-1)$

$V_n=-1-n+1$

Donc $\boxed{V_n=-n}$

De plus $V_n=\frac{1}{Un-1}$

$\Leftrightarrow -n=\frac{1}{Un-1}$

$\Leftrightarrow U_n-1=\frac{1}{-n}$

$\Leftrightarrow \boxed{U_n=\frac{1}{n}+1}$

$U_5=U_{4+1}=\frac{1}{2-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$.

Ex 7 p 154 :

$P_0=1000$ (P_n)

a)

Mq $P_{n+1}=a*P_n+b$

$P_{n+1}=P_n-\frac{20}{100}*P_n+120$

$P_{n+1}=1*P_n-0{,}2P_n+120$

Donc $P_{n+1}=0{,}8P_n+120$

(r)a=0,8 et b=120(/r)

$q_n=P_n-\lambda$

(r)« $q_{n+1}=k*q_n$ »

λ est solution x=ax+b

x=0,8x+120

$\Leftrightarrow$x-0,8x=120

$\Leftrightarrow$0,2x=120

$\Leftrightarrow x=\frac{120}{0{,}2}=\frac{\frac{120}{2}}{10}=\frac{1200}{2}=600$.

(/r)$q_n=P_n$-(r)600

« $q_{n+1}=k*q_n$ »

$q_{n+1}=P_{n+1}-600$

$q_{n+1}=0{,}8P_n+120-600$

$q_{n+1}=0{,}8P_n-480$(/r)

$q_{n+1}=0{,}8(P_n-\frac{480}{0{,}8})$

$q_{n+1}=0{,}8(P_n-\frac{\frac{480}{8}}{10})$

$q_{n+1}=0{,}8(P_n-\frac{4800}{8})$

$q_{n+1}=0{,}8(P_n-600)=0{,}8*q_n$.

(r)$q_0=P_0-600$

$q_0=1000-600=400$

donc la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q=0,8 et de terme initial $\boxed{q_0=400}$

b)

$q_n=q_0*q^{n-p}$

$q_n=400*(0{,}8)^n$

or $q_n=P_n-600 \Leftrightarrow 400*(0{,}8)^n=P_m-600$

$\Leftrightarrow 400*(0{,}8)^n+600=P_n$.

Ex 128 p 143 :

1)

a)

$U_0=1600$

b)

$U_{n+1}=U_n-\frac{10}{100}*U_n+100$

$U_{n+1}=U_n-0{,}1*U_n+100$

$U_{n+1}=0{,}9U_n+100$

0=1600

1=1540

2=1485

3=1437.4

4=1393.68

5=1754.294

6=1918.865

7=1286.978

c)

La suite (U_n) semble décroitre.

2)

$V_n=U_n-1000$

a)

$V_{n+1}=U_{n+1}-1000$

$V_{n+1}=0,9U_n+100-1000$

$V_{n+1}=0,9U_n-900$

$V_{n+1}=0,9(U_n-\frac{900}{0,9})$

$V_{n+1}=0,9(U_n-1000)$

$V_{n+1}=0,9*V_n$

$V_0=U_0-1000$

$V_0=1600-1000$

$V_0=600$

Donc la suite (V_n) est géométrique de raison q=0,9 et de terme initial $V_0=600$.

b)

$V_n=V_0*q^n$

$V_n=600*(0,9)^n$

Or $V_n=U_n-1000 \Leftrightarrow 600*(0,9)^n+1000=U_n$

$Q=0,9<1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} 600*(0,9)^n=600*0=0$

Donc $U_n \frac{n\text{-->+(inf)}}{n} 1000$

$U_n=600*(0,9)^n+1000$

Correction exercices sur les suites :

1)

a) $U_0=1600$
b) $U_1=U_0-0,1*U_0+100=0,9*1600+100=1540$

En 2019, le nombre d'oiseaux sera de 1540.

$U_{n+1}=U_n-0,1U_n+100=0,9U_n+100$

c) $U_0=1600$

$U_1=1540$

$U_2=1486$

$U_3=1437,4$

$U_5=1354,294$

$U_6=1318,865$

$U_7=1286,978$

La suite (U_n) semble décroitre.

2) $Vn=U_n-1000$

a) $V_{n+1}=U_{n+1}-1000$

$V_{n+1}=0,9U_n+100-1000$

$V_{n+1}=0,9U_n-900$

$V_{n+1}=(0,9)(U_n-(900)/(0,9))$

$V_{n+1}=(0,9)(U_n-1000)$

$V_{n+1}=0,9V_n$

b)

$V_0=U_0-1000$

$V_0=1600-1000$

$V_0=600$

Donc la suite (V_n) est géométrique de raison $q=0,9$ et de terme initial $V_0=600$

b) $V_n=V_0*q^n$

$V_n=600*(0,9)^n$

$V_n=U_n-1000$

$U_n=V_n+1000$

$U_n=(600*(0,9)^n)+1000$

c) soit la suite (U_n) géométrique de raison q:

si 0<q<1 alors la limite quand n tend vers +∞ de Un tend vers 0, c'est à dire que à partir d'un certain rang assez grand, tous les termes de la suite se rapprocherons de zéro (0).

Si q>1 et que le terme initial est positif alors la limite de la suite (U_n) tendra vers + ∞;

Si q>1 et que le terme initial est négatif, alors la limite de la suite (U_n) tendra vers - ∞.

Lire la page 154, 150, 151 154, 155 pour le 19/03/2020

Exercice 60, 61,63, 64 p 166, 167.

Exercice 60 p 166, 167 :

1) $U_n=5-\left(\frac{2}{3}\right)^n{}_{n\in\mathbb{N}}$. est géométrique car on retrouve la raison q vaut $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

2)

Exercice 61 p 166, 167 :

Exercice 63 p 166, 167 :

Exercice 64 p 166, 167 :

Ex1 :

Soit (U_n) une suite définie pour tout entier naturel n par : $U_n=(2^n)/(7^{n+1})$

a) Afficher à l'aide de votre calculatrice les premiers termes et conjecturer sont sens de varation.

$U_0=(2^0)/(7^1)=1/7$

$U_1=2^1/7^2=2/49$

$U_2=2^2/7^3=4/343$

$U_0>U_1>U_2$ donc la suite (U_n) semble décroissante.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n $(U_{n+1})/U_n=(2/7)$ en d'autres termes que signifie ce résultat ?

$(U_{n+1})/U_n=[(2^{n+1})/(7^{n+2})]/\left[\frac{2^n}{7^{n+1}}\right]$

$(U_{n+1})/U_n=[(2^{n+1})/(7^{n+2})]*[\frac{2^n}{7^{n+1}}]$

$(U_{n+1})/U_n=(2^{n+1})/(7^{n+2})/(2^n)/(7^{n+1})$

$(U_{n+1})/U_n=[2^{n*2}/7^n*7^2]*[2^n/7^n*7^1]$

$(U_{n+1})/U_n=[2/14]*[1/7]$

$(U_{n+1})/U_n=(2/14)*(7/1)$

$(U_{n+1})/U_n=2/7$

Donc $U_{n+1}=(2/7)*U_n$ et $U_0=1/7$ par conséquent la suite (U_n) est géométrique de raison $q=\frac{2}{7}$ et de terme initial $U_0=\frac{1}{7}$.

c) $U_0>0$ et $qu=\frac{2}{7}<1$ donc la siote (U_n) est décroissante pour tout entier naturel n.

$a^n*a^m=a^{(n+m)}$

$2^{(n+1)}=2^n*2^1$

$2^{(n+1)}=2^{n+1}$.

Critère de monotonie d'une suite (U_n).

Une suite numérique (U_n) est croissante si et seulement si :

i) pour tout entier naturel $n>=\mathbb{N}$

$U_{n+1}-U_n>0$;

ii) Pour tout entier naturel

$n\geq\mathbb{N}$, $U_n>0$ et $[U_{n+1}/U_n]\geq1$

iii) Pour tout entier naturel

$n \geq \mathbb{N}$, $U_n<0$ et $[U_{n+1}/U_n] \leq 1$;

manuels p 150, Exemple 1 :

tn=(n)/(n+1)

tn+1-tn=[(n+1)/(n+2)]-n/(n+1)=[(n+1)(n+1)/(n+2)(n+1)]-[n(n+2)/(n+1)(n+2)] = [(n+1)²-n(n+1)]/(n+1)(n+2) = [n²+2n+1-n²-n]/(n+1)(n+2) = (n+1)/(n+1)(n+2) = 1/(n+2).

Pour tout entier naturel n tn+1-tn>0 d'après i) la suite (tn) est strictement croissante.

Une suite numérique (U_n) est décroissante si et seulement si $U_{n+1}-U_n<0$ pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $U_{n+1}<U_n$.

(r)Définition : Suite bornée

Une suite numérique (U_n) pour tout entier naturel $n \geq \mathbb{N}$ est majorée si pour tout entier naturel $n \geq \mathbb{N}$, il existe un réel M, tel que $U_n \leq M$. On dit que M est le majorant.

Exemple : $U_n=\frac{n}{(n+1)}=\frac{(n+1-1)}{(n+1)}=\frac{(n+1)}{(n+1)-\left(\frac{1}{(n+1)}\right)}=1-\frac{1}{(n+1)}$

Donc $U_n<1$, par conséquent (U_n) est majorée par 1.

C'est-à-dire que à partir d'un certain rang n assez grand tous les termes de la suite seront plus petits que 1.

Par $U_{100}=\frac{1-1}{101}=\frac{100}{101}\approx 0{,}99<1$.

Si $Un_1-U_n<0$ pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $U_{n+1}<U_n$.

Une suite (U_n) pour tout entier naturel $n \geq \mathbb{N}$ est minoré si pour tout entier naturel $n \geq \mathbb{N}$, il existe un réel m, tel que : $U_n \geq m$. On dit que m est le minorant.

Essayer de refaire les exercices d'hier +ex 12 et 5 de la feuille

Ex 12 de la feuille :

$x_0=\frac{1}{2}$, $y_0=0$, $x_{n+1}=x_n-\sqrt{3}\,y_n$, $y_{n+1}=\sqrt{3}\,x_n+y_n$

O(0 ;0)

Je calcule OA_0 :

$OA_0=\sqrt{(x_0-x_O)^2+(y_0-y_O)^2}$

$OA_0=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(0-0)^2}$

$OA_0=\sqrt{0,25}$

$OA_1=\sqrt{(x_1-x_O)^2+(y_1-y_O)^2}$

Je calcule x_1 :0,

$x_1=x_{n+1}=x_0-\sqrt{3}*y_0$

$x_1=0,5-\sqrt{3}*0$

$\boxed{x_1=0,5}$

Je calcule y_1 :

$y_1=y_{n+1}=\sqrt{3}\,x_0+y_0$

$y_1=\sqrt{3}\frac{1}{2}+0$

$\boxed{y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$OA_1=\sqrt{(0,5-0)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}$

$OA_1=\sqrt{0,25+0,75}$

$OA_1=\sqrt{1}$

$\boxed{OA_1=1}$

Je calcule OA_2 :

Je calcule x_2 :

$x_2=x_{n+1}=x_2-\sqrt{3}*y_2$

$x_2=0,5-\sqrt{3}*\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_2=0{,}5-\frac{3}{2}$

$\boxed{x_2=1}$

Je calcule y_2 :

$y_2=y_{n+1}=\sqrt{3}\,x_1+y_1$

$y_2=\sqrt{3}*\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_2=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}$

$y_2=\frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{y_2=\sqrt{3}}$

$OA_2=\sqrt{(1-0)^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2}$

$OA_2=\sqrt{1+3}$

$OA_2=\sqrt{4}$

$\boxed{OA_2=2}$

Je calcule A_0A_1 :

$A_0A_1=\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}$

$A_0A_1=\sqrt{0+0{,}75}$

$\boxed{A_0A_1=\sqrt{0{,}75}}$

$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$A_1A_2=(1-0{,}5)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$A_1A_2=(0,5)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$A_1A_2=0,25+\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$A_1A_2=0,25+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$A_1A_2=0,25+0,75$

$\boxed{A_1A_2=1}$

$U_n\ \frac{2n+10}{n+1}$

U_0

$U_1\ U_2$

Ex type bac :

Des biologiste étudient le développement de la bactérie corona virus responsable de certaines difficultés respiratoires. In vitro, on a constaté que le nombre de bactérie augmente de 25% chaque heure. On place au début de l'expérience 10 bactéries dans une éprouvette.

1) Modéliser cette expérience à l'aide d'une suite géométrique U_n.
2) A l'aide de la calculatrice, affichez le nombre de bactéries présentes dans l'éprouvette toutes les heures pendant 50 heures.
3) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries est-il supérieur à 100 000
4) Conjecturez la limite de la suite (U_n)

et

alert ("hi, how do you do?")
alert ("you're a sucker")
alert ("a")
alert ("b")
alert ("c")
alert ("d")
alert ("e")
alert ("f")
alert ("g")
alert ("h")
alert
("i")

alert ("j")

alert ("k")

alert ("l")

alert ("m")

alert ("o")

alert ("p")

alert ("q")

alert ("r")

alert ("s")

alert
("t")

alert ("u")

alert ("v")

alert ("w")

alert ("x")

alert ("y")

alert ("z")

alert ("a, b c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z")

(vec)

```
print ("Pour bien comprendre comment passer de dates en siècles merci de le fa
ire avec différentes valeures")
                    print("veuillez n'entrer que les deux premier chiffres de
votre date (exemple: 1234 --> a=12, b=34:")
```