贵州大学 2020-2021 学年第 2 学期考试试卷(A)

《概率论与数理统计》

注意事项：

1. 请考生按要求在试卷装订线内填写姓名、学号和年级专业。
2. 请仔细阅读各种题目的回答要求，在规定的位置填写答案。
3. 不要在试卷上乱写乱画，不要在装订线内填写无关的内容。
4. 满分 100 分，考试时间为 120 分钟。

题　号	一	二	三	四	五	总 分	统分人
得　分							

得　分	
评分人	

一、选择题（10 个小题，每小题 2 分，共 20 分）

(　　) 1、 随机变量 X_1 与 X_2 的概率密度函数分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases} \quad 与 \quad f_2(x)=\begin{cases}4e^{-4x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

则 $E(X_1+X_2)=$

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. 4　　C. 2，　　D. 6

(　　) 2、设随机变量 X 的方差 $D(X)=16$, $E(X^2)=25$ ，则 X 的数学期望 $E(X)=$

A. ±4　　B. ±3　　C. ±9　　D. ±5

(　　) 3、设 $X\sim B(1,p)$ ，其样本: $X_1,X_2,\cdots,X_n$ ，则参数 p 的矩估计为 $\hat{p}=$

A. $\overline{X}$　　B. 1　　C. $\dfrac{\overline{X}}{3}$　　D. $\dfrac{\overline{X}}{2}$

(　　) 4．设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $D(X)=1$ 、$D(Y)=2$ ，则 $3X-2Y$ 的方差为

A. 3　　B. -1　　C. 17　　D. 1

(　　) 5、设标准正态分布$\Phi(x)$的上α（$\alpha=0.05$）分位点为z_α=1.645，则分布函数在该点的函数值为$\Phi(z_\alpha)$=

A.　0.95　　　　B.　1.645

C.　0.05　　　　D.　1

（　　）6、已知某种电子元件的寿命X（单位：h）服从指数分布：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

则$E(X^2)=$

A.　200　　　　B.　0.01

C.　10　　　　D.　0.02

(　　) 7. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，　$\mu=0.5$，$\sigma^2=0.0001$，容量为16的样本均值为$\overline{X}=0.54$，则Z检验统计量的值为

A. 0.0001　　B. 0.50　　C. 0.54　　D. 16

(　　) 8、 在假设检验中, 记H_0为原假设，则犯第二类错误是指

A.　H_0为真,接受H_0　　　　B.　H_0不真,拒绝H_0

C.　H_0为真,拒绝H_0　　　　D.　H_0不真,接受H_0

(　　) 9．若总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，随机抽取样本$X_1,\cdots,X_n$，则$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$服从分布

A.　$N(\mu,\sigma^2)$　　B.　$N(0,1)$　　C.　$N(1,\sigma^2)$　　D.　$N(\mu,1)$

(　　) 10、如果X, Y满足$D(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=D(\mathrm{X}-\mathrm{Y})$，则必有

A.　X与Y独立　　　　B.　D(X)=0

C.　X与Y不相关　　　　D.　D(Y)=0

得　分	
评分人	

二、填空题（10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1、设随机变量$U\sim\chi^2(3)$，$V\sim\chi^2(2)$，且U,V相互独立，则$E(UV)=$____________。

2、设X为随机变量，且$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，则对任意$\varepsilon>0$，根据切比雪夫不等式，$P(|X-\mu|<\varepsilon)\geq$______________。

3、设X_1,X_2,X_3相互独立，且$X_1\sim N(4,1)$，$X_2\sim N(5,9)$，$X_3\sim N(7,16)$，则$\left(X_1-4\right)^2+\left(\dfrac{X_2-5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{X_3-7}{4}\right)^2$服从的分布为_______________。

4、设连续型随机变量Y服从参数为θ的指数分布，则其方差$D(Y)=$_______________。

5、设X的分布函数为$F(x)$，则$Y=3X$-6的分布函数$G(y)$为 ______________。

6、已知$P(U)=0.4$，$P(V)=0.5$，当U与V互不相容时，$P(U\cup V)=$_____________。

7、若$X\sim U(1,4)$，则X概率密度函数为_______________。

8、设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本。记$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$，则$(\overline{X}-\mu)/(S/\sqrt{n})$服从______________分布。

9、设随机事件U与V相互独立，已知$P(U)=0.4$，$P(V)=0.5$，则$P(U-V)=$_______________。

10、设随机变量$U\sim F(9,2)$，则$\dfrac{1}{U}$服从的分布为_______________。

得　分	
评分人	

三、简答题（5个小题，每小题4分，共20分）

1. 甲、乙、丙三同学各自去解一道数学难题，设他们能答出的概率分别为$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$。求：（1）恰有1个人答出的概率。（2）难题能解出的概率。

2. 一种混杂的小麦品种，设其株高的标准差为$\sigma_0 = 14cm$，经提纯后随机地抽取10株，它们的株高(单位:cm)分别为

90 ，105 ，101 ，95 ，100 ，100 ，101 ，105 ，93 ，97

，其样本方差$s^2 = 24.233$，试检验提纯后的群体是否比原来的群体整齐?（设小麦的株高服从$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$\alpha = 0.01$，$\chi^2_{1-0.01}(9) = 2.088$）

3．设二维随机变量（X，Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & \text{x>0, y>0} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求$f_X(x)$;(2)求概率$P(Y \le X)$.

4．设总体X的分布律为

X	1	2	3
P_i	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta \in (0,1)$为待估参数，又设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为总体X的样本，试求θ的矩估计量，并就样本值$(3, 1, 2, 2, 3, 2)$求θ的估计值。

5．设二维随机变量(X,Y)的联合分布律如下表所示

X \ Y	-1	0	1	3
0	4/20	3/20	2/20	6/20
1	2/20	0	2/20	1/20

试求$Z = X + Y$的分布律。

得　分	
评分人	

四、计算题（3 个小题，每小题 10 分，共 30 分）

1、云食品公司从 X 国购买牛奶。公司怀疑供货商在牛奶中掺水以谋利。通过测定牛奶的冰点，可以检测出牛奶是否掺水，天然牛奶的冰点温度近似服从正态分布，均值$\mu_0 = -0.545\ {}^{o}\mathrm{C}$，标准差$\sigma = 0.08\ {}^{o}\mathrm{C}$。牛奶掺水可使冰点温度升高而接近于水的冰点温度$(0\ {}^{o}\mathrm{C})$。测得供货商提交的 16 批牛奶的冰点温度，其均值为$\bar{x} = -0.535\ {}^{o}\mathrm{C}$，问在显著性水平$\alpha = 0.05$下是否可以认为供货商在牛奶中掺水？$(z_\alpha = 1.645，\alpha = 0.05)$。

2．设总体X的密度函数$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0 \\ 0 \quad, x < 0 \end{cases}$，$(X_1, \cdots, X_n)$是取自总体的一个样本，求参数$\lambda$的最大似然估计。

3．某厂生产一批内径为$20mm$的钢管，设钢管内径$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，随机抽取 16 根钢管，测得样本均值$\overline{x} = 20.47mm$，样本标准差$s = 0.92mm$．求均值μ的置信度为90%的置信区间及其长度．（已知　$\alpha = 0.1$，$t_{0.05}(15) = 1.7531$）

得　分	
评分人	

五、证明题（10 分）

证明 对于任何常数c，随机变量X有

$$D(X) = E(X-c)^2 - (E(X)-c)^2$$

一、　选择题（10 个小题，每题 2 分，共 20 分）

1. A　2. B　3. A　4. C　5. A
6. A　7. D　8. D　9. B　10. C

二、　填空题（10 个小题，每题 2 分，共 20 分）

1．6　2．$1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$　3．$\chi^2(3)$　4．θ^2

5．$F(y/3+2)$　6．0.9　7．$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 1<x<4 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

8．$t(n-1)$　9．0.2　10．$F(2,9)$

三、简答题（5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

1.解：设事件$A=\{恰有1人答出\}$；事件$B=\{难题能解出\}$，则$\overline{B}=\{难题不能解出\}$。

（1）$P\{A\}=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{30}$……………………1 分

（2）$P(\overline{B})=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$……………………2 分

由$P(B)=1-P(\overline{B})$得……………………3 分

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$……………………4 分

2. 解：$H_0:\sigma \ge \sigma_0$， $H_1:\sigma < \sigma_0$ $(\sigma_0 = 14)$ ---------- 1 分

采用χ^2检验法。拒绝域为

$$\chi^2 = \frac{(n\text{-}1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha}(9) = \chi^2_{1-0.01}(9) = 2.088$$ --------------- 2 分

$n = 10$， $\sigma_0 = 14$， $s^2 = 24.233$，

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{218.1}{14^2} = 1.11 < 2.088$$ --------------- 3 分

故拒绝原假设H_0，认为检验提纯后的群体是比原来的群体整齐. --- 4 分

3．

$$(1)\ f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{\infty} 2e^{-2x-y}dy = 2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$ ………2分

(2) $P(Y \le X)$

$= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dxdy = \int_0^{\infty} e^{-y}dy\int_y^{\infty} 2e^{-2x}dx$..........1分

$= \int_0^{\infty} e^{-3y}dy = \frac{1}{3}$ （已改）.........2分

4. 解：

$$\mu_1=E\left(X\right)=\sum_{i=1}^{3}x_ip_i=1\cdot\theta^2+2\cdot2\theta\left(1-\theta\right)+3\left(1-\theta\right)^2=3-2\theta$$

$\theta=\dfrac{3-\mu_1}{2}$。……………………………………1 分

由矩估计法知，令 $\mu_1=E\left(X\right)=\overline{X}$，……………………………2 分

则参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{2}$ ……………………………3 分

对给定样本值 $\left(3,1,2,2,3,2\right)$，由于 $\overline{x}=2.1667$，

故 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=0.4167$ ……………………………4 分

5. 解：先列出如下表格

$\left(X,Y\right)$	(0，−1)	(0，0)	(0，1)	(0，3)	(1，−1)	(1，0)	(1，1)	(1，3)
$Z=X+Y$	−1	0	1	3	0	1	2	4
P_{ij}	4/20	3/20	2/20	6/20	2/20	0	2/20	1/20

……………………………2 分

因此，$Z=X+Y$ 的分布律为

Z	−1	0	1	2	3	4
P_k	4/20	5/20	2/20	2/20	6/20	1/20

……………………………4 分

四、计算题（3 个小题，每小题 10 分，共 30 分）

1. 解：按题意需检验

$H_0:\mu \le \mu_0 = -0.545$（设牛奶未掺水），

$H_1:\mu > \mu_0$（设牛奶已掺水） ……2 分

此检验问题的拒绝域为

$$z=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_{0.05}(5)=1.645$$ …… 5 分

$$z=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{-0.535-(-0.545)}{0.08/\sqrt{16}}=0.5 < z_{0.05}(5)=1.645$$ ……8 分

所以在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下认为牛奶供货商没有在牛奶中掺水。

……10 分

2． 解：设 $(x_1,...,x_n)$ 是样本 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的一组观测值，

似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i}$， ……4 分

则 $\ln L(x_1,\cdots,xn;\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i$， ……6 分

令 $\frac{d\ln L(x_1,\cdots,xn;\lambda)}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}X_\mathrm{i}=0$ ……8 分

所以，$\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}$ 是 λ 的最大似然估计。 ……10 分

3. 解：设 $x_1,x_2,...,x_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本. 均值 μ（σ^2 未知时）的置信区间为

$$(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$$ ……**4 分**

当 $\alpha=0.1$, $n=16$， $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.05}(15)=1.7531$

$$\overline{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=20.47-1.7531\times\frac{0.92}{\sqrt{16}}\approx 20.07$$ …… 6 分

$$\overline{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=20.47+1.7531\times\frac{0.92}{\sqrt{16}}\approx 20.87$$ …… 8 分

故所求的置信区间为$(20.07, 20.87)$， …… 9 分

其区间长度为$L = 0.8mm$ …… 10 分

得　分	
评分人	

五、证明题（10 分）

证明:

$E(X-c)^2 = E(X^2 - 2Xc + c^2) = EX^2 - 2cEX + c^2$ ------- 3 分

$(EX-c)^2 = (EX)^2 - 2cEX + c^2$ ------------ 5 分

所以两式之差为$EX^2 - (EX)^2 = D(X)$ -------------- 10 分