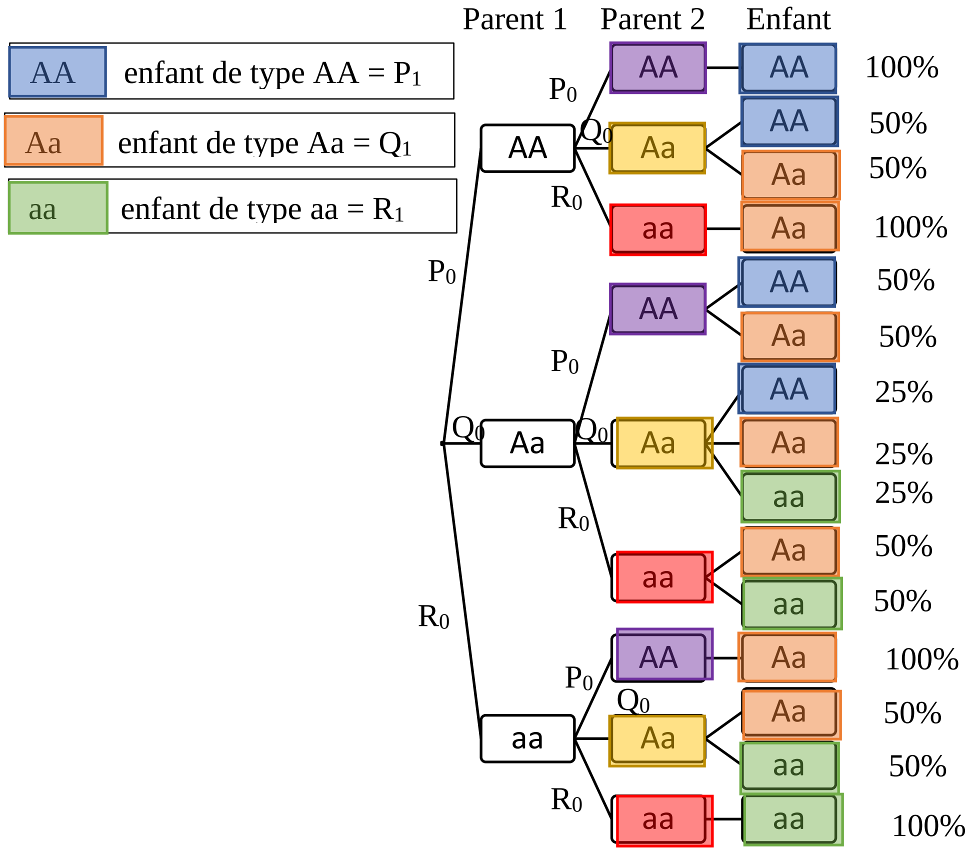
Ex 119 p 305 :

1)



2)

$$P_1=P_0*P_0+\left(\frac{P_0*Q_0}{2}\right)+\left(\frac{Q_0*P_0}{2}\right)+\left(\frac{Q_0*Q_0}{4}\right)=(P_0)^2+2\left(\frac{P_0*Q_0}{2}\right)+\frac{1}{4}Q_0^2=P_0^2+(P_0*Q_0)+\frac{1}{4}Q_0^2$$

$$P_1=P_0^2+0*P_0Q_0+\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2=\left(P_0+\frac{Q_0}{2}\right)^2$$

Vérification :

$$\left(P_0+\frac{Q_0}{2}\right)^2=P_0^2+2*P_0*\frac{Q_0}{2}+\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2=P_0^2+P_0*Q_0+\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2$$

$$P_1=\left(P_0+\frac{Q_0}{2}\right)^2$$

$$R_1=Q_0*\frac{Q_0}{4}+Q_0*\frac{R_0}{2}+R_0*\frac{Q_0}{2}+R_0*R_0.$$

$$R_1=R_0^2+2\left(\frac{Q_0*R_0}{2}\right)+\frac{Q_0^2}{4}$$

$$R_1=R_0^2+Q_0*R_0+\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2$$

$$R_1=\left(R_0+\frac{Q_0}{2}\right)^2$$

3)

$$P_{n+1}=P_n*P_n+P_n*\frac{Q_n}{2}+\frac{Q_n*P_n}{2}+Q_n*Q_n*\frac{1}{4}$$
$$P_{n+1}=P_n^2+2\left(\frac{Q_n*P_n}{2}\right)+\frac{Q_n^2}{4}$$
$$P_{n+1}=P_n^2+P_n*Q_n+\left(\frac{Q_n}{2}\right)^2$$
$$P_{n+1}=\left(P_n+\frac{Q_n}{2}\right)^2$$

$$R_{n+1}=\left(Q_n*Q_n*\frac{1}{4}\right)+\left(Q_n*R_n*\frac{1}{2}\right)^2+\left(R_n*Q_n*\frac{1}{2}\right)+R_n^2$$
$$R_{n+1}=R_n^2+2\left(\frac{Q_n*R_n}{2}\right)+\left(\frac{Qn}{2}\right)^2$$

4)
a)
$P_0=\frac{1}{4}$, $Q_0=\frac{1}{2}$, $R_0=\frac{1}{4}$
$$P_1=\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$
$$R_1=\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$
$P_1+R_1+Q_1=1$
$Q_1=1-P_1+R_1.$
$Q_1=\frac{1}{2}.$

b)

On sait que $P_0+Q_0+R_0=1$
Donc $P_1+Q_1+R_1=1$

$P_0=\frac{1}{2}$, $Q_0=\frac{1}{4}$, $R_0=\frac{1}{4}$

$$P_1=\left(P_0+\frac{Q_0}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{\frac{1}{4}}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)^2=\left(\frac{5}{8}\right)^2=\boxed{\frac{25}{64}}=\boxed{0{,}39}$$
$$R_1=\left(R_0+\frac{Q_0}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)^2=\left(\frac{3}{8}\right)^2=\boxed{\frac{9}{64}}=\boxed{0{,}14}$$
$$Q_1=1-\left(\frac{25}{64}+\frac{9}{64}\right)=1-\left(\frac{34}{64}\right)=\boxed{\frac{30}{64}}=\boxed{0{,}46}$$

$$P_2=\left(P_1+\left(\frac{Q_1}{2}\right)\right)^2=\left[\frac{25}{64}+\left(\frac{\frac{30}{64}}{2}\right)\right]^2=\left(\frac{25}{64}+\frac{30}{64}*\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{50}{128}+\frac{30}{128}\right)^2=\left(\frac{80}{128}\right)^2$$

$$R_2=\left(\frac{9}{64}+\left(\frac{\frac{30}{64}}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{9}{64}+\frac{30}{128}\right)^2=\frac{18}{128}+30=\left(\frac{48}{128}\right)^2$$

$$Q_2=1-(P_2+R_2)=1-\left(\frac{80}{128}\right)^2+\left(\frac{48}{128}\right)^2=1-\left(\frac{6400+2304}{(128)^2}\right)^2=16384-8704=\frac{76480}{(128)^2}$$

$$P_2=\left(\frac{80}{128}\right)^2=\frac{6400}{(128)^2}=\boxed{0{,}39}$$

$$R_2=\left(\frac{48}{128}\right)^2=\frac{2304}{(128)^2}=\boxed{0{,}14}$$

$$Q_2=\frac{7680}{(128)^2}=\frac{7680}{16384}=\boxed{0{,}46}$$

$$P_3=\left(P_2+\frac{Q_2}{2}\right)^2=\left(0{,}39+\left(\frac{0{,}46}{2}\right)\right)^2=(0{,}39+0{,}23)^2=\boxed{0{,}3844}$$

$$R_3=\left(R_2+\frac{Q_2}{2}\right)^2=(0{,}14+0{,}23)^2=(0{,}37)^2=\boxed{0{,}1369}$$

$$Q_3=1-(0{,}384+0{,}1369)=1-0{,}5209=\boxed{0{,}4791}$$

On peut conjecturer que, pour $P_n+Q_n+R_n=1$, les pourcentages restent les même mais ne sont pas égaux à celui de départ.

5)

a)

$d_n=P_n-R_n$

$$d_{n+1}=P_{n+1}-R_{n+1}=\left(P_n+\frac{Q_n}{2}\right)^2-\left(R_n+\frac{Q_n}{2}\right)^2$$

$$d_{n+1}=\left(P_n^2+P_nQ_n+\frac{Q_n^2}{4}\right)-\left(R_n^2+R_nQ_n+\frac{Q_n^2}{4}\right)$$

$$d_{n+1}=P_n^2+P_nQ_n\cancel{+\frac{Q_n^2}{4}}-R_n^2-R_nQ_n\cancel{-\frac{Q_n^2}{4}}$$

$d_{n+1}=(P_n^2-R_n^2)+(P_nQ_n-R_nQ_n)$

$d_{n+1}=(P_n+R_n)(P_n-R_n)+Q_n(P_n-R_n)$

$d_{n+1}=(P_n-R_n)[(P_n+R_n)+Q_n]$

$d_{n+1}=(P_n-R_n)*1$

$d_{n+1}=d_n$

donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$d_n=d_0=P_0-R_0=$constante.

b)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$P_{n+1}=\left(P_n+\frac{Q_n}{2}\right)^2$$

Or $P_n+Q_n+R_n=1$

Donc $Q_n=1-P_n-R_n$.

$P_{n+1}=\left(P_n+\frac{1}{2}-\frac{P_n}{2}-\frac{R_n}{2}\right)^2$

$P_{n+1}=\left(\frac{P_n-R_n+1}{2}\right)^2$

Or $P_n-R_n=d_n$

D'où $P_{n+1}=\left(\frac{1+d_n}{2}\right)^2=\frac{(1+d_n)^2}{4}$

Mais $d_n=d_0=p_0-r_0$

Donc $P_{n+1}=\frac{(1+P_0-R_0)^2}{4}$=constante

La suite (P_n) est donc constante pour $n\geq1$.

c)

$R_{n+1}=\left(R_n+\frac{Q_n}{2}\right)^2$

Or $Q_n=1-P_n-R_n$

Donc $R_{n+1}=\left(R_n+\frac{1}{2}-\frac{P_n}{2}-\frac{R_n}{2}\right)^2$

$R_{n+1}=\left(\frac{1+R_n-P_n}{2}\right)^2$

Or $d_n=P_n-R_n$

Donc $R_{n+1}=\left(\frac{1-dn}{2}\right)^2$=constante

d)

Comme pour $n\geq1$, $P_n+Q_n+R_n=1$

On en déduit que (Q_n) est constante.

$P_n=\frac{(1+P_0-R_0)^2}{4}$

$R_n=\frac{(1-P_0+R_0)^2}{4}$

Et $Q_n=1-P_n-R_n$.

Bonus, Voici un programme python calculer P_n, R_n, Q_n :
https://repl.it/join/jfpdsfyb-hanralatalliar

Version Javascript : https://codepen.io/henry-letellier/pen/bGVQGXq