MASTERE DATA & IA

FONDEMENTS MATHEMATIQUES DE L'IA : ~MODEL ARMA~

HENRI OTHNIEL GOHI

HETIC

Professeur

Hakim HORAIRY

Table des matières

INTRODUCTION

En statistiques, les modèles **ARMA** (modèles *autorégressifs et moyenne mobile*), ou aussi modèle de **Box-Jenkins**, sont les principaux modèles de séries temporelles.

Étant donné une série temporelle X_t, le modèle **ARMA** est un outil pour comprendre et prédire, éventuellement, les valeurs futures de cette série. Le modèle est composé de deux parties : une partie autorégressive (**AR**) et une part moyenne-mobile (**MA**). Le modèle est généralement noté **ARMA(*p*,*q*)**, où ***p*** est l'ordre de la partie AR et ***q*** l'ordre de la partie MA.

Dans la suite de ce rapport, nous allons explorer les concepts clés du modèle ARMA ainsi que les étapes nécessaires à sa mise en œuvre.

I. COMPREHENSION DES TERMES AUTOREGRESSIFS (AR) ET DES TERMES MOYENNE MOBILE (MA)

Comme mentionné dans l'introduction, le modèle ARMA repose sur deux concepts fondamentaux : les termes autorégressifs (AR) et les termes moyenne mobile (MA)

A. MODELE AUTOREGRESSIF (AR)

Dans un modèle autorégressif, les valeurs futures sont prédites en utilisant les observations passées. Chaque valeur dépend linéairement des ***p*** observations précédentes. L'ordre d'un modèle AR est noté ***p***, et une équation **AR(*p*)** est utilisée pour représenter le processus autorégressif.

$$X_t = c + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont les **paramètres** du modèle, c est une constante et ε_t un bruit blanc. La constante est bien souvent omise dans la littérature, le processus étant alors dit centré.

- **Exemple** : processus AR(1)

Un modèle AR(1) est donné par : $\boldsymbol{X_t = c + \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t}$

B. MODELE MOYENNE MOBILE (MA)

Dans un modèle moyenne mobile, les erreurs passées sont utilisées pour prédire les valeurs futures. Chaque valeur est une combinaison linéaire des ***q*** erreurs précédentes. L'ordre d'un modèle MA est noté ***q***, et une équation **MA(*q*)** est utilisée pour représenter le processus de moyenne mobile.

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

où les $\boldsymbol{\theta_1}$, …, $\boldsymbol{\theta_q}$ sont les paramètres du modèle et $\boldsymbol{\varepsilon_t}$, $\boldsymbol{\varepsilon_{t-1}}$, … sont encore une fois des termes d'erreur.

II. LE MODELE ARMA

Le modèle ARMA combine les termes autorégressifs et les termes moyens mobiles pour modéliser les processus temporels.

A. LE MODELE ARMA ET SES COMPOSANTS

Le modèle ARMA est défini par les ordres ***p*** et ***q***, qui représentent respectivement le nombre de termes autorégressifs et de termes moyens mobiles. Un modèle **ARMA(*p, q*)** est une combinaison linéaire de termes autorégressifs et de termes moyens mobiles. Les termes AR capturent les relations entre les observations passées et la valeur actuelle, tandis que les termes MA modélisent les erreurs résiduelles.

B. EQUATION GENERALE D'UN MODELE ARMA(p, q)

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

Où les φ_i et θ_i sont les paramètres du modèle et les ε_i sont les termes d'erreur.

- **Remarque**

Un **modèle autorégressif AR(*p*)** est un ARMA(*p*, 0)
Un **modèle moyenne mobile MA(*q*)** est un ARMA(0, *q*)

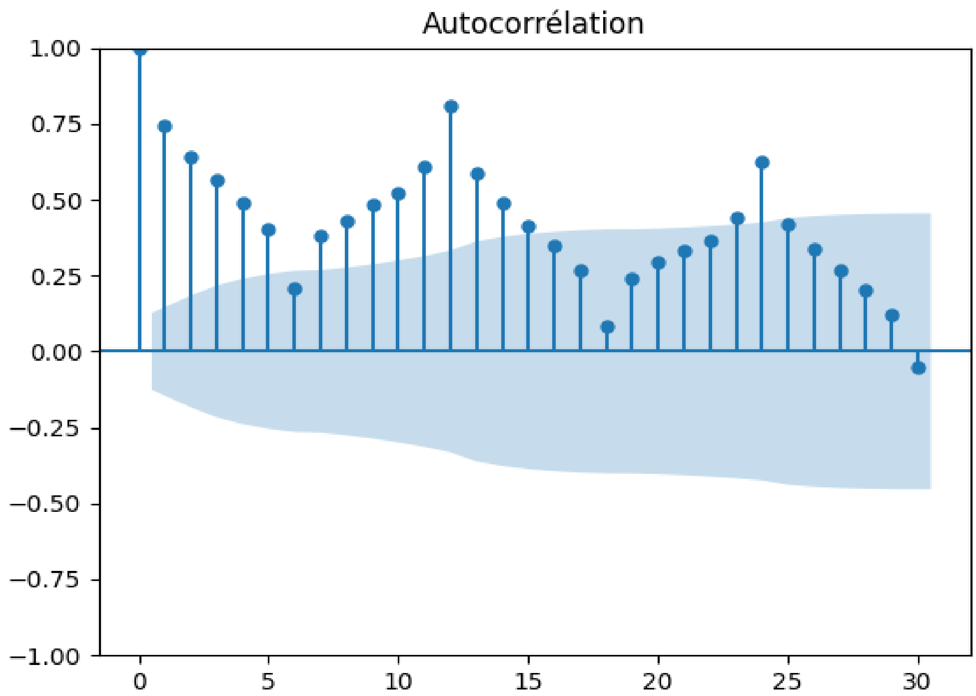
III. IMPLEMENTATION DU MODELE ARMA

Pour mettre en œuvre le modèle ARMA, plusieurs étapes doivent être suivies.

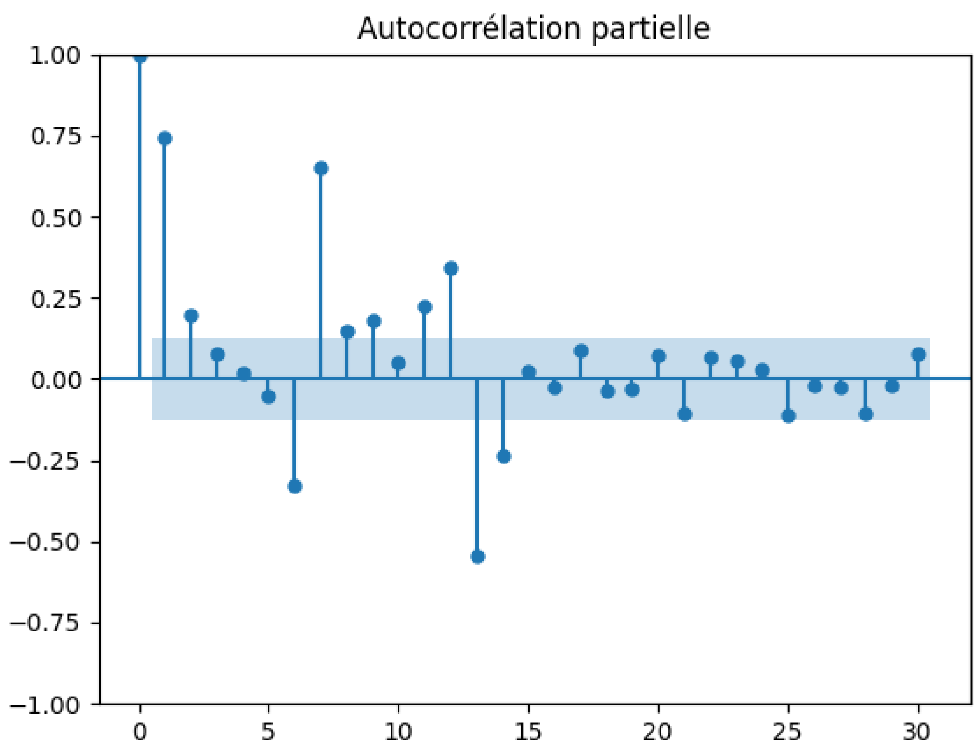
A. IDENTIFICATION DES ORDRES (p, q) DU MODELE

La première étape consiste à analyser les données temporelles et à identifier les propriétés du processus. L'autocorrélation et l'autocorrélation partielle peuvent être utilisées pour estimer les ordres p et q du modèle ARMA.

Voici l'autocorrélation et l'autocorrélation partielle que nous avons obtenus pour notre jeu de données :



Autocorrélation
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0
5
10
15
20
25
30



Autocorrélation partielle
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0
5
10
15
20
25
30

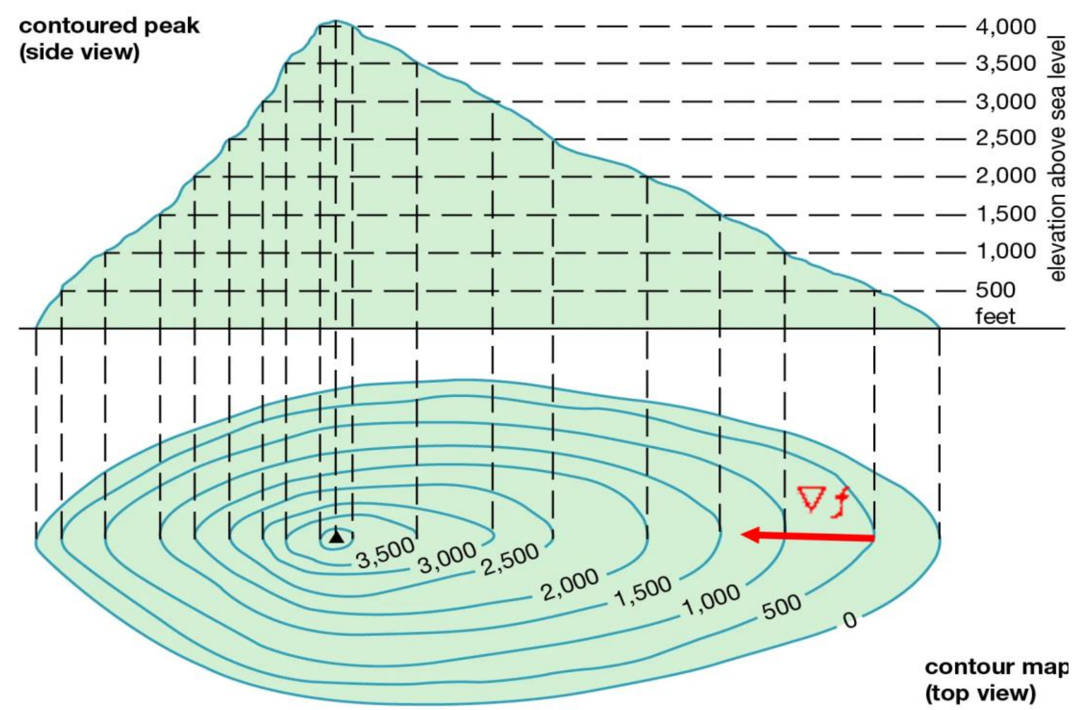
B. ESTIMATION DES PARAMETRES DU MODELE

Une fois que les ordres p et q sont identifiés, les coefficients du modèle doivent être estimés. La méthode des moindres carrés ou d'autres techniques d'estimation peuvent être utilisées pour trouver les valeurs optimales des paramètres. Dans notre cas, nous utiliserons la méthode de la **descente de gradient** pour trouver les valeurs optimales des paramètres du modèle.

La descente de gradient est un algorithme d'optimisation couramment utilisé dans le domaine de l'apprentissage automatique et de l'optimisation numérique. Il est largement utilisé pour trouver le minimum d'une fonction convexe ou pour ajuster les paramètres d'un modèle afin de minimiser une fonction de coût.

- **Formule** : $f(x - \alpha \nabla f(x)) < f(x)$

- **Illustration** :



C. PREDICTIONS ET EVALUATIONS

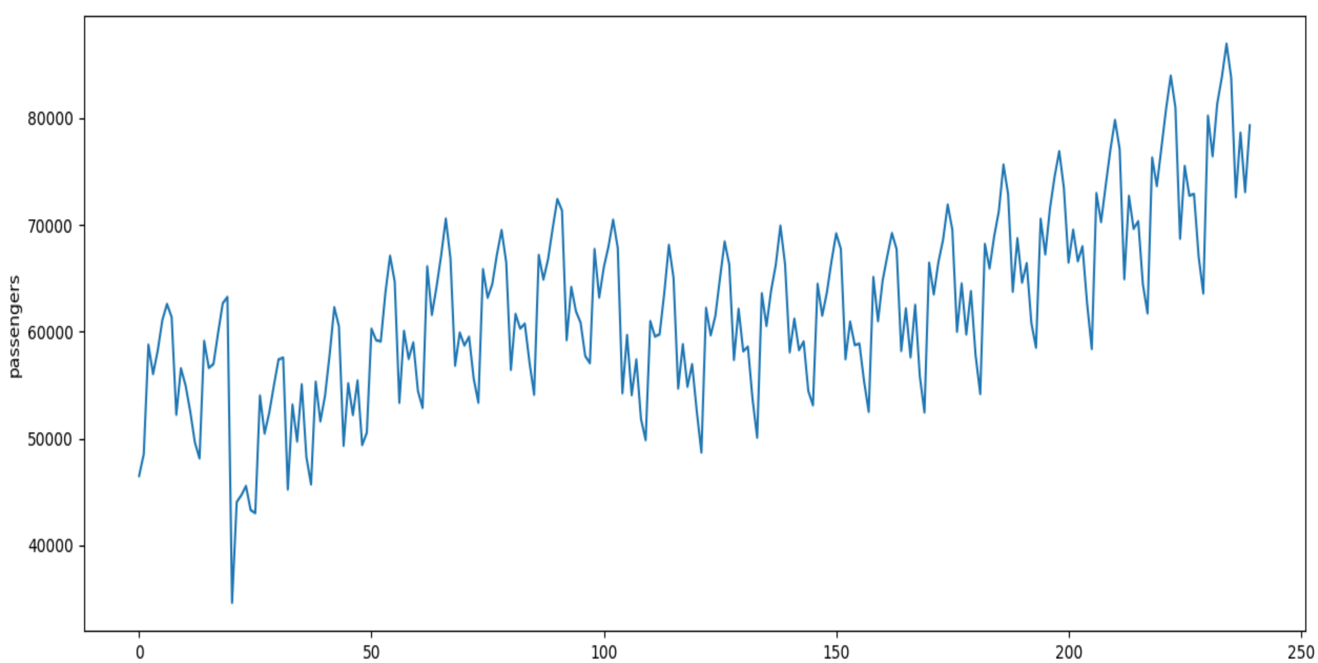
Une fois que les paramètres optimaux sont trouvés, le modèle ARMA peut être utilisé pour prédire les valeurs futures. L'évaluation de la performance du modèle se fait en comparant les prédictions avec les valeurs réelles à l'aide de métriques telles que l'erreur quadratique moyenne (RMSE). Pour les exigences du projet, nous avons utilisé la Mean Squared Error (MSE).

$$\mathbf{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

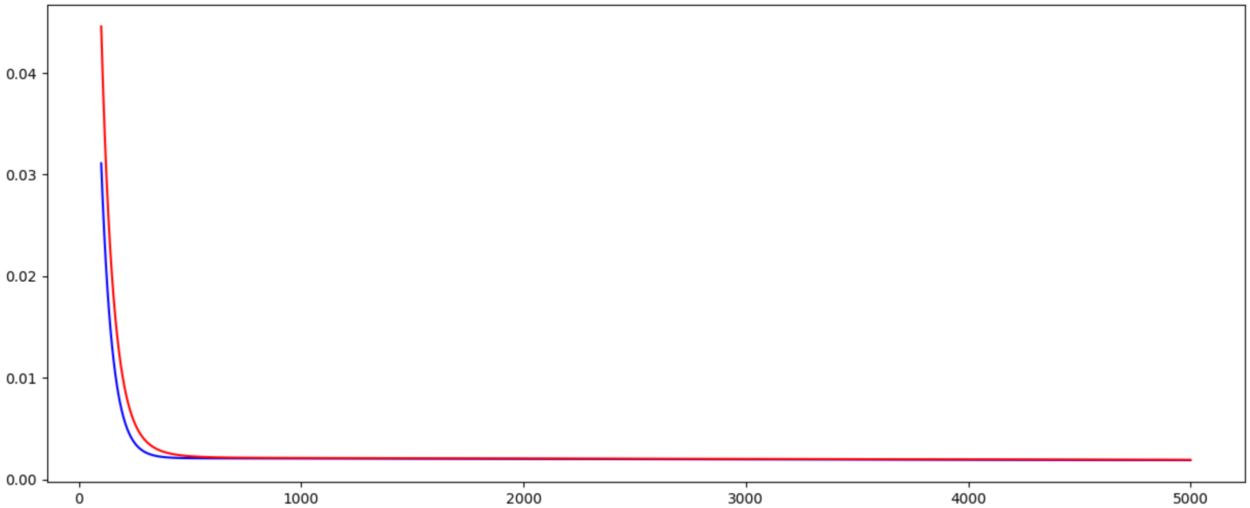
Où Y est le vecteur des valeurs observées de la valeur prédite et $\hat{Y}$ est la valeur prédite.

IV. QUELQUES RESULTATS

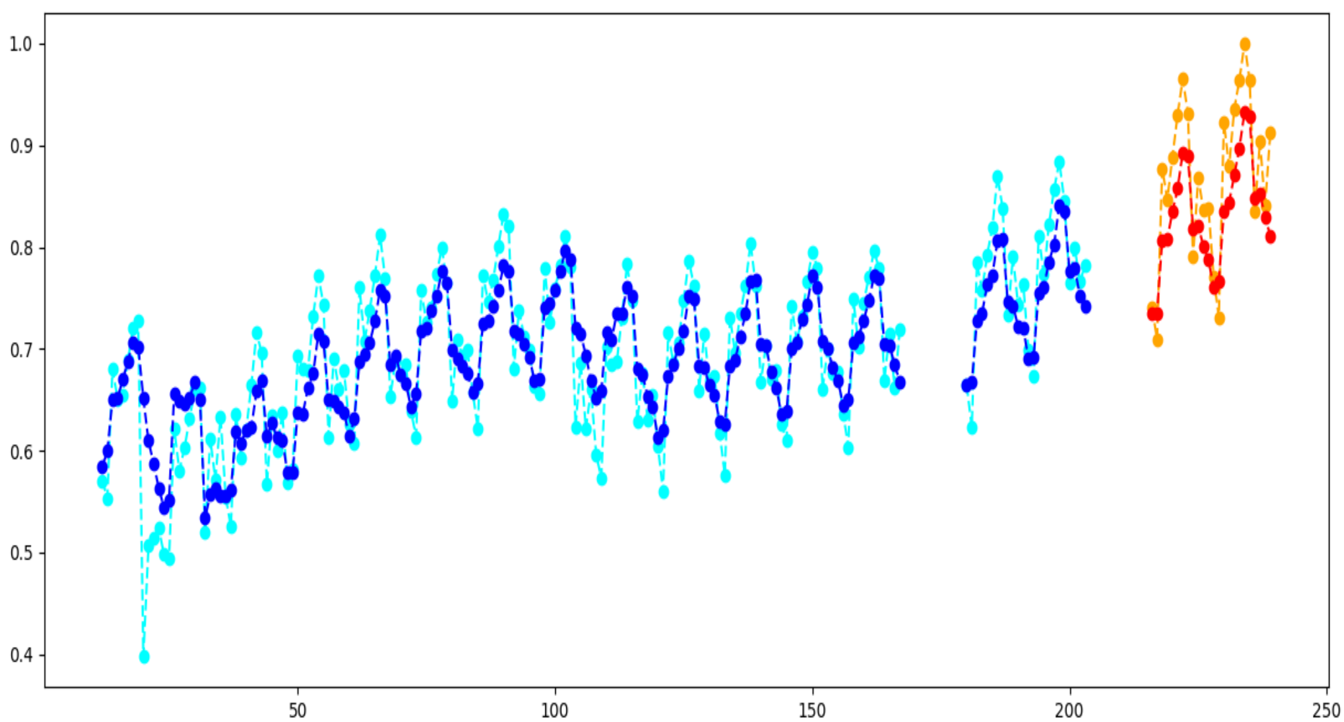
A. JEU DE DONNEES (SERIE TEMPORELLE)



B. LOSS FUNCTIONS DE TRAIN ET DE VALIDATION



C. PREDICTIONS



CONCLUSION

Le modèle ARMA est un outil puissant pour modéliser et prédire les processus temporels. En combinant les termes autorégressifs et les termes moyens mobiles, il permet de capturer les structures complexes des données. Son implémentation nécessite une compréhension approfondie des termes AR et MA, ainsi que des étapes clés telles que l'identification du modèle, l'estimation des paramètres, le diagnostic et l'évaluation. En utilisant le modèle ARMA de manière appropriée, nous pouvons obtenir des prédictions précises et améliorer notre compréhension des phénomènes temporels.