CHAP 6

Fonction exponentielle

1 L'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0) = 1$

Lemme 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.*

Démonstration. Soit φ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonction dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $\in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)[-f'(-x)] = 0$. Donc φ est constante et comme $\varphi(0) = f(0) \times f(0) = 1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) \times f(-x) = 1$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$. □

Proposition 2. *L'équation différentielle $y' = y$ avec condition initiale $y(0) = 1$ admet une unique solution définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et se note* exp.

Démonstration ✎ On admet l'existence d'une solution et on prouve l'unicité. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions qui vérifient l'équation différentielle de la proposition précédente. D'après le lemme précédent, g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{[g(x)]^2} = 0.$$

Ainsi, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est constante et vaut $\dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ soit $f(x) = g(x)$. □

Proposition 3.

i) La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

ii) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

i) Supposons par l'absurde que exp n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(a) \leqslant 0$ et $a \neq 0$. On a déjà vu que (lemme) $\exp(a) \neq 0$. On a alors $\exp(a) < 0$. Comme exp est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in [\exp(a), 1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in [a, 0]$ si $a < 0$ ou $[0; a]$ si $a > 0$ tel que $\exp(b) = 0$: absurde.

ii) On sait maintenant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. □

2 Relations fonctionnelles

Proposition 4. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors, on a les égalités :*

1. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;
2. $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$;
3. $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
4. *pour tout* $p \in \mathbb{Z}$, $\exp(px) = \exp(x)^p$.

Démonstration.

1. On a vu dans la démonstration du premier lemme l'égalité que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. Alors, (comme la fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$), pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ $h_a(x) = \exp(x + a)\exp(-x)$. La fonction h_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_a'(x) = \exp(x + a)\exp(-x) + \exp(x + a)[-\exp(-x)] = 0$. Ainsi, la fonction h_a est constante sur $\mathbb{R}$ et vaut $h_a'(0) = \exp(a)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x + a)\exp(-x) = \exp(a)$ qui se réécrit $\exp(x + a) = \exp(x)\exp(a)$.

3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, \exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Initialisation : on a $\exp(0 \times x) = \exp(0) = 1 = \exp(x)^0$. Donc l'égalité est vraie au rang 0.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'égalité est vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a $\exp((n+1)x) = \exp(nx+x) = \exp(nx)\exp(x) = \exp(x)^n \exp(x) = \exp(x)^{n+1}$ et l'égalité est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

   Enfin, pour un entier $p < 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(px) = \exp(-(-px)) = \dfrac{1}{\exp(-px)} = \dfrac{1}{\exp(x)^{-p}} = \exp(x)^p$. □

Remarque 5. Si on note e le nombre $\exp(1)$, on a pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\exp(p) = \mathrm{e}^p$ (on le prouve par récurrence sur $\mathbb{N}$ et on utilise la formule i pour étendre ce résultat à $\mathbb{Z}$). Plus généralement, on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. Les formules de la proposition précédente se réécrivent alors $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y, \mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$.

3 Étude de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$

Proposition 6. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \mathrm{e}^x - (x+1)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. On a alors le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$. □

Corollaire 7. *On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.*

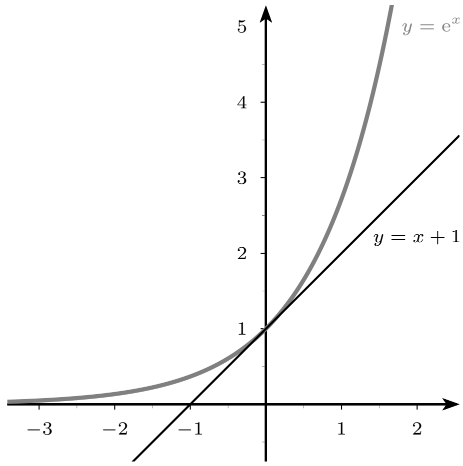
Démonstration ✎ On sait que $\lim_{x \to +\infty}(x+1) = +\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant x+1$. Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. En outre, $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$. □

En résumé (à retenir)

Le tableau de variations de la fonction exponentielle est le suivant.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
exp	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

La représentation graphique de la fonction exponentielle est donnée ci-dessous.



Proposition 8. *On a* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Démonstration. On commence par remarquer que pour $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} = \left(\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}\right)^2$. Or $e^{x/2} \geqslant \dfrac{x}{2} + 1 \geqslant \dfrac{x}{2}$. D'où $\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} \geqslant \dfrac{\sqrt{x}}{2}$. Ainsi, par passage au carré, on obtient $\dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{4}$. Par comparaison, comme $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$, il vient $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Enfin, $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$. □

Proposition 9. *On a* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0}.$$

On en déduit

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = e^0 = 1.$$ □

Proposition 10. *Soient I un intervalle et $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$.*

Démonstration. C'est un cas particulier la dérivée d'une fonction composée dont la formule a été vue au chapitre 5. □