Eiklīda telpas

Henrik Gabrielyan

the 20th of May 2019

[section]

1212. – 1216.

1212. Uzdevuma formulējums: Kādām α vērtībām šī kvadrātiskā forma ir pozitīvi noteikta?

$$5x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$F_s = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$|5| = 5 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 - 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -(-2+1) + (-5+2) + \alpha = 1 - 3 + \alpha = \alpha > 2$$

Eiklīda telpa

Def. Par **Eiklīda telpu** sauc jebkuru pāri (E,F), kur E ir lineāra telpa pār R un F ir pozitīvi noteikta kvadrātiska forma.

F atbilstošo simetrisko bilineāro formu sauc par šīs **Eiklīda telpas skalāro reizinājumu**.

Apzīmējums : (x, y)

Izvēlamies bāzi, kurā F ir normālformā.

Tajā $F(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$

$$F_e = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

Skalārā reizinājuma īpašības:
* $(x, y) = (y, x)$
* $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
* $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
* $x \neq 0 \rightarrow (x, x) > 0$
$(0, 0) = 0$

Vektora x garums:
$|x| = \sqrt{(x, x)}$
$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Leņķis starp vektoriem x un y
$\angle(x, y) = arccos\frac{(x,y)}{|x||y|}$
$x \neq 0, y \neq 0$

Košī nevienādība

$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$

$\Updownarrow$

$(x, y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2$

Pier. Ja $x = 0$ vai $y = 0$, tad $(x, y) = 0$, un $0 \leq |x| \cdot |y|$ seko no $0 \leq |x|$ un $0 \leq |y|$. Turpmāk pieņemsim, ka $x \neq 0$ un $y \neq 0$.

Aplūkosim vektora $x - \alpha y$ skalāro kvadrātu, kur α ir reāls parametrs.

$$\begin{aligned}
0 &\leq (x - \alpha y, x - \alpha y) = \\
&= (x, x - \alpha y) - \alpha(y, x - \alpha y) = \\
&= (x, x) - \alpha(x, y) - \alpha(y, x) + \alpha^2(y, y) = \\
&= (y, y)\alpha^2 - 2(x, y)\alpha + (x, x)
\end{aligned}$$

$$\frac{D}{4} \leq 0$$
$$(x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) \leq 0$$
$$(x, y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2$$

■

Def. Saka, ka **vektori** x un y ir **ortogonāli** $\Leftrightarrow (x, y) = 0$. Apzīmē, kā $x \perp y$.

Def. **Vektoru sistēmu** $e_1, e_2, \ldots, e_k$ sauc par **ortogonālu** $\Leftrightarrow \forall i \forall j (i \neq j \rightarrow e_i \perp e_j)$

Teo. Ortogonāla nenulles vektoru sistēma lineāri neatkarīga
$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k = 0$ (pareizināsim skalāri ar e_i)
$(e_i, \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (e_i, e_j) = 0$

Def. Saka, ka **vektors** x ir **normēts** $\Leftrightarrow |x| = 1$
Vektoru x normēšana: $x \rightarrow \frac{x}{|x|}$
Lai pierādītu, ka x vektora normēšanai vajag dalīt uz $|x|$, varam vienādībā $|u| = \sqrt{u_1^2 + \ldots u_n^2} = 1$ ievietot $u_1 = \frac{v_1}{|v|} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + \ldots v_n^2}}$

Def. Ortogonālu vektoru sistēmu, kas sastāv no normētiem vektoriem, sauc par **ortonormētu vektroru sistēmu**. Ja tā ir lineārās telpas bāze, tad to sauc par **ortonormētu bāzi**.

Teorēma. Jebkurā galīgi dimensionālā Eiklīda telpā eksistē ortonormēta bāze.Jebkuru ortonormētu vektoru sistēmu var papildināt līdz ortonormētai bāzei.

Pier. (E,F) eksistē ortonormēta bāze $E = e_1, \dots, e_n$, kurā F ir normālformā:

$$F_e = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = (f_{ij})$$

$$f_{ij} = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0, ja \ \ i \neq j \\ 1, ja \ \ i = j \text{ (jo } |e_i| = 1 \text{ un } (e_i, e_i) = |e|^2 \cdot \cos 0°) \end{cases}$$

$$F_e \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{n} (e_i, e_i)$$

$e_1, \dots, e_k$

$dimE = n > k$

$$\begin{cases} (x, e_1) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (x, e_k) = 0 \end{cases}$$

what is x?