Eiklīda telpa

Henrik Gabrielyan

the 27 of May 2019

<u>Pier.</u> $E = A^\intercal \cdot A$

$(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$
$(x, y) = (A(x), A(y))$

A - ortogonāls $\Leftrightarrow A^\intercal \cdot A = E$
$A \cdot A^\intercal = E$
$A^{-1} = A^\intercal$

$f(x, y) = x_e^\intercal \cdot F_e \cdot y_e$
$(x, y) = x_e^\intercal \cdot E \cdot y_e = x_e^\intercal \cdot y_e$ shouldn't E be Gram matrix?
$x^\intercal \cdot y = (A \cdot x)^\intercal \cdot (A \cdot y)$
$x^\intercal \cdot E \cdot y = x^\intercal \cdot (A^\intercal \cdot A) \cdot y$
$\Downarrow$
$E = A^\intercal \cdot A$

What for is this here?

$A_g = P_{eg}^{-1} \cdot A_e \cdot P_e g$

$F_g = P_{eg}^{\intercal} \cdot F_e \cdot P_{eg}$

T.1 Katrai kvadrātiskai formai F Eiklīda telpā eksistē ortonormēta bāze e, tāda ka F_e ir diagonālmatrica.
T.2 Jebkuru kvadrātisku formu ar ortogonāliem pārveidojumiem var novest kanoniskājā formā.
T.3 Ja F un G ir kvadrātiskas formas, un vismaz viena no tām ir pozitīvi noteikta, tad eksistē bāze, kurā abas šīs formas ir kanoniskajā formā.

Def. Lineāru operatoru A Eiklīda telpā E sauc par simetrisku $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in E(\ (x, A(y)) = (A(x), y)\ )$$

Def. Simetriska operatora matricu ortonormētā bāzē sauc par simetrisku matricu. Īpašības :
* A - simetriska $\Leftrightarrow$ $A^{\intercal}$ = A
* A = (a_{ij}) - simetriska $\Leftrightarrow \forall i, j(a_{ij} = a_{ji})$

$\forall x \forall y$

$x^{\intercal}(A \cdot y) = (A \cdot x)^{\intercal} \cdot y$

$x^{\intercal} \cdot A \cdot y = x^{\intercal} \cdot A^{\intercal} \cdot y$

tātad $A = A^{\intercal}$

$F_e = P_{se} \cdot F_s \cdot P_{se} = P_{se}^{-1} \cdot F_s \cdot P_{se}$ $\quad F_e$?

T.4 Katram simetriskam operatoram Eiklīda telpā eksistē ortonormēta bāze, kurā tā matrica ir diagonālmatrica.

Pier: visas n īpašvērtības ir reālas - atliekam. No īpašvektoriem var izveidot ortonormētu bāzi: ar mat. indukciju.

Bāze: n = 1 - triviāla: λ_1 - īpašvērtība, $x \neq 0$ - īpašvektors

$\frac{x}{|x|}$ - ortonormēta bāze. Operatora A matrica - 1 x 1

Pāreja: pieņemam, ka dimensijā līdz $n-1$ esam pierādījuši.

$L^{'} = \{e_1\}^{\perp}$. $L^{'}$ ir invarianta apakštelpa
$x \in L^{'} \Leftrightarrow (x, e_1) = 0$
$A(x) \in ?L^{'}: \quad (A(x), e_1) = (x, A(e_1)) = (x, \lambda_1 \cdot e_1) = \lambda_1 \cdot (x, e_1) = \lambda_1 \cdot 0 = 0$

$E = span(e_1) \oplus L^{'}$
$A = A_1 \oplus A^{'}$

$dimL^{'} = n - 1$ Pēc ind. pieņ. $L^{'}$ eksistē ortonormēta īpašvektoru bāze $e_2, \ldots, e_n$
Pielikam klāt e_1, dabūjam ortnormētu īpašvektoru bāzi telpā E

1585. - 1587.
1586. Ortonormētā bāzē sim. operatoram / kvadrātiskai formai ir šāda matrica.
Atrast ortonormētu bāzi, kurā tam/ tai ir diagonālmatrica.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

1) Atrast īpašvērtības, ieskaitot to kārtas.

$\lambda_{1,2} = 9$
$\lambda_3 = 27$

2) Atrast īpašvektorus.
3) Ortogonalizēt vienas un tās pašas īpašvērtības īpašvektorus.
4) Normēt.

īpašvektrous meklējam

$$\begin{pmatrix} \text{8 -8 4}|0 \\ -8\ 8\ -4|0 \\ \text{4 -4 2}|0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{8 -8 4}|0 \\ 0\ 0\ 0|0 \\ 0\ 0\ 0|0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{2 -2 1}|0 \\ 0\ 0\ 0|0 \\ 0\ 0\ 0|0 \end{pmatrix}$$

$FAS : (1; 1; 0) = e_1$
$(-1/2; 0; 1)\ (-1; 0; 2) = e_2$

$$\begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 & | & 0 \\ -8 & -10 & -4 & | & 0 \\ 4 & -4 & -16 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & | & 0 \\ -4 & -5 & -2 & | & 0 \\ -5 & -4 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & | & 0 \\ 0 & -9 & -18 & | & 0 \\ 0 & -9 & -18 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$FAS : e_3 = (2; -2; 1)$

$$e_1^{'} = e_1$$

$$e_2^{'} = (-1;0;2) - \frac{(-1)\cdot 1 + 0 + 1 + 2\cdot 0}{1^2+1^2+0^2}\cdot(1;1;0) = (-1;0;2)-$$

$$-\frac{-1}{2}(1;1;0) = (-1;0;2) + (1/2;1/2;0) = (-1/2;1/2;2)\ (-1;1;4)$$

$$A_{e'''} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

what is overline here? in Hermit

$$
\begin{aligned}
R \qquad & \qquad C \\
\text{Simetriskas bilineāras formas} \qquad & \qquad \text{Ermita bilineāras formas} \\
f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_i \cdot y_j \qquad & \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot \overline{x_i} \cdot y_j \\
f(x,y) = f(y,x) \qquad & \qquad f(x,y) = \overline{f(y,x)} \\
& \qquad f(x,\alpha y) = \alpha \cdot f(x,y) \\
& \qquad f(\alpha \cdot x, y) = \overline{\alpha} \cdot f(x,y) \\
\\
F(x) = f(x,x) \qquad & \qquad F(x) = f(x,x) \\
F_e\text{- simetriska} \qquad & \qquad F_e \text{ - Hermitu matrica} \\
F_e^{\intercal} = F_e \qquad & \qquad F_e^{*} = F_e \\
& \qquad a_{ji} = \overline{a_{ij}} \\
& \qquad A^{*} = \overline{A^{\intercal}}
\end{aligned} \tag{1}
$$