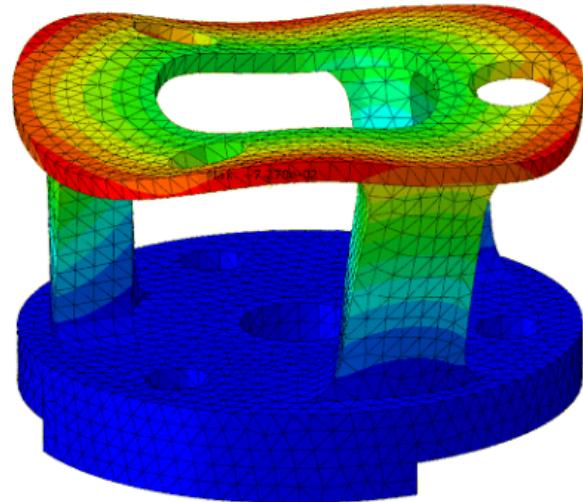


# TMM4135 Dimensjonering basert på elementmetoden, grunnkurs - prosjektoppgave

Av:

Teodor Barane Lindell  
Even Glestad Gaarder  
Henrik Log Jacobsen  
Martin Bergstø



<b>0 Introduksjon.....</b>	<b>2</b>
<b>1 Medbringerplate analyse.....</b>	<b>2</b>
1.1 Problemstilling.....	2
1.2 Evaluering av feilmodi.....	3
1.3 Analytisk beregning.....	5
1.4 FE-analyse.....	10
1.4.1 Første modell - Grovt elementnett.....	11
1.4.2 Andre modell - Forfining av elementnett.....	18
1.4.3 Tredje modell - Avrunding av skarpe hjørner.....	22
1.5 Konklusjon.....	27
<b>2 Implementering av skiveelementer.....</b>	<b>29</b>
2.1 Problemstilling.....	29
2.2 Gjennomføring.....	29
2.3 Beskrivelse av innlevert kodebase.....	30
2.4 Lasttilfeller.....	30
2.5 Analytiske håndberegninger.....	30
2.6 Sammenligning av elementtyper.....	32
2.6.1 Lasttilfelle 1.....	32
2.6.2 Lasttilfelle 2.....	34
2.7.1 Lasttilfelle 1.....	37
2.7.1 Lasttilfelle 2.....	38
2.8 Konklusjon.....	39

# 0 Introduksjon

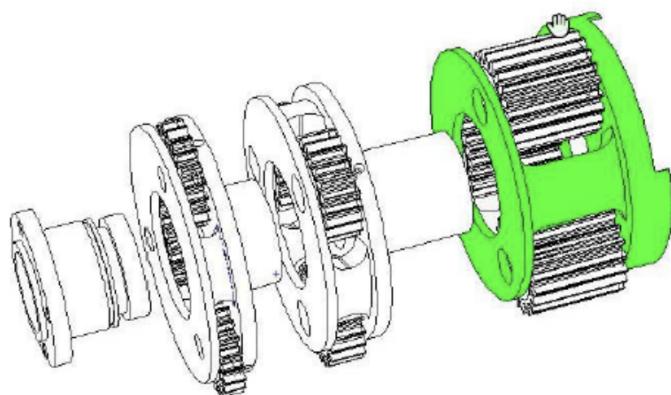
I den første delen av denne rapporten skal vi gjennomføre en FE-analyse (Finite Element) av en medbringerplate i et planetgir. Vi vil først undersøke hvilke feilmodi det er verdt å ta hensyn til i beregningene, samt utføre analytiske beregninger før vi tar for oss FE-analysen. Til slutt vil vi samle resultatene, drøfte deres nøyaktighet og diskutere mulige kilder til avviket mellom dem.

I del 2 skal vi implementere ulike elementtyper for å gjennomføre styrkeberegninger på en utkraegerbjelke. Videre sammenligner og drøfter vi de ulike deformasjonsresultatene, i tillegg til å gjennomføre et konvergensstudie.

## 1 Medbringerplate analyse

### 1.1 Problemstilling

Medbringerplaten, markert i grønn i figur 1, er en del av et planetgir som benyttes til nedgiring av hastigheten i en elektromotor. I lasttilfellet vi skal ta for oss, blir platen utsatt for krefter fra planethjulene som gir et utgående moment på 500 Nm. Kraften fra planethjulene fordeler seg over de seks akslingshullene på medbringerplaten. Hver av kretene treffer platen i tangiell retning relativt til translasjonen av planethjulene.



Figur 1: Planetgir med medbringerplate markert i grønn

Platen er laget i Ovako 280. Materialegenskapene er oppsummert i følgende liste.

E-modul (Young's modulus):	$210 \text{ GPa}$
Tverrkontraktsjon:	0.3
Flytespenning:	$f_y = 450 \text{ MPa}$
Bruddspenning:	$f_u = 550 - 750 \text{ MPa}$
Utmattingsfasthet ved $10^7$ lastvekslinger:	$0 \pm 300 \text{ MPa}$ $240 \pm 240 \text{ MPa}$

Problemstillingen vår baserer seg på om platens dimensjonelle og materielle egenskaper er tilstrekkelige for å støtte medbringerplaten sin funksjon. Ved store deformasjoner eller andre former for svikt, vil vi undersøke hvorfor problemet oppstår og om platen bør omdimensjoneres for å møte belastningen. Det vil også være av interesse å undersøke om platen er i noen grad overdimensjonert, altså om deler av platen kan reduseres i størrelse uten at det svekker dens funksjon.

Vi er særlig interessert i å undersøke den ytre skiven på medbringerplaten ettersom denne vil motta store spenninger som konsekvens av å være en del tynnere enn den indre skiven. Den ytre skiven er festet til den mer robuste indre skiven via tre ribber som går på tvers mellom dem. Disse ribbene er orientert vinkelrett på kraften fra planethjulene, noe som vil føre til et bøyemoment i dem. Ribbene står dermed sentrale for å overføre moment fra den ytre skiven til videre i girsystemet. Vår analyse vil derfor ta mest hensyn til dimensjoneringen av den ytre platen og de tre ribbene i medbringerplaten.

## 1.2 Evaluering av feilmodi

Av de forskjellige årsakene til svikt i medbringerplaten, er ikke alle like relevante. Vi velger her å begrense problemstillingen til de feilmodi som er av størst betydning for planetgiret. I følgende avsnitt gir vi en forklaring for betydningen til hvert av sviktområdene, og begrenser oss til de vi ser på som de viktigste: flyting og stor elastisk deformasjon.

### Flyting

Det er svært viktig å sjekke at komponenten ikke blir utsatt for en spenning høyere enn materialets flytespenning. Overskridelse av flytespenning fører til plastiske (permanente) deformasjoner som vil hindre hele systemet i å utføre sin hensikt.

### Brudd

Siden vi ikke tillater spenningene i komponenten til å overskride flytespenningen så betyr det indirekte at vi også tar hensyn til brudd. Dette er på grunn av at det vil oppstå flyt/store deformasjoner før det oppnås brudd.

### Instabilitet

Knekning forekommer i stav-lignende deler som blir utsatt for trykkrefter. Det er dermed ikke relevant for oss, da vi undersøker momentkrefter.

### Stor elastisk deformasjon

Stor elastisk deformasjon i medbringerplaten kan føre til uønskede endringer i tannhjulets posisjon og forårsake feil i overføringen av kraft. Dette kan føre til redusert presisjon og nøyaktighet i systemet. Det er derfor viktig å undersøke omfanget av dette.

### Utmattning

Utmattning er veldig viktig å sjekke for i maskinkomponenter, men vi kommer til å se bort i fra det i vår beregning, på grunn av mangel på informasjon om blant annet sykler og generelt kunnskap rundt fenomenet.

### Store svingninger

Komponenten er liten og vil derfor ha en veldig høy egenfrekvens. I tillegg har vi ikke tilstrekkelig informasjon om lasttilfelle for å kunne si noe om periodiske laster og vibrasjoner.

### Siging

Siging forekommer hovedsakelig når temperaturen er rundt  $\frac{1}{2}$  av materialets smeltetemperatur. Vi antar her at temperaturen komponenten blir utsatt er mye mindre enn det og vi ser derfor bort i fra siging.

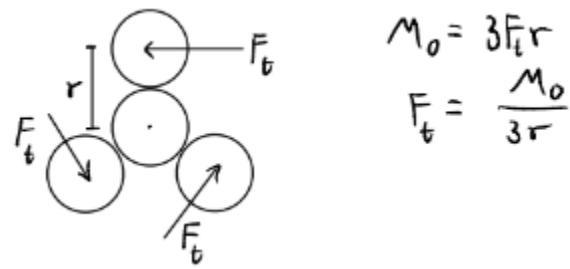
### Slitasje

Slitasje er veldig viktig å sjekke i maskinkomponenter, men når det kommer til vårt tilfelle regner vi med at slitasje vil oppstå i andre deler av planetgiret før det forekommer i medbringerplaten. Vi kommer derfor til å se bort i fra dette.

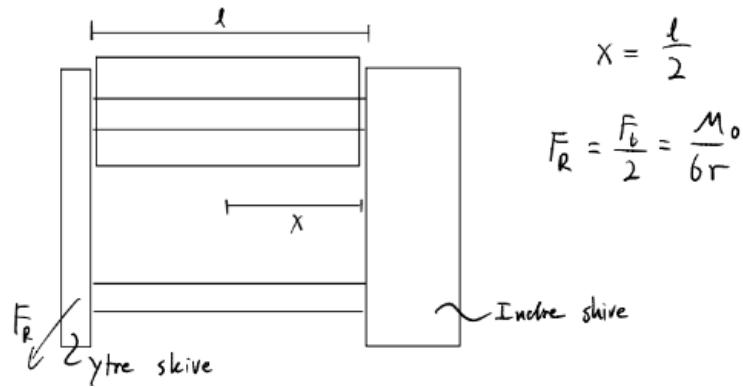
### 1.3 Analytisk beregning

For å estimere spenninger og forskyvninger i modellen vår, benyttet vi oss av en analytisk beregningsmodell. Hensikten med dette var å gjøre overslag som kan sammenlignes med resultatene fra elementanalysen. Ettersom beregningsmodellen inneholder flere forenklinger og antagelser, forventer vi altså ikke mer korrekte verdier her enn i fremtidige numeriske beregninger.

Vi har utgående moment lik 500 Nm og 3 planethjul. Dermed er



Vi benytter en konservativ antagelse om at kraften fra planethjulene angriper midt på ribbene på grunn av deformasjon i skrivene og ribbene.



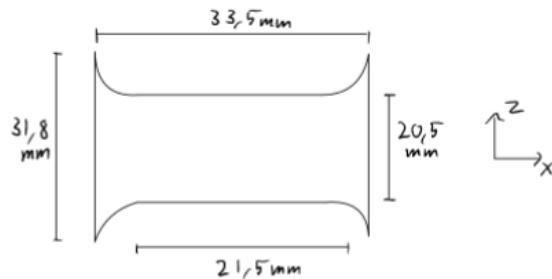
Mål fra STEP-modell:

$$r = 31,5 \text{ mm}$$

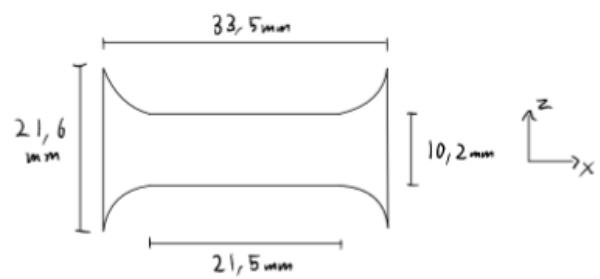
$$l = 33,5 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow F_R = \frac{M_0}{6r} = \frac{500 \text{ Nm}}{6 \cdot 31,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2645,5 \text{ N}$$

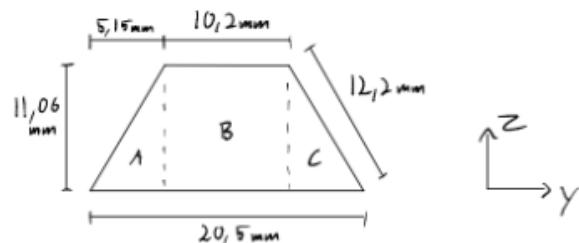
Ytre flate av ribbe:



Indre flate av ribbe:



Tverrsnitt av ribbe ved  $x = L/2$ :

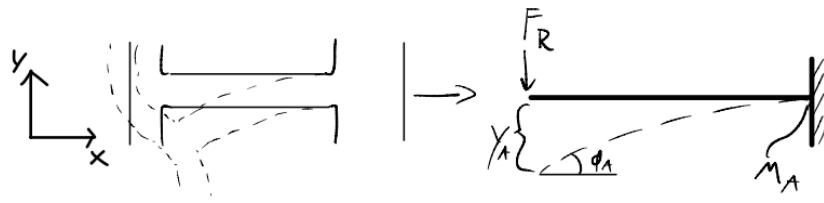


$$\begin{aligned}
 I_z &= 2(I_{z,\text{trekant}} + c_y^2 \cdot A_{\text{trekant}}) \\
 &\quad + I_{z,\text{firkant}} + c_y^2 \cdot A_{\text{firkant}} \\
 I_z &= 2\left(\frac{1}{36} \cdot 11,06 \cdot 5,15^3 + \left(\frac{20,5}{2} - \frac{5,15}{3}\right)^2 \cdot \frac{11,06 \cdot 5,15}{2}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{12} \cdot 11,06 \cdot 10,2^3 + 0^2 \cdot A_{\text{firkant}}
 \end{aligned}$$

$$I_z = 4231,56 \text{ mm}^4 + 978,08 \text{ mm}^4$$

$$\underline{I_z = 5209,64 \text{ mm}^4}$$

## Modell A: "Myk" Ytre skive



$$y_A = \frac{F_R \cdot L^3}{3EI_z} = \frac{2645,5 \text{ N} \cdot (33,5 \text{ mm})^3}{3 \cdot 210 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 5209,6 \text{ mm}^4} = 0,03 \text{ mm}$$

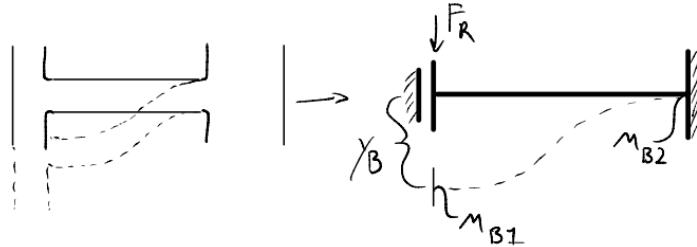
$$\varphi_A = \frac{F_R \cdot L^2}{2EI_z} = \frac{2645,5 \text{ N} \cdot (33,5 \text{ mm})^2}{2 \cdot 210 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 5209,6 \text{ mm}^4}$$

$$\varphi_A = 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,078^\circ$$

$$M_A = F_R \cdot L = 2645,5 \text{ N} \cdot 33,5 \text{ mm} = 88,6 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_{A,\max} = \frac{M_A}{I_z} \cdot y_{\max} = \frac{88,6 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{5209,6 \text{ mm}^4} \cdot 10,25 \text{ mm} = 174 \text{ MPa}$$

## Modell B: "Stiv" Ytre skive

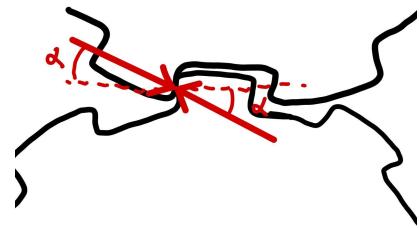


$$y_B = \frac{F_R \cdot L^3}{12EI} = \frac{2645,5 \text{ N} \cdot (33,5 \text{ mm})^3}{12 \cdot 210 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 5209,6 \text{ mm}^4} = 0,0076 \text{ mm}$$

$$M_{B1} = M_{B2} = \frac{F_R \cdot L}{2} = \frac{2645,5 \text{ N} \cdot 33,5 \text{ mm}}{2} = 44,3 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

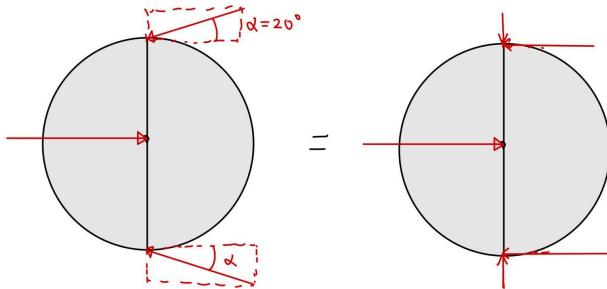
$$\sigma_{B,\max} = \frac{M_B}{I_z} \cdot y_{\max} = \frac{44,3 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{5209,6 \text{ mm}^4} \cdot 10,25 \text{ mm} = 87,2 \text{ MPa}$$

Kraftoverføring via tenner:



Normalkraften mellom tennene har en vinkel  $\alpha$  i forhold til den drivende tangentielle retningen.

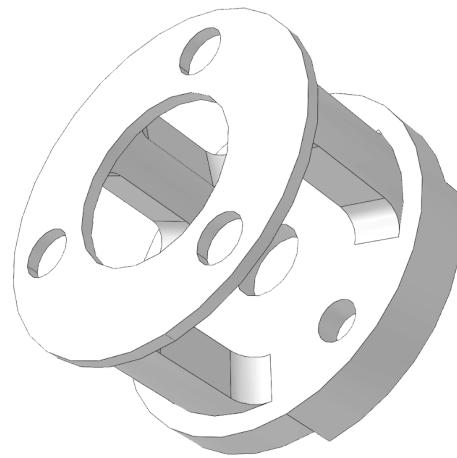
Planethjul:



Kan se bort fra denne vinkelen, da den kun gir trykk i hjulet og ikke bidrar til noe moment.

## 1.4 FE-analyse

For å utføre mer realistiske beregninger av spenningene og deformasjonene på medbringerplaten, benytter vi oss av analyse med elementmetoden implementert i Abaqus CAE. Her laster vi inn medbringerplaten som en 3-dimensjonal modell, og setter elastitetsmodulen til materialet på 210 GPa med et tverrkontraktsjonstall på 0.3. Initialet gjør vi ingen endringer på figurens geometri før vi genererer et elementnett. Figur 2 viser geometrien til medbringerplaten i Abaqus.



Figur 2: Medbringer platen i Abaqus CAE.

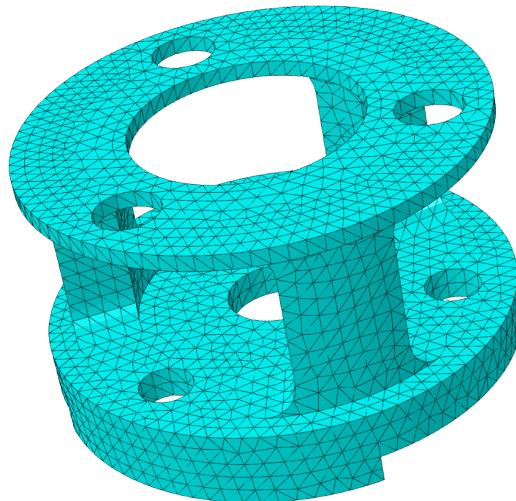
### Valg av element

En betydelig del av FE-analysen vil være avhengig av hvilke elementer som implementeres. På grunn av medbringerplatens komplekse geometri, ser vi bort ifra å bruke mursteinselementet eller andre lignende elementer som er bedre egnet for simplere geometrier. Vi ser dermed på tetraederelementet som mest gunstig. Ut ifra den individuelle Abaqus-øvingen som vår gruppe gjennomførte tidligere i semesteret, kom vi frem til at tetraederelementet med 4 noder kunne være problematisk på grunn av dens høye feilmargin. Vi har derfor valgt å modellere medbringerplaten med 10-noders tetraederelement. Dette elementet er mest passende til vårt behov for å modellere spenninger og deformasjoner i alle 3 dimensjoner på en modell med relativt kompleks geometri.

### 1.4.1 Første modell - Grovt elementnett

FE-analyse er generelt en iterativ prosess, der man kan forbedre resultatene etter gjentatte forsøk. Vår første modell i denne analysen er relativt simpel for å få en ide over analysens generelle nøyaktighet og mulige feil i implementasjonen.

Ved generering av elementnettet velger vi derfor et relativt grovt nett med en tilnærmet elementstørrelse lik 3 mm. Denne elementstørrelsen gjør det lett å teste FE-analyser uten å vente på lange kjøretider. I tillegg får vi en oversikt over hvor tetraederelementene sliter med å tilpasse seg modellens geometri. Figur 3 viser elementnettet implementert med Abaqus sine C3D10 traederelement.



Figur 3: Grovt elementnett med C3D10 traederelement. Generell elementstørrelse på 3 mm.

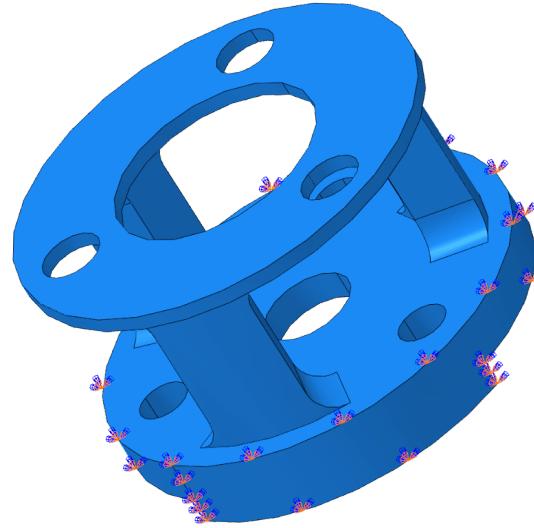
Fra figuren ser vi en veldig god fordeling av elementer på vår første modell. Størrelsen på elementene er jevn over hele figuren, og tilpasser seg hjørner, kurver og overflater uten noen åpenbare problemer. En skeivfordeling av elementenes størrelse og orientering kan føre til mislede resultater, og dermed er vi foreløpig fornøyd med dette elementnettet.

### Randbetingelser og belasting

#### Innspenning

Ut ifra figur 1 ved innledning av problemstillingen, ser det ut som at medbringerplaten utgjør det siste trinnet i giret, og at dreiemomentet dermed videreføres til andre komponenter som sannsynlig er festet mot den tykke, indre skiven. Vi antar dermed videre i denne analysen at

dreiemomentet videreføres langs yttersiden av den indre skiven, og vi velger å innspenne modellen her. Dette vil gi mest samsvar med de analytiske beregningene, som antar at den indre skiven er stiv og uten deformasjon. Figur 4 viser innspenningen som punkter langs den aktuelle flaten.

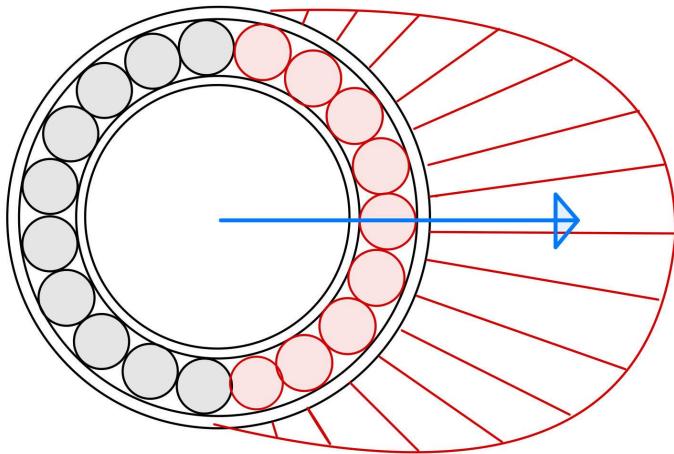


Figur 4: Fast innspenning rundt platens indre skive.

Alternativt, vil det være mulig å innspenne modellen i det indre akslingshullet til den indre skiven. Denne innspenningen har derimot et lite overflateareal og ligger nærmere rotasjonsaksen. På grunn av dette, forventer vi svært høye spenninger i dette akslingshullet ved en slik løsning. Vi er derimot mer interessert i spenningene og deformasjonen i ribbene og den ytre skiven, så vi ser bort fra denne løsningen for innspenning.

### Belastning

Den mest hensynsfulle måten å påføre last på medbringerplaten er i form av en fordelt last på halve innsiden av akslingshullene til planetjhulene. Vi ser for oss slik fordeling av last i figur 5 nedenfor.



Figur 5: Realistisk belastning i akslingshull.

Vi velger å tilnærme den fordelt lasten slik at den er uniformt fordelt på den aktuelle halvsiden av akslingshullet. Dette gjør det enkelt å modellere lasten i Abaqus, og vi forventer at tilnærmingen ikke utgjør en stor feilkilde på resultatet. En bedre løsning for belastningen er dermed mulig å utforske dersom det er behov for et enda mer realistisk resultat. For å forsikre at medbringerplaten overfører et moment på akkurat 500 Nm, benytter vi følgende utregning av den fordelt lasten:

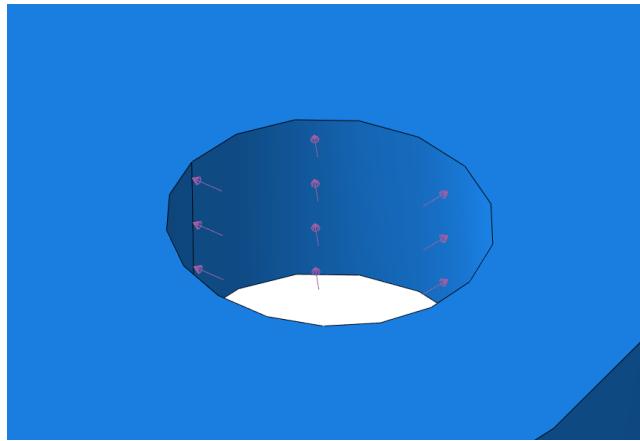
$$q = F_r / (2r * h)$$

Her blir kraften  $F_r$  fordelt over en projeksjon av akslingshullets innside på flaten som står normalt på resultantkraften. Dermed blir komponenten av den fordelt lasten som går tangentelt med planetjhulets bevegelse lik den kraften som er nødvendig for å belaste medbringerplaten med 500 Nm. Tykkelsen på akslingshullet varierer mellom den indre og ytre skiven, så vi beregner følgende 2 kraftfordelinger.

$$q_{ytre} = 2645.5 \text{ N} / (2 * 6 \text{ mm} * 3 \text{ mm}) = 73.49 \text{ MPa}$$

$$q_{indre} = 2645.5 \text{ N} / (2 * 6 \text{ mm} * 6 \text{ mm}) = 36.74 \text{ MPa}$$

Dermed får hver av de seks akslingshullene en last som vist i figur 6.



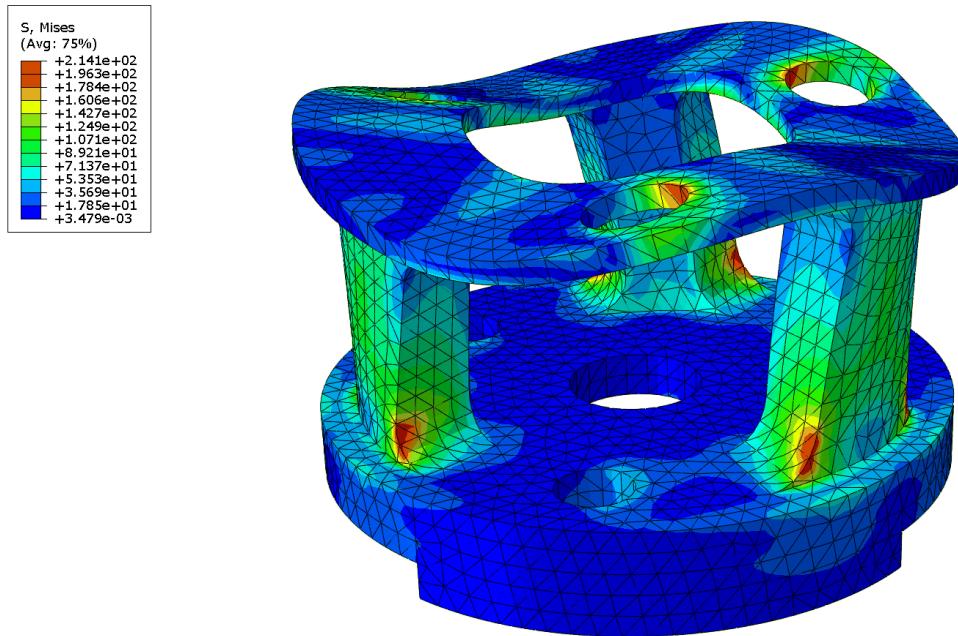
Figur 6: Fordelt last fra planethjul på akslingshull på indre skive.

Ulempen med denne forenklingen er at komponenten til den fordelte kraften som peker mot og fra rotasjonsaksen til medbringerplaten blir større enn ønsket. Dermed vil akslingshullene oppleve en forstørret kraft vekk fra deres egne sentrum. Vi anser derimot at denne ulempen ikke vil utgjøre en stor feilmargin på resultatet av FE-analysen, ettersom dreiemomentet som påføres fra den ytre skiven til ribbene forblir den samme.

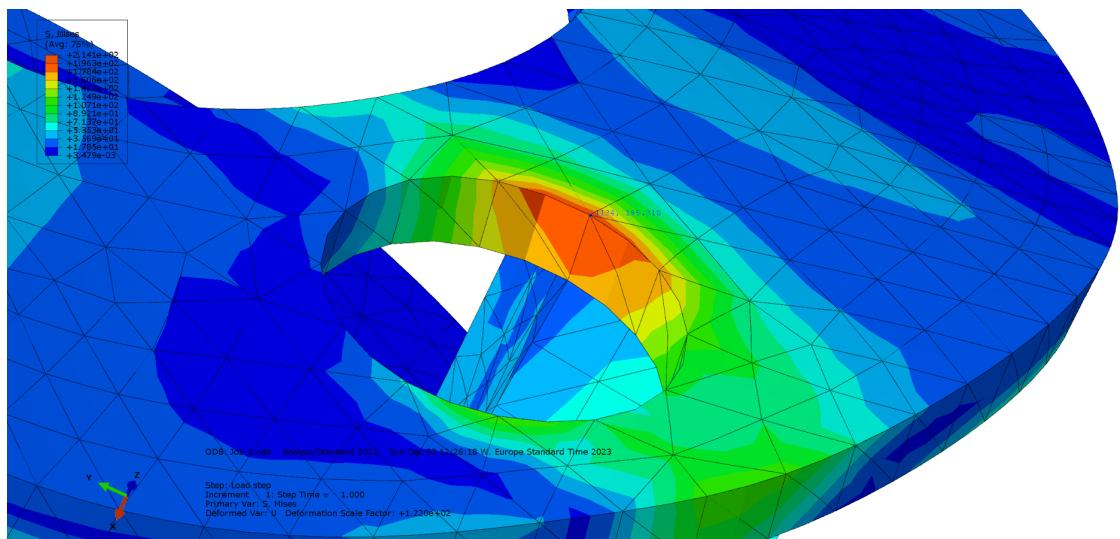
## Resultater

Vår modell er nå klar for og analyseres av Abaqus sine numeriske metoder. Vi får at medbringerplaten opplever en maksimal spenning på 214.1 MPa, lokalisert der ribbene er festet mot den tykke indre skiven. Den maksimale deformasjonen foregår i ytterkanten av den tynne ytre skiven med en total forflytning på 0.0727 mm. Følgende figurer 7-12 viser resultatet av FE-analysen. Deformasjonen i alle figurene er oppskalert for å være tydelige med en faktor på 122.

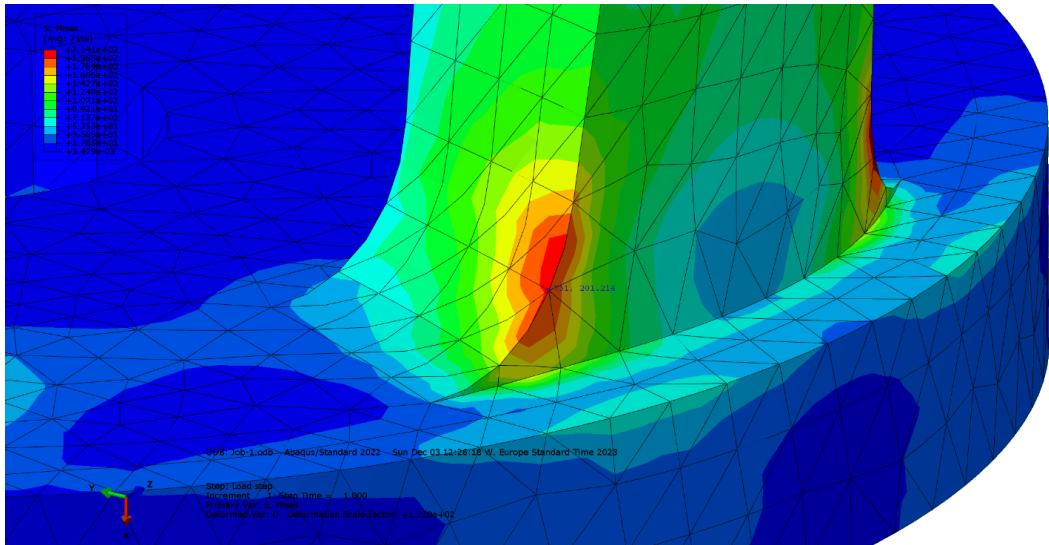
Spenninger:



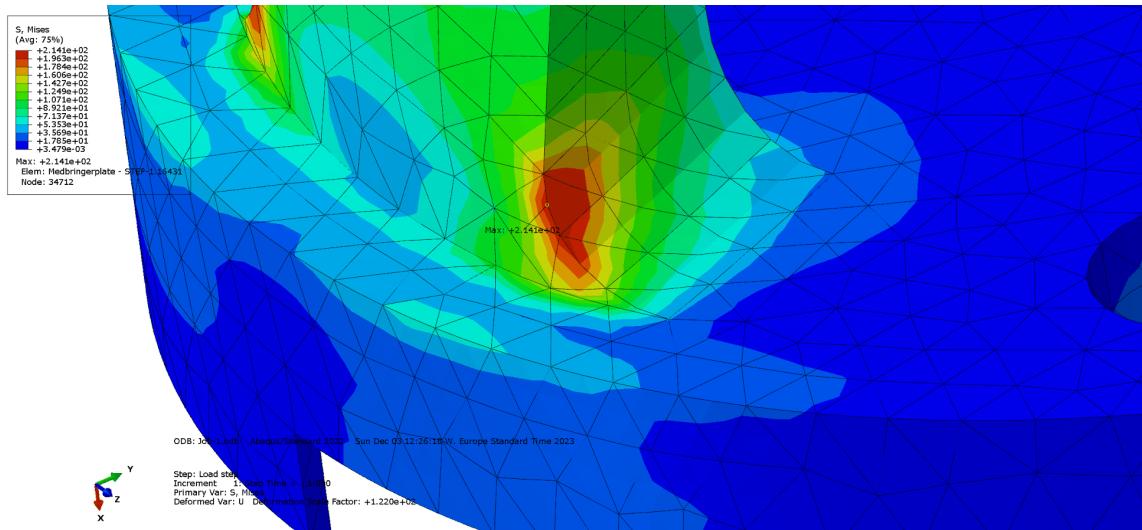
Figur 7: von Mises spenning over hele medbringerplaten. Maksimal spenning på 214.1 MPa.



Figur 8: Spenning i akslingshull på ytre skive. Høyest spenning på 195.3 MPa.

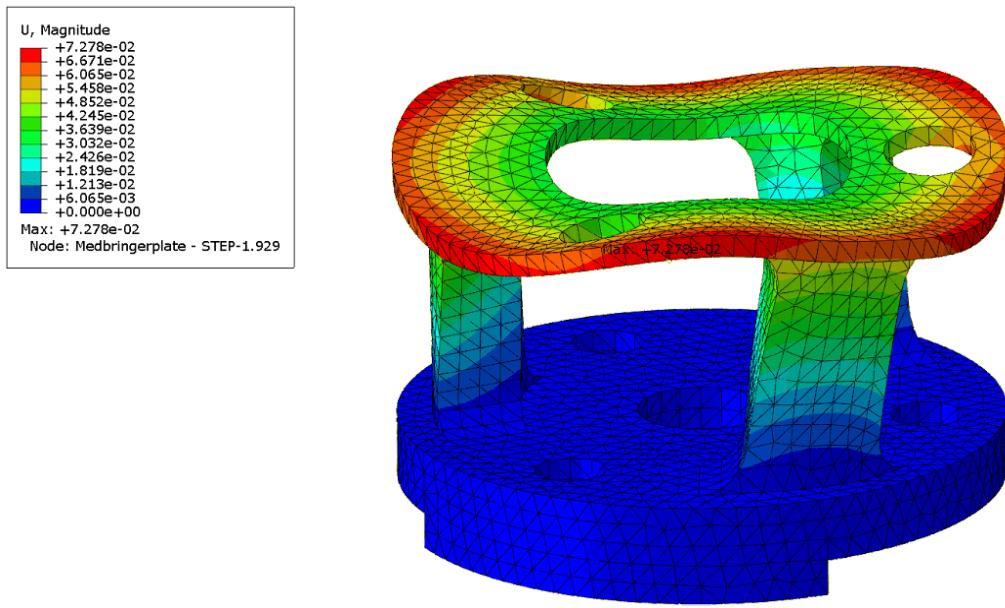


Figur 9: Spenning i strekksiden av ribben mot indre skive. Området får en høyest spenning på 201.2 MPa.

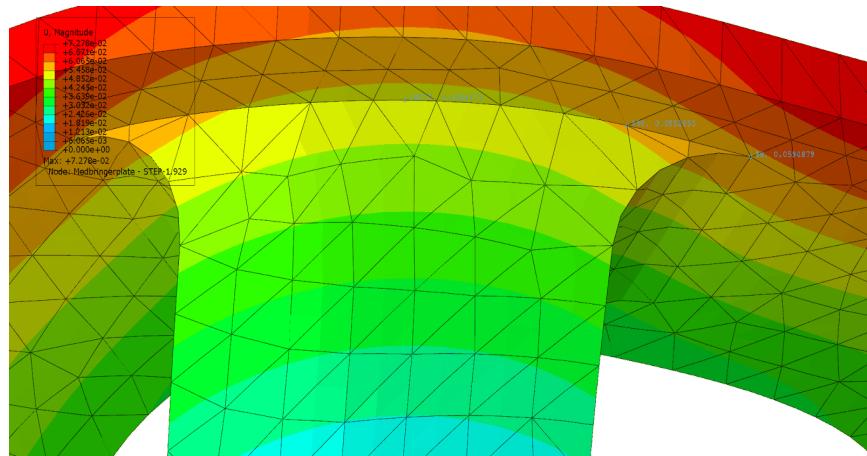


Figur 10: Spenning i trykksiden av ribben mot indre skive. Området oppnår platens maksimale spenning på 214.1 MPa.

## Deformasjon:



Figur 11: Total deformasjon over hele medbringerplaten. Maksimal forflytning på 0.0727 mm.

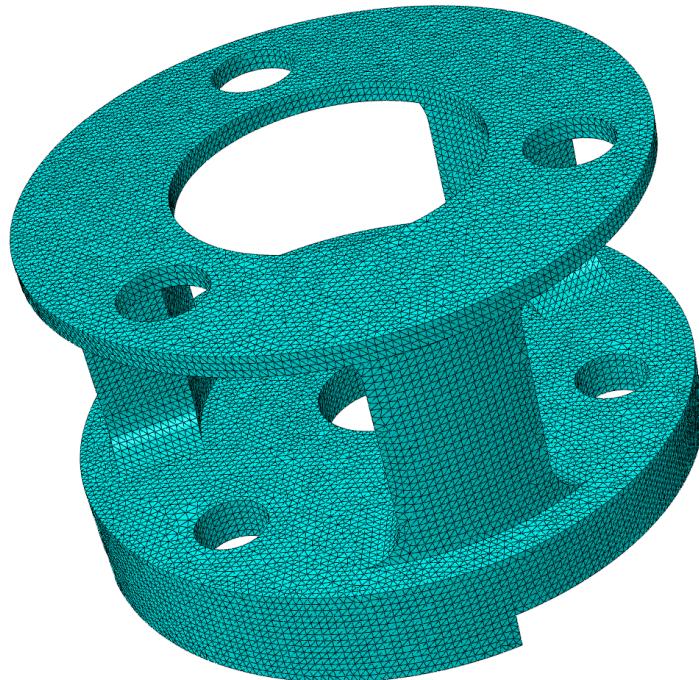


Figur 12: Deformasjon av ribben i innspenningen mot den ytre skiven. Forflytningen varierer fra 0.0524 til 0.0595 mm langs bredden av innspenningen.

I sammenligning med de analytiske beregningene, ser vi at resultatet fra denne modellen ligger relativt nær den analytiske beregningen med “myk” ytre skive. Medbringerplaten opplever noe høyere spenning og en større deformering enn det som ble antydet av de analytiske beregningene. Likevel er resultatene her fra FE-analysen på samme størrelsesorden som de analytiske beregningene, noe som gir inntrykk av at de numeriske beregningene ikke er helt urealistiske.

#### 1.4.2 Andre modell - Forfining av elementnett

Siden resultatet fra den første modellen ikke har noen grove avvik i forhold til generelle forventninger og den analytiske beregningen, velger vi å forfine elementnettet i denne andre iterasjonen for å øke nøyaktigheten videre. Vi velger å redusere den tilnærmede elementstørrelsen til 1 mm, noe som betydelig øker antall elementer i modellen. Elementnettet ser nå slik ut, vist i figur 13.

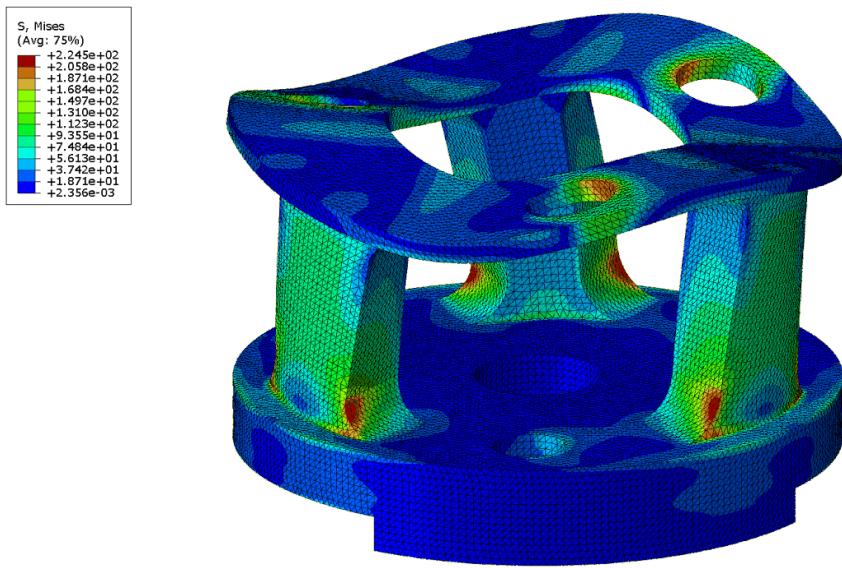


Figur 13: Forfinet elementnett med C3D10 tratraederelement. Generell elementstørrelse på 1 mm.

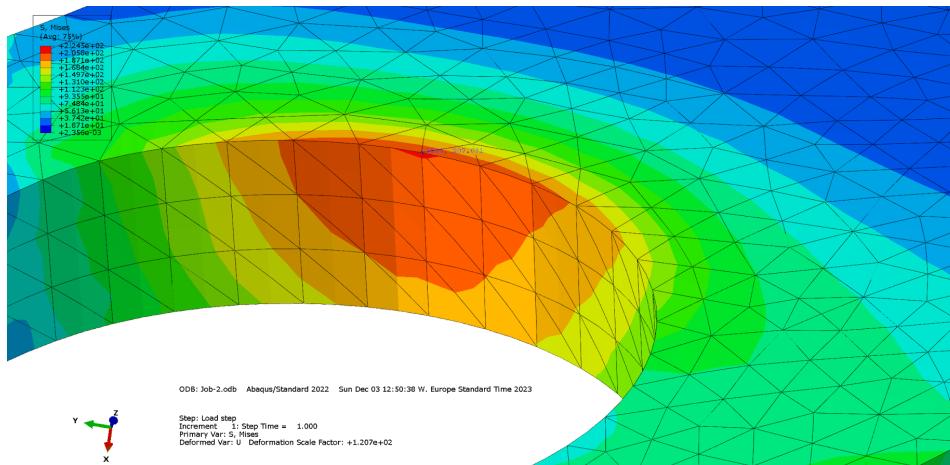
### Resultater

Vi beholder randbetingelsene og belastningen fra den første modellen og utfører de nummeriske beregningene på nytt. Den maksimale spenningen øker til 224.5 MPa, og den maksimale forflytningen til 0.0736 mm. Følgende figurer 14-21 viser resultatet fra den andre modellen med samme skaleringsfaktor.

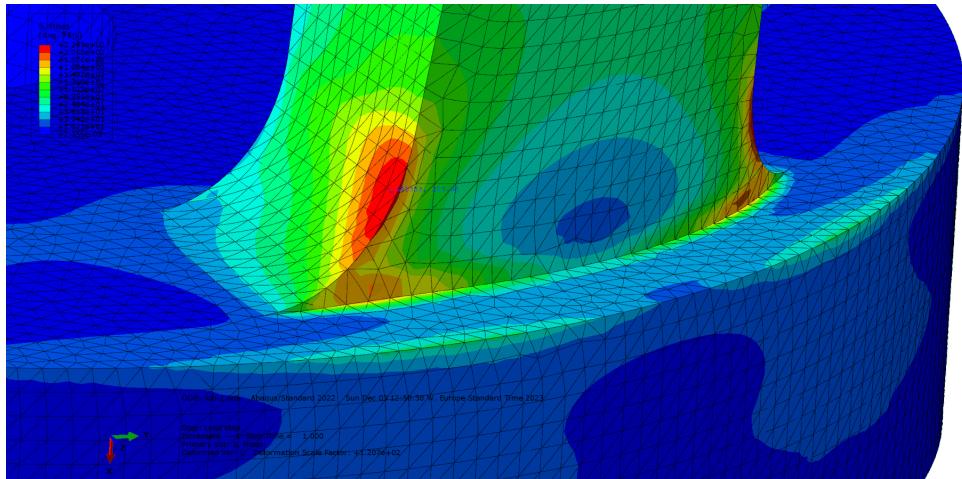
Spenning:



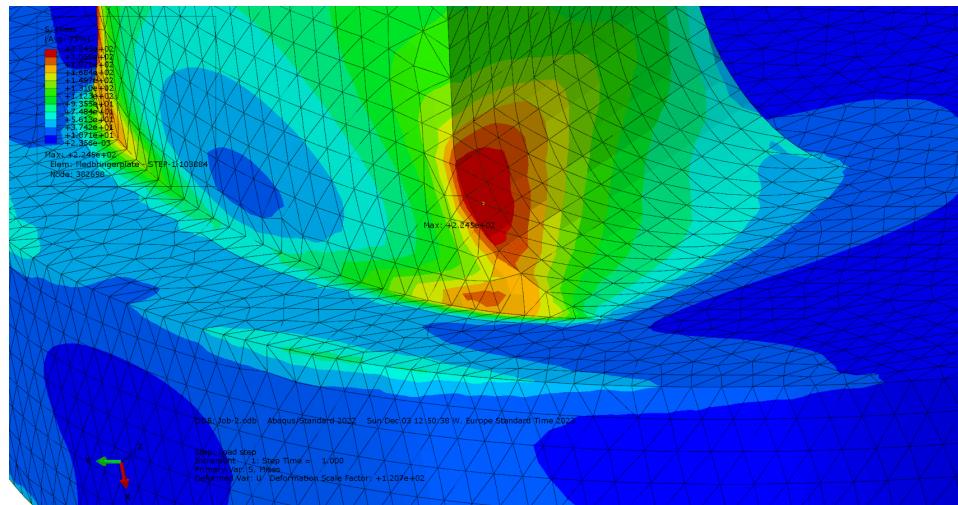
Figur 14: von Mises spenning over hele medbringerplaten i modell 2. Maksimal spenning på 224.5 MPa.



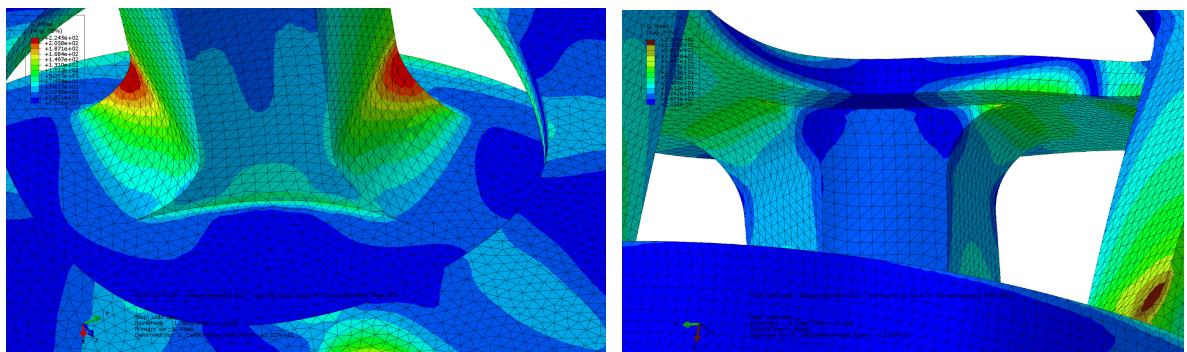
Figur 15: Spenning i akslingshull på ytre skive. Høyest spenning på 207.0 MPa.



Figur 16: Spenning i strekksiden av ribben mot indre skive. Området når en høyest spenning på 223.1 MPa.

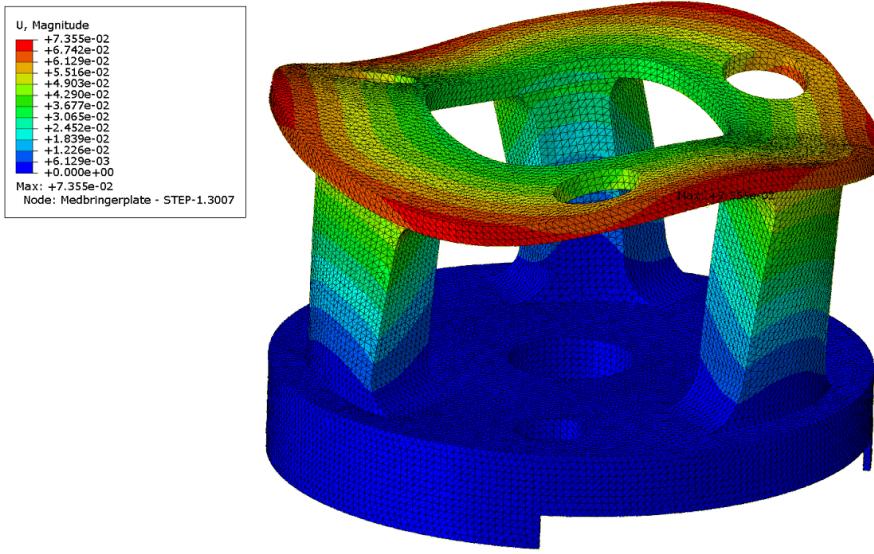


Figur 17: Spenning i trykksiden av ribben mot indre skive. Området oppnår platens maksimale spenning på 224.5 MPa.

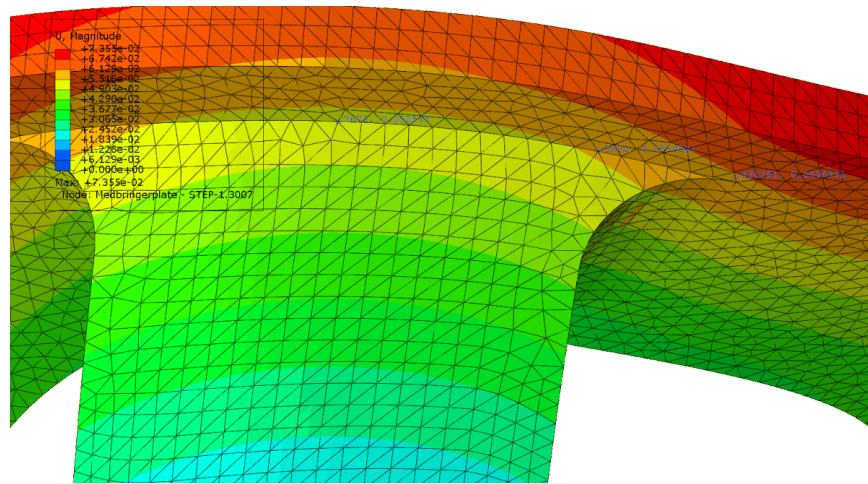


Figur 18 & 19: Spenninger i innvendige hjørner på ribbene. Høyest spenning i hjørnet mot indre skive på 87.3 MPa.

## Deformasjon:



Figur 20: Total deformasjon over hele medbringerplaten. Maksimal forflytning på 0.0736 mm.



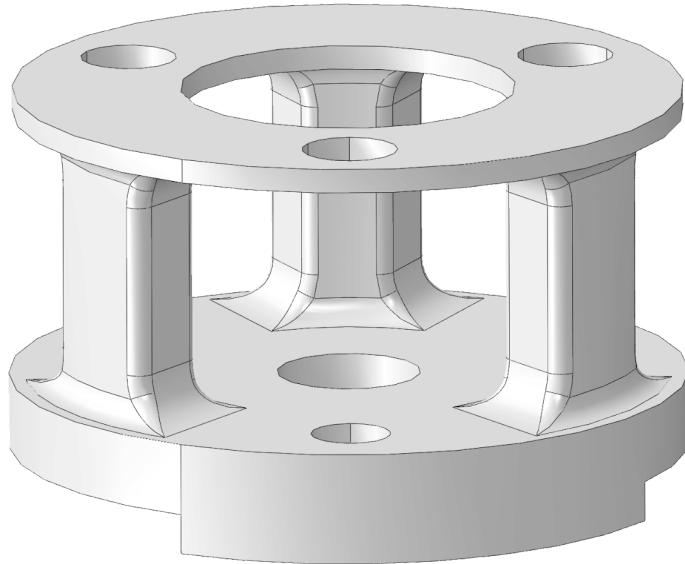
Figur 21: Deformasjon av ribben i innspenningen mot den ytre skiven. Forflytningen varierer fra 0.0530 til 0.0607 mm langs bredden av innspenningen.

Vi bemerker oss at områdene med høyest spenning og formen på deformasjonen forblir den samme. Størrelsen på spenning og deformasjon er også troverdige i forhold til den første modellen. Dette er et godt tegn, og peker til at reduksjonen i elementstørrelsen ikke har påført noen uforventede resultatet. Videre undersøker vi om geometrien til figuren kan forbedres.

### 1.4.3 Tredje modell - Avrunding av skarpe hjørner

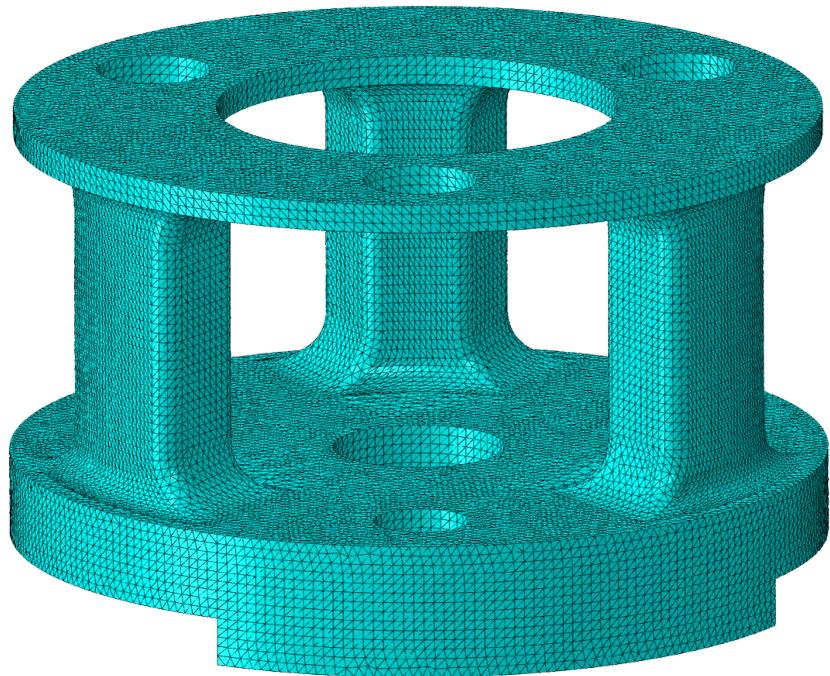
FE-analyse kan i noen tilfeller gi misvisende resultater på grunn av skarpe hjørner i modellen. Dette skyldes bruk av lineær materialelastisitet i modellen som gjør at konsentrasjonen av spenning kan bli uendelig høy ved skarpe vinkler, særlig ved innvendige hjørner. For å bedre forstå om spenningene i modellen vår er realistiske, kan vi avrunde visse hjørner i modellen.

Vi er spesielt interesserte i geometrien til ribbene. De har flere skarpe hjørner, også der hvor spenningen er størst i medbringerplaten. Med tanke på dette, gjør vi endringer i geometrien til medbringerplaten i vår tredje modell. Der hvor ribbene møter platene, lager vi en såkalt fillet av hjørnet med 3 mm radius. I tillegg, runder vi av de utvendige hjørnene langs ribben med 2 mm radius. Medbringerplaten ser nå slik ut, vist i figur 22.

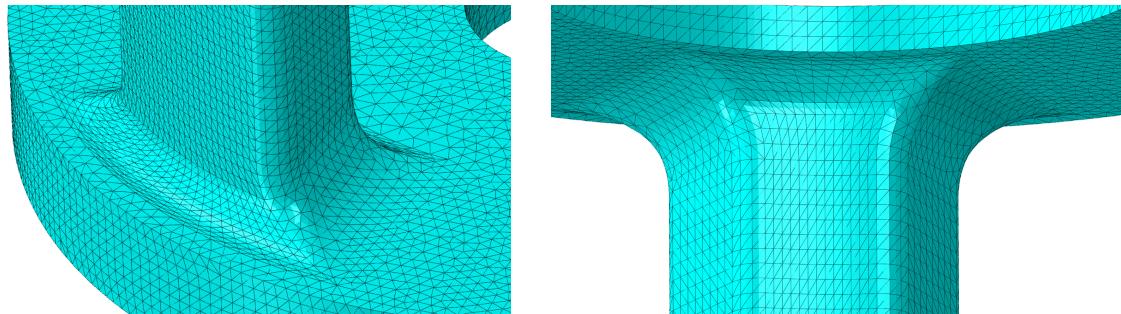


Figur 22: Avrundinger av ribbenes hjørner og innspenninger mot skivene.

Vi har beholdt samme elementstørrelse og -type, samt randbetingelser og lastning fra den forrige modellen. Ved forsøk på å avrunde hjørne med en mindre radius, fikk Abaqus problemer med å lage et jevnt elementnett ved innspenningene til ribbene. Det endelige elementnettet etter repeterte forsøk ble slik, som vist i figurer 23-25.



Figur 23: Forfinet C3D10 tratraederelementnett med generell størrelse på 1 mm.

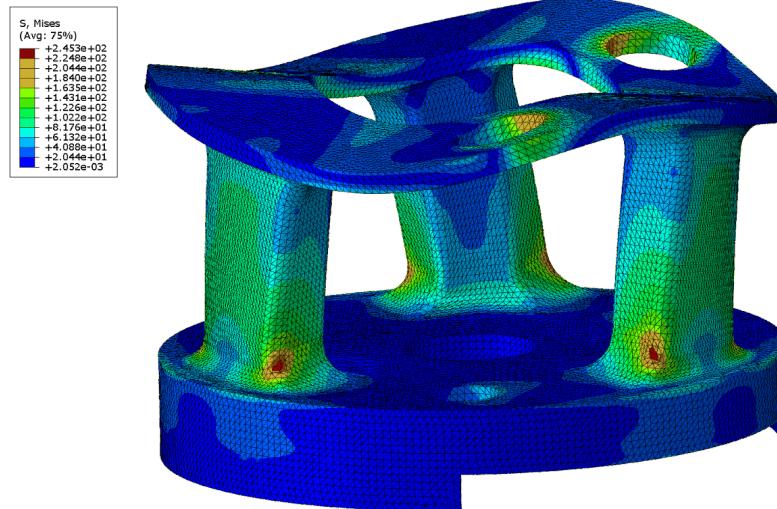


Figur 24 & 25: Elementnettet ved ribbens nedre og øvre innspenning.

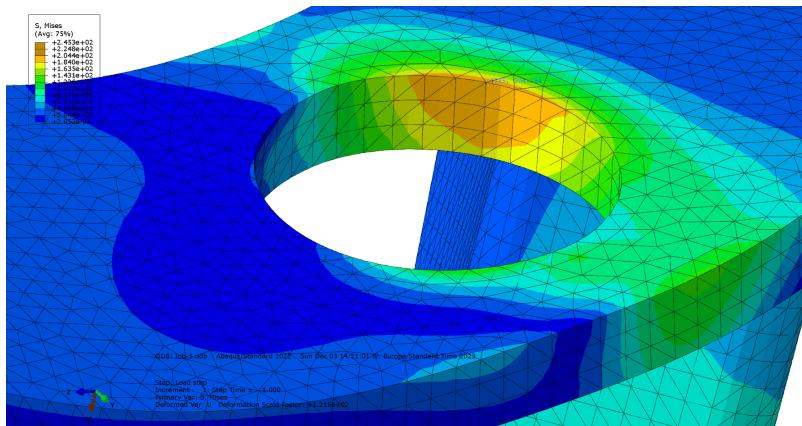
## Resultater

Til tross for mykningen av hjørnene, øker spenningen til 245.3 MPa i sitt maksimum. Størst forflytning blir forholdsvis lik på 0.0732 mm. Resultatet av FE-analysen vises her i figurer 26-33.

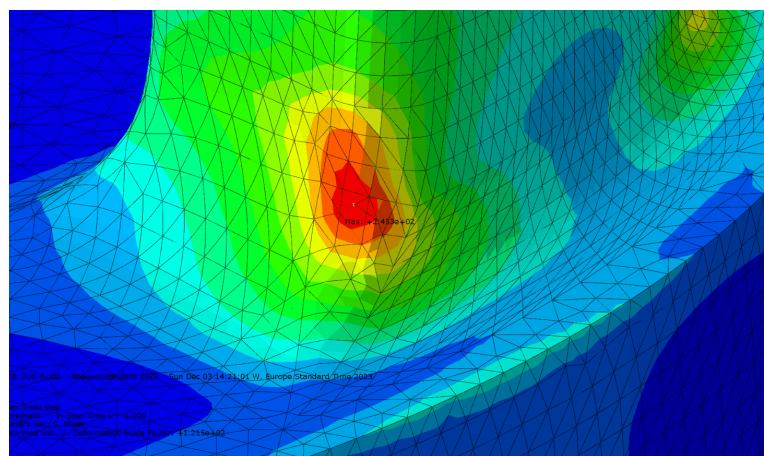
## Spennin:



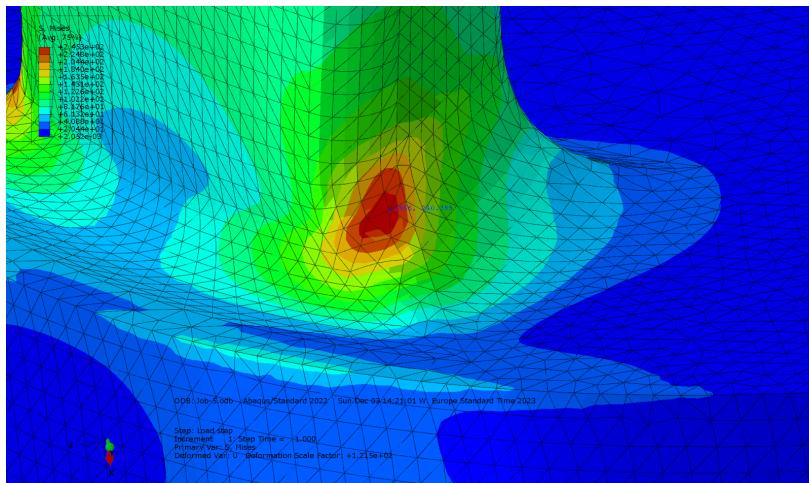
Figur 26: von Mises spenning over hele medbringerplaten i modell 3. Maksimal spenning på 245.3 MPa.



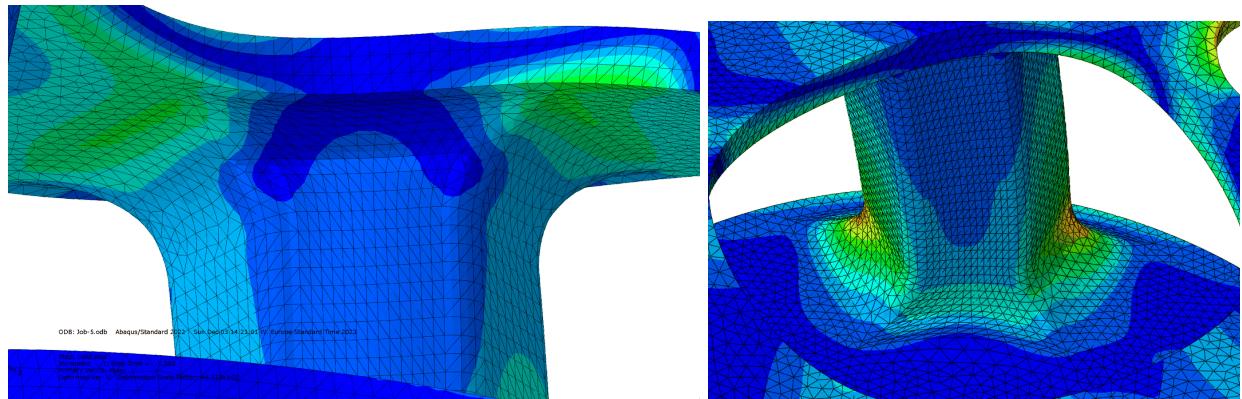
Figur 27: Spenning i akslingshull på ytre skive. Høyest spenning på 204.2 MPa.



Figur 28: Spenning i strekksiden av ribben mot indre skive. Området oppnår platens maksimale spenning på 245.3 MPa.

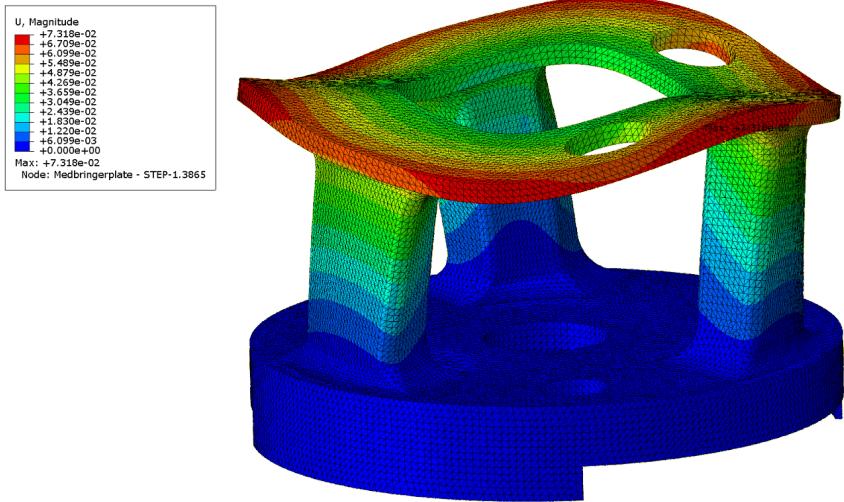


Figur 29: Spenning i trykksiden av ribben mot indre skive. Området når en høyest spenning på 240.4 MPa.

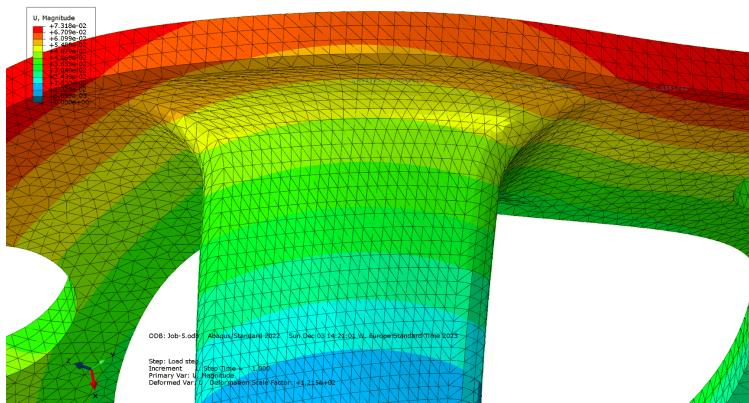


Figur 30 & 31: Spenninger i innvendige hjørner på ribbene. Høyest spenning er i hjørnet mot indre skive på 78.0 MPa.

## Deformasjon:



Figur 32: Total deformasjon over hele medbringerplaten. Maksimal forflytning på 0.0732 mm.



Figur 33: Deformasjon av ribben i innspenningen mot den ytre skiven. Forflytningen varierer fra 0.0541 til 0.0652 mm langs bredden av innspenningen.

Vi bemerker at deformasjonen er forholdsvis lik som i tidligere iterasjoner. Spenningene har derimot økt med 20.8 MPa i sitt maksimum. Vi får at ribbene opplever en høyere spenning enn forventet der de er festet til den indre skiven. Resultatet går imot forventningen om at spenningen vil reduseres i avrunding av ribbens skarpe hjørner. Den mer ujevne forplantningen av spenninger i dette området tyder på at elementnettet ikke har klart å fullstendig fange geometrien på Abaqus modellen. Spenningskonsentrasjonen har sannsynligvis økt i dette området som følge av denne feilen.

## 1.5 Konklusjon

Resultatet fra de tre modellene i den numeriske FE-analysen, samt de analytiske håndberegningene oppsummeres i denne tabellen.

	Analytisk (A): Myk ytterste skive	Analytisk (B): Stiv ytterste skive	FE-modell 1: Grovt nett	FE-modell 2: Fint nett	FE-modell 3: Avrundet hjørner
Maksimal spenning	174 MPa	87.2 MPa	214.1 MPa	224.5 MPa	245.3 MPa
Spenning i akslingshull	-	-	195.3 MPa	207.0 MPa	205.2 MPa
Maksimal strekkspennin ng i ribbe	174 MPa	87.2 MPa	201.2 MPa	223.1 MPa	245.3 MPa
Maksimal trykkspennin ng i ribbe	174 MPa	87.2 MPa	214.1 MPa	224.5 MPa	240.4 MPa
Størst forflytning	-	-	0.0727 mm	0.0736 mm	0.0732 mm
Størst forflytning i ribbe	0.03 mm	0.0076 mm	0.0595 mm	0.0607 mm	0.0652 mm

Vi forventet at resultatet fra FE-analysen skulle ligge mellom de to tilnærmingene A og B fra den analytiske beregningen. Vi ser at de numeriske modellene forventer en del mer spenning enn de analytiske beregningene. Dette kan skyldes forenklingene og antagelsene som ble foretatt i den analytiske beregningen. Forenklingen av ribbenes tverrsnitt kan ha gjort arealtregthetsmomentet større og kan være en av grunnene til at vi observerer lavere spenning i den analytiske beregningen. Likevel er verdiene fra både den analytiske og numeriske delen av samme størrelsesorden, noe som indikerer at beregningene er realistiske.

I forhold til evalueringen av feilmodi, konkluderer beregningene med at medbringerplaten ikke oppnår flytespenning i noen områder ( $f_y = 450 \text{ MPa}$ ), hvor maksimal spenning blant de 3 modellene ikke overskridet 250 MPa.

Når vi evaluerer tilfeller av stor elastisk deformasjon, vurderer vi det ikke som et relevant problem i denne analysen. Dette skyldes at den største deformasjonen vi observerte var kun 0.0736 mm, noe som er minimalt sammenlignet med platens betydelige størrelse. Deformasjonen utgjør under 1% av platens totale høyde. Dette tyder på at platens deformasjon ikke er betydelig nok til å endre angrepspunktet fra planethjulene. Det indikerer at det ikke er nødvendig med ytterligere forsterkning eller endringer i platens design for å opprettholde dens funksjonalitet og integritet.

Modellene våre er derimot ikke uten feilkilder. Vi har gjort antagelser i implementeringen av både last og innspenninger, noe som kan gi rom for feil i resultatene. I en mer realistisk FE-analyse, burde man fordele lasten fra planethjulene i akslingshullet mer realistisk. Dersom antagelsen vår for hvordan medbringerplaten er innspent i planetgirsystemet er feil, burde dette korrigeres i videre iterasjoner. Et annet forbedringspotensiale er muligheten for å forfine elementnettet i de områdene der spenningen er størst. Dette vil føre til enda mer nøyaktighet av de høye spenningskonsentrasjonene.

Angående dimensjoneringen av medbringerplaten med det oppgitte materialet, finner vi ingen umiddelbare behov for å øke dimensjonene på de ulike komponentene. Den maksimale spenningen holder seg trygt under flytspenning i alle områder. Med tanke på det, er det mulig å neddimensjonere ribbene uten å oppnå flytspenning. Det kan derimot være ugunstig å redusere tykkelsen på ribbene som konsekvens av feilmodi som vi ikke har vurdert i denne analysen. Eksempelvis vil utmatting over tid påføre et strengere krav for spenning enn den flytespenningen som er vi har vurdert her. Dersom neddimensjonering av ribbene skal vurderes, er derfor utmatting en feilmodi som også må tas hensyn til.

## 2 Implementering av skiveelementer

### 2.1 Problemstilling

Oppgaven tar sikte på å implementere 6-noders trekantelement, i tillegg til 4- og 9-noders firkantelement. Deretter skal vi sammenligne og teste disse med hverandre og det eksisterende 3-noders trekantelementet, basert på resultater i *Cantilever\_FEM\_main.py*. Implementasjonen gjøres i Python.

### 2.2 Gjennomføring

Vi har gjennomført oppgaven ved bruk av et Github repo for samarbeid i Visual Studio Code. Implementeringen er gjort med utgangspunkt i rekkesølgen for elementimplementering som er beskrevet i oppgaveteksten.

Til å begynne med, brukte vi det allerede implementerte 3-noders trekant element presentert i *triangles\_with\_TODO.py* som inspirasjon for å få til implementeringen av et 6 noders trekant element. For å teste programmet underveis i implementeringen så vi på resultatene fra *Test\_6node\_triangle.py*. Her blir implementeringen av stivhetsmatrisen (K) og tøynings-forskyvningsmatrisen (B) testet for konstant tøyning og stift legeme bevegelser.

For videre implementering av firkantelementer ble vi nødt til å se gjennom forelesningsnotater og øvingsoppgaver for å kunne gjennomføre utregning av blant annet formfunksjoner, stivhetsmatrise og tøynings-forskyvningsmatrise. Det ble en tidkrevende prosess med mye ‘debugging’ og håndberegringer. Heldigvis er fremgangsmåten for 4 og 9 noders firkant element veldig like. Så da vi hadde fått til implementering av 4-noders element, kunne utregningen videreføres til 9-noders element, med et utvidet antall formfunksjoner.

For å teste implementeringen underveis, opprettet vi testprogrammer for firkantelementer på lik måte som de gitte testene til trekant elementene. De er navngitt hhv. *Test\_4node\_quad.py* og *Test\_9node\_quad.py*. Testprogrammene fungerte som gode kilder til feilsøking underveis i implementeringen. Siden vi har fire slike testfiler, som printer en rekke matriseresultater, vil det bli uoversiktlig å legge dem i rapporten. Dermed anbefaler vi å kjøre filene for å se resultatene på testing av stift legeme bevegelser og konstant tøyning. Videre vil vi derimot gjennomføre sammenligninger på deformasjon og et konvergensstudie, basert på resultater fra *Cantilever\_FEM\_main.py* for to ulike lasttilfeller.

## 2.3 Beskrivelse av innlevert kodebase

I innleveringsmappen er prosjektet implementert i mappen ***Project\_start\_with\_TODO*** som inneholder følgende:

- ***Cantilever\_FEM\_main.py***: For å teste elementtypene på en utkramer utsatt for last.
- ***Element\_comparison.py***: Til gjennomføring av konvergensstudie.
- ***triangles\_with\_TODO.py***: Implementering av trekantelementer.
- ***quads\_with\_TODO.py***: Implementering av firkantelementer.
- 4 filer til testing, navngitt ut fra hvilken elementtype de tester.

I tillegg har vi lagt ved 4 VTU-filer for lasttilfelle 1, som brukes til visualisering i Paraview. I mappen ***Images*** finnes også en rekke bilder av resultater i Paraview.

## 2.4 Lasttilfeller

I gjennomførte beregninger, benyttet vi oss av to forskjellige lasttilfeller for å få mer informasjon om de forskjellige elementtypene. Vi valgte å benytte oss av et lasttilfelle med punktlast og et med fordelt last, begge i y-retning på utkrameren. Dette var for å få varierende lasttilfeller. Det medførte at vi enklere kunne finne anomalier underveis i implementeringen, hvor det fordele lasttilfellet avdekket en feil i 6-noders trekantelementet vårt. Verdiene som ble benyttet, var ferdig implementert i ***Cantilever\_FEM\_main.py***, men var kommentert ut fra før, og vi så det derfor som hensiktsmessig å benytte oss av disse.

- **Lasttilfelle 1:**

Last på høyre side av utkramer med amplitude  $P = 3000 \text{ kN}$  i positiv y-retning.

- **Lasttilfelle 2:**

Fordelt last langs x-akse med amplitude  $q = 1 \text{ kN}$  per enhetsareal i positiv y-retning.

## 2.5 Analytiske håndberegringer

Som referanse, ble det gjennomført enkle håndberegringer på de to lasttilfellene for å bruke som referanse til resultatene. Her ble utkrameren regnet som en bjelke, og det er derfor ikke forventet at vårt svar nødvendigvis er korrekt. Bjelketeori består av flere antagelser som vil kunne medføre at våre analytiske beregringer kan avvike fra konvergensverdien til implementeringen. Antagelsen om **ren bøyning** (*pure bending*), kan medføre avvik i vårt tilfelle ettersom den neglisjerer effekter som skjærdeformasjon. I vårt tilfelle vil man ha en betydelig skjærkraft som

vil påvirke spenningsfordelingen. Med å neglisjere denne effekten vil aksiell forskyvning kunne antas å være **mindre** i forhold til numerisk beregning.

### Verdier

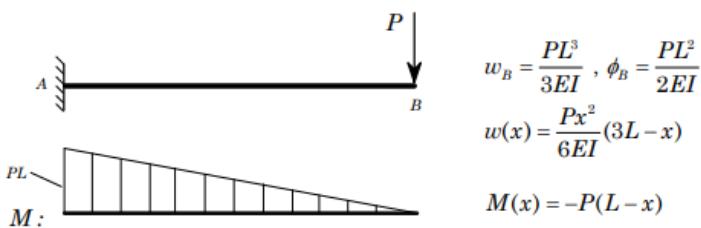
$H = 2.0 \text{ m}$	$\mathbf{th} = 0.1 \text{ m}$	$\mathbf{P} = 3 * 10^6 \text{ N}$
$L = 10.0 \text{ m}$	$E = 2.1 * 10^{11} \text{ N/m}^2$	$q = 10^3 \text{ N/m}^3$

$$I = th * H^3 / 12$$

### Lasttilfelle 1

$$w_1 = (P * L^3) / (3 * E * I) = (4 * P * L^3) / (E * th * H^3) = 1/14 = 7.1428.. * 10^{-2} \text{ m}$$

1)



$$w_B = \frac{PL^3}{3EI}, \phi_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$w(x) = \frac{Px^2}{6EI}(3L-x)$$

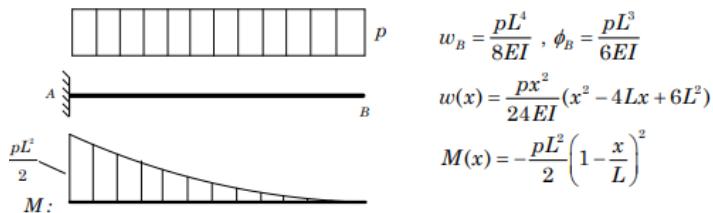
$$M(x) = -P(L-x)$$

### Lasttilfelle 2

$$p = q * th * H$$

$$w_2 = (p * L^4) / (8 * E * I) = (3 * q * L^4) / (2 * E * H^2) = 1/56000 = 1.7857.. * 10^{-5} \text{ m}$$

5)



$$w_B = \frac{pL^4}{8EI}, \phi_B = \frac{pL^3}{6EI}$$

$$w(x) = \frac{px^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$$

$$M(x) = -\frac{pL^2}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

## 2.6 Sammenligning av elementtyper

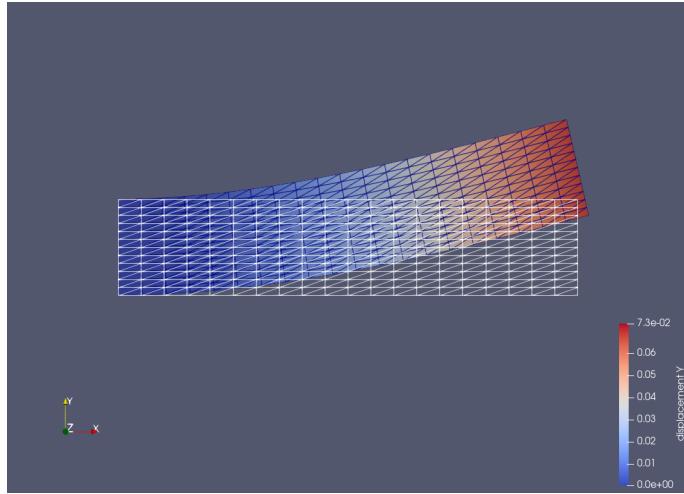
Her vil vi sammenligne resultatene de forskjellige skivelementimplementeringene har gitt ved beregning av utkrageren i **Cantilever\_FEM\_main.py** ved lasttilfelle 1 og 2. Sammenligningen baserer seg på forskyvning i x- og y-retning i en node midt på høyre ende av bjelken. Kraften er reaksjonskraft, eller motkraft i x- og y-retning. Antall noder er satt konstant til 21 og 13 for hhv. x- og y-retning i alle tilfellene. Dette er basert på slik **Cantilever\_FEM\_main.py** ble utdelt. Figurene viser et gjennomsiktig elementnett av den udeformerte bjelken, og en farget bjelke deformert med en lik skalering for alle elementene i Paraview.

### 2.6.1 Lasttilfelle 1

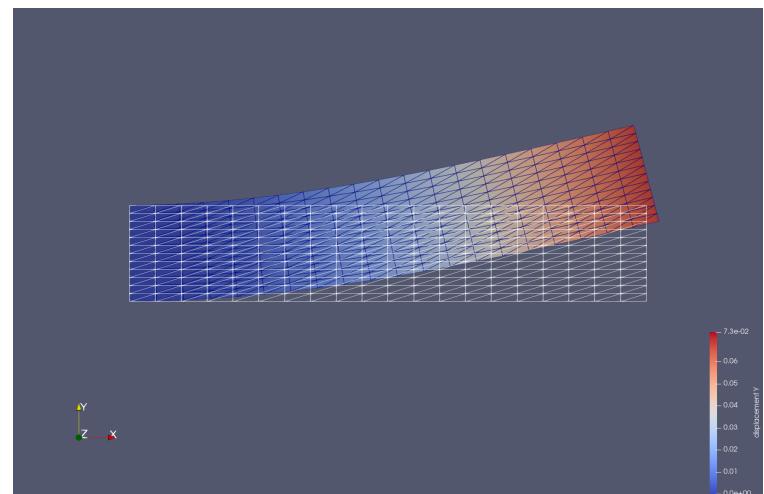
#### Trekant elementer

Tabell 1: Resultater 3- og 6-noders trekant element for lasttilfelle 1

Elementtype	3 Noder	6 Noder
Forskyvning i x	8.690e-06	1.453e-06
Forskyvning i y	6.724e-02	7.317e-02
Kraft i x	1.344e+00	1.501e+00
Kraft i y	-3.000e+06	-3.000e+06



Figur 34: Deformasjon 3-noders element



Figur 35: Deformasjon 6-noders element

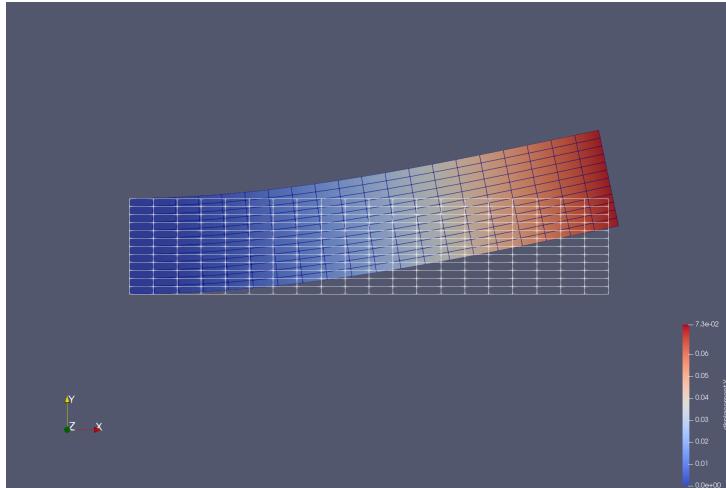
Tabell 1 viser oss at det blir forskjell i resultatene når vi går fra 3 til 6 noder på trekantelementet. Vi ser at det er en merkbar differanse på forskyvning i y-retning. Alle resultatene er derimot på samme størrelsesorden og vi forventer dermed at ved videre forfining av meshet vil de to

elementene gi lik konvergens, skjønt med en antagelse om at 3-noders elementene vil konvergere saktere på grunn av færre frihetsgrader til å modellere deformasjonen nøyaktig.

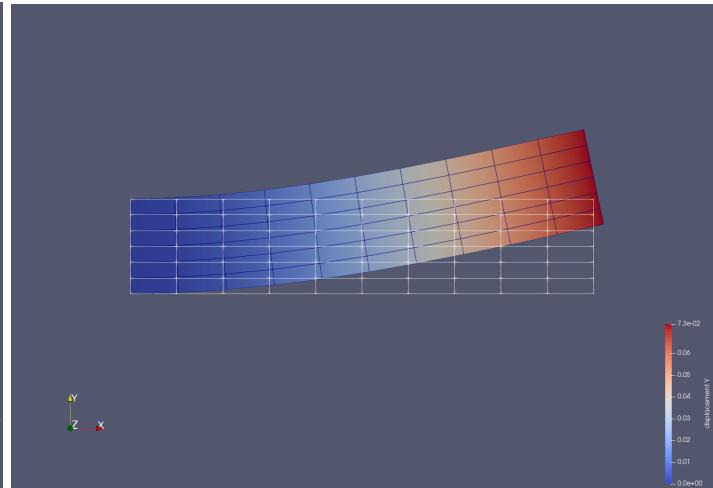
### Firkant elementer

Tabell 2: Resultater 4- og 9-noders firkant element for lasttilfelle 1

Elementtype	4 Noder	9 Noder
Forskyvning i x	1.719e-16	1.382e-16
Forskyvning i y	7.143e-02	7.325e-02
Kraft i x	-9.302e-01	1.177e+00
Kraft i y	-3.000e+06	-3.000e+06



Figur 36: Deformasjon 4-noders element



Figur 37: Deformasjon 9-noders element

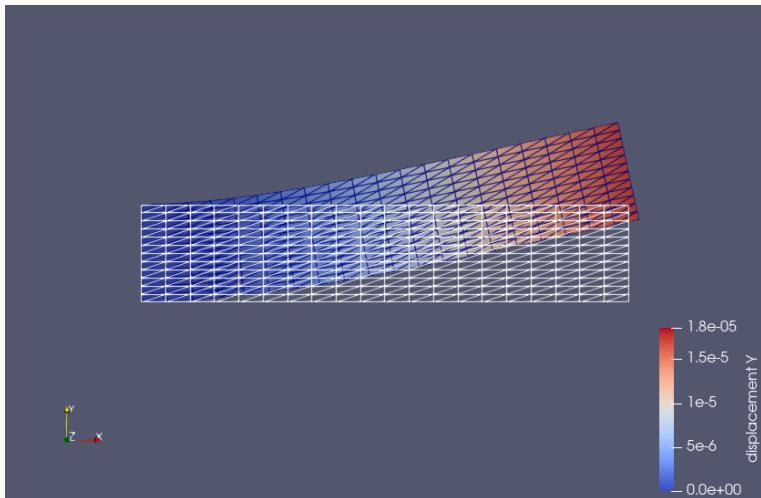
Tabell 2 viser som i tabell 1 at det gir høyere forskyvning å øke antall noder 4 til 9. Her er også resultatene på lik størrelsesorden hos begge elementtypene, og vi kan anse forskjellene som små. Vi observerer også at 6- og 9-noders elementer har svært like resultater. Sammenligningen mellom trekant- og firkantelementene viser at firkantelementer produserer betydelig lavere forskyvning i x-retning, noe som indikerer en høyere nøyaktighet for firkantelementer i modelleringen av forskyvning x-retning, siden denne forskyvningen er forventet å være lik null når vi kun har last i y-retning. Vi vil også her anta at firkantelementtypene vil få lik konvergens.

## 2.6.2 Lasttilfelle 2

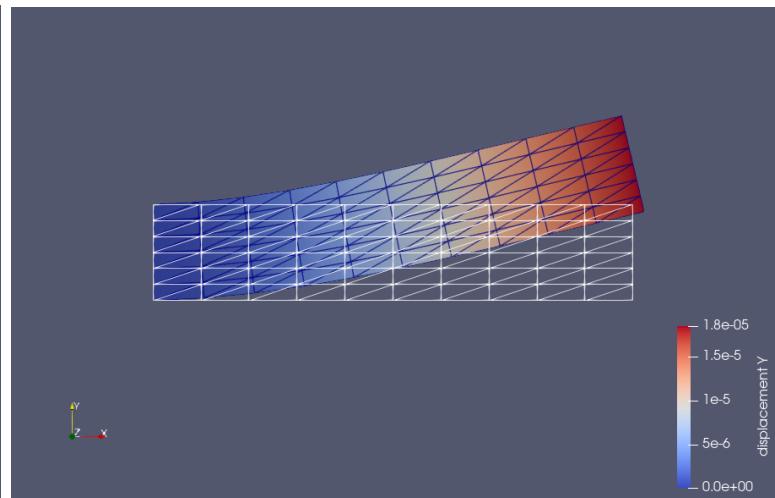
Trekant elementer

Tabell 3: Resultater 3- og 6-noders trekant element for lasttilfelle 2

Elementtype	3 Noder	6 Noder
Forskyvning i x	3.106e-09	4.908e-10
Forskyvning i y	1.697e-05	1.845e-05
Kraft i x	-2.421e-04	2.906e-04
Kraft i y	-2.000e+03	-2.000e+03



Figur 38: Deformasjon 3-noders element

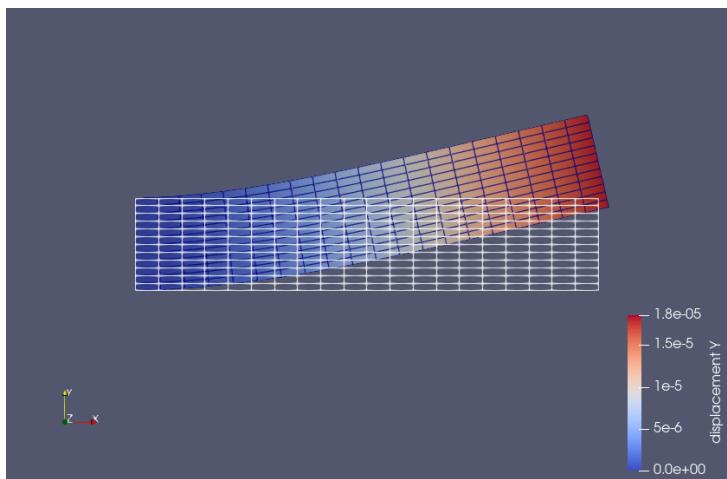


Figur 39: Deformasjon 6-noders element

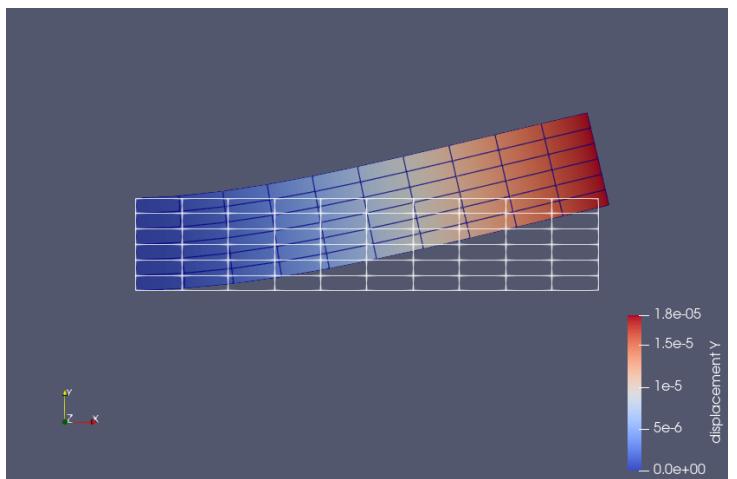
Firkant elementer

Tabell 4: Resultater 4- og 9-noders firkant element for lasttilfelle 2

Elementtype	4 Noder	9 Noder
Forskyvning i x	4.394e-20	2.649e-20
Forskyvning i y	1.803e-05	1.847e-05
Kraft i x	-2.587e-04	1.576e-04
Kraft i y	-2.000e+03	-2.000e+03



Figur 40: Deformasjon 4-noders element



Figur 41: Deformasjon 9-noders element

For lasttilfelle 2 bekrefter resultatene fra Tabell 3 og 4 tendensen sett i lasttilfelle 1, med trekant- og firkantelementer som viser små forskjeller i forskyvning og kraftresultater. Størst forskjell i forskyvning får vi igjen når vi øker fra 3- til 6-noders trekant element. 6- og 9-noders element gir veldig lik forskyvning i y-retning, som tyder på at høyere antall noder gir større nøyaktighet. Noe som er et forventet resultat i en slik analyse. Firkantelementene beholder også sin karakteristiske lavere forskyvning i x-retning i lasttilfelle 2, noe som forsterker argumentet for deres effektivitet i modelleringen langs denne aksen.

## 2.7 Konvergensstudie

Etter gjennomført implementering av elementtypene, opprettet vi et sammenlignings script **element\_comparison.py**. Her blir deformasjon i y-retning for de ulike elementene sammenlignet med forskjellige elementstørrelser. Disse resultatene ble benyttet for å undersøke konvergens, både for punktlast og fordelt last (lasttilfelle 1 og 2). Ettersom bjelkens lengde er 5 ganger større enn høyden, multipliserer vi med 5 for antall noder i x-retning (numNodesX), i forhold til antall noder i y-retning (numNodesY). Vi sikrer dermed en kvadratisk mesh, og går bort i fra det opprinnelige forholdet mellom antall noder i x- og y-retning (21 x 13), som ble benyttet i tidligere sammenligning. I tillegg har vi forholdt oss til et odde antall noder i x- og y-retning for meshet, slik at trekant elementer blir håndtert riktig i henhold til implementeringen.

Fra Waløens kompendium, tar vi følgende utsagn i betraktnng:

- Tøyninger og spenninger konvergerer saktere enn forskyvninger
- Høyere ordens elementer konvergerer raskere enn lavere ordens elementer

Dette kan man se i formelen for relativ forskyvningsfeil:

$a_1, a_2$  : mesh størrelse

$m$  : graden til forskyvningspolynomet

$$\Delta u_1 / \Delta u_2 = (a_1 / a_2)^{m+1}$$

Eksempelvis er  $m = 1$  for 4-noders firkantelement, og  $m = 2$  for 9-noders firkantelement.

### 2.7.1 Lasttilfelle 1

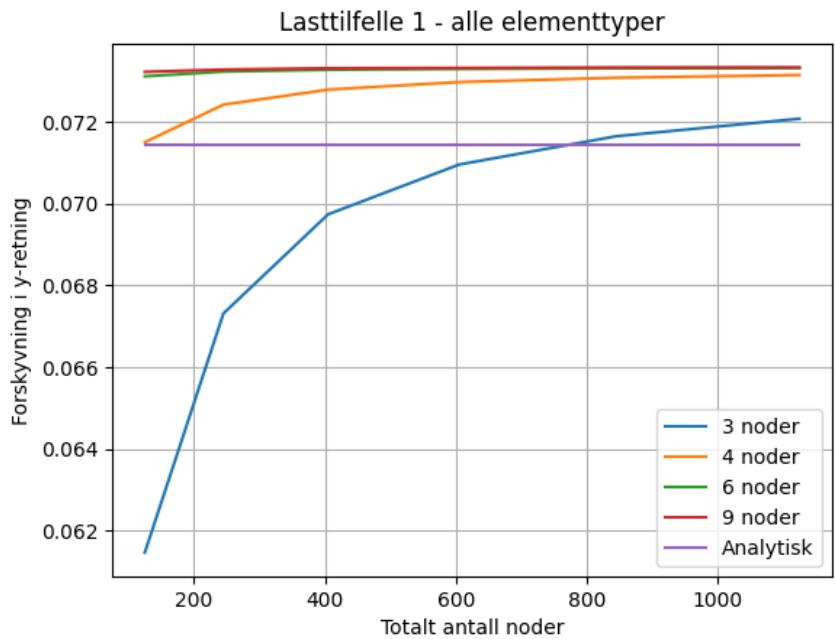
Her kan man se deformasjonen for alle elementtypene, med et lavt antall noder totalt i meshet.

Alle elementtypene konvergerer til en litt høyere verdi enn analytisk resultat. Antagelsen gjort tidligere ser dermed ut til å stemme.

Man kan se at 3 noders trekant element (blå) gir en betydelig større feil enn de andre elementtypene for et lavt antall noder. I tillegg konvergerer den svært sakte i forhold til de andre.

De tre andre elementtypene ser ut til å konvergere tilstrekkelig raskt.

4-noders firkantelement konvergerer litt saktere enn de to andre, som er forventet i forhold til tidligere betrakting. Vi undersøker derfor konvergensen til 6 og 9 noders element nærmere.

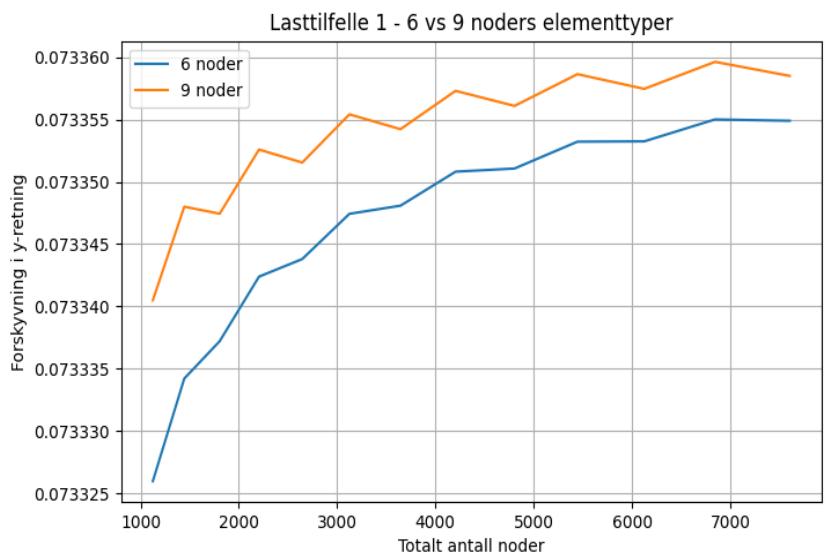


Her kan man se deformasjon for 6- og 9- noders elementtyper bestående av et høyere antall noder totalt i meshet.

Man kan se at elementtypene gir svært likt resultat, og konvergerer i cirka samme hastighet.

Et interessant resultat her er at 9 noders trekant elementet svinger litt opp og ned. Vi ser at den svinger annenhver gang, hvor oddetall på formen ( $4n+1$ ) gir litt høyere verdier enn de på formen ( $4n+3$ ). Grunnen til svingningene kan skyldes **flyttallsfeil**, hvor unøyaktighet i datamaskinenes lagring og beregning av flyttall videre kan medføre følgefeil og avrundingsfeil.

Dessuten er variasjonen svært liten, og kan praktisk talt ses bort ifra når vi tar standpunkt til



hvilken elementtype som er best egnet.

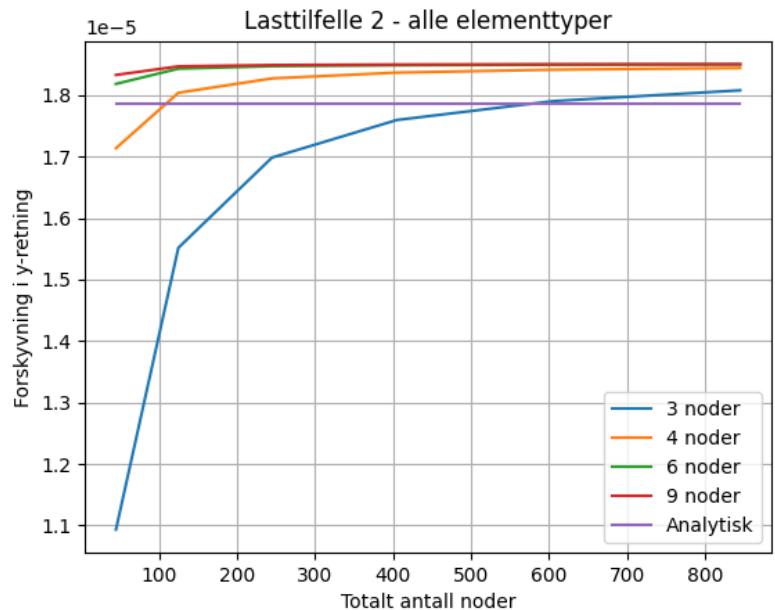
Ettersom det heller ikke var noen stor forskjell i kjøretid mellom de to elementtypene, kan vi konkludere med at begge elementtypene er gode løsninger for dette lasttilfellet.

### 2.7.1 Lasttilfelle 2

Her kan man se deformasjonen for alle elementtypene bestående av et lavt antall noder totalt i meshet

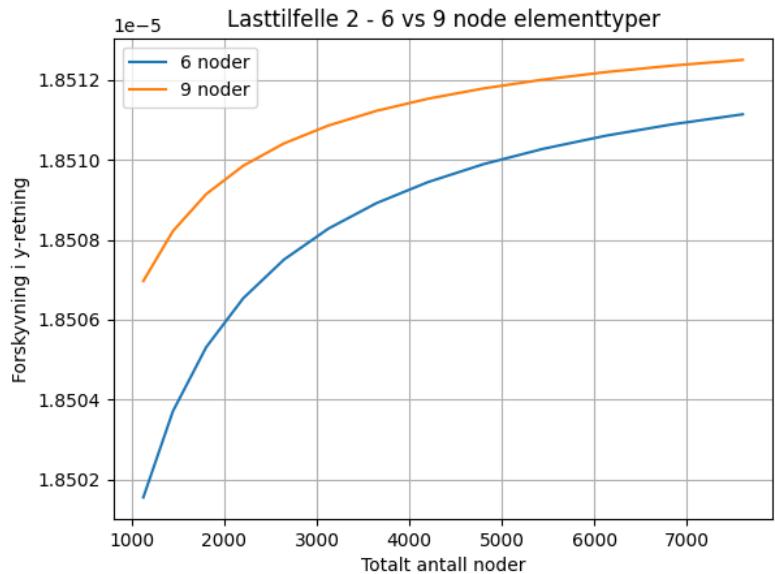
I dette tilfellet ble resultatet for konvergens ganske likt som for *Lasttilfelle 1*.

Resultatene overskridet også det analytiske resultatet som i *Lasttilfelle 1*, men med en litt mindre forskjell.



Her kan man se deformasjon for 6- og 9- noders elementtyper bestående av et høyere antall noder totalt i meshet.

9 noders-elementet konvergerer litt raskere enn 6 noders-elementet.



## 2.8 Konklusjon

Med en maksimal forskjell på 4% mellom numerisk og analytisk beregning i de to lasttilfellene for over 500 noder, kan vi konkludere med at implementeringen av elementtypene var vellykket. Vi observerte at elementtypene ser ut til å konvergere til en felles verdi som er ulik analytisk løsning, som drøftet tidligere.

Det er tydelig at elementene med 6 og 9 noder konvergerer raskere enn 3 og 4. Til tross for dette, ble resultatene ganske like for de forskjellige elementtypene med et finere mesh. I vårt tilfelle er meshet og lasttilfellene relativt enkle med små deformasjoner. Dermed kan vi se bort fra problemer som element-forvrengning og skjærlåsing (shear locking). Elementtyper av høyere orden er mer mottakelig for slike problemer, men beskriver samtidig et mesh sin geometri mer nøyaktig. Vi kan dermed konkludere med at en mer kompleks elementtype, som 6 noders trekant element og 9 noders firkant element, vil være mest gunstig i vår problemstilling.