

Eiklīda telpa

Henrik Gabrielyan

the 27 of May 2019

Pier. $E = A^\top \cdot A$

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$(x, y) = (A(x), A(y))$$

$$A \text{ - ortogonāls } \Leftrightarrow A^\top \cdot A = E$$

$$A \cdot A^\top = E$$

$$A^{-1} = A^\top$$

$$f(x, y) = x_e^\top \cdot F_e \cdot y_e$$

$$(x, y) = x_e^\top \cdot E \cdot y_e = x_e^\top \cdot y_e \text{ shouldn't } E \text{ be Gram matrix?}$$

$$x^\top \cdot y = (A \cdot x)^\top \cdot (A \cdot y)$$

$$x^\top \cdot E \cdot y = x^\top \cdot (A^\top \cdot A) \cdot y$$

\Downarrow

$$E = A^\top \cdot A$$

What for is this here?

$$A_g = P_{eg}^{-1} \cdot A_e \cdot P_{eg}$$

$$F_g = P_{eg}^T \cdot F_e \cdot P_{eg}$$

T.1 Katrai kvadrātiskai formai F Eiklīda telpā eksistē ortonormēta bāze e , tāda ka F_e ir diagonālmatrixa.

T.2 Jebkuru kvadrātisku formu ar ortogonāliem pārveidojumiem var novest kanoniskajā formā.

T.3 Ja F un G ir kvadrātiskas formas, un vismaz viena no tām ir pozitīvi noteikta, tad eksistē bāze, kurā abas šīs formas ir kanoniskajā formā.

Def. Lineāru operatoru A Eiklīda telpā E sauc par simetrisku \Leftrightarrow

$$\forall x, y \in E \quad (x, A(y)) = (A(x), y)$$

Def. Simetriska operatora matricu ortonormētā bāzē sauc par simetrisku matricu. Īpašības :

* A - simetriska $\Leftrightarrow A^T = A$

* $A = (a_{ij})$ - simetriska $\Leftrightarrow \forall i, j (a_{ij} = a_{ji})$

$$\forall x \forall y$$

$$x^T (A \cdot y) = (A \cdot x)^T \cdot y$$

$$x^T \cdot A \cdot y = x^T \cdot A^T \cdot y$$

$$\text{tātad } A = A^T$$

$$F_e = P_{se} \cdot F_s \cdot P_{se} = P_{se}^{-1} \cdot F_s \cdot P_{se} \quad F_e?$$

T.4 Katram simetriskam operatoram Eiklīda telpā eksistē ortonormēta bāze, kurā tā matrica ir diagonālmatrix.

Pier: visas n īpašvērtības ir reālas - atliekam. No īpašvektoriem var izveidot ortonormētu bāzi: ar mat. indukciju.

Bāze: $n = 1$ - triviāla: λ_1 - īpašvērtība, $x \neq 0$ - īpašvektors

$\frac{x}{|x|}$ - ortonormēta bāze. Operatora A matrica - 1×1

Pāreja: pieņemam, ka dimensijā līdz $n - 1$ esam pierādījuši.

$L' = \{e_1\}^\perp$. L' ir invarianta apakštelpa

$x \in L' \Leftrightarrow (x, e_1) = 0$

$A(x) \in L' : (A(x), e_1) = (x, A(e_1)) = (x, \lambda_1 \cdot e_1) = \lambda_1 \cdot (x, e_1) = \lambda_1 \cdot 0 = 0$

$E = \text{span}(e_1) \oplus L'$

$A = A_1 \oplus A'$

$\dim L' = n - 1$ Pēc ind. pieņ. L' eksistē ortonormēta īpašvektoru bāze e_2, \dots, e_n

Pielikam klāt e_1 , dabūjam ortonormētu īpašvektoru bāzi telpā E

1585. - 1587.

1586. Ortonormētā bāzē sim. operatoram / kvadrātiskai formai ir šāda matrica.

Atrast ortonormētu bāzi, kurā tam/ tai ir diagonālmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

1) Atrast īpašvērtības, ieskaitot to kārtas.

$$\lambda_{1,2} = 9$$

$$\lambda_3 = 27$$

2) Atrast īpašvektorus.

3) Ortogonalizēt vienas un tās pašas īpašvērtības īpašvektorus.

4) Normēt.

īpašvektorus meklējam

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 & | & 0 \\ -8 & 8 & -4 & | & 0 \\ 4 & -4 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$FAS : (1; 1; 0) = e_1$$

$$(-1/2; 0; 1) \quad (-1; 0; 2) = e_2$$

$$\begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 & | & 0 \\ -8 & -10 & -4 & | & 0 \\ 4 & -4 & -16 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & | & 0 \\ -4 & -5 & -2 & | & 0 \\ -5 & -4 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & | & 0 \\ 0 & -9 & -18 & | & 0 \\ 0 & -9 & -18 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$FAS : e_3 = (2; -2; 1)$$

$$e_1' = e_1$$

$$e_2' = (-1; 0; 2) - \frac{(-1) \cdot 1 + 0 + 1 + 2 \cdot 0}{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot (1; 1; 0) = (-1; 0; 2) -$$

$$-\frac{-1}{2}(1; 1; 0) = (-1; 0; 2) + (1/2; 1/2; 0) = (-1/2; 1/2; 2) \quad (-1; 1; 4)$$

$$A_{e'''} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

what is overline here? in Hermit

R

Simetriskas bilineāras formas

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

$$f(x, y) = f(y, x)$$

$$F(x) = f(x, x)$$

F_e - simetriska

$$F_e^T = F_e$$

C

Ermita bilineāras formas

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \overline{x_i} \cdot y_j$$

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)}$$

$$f(x, \alpha y) = \alpha \cdot f(x, y)$$

$$f(\alpha \cdot x, y) = \overline{\alpha} \cdot f(x, y)$$

$$F(x) = f(x, x)$$

F_e - Hermitu matrica

$$F_e^* = F_e$$

$$a_{ji} = \overline{a_{ij}}$$

$$A^* = \overline{A^T}$$

(1)