Henri Turunen

Demo 6

1.

$$x = \frac{1}{2}, \qquad h = 10^{-3}, \qquad f(x) = \sin x^2$$

$$D_0(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &\approx D_R(h) \\ &= \frac{4}{3} D_0\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} D_0(h) \\ &= \frac{4}{3} \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \cdot \frac{h}{2}} - \frac{1}{3} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\ &= \frac{4}{3} \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} - \frac{1}{6} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \\ &= \frac{4}{3} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} + \frac{10^{-3}}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{1}{2} - \frac{10^{-3}}{2}\right)^2}{10^{-3}} - \frac{1}{6} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} + 10^{-3}\right)^2 - \sin\left(\frac{1}{2} - 10^{-3}\right)^2}{10^{-3}} \\ &\approx 0{,}969. \end{aligned}$$

2.

Merkitään $y_1 = y, y_2 = y'$ j a $y_3 = y''$, jolloin alkuarvotehtävä

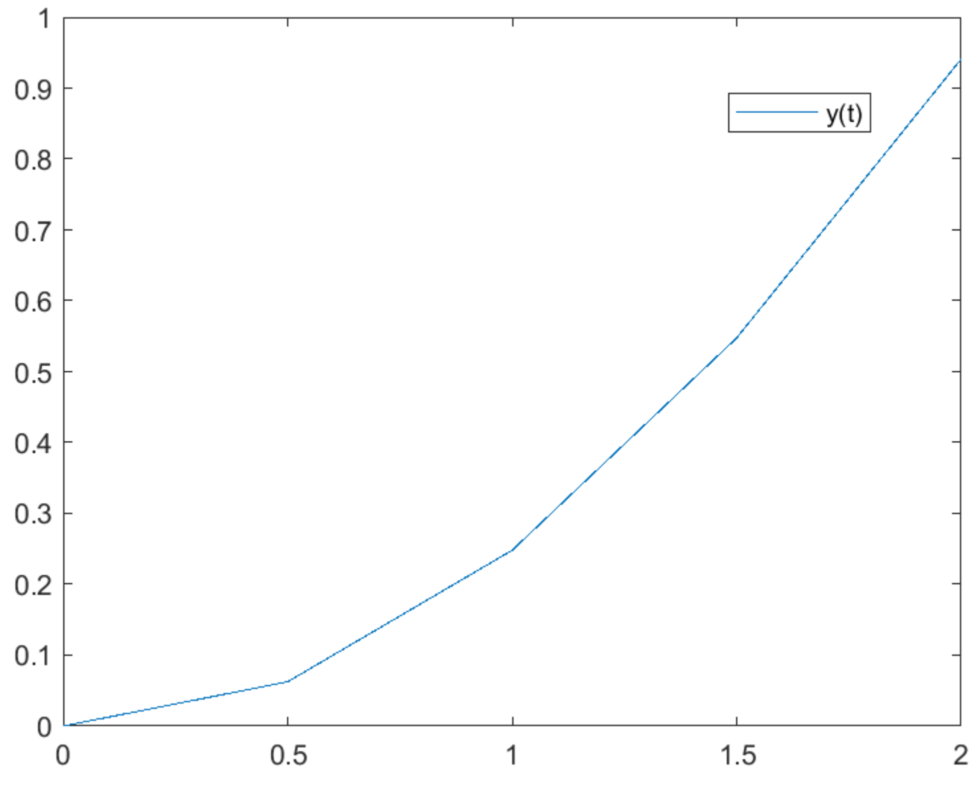
$$y''' + y''y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y''(0) = \frac{1}{2}$$

tulee muotoon

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -y_1 y_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nyt liitteenä olevan ohjelman ”rk4.m” voidaan ratkaista $y(t)$ neljännen kertaluvun RK-menetelmällä:

```
>> f = @(t,y) [y(2), y(3), -y(1) * y(3)]'

f =

  function_handle with value:

    @(t,y)[y(2),y(3),-y(1)*y(3)]'

>> A = rk4(0, 2, f, [0, 0, 1/2]', 5)

A =

         0    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000
         0    0.0625    0.2481    0.5477    0.9412
         0    0.2493    0.4898    0.7015    0.8625
    0.5000    0.4948    0.4602    0.3789    0.2621

>> plot(A(1,:), A(2,:))
```



3.

Alkuarvotehtävä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ja vielä kompaktimmin

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{y}', \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

missä

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyt toisen kertaluvun implisiittinen ABM-kaava

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + \frac{h}{12}(5\boldsymbol{f}_{n+1} + 8\boldsymbol{f}_n - \boldsymbol{f}_{n-1})$$

saadaan muotoon

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + \frac{h}{12}(5A\boldsymbol{y}_{n+1} + 8A\boldsymbol{y}_n - A\boldsymbol{y}_{n-1}) \Leftrightarrow \left(I - \frac{5h}{12}A\right)\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + \frac{h}{12}(8A\boldsymbol{y}_n - A\boldsymbol{y}_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y}_{n+1} = \left(I - \frac{5h}{12}A\right)^{-1}\left(\boldsymbol{y}_n + \frac{h}{12}(8A\boldsymbol{y}_n - A\boldsymbol{y}_{n-1})\right).$$

Kun askelpituus on $h = 1/4$, niin saadaan

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \left(I - \frac{5}{48}A\right)^{-1}\left(\boldsymbol{y}_n + \frac{1}{48}(8A\boldsymbol{y}_n - A\boldsymbol{y}_{n-1})\right).$$

Nyt alkuehto $\boldsymbol{y}_0$ on tiedossa ja $\boldsymbol{y}_1$ voidaan laskea neljännen kertaluvun RK-menetelmällä. Tämän jälkeen voidaan käyttää toistuvasti yllä olevaa kaavaa, jolloin Matlabista saadaan

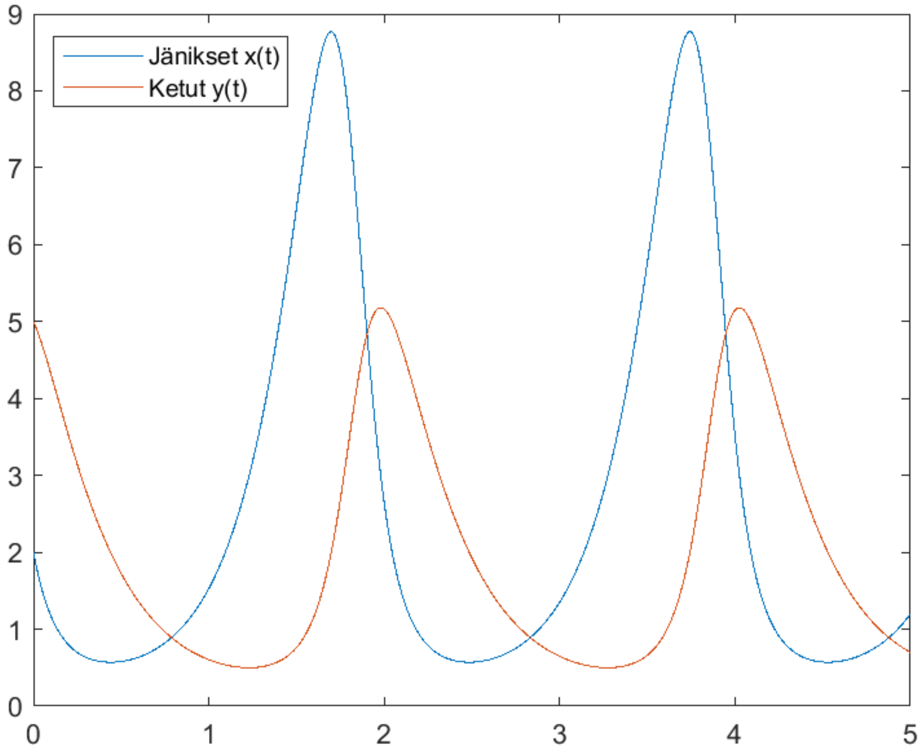
$$\boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{y}_4 \approx \begin{pmatrix} -0{,}6744 \\ -0{,}4328 \end{pmatrix}.$$

---

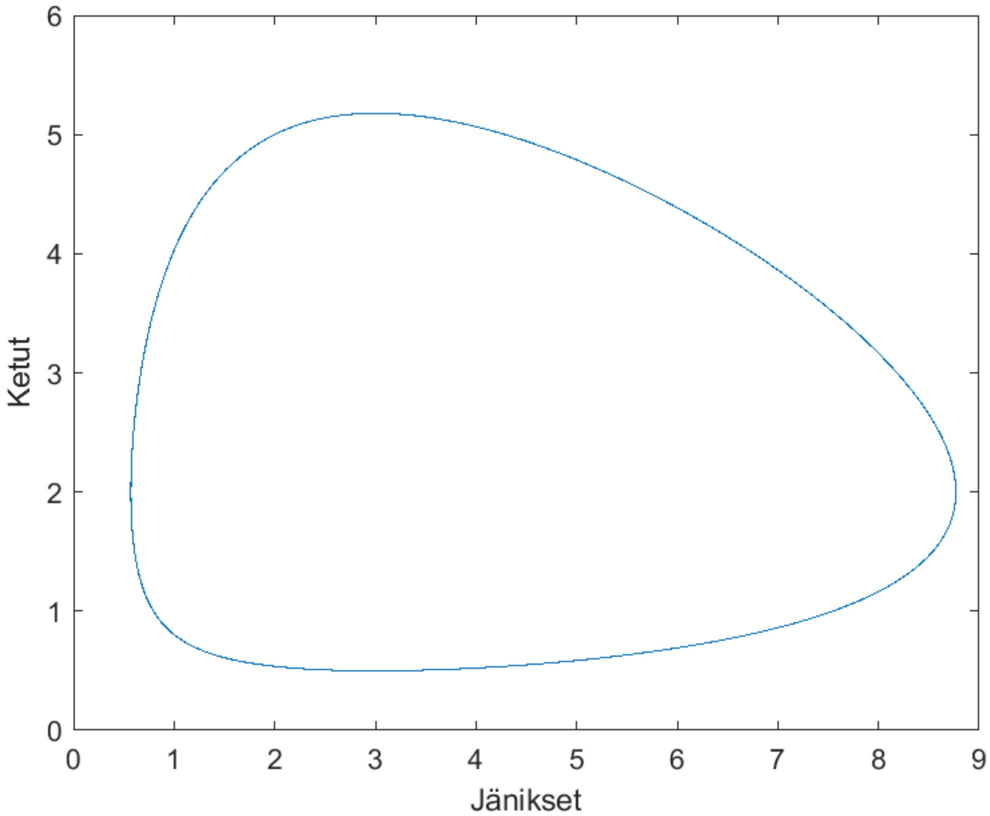
4 - 5.

Tarvittavat ohjelmat ”milne.m” ja ”rk4.m” ovat liitteenä. Tällöin

```
>> f = @(t,y) [4 * y(1) - 2 * y(1) * y(2), 1 * y(1) * y(2) - 3 * y(2)]'

f =

  function_handle with value:

    @(t,y)[4*y(1)-2*y(1)*y(2),1*y(1)*y(2)-3*y(2)]'

>> A = milne(0, 5, f, [2, 5]', 1000);
>> plot(A(1,:), A(2,:))
>> hold on
>> plot(A(1,:), A(3,:))
>> legend("Jänikset x(t)", "Ketut y(t)")
```




```
>> plot(A(2,:), A(3,:))
```



6 - 7.

Merkitään $y_1 = y$ ja $y_2 = y'$, jolloin reuna-arvotehtävä

$y''(x) = \sin(x^2)$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y(1) = 0$

muuttuu ongelmaksi

$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \sin(x^2) \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$,

missä z on sellainen, että $y(1) = 0$. Kun arvataan $z = 0{,}5$, niin Matlabista saadaan $y(1) \approx 0{,}58042$, ja kun arvataan $z = -0{,}5$, niin saadaan $y(1) \approx -0{,}41958$. Koska voidaan olettaa, että funktio $z \mapsto y_z(1)$ on jatkuva, niin vaadittavaa alkuarvoa z voidaan hakea haarukoimalla. Tämä haku on toteutettu liitteenä olevaan ohjelmaan ”haarukointi.m”. Nyt

```
>> haarukointi(-0.5, 0.5, 10e-6, 1000)
Ratkaisu löydettiin halutulla tarkkuudella.

ans =

    -0.080414
```

Siis alkuarvolla $z \approx -0{,}080414$ saadaan $y(1) = y_1(1) \approx 0$.

```
>> ode45(f, [0 1], [0, -0.080415])
>> legend("y(x)", "y'(x)")
```