$|x| = \begin{cases} x \ , si\ x \geq 0 \\ -x \ , si\ x \leq 0 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R} , \sqrt{x^2} = |x|$ .

INEGALITE TRIANGULAIRE

Soient a et b des réels $|a+b| \leq |a| + |b|$ .

Démonstration : Si $a \geq 0\ on\ a$ $|a|^2$=$a^2$ et si $a < 0\ , on\ a\ |a|^2 = (-a)^2 = a^2$

Dans tous les cas , $|a|^2 = a^2$.

Soient deux nombres réels a et b :

Si a et b sont positifs , alors $ab\ est\ positif\ , on\ a\ donc\ |ab| = ab = |a| \times |b|$ ;

Si a et b sont négatifs on a $|a| = -a\ \ et\ |b| = -b\ donc\ |ab| = ab = |a| \times |b|$

Soient a et b deux nombres réels .

$|a+b|^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2 \times |ab|$

De plus , on sait que $|ab|\ est\ le\ plus\ des\ deux\ nombres\ ab\ et - ab\ donc\ |ab| \geq ab$

Nous en déduisons que $2|ab| + a^2 + b^2 \geq 2ab + a^2 + b^2 \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2|ab| \geq (a+b)^2$

$\Leftrightarrow (|a| + |b|)^2 \geq (a+b)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(|a| + |b|)^2} = |a| + |b| \geq |a+b|$

$f(x) = x^2 + x\ \ sur\ D_f = \mathbb{R}$

$f\ est\ définie\ et\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}\ comme\ somme\ de\ fonctions\ dérivables$ :

$\forall x \in D_f , f'(x) = 2x + 1$

$(u+v)' = u' + v'\ \ avec\ u\ et\ v\ des\ fonctions\ quelconques\ définies\ et\ dérivables;$

$f(x) = x^2 + x^4\ \ est\ définie\ et\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}\ comme\ somme\ de\ fonctions\ dérivables;$

$u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x$

$v(x) = x^4 \quad v'(x) = 4x^3\ \ \forall x\ \in \mathbb{R}\ \ , f'(x) = 2x + 4x^3$=$2x(2x^2 + 1)$

Propriété : $(k \times U)' = k \times U'$

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \quad f'(x) = 3 \times 2x - 2 = 6x - 2$

Propriété :

$(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$

Démonstration : $posons\ g(x) = u(x) \times v(x)$

$\tau = \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}$

$= \frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a+h)+u(a)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}$

$= \frac{v(a+h)\left(u(a+h)-u(a)\right)+u(a)\left(v(a+h)-v(a)\right)}{h}$

$= v(a+h) \times \frac{u(a+h-u(a)}{h} + u(a) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$

$Or\ u\ et\ v\ sont\ dérivables\ sur\ I\ donc\ \lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)\ et\ \lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a);$

De plus $\lim_{h\to 0} v(a+h) = v(a)\ \ et\ \ \lim_{h\to 0} u(a) = u(a)$

Par conséquent , $\lim_{h\to 0} \tau = v(a) \times u'(a) + u(a) \times v'(a)$

$pour\ a = x\ :\ \left(u(x) \times v(x)\right)' = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$ .

Propriétés : $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

f(x)=$\frac{1}{3x^2+1}$ $\quad u(x) = 3x^2 + 1 \quad u'(x) = 6x\ \ donc\ f'(x) = \frac{-6x}{(3x^2+1)^2}$

Exercice 37 page 104 :

$f(x) = \frac{1}{x^2+9}\ f\ est\ définie\ sur\ \mathbb{R}\ car\ x^2 + 9 > 0\ et\ u(x) = x^2 + 9\ \ , u'(x) = 2x\ donc\ pour$

Tout $x \in \mathbb{R}\ \ f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+9)^2}\ or\ (x^2+9)^2 > 0\ donc\ le\ signe\ de\ f'(x) dépendra\ du\ signe\ de -2x$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0\ par\ conséquent\ \ f\ est\ décroissante\ sur\ ]-\infty; o]\ et\ croissante$

$sur\ [0; +\infty[$ .

$h(x) = \frac{2-x}{3x+5}\ h\ est\ définie\ si\ , et\ seulement\ si\ 3x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{5}{3}$

$u(x) = 2 - x\ et\ \ u'(x) = -1$

$v(x) = 3x + 5 \quad v'(x) = 3$

$h\ est\ dérivable\ dur\ D_h comme\ quotient\ de\ fonctions\ dérivables\ et\ pour\ tout\ x \in D_h, on\ a :$

$h'(x) = \frac{-1\times(3x+5)-3\times(2-x)}{(3x+5)^2} = \frac{-3x-5-6+3x}{(3x+5)^2} = \frac{-11}{(3x+5)^2} < 0$

Par conséquent la fonction h est strictement décroissante sur Dh.

x$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ g est définie si , et seulement si $x > 0\ \ donc\ D_g = ]0; +\infty[$ .

$g\ est\ dérivable\ sur\ D_g comme\ somme\ de\ fonctions\ dérivables\ et\ on\ a$ :

$\forall x > 0\ , g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}\times x} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}\times x}\ or\ 2\sqrt{x} \times x > 0$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Par conséquent , $\forall x \in [1; +\infty[\ \ g\ est\ croissante\ et\ décroissante\ sur\ ]0; 1]$ .

$i(x) = \frac{3x-1}{2x+1}\ i\ est\ définie\ si, et\ seulement\ si\ 2x + 1 \neq 0\ \ \Leftrightarrow x \neq -0{,}5\ \ donc\ D_i = \mathbb{R} \setminus \{-0{,}5\}$

$u(x) = 3x - 1 \quad\ \ et\ \ u'(x) = 3$

$v(x) = 2x + 1\ \ et\ v'(x) = 2$

$i\ est\ dérivable\ sur\ D_i\ \ comme\ quotient\ de\ fonctions\ dérivables \quad et\ on\ a$ :

$\forall x \in D_i\ , i'(x) = \frac{3(2x+1)-2(3x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{6x+3-6x+2}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2} > 0\ donc\ i\ est$

Strictement croissante sur $D_i$.

Pour le 17/06/2020 : Lire le cours et traiter tous les savoir faire ;Etudier la position relative de deux courbes ; Faire les exercices 39,40, 45 ,et 48 page 104 à106.