

# Eiklīda telpas

Henrik Gabrielyan

the 20 of May 2019

1212. – 1216.

$$1212. \ 5x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$F_s = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$|5| = 5 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(-2 + 1) + (-5 + 2) + \alpha = 1 - 3 + \alpha = \alpha > 2 \end{aligned}$$

Eiklīda telpa

**Def.** Par **Eiklīda telpu** sauc jebkuru pāri  $(E, F)$ , kur  $E$  ir lineāra telpa pār  $R$  un  $F$  ir pozitīvi noteikta kvadrātiska forma.

$F$  atbilstošo simetrisko bilineāro formu sauc par šīs **Eiklīda telpas skalāro reizinājumu**.

$x$  un  $y$  skalārais reizinājums :  $(x, y)$

Izvēlamies bāzi, kurā  $F$  ir normālformā.

Tajā  $F(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$

$$F_e = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Skalārā reizinājuma īpašības:

$$* (x, y) = (y, x)$$

$$* (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$$

$$* (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$$

$$* x \neq 0 \rightarrow (x, x) > 0$$

$$(0, 0) = 0$$

Vektora  $x$  garums:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Leņķis starp vektoriem  $x$  un  $y$

$$\angle(x, y) = \arccos \frac{(x, y)}{|x||y|}$$

$$x \neq 0, y \neq 0$$

Košī nevienādība

$$\begin{aligned}
 |(x, y)| &\leq |x| \cdot |y| \\
 \updownarrow \\
 (x, y)^2 &\leq |x|^2 |y|^2 \\
 0 &\leq (x - \alpha y, x - \alpha y) = \\
 &= (x, x - \alpha y) - \alpha(y, x - \alpha y) = \\
 &= (x, x) - \alpha(x, y) - \alpha(y, x) - \alpha^2(y, y) = \\
 &= (y, y)\alpha^2 - 2(x, y)\alpha + (x, x) \\
 &\Rightarrow y \neq 0
 \end{aligned}$$

**Def.** Saka, ka vektori  $x$  un  $y$  ir ortogonāli  $\Leftrightarrow (x, y) = 0$ . Apzīmē, kā  $x \perp y$ .

**Def.** Vektoru sistēmu  $e_1, e_2, \dots, e_k$  sauc par ortogonālu  $\Leftrightarrow \forall i \forall j (i \neq j \rightarrow e_i \perp e_j)$

**Teorēma.** Ortogonāla nenulles vektoru sistēma lineāri neatkarīga  
 $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$  pareizināsim skalāri ar  $e_i$   
 $(e_i, \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k) = (e_i, 0)$   
 $\sum_{j=1}^k \alpha_j (e_i, e_j) = 0$

**Def.** Saka, ka vektors  $x$  ir normēts  $\Leftrightarrow |x| = 1$

Vektoru  $x$  normēšana:

$$x \rightarrow \frac{x}{|x|} = \frac{1}{|x|} x$$

**Def.** Ortogonālu vektoru sistēmu, kas sastāv no normētiem vektoriem, sauc par ortonormētu vektoru sistēmu. Ja tā ir lineārās telpas bāze, tad to sauc par ortonormētu bāzi.

**Teorēma.** Jebkurā galīgi dimensionālā Eiklīda telpā eksistē ortonormēta bāze.

Jebkuru ortonormētu vektoru sistēmu var papildināt līdz ortonormētai bāzei.

**Pier.** (E,F) eksistē bāze  $e_1, \dots, e_n$ , kurā F ir normālformā:

$$F_e = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = (f_{ij})$$

$$f_{ij} = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{ja } i \neq j \\ 1, & \text{ja } i = j \end{cases}$$

$$e_1, \dots, e_k$$

$$\dim E = n > k$$

$$\begin{cases} (x, e_1) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (x, e_k) = 0 \end{cases}$$

$$k \text{ vien.}$$

$$n \text{ mainiigie}$$

$$k < n$$