Eiklīda telpas

Henrik Gabrielyan

the 20 of May 2019

<u>1212. – 1216.</u>

1212. $5x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$F_s = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$|5| = 5 > 0$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 - 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -(-2+1) + (-5+2) + \alpha = 1 - 3 + \alpha = \alpha > 2$$

Eiklīda telpa

<u>Def.</u> Par **Eiklīda telpu** sauc jebkuru pāri (E,F), kur E ir lineāra telpa pār R un F ir pozitīvi noteikta kvadrātiska forma.

F atbilstošo simetrisko bilineāro formu sauc par šīs **Eiklīda telpas skalāro reizinājumu**.

x un y skalārais reizniājums : (x, y)

Izvēlamies bāzi, kurā F ir normālformā.

Tajā $F(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$

$$F_e = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$

Skalārā reizinājuma īpašības:
* $(x, y) = (y, x)$
* $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
* $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
* $x \neq 0 \rightarrow (x, x) > 0$
$(0, 0) = 0$

Vektora x garums:
$|x| = \sqrt{(x, x)}$
$|x| = \sqrt{x_1^2 = x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Leņķis starp vektoriem x un y
$\angle(x, y) = arccos\frac{(x,y)}{|x||y|}$
$x \neq 0, y \neq 0$

Košī nevienādība

$|(x,y)| \leq |x| * |y|$
$\updownarrow$
$(x,y)^2 \leq |x|^2|y|^2$
$0 \leq (x - \alpha y, x - \alpha y) =$
$= (x, x - \alpha y) - \alpha(y, x - \alpha y) =$
$= (x,x) - \alpha(x,y) - \alpha(y,x) - \alpha^2(y,y) =$
$= (y,y)\alpha^2 - 2(x,y)\alpha + (x,x)$
$\Rightarrow y \neq 0$

Def. Saka, ka vektori x un y ir ortogonāli $\Leftrightarrow (x,y) = 0$. Apzīmē, kā $x \perp y$.

Def. Vektoru sistēmu $e_1, e_2, \ldots, e_k$ sauc par ortogonālu $\Leftrightarrow \forall i \forall j (i \neq j \rightarrow e_i \perp e_j)$

Teorēma. Ortogonāla nenulles vektoru sistēma lineāri neatkarīga
$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k = 0$ pareizināsim skalāri ar e_i
$(e_i, \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k) = (e_i, 0)$
$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j (e_i, e_j) = 0$

Def. Saka, ka vektors x ir normēts $\Leftrightarrow |x| = 1$

Vektoru x normēšana:

$x \rightarrow \frac{x}{|x|} = \frac{1}{|x|}x$

Def. Ortogonālu vektoru sistēmu, kas sastāv no normētiem vektoriem, sauc par ortonormētu vektroru sistēmu. Ja tā ir lineārās telpas bāze, tad to sauc par ortonormētu bāzi.

<u>Teorēma.</u> Jebkurā galīgi dimensionālā Eiklīda telpā eksistē ortonormēta bāze.
Jebkuru ortonormētu vektoru sistēmu var papildināt līdz ortonormētai bāzei.

<u>Pier.</u> (E,F) eksistē bāze $e_1, \ldots, e_n$, kurā F ir normālformā:

$$F_e = \begin{pmatrix} 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & 1 \end{pmatrix} = (f_{ij})$$

$$f_{ij} = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0, ja & i \neq j \\ 1, ja & i = j \end{cases}$$

$e_1, \ldots, e_k$
$dimE = n > k$

$$\begin{cases} (x, e_1) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ (x, e_k) = 0 \end{cases}$$

$k\ vien.$
$n\ mainiigie$
$k < n$