252-0027

Einführung in die Programmierung
Übungen

Hoare Logic & Weakest Precondition

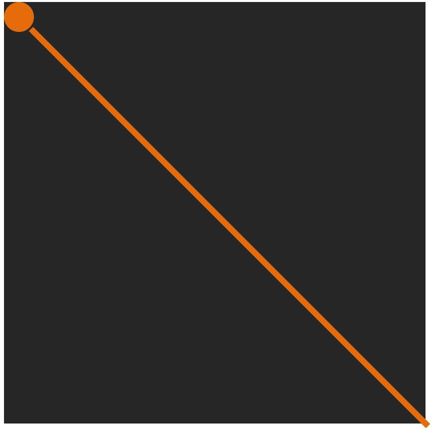
Henrik Pätzold
Departement Informatik
ETH Zürich

Heutiger Plan

- Nachbesprechung Probeprüfung
- Hoare Logic
- Weakest Precondition

Nachbesprechung ProgSim1

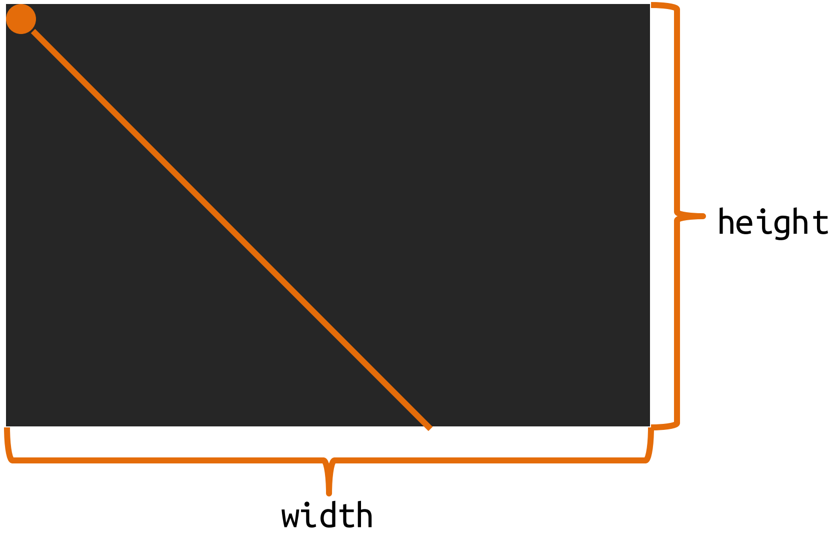
Nachbesprechung – Malen einer Diagonale



```java
public static void drawDiagonal(int x0, int y0, int r, int g, int b){
    int min = Math.min(frame.height, frame.width);
    for(int i = 0; i < min - x0; i++){
        frame[x0+i][y0+i] = new Pixel(r,g,b);
    }
}
```

x ist für die Horizontale,
y für die vertikale

Nachbesprechung – Malen einer Diagonale

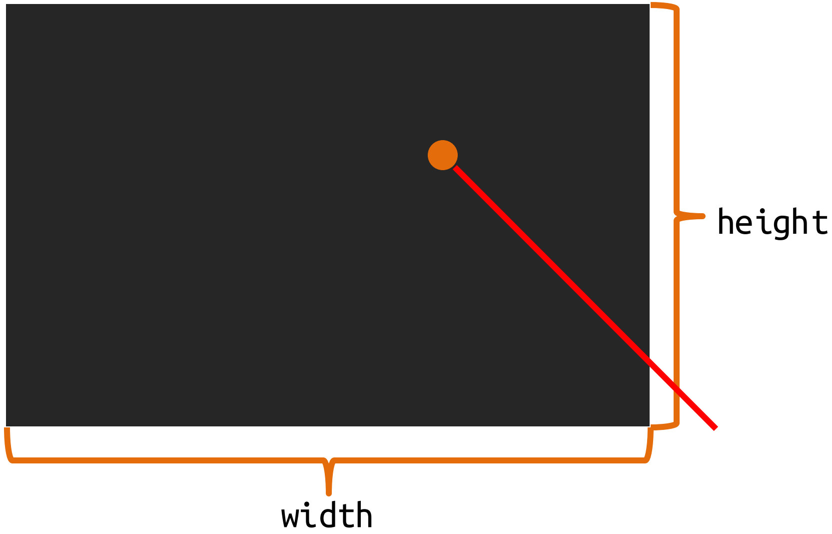



```java
public static void drawDiagonal(int x0, int y0, int r, int g, int b){
    int min = Math.min(frame.height, frame.width);
    for(int i = 0; i < min - x0; i++){
        frame[x0+i][y0+i] = new Pixel(r,g,b);
    }
}
```

x0+i < min = height

x ist für die Horizontale,
y für die vertikale

Nachbesprechung – Malen einer Diagonale

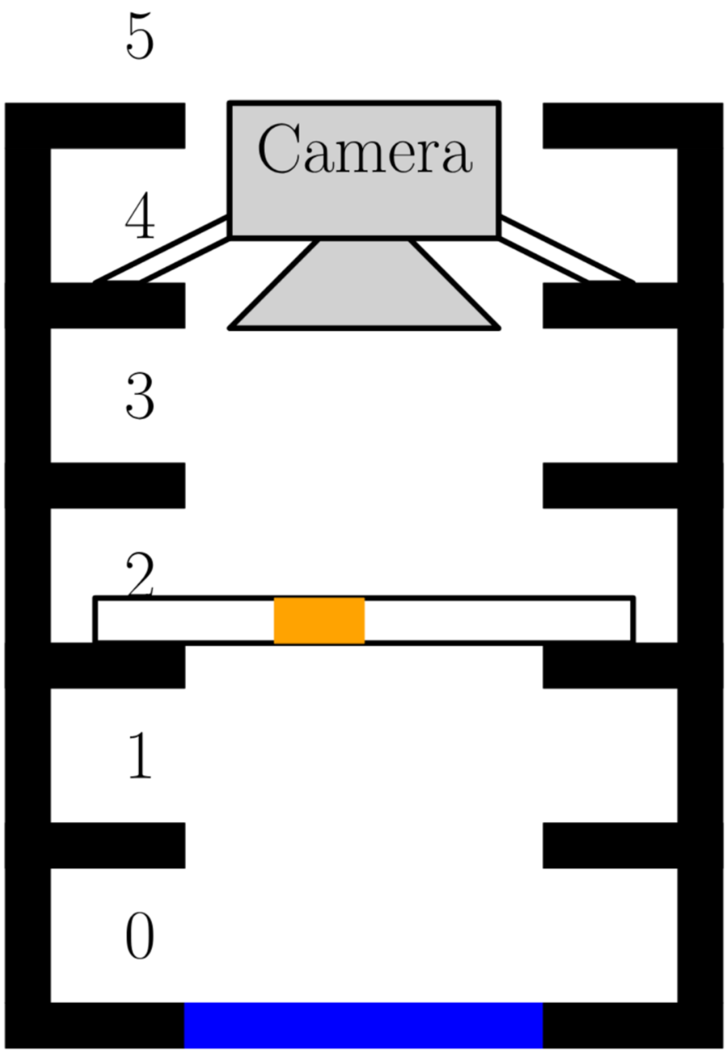


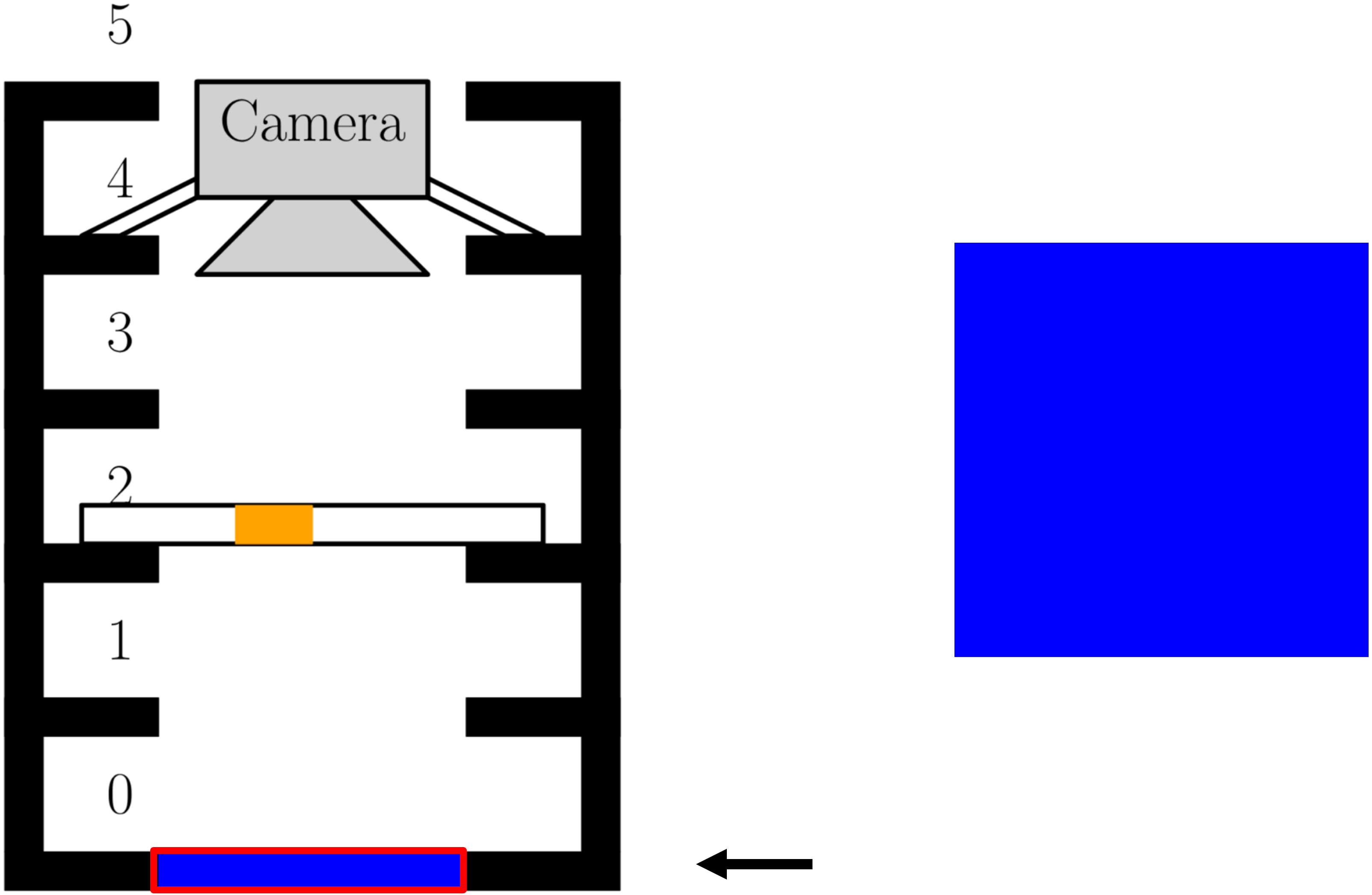

```java
public static void drawDiagonal(int x0, int y0, int r, int g, int b){
    int min = Math.min(frame.height, frame.width);
    for(int i = 0; i < min - x0; i++){
        frame[x0+i][y0+i] = new Pixel(r,g,b);
    }
}
```

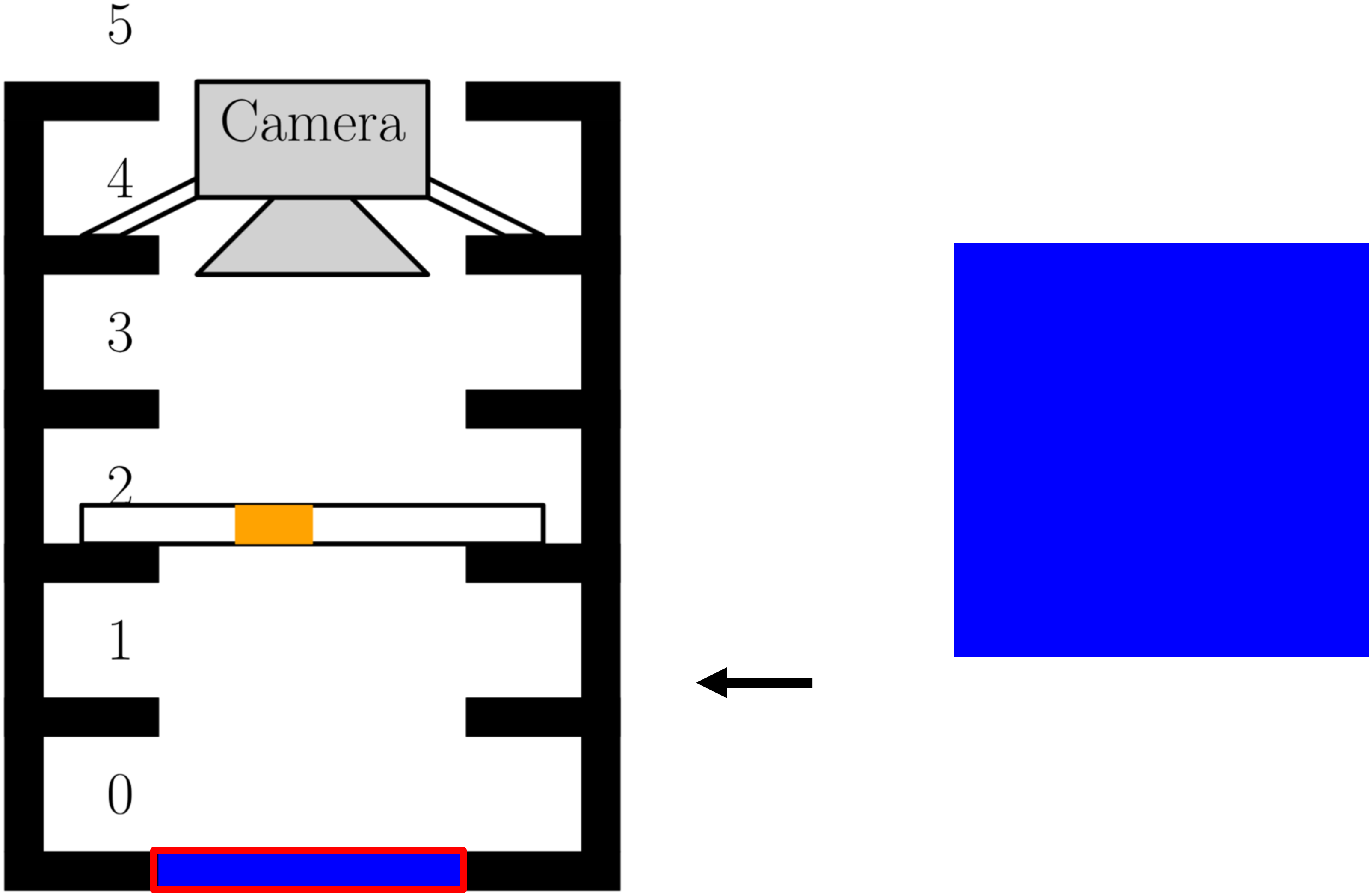
x0+i < min = height

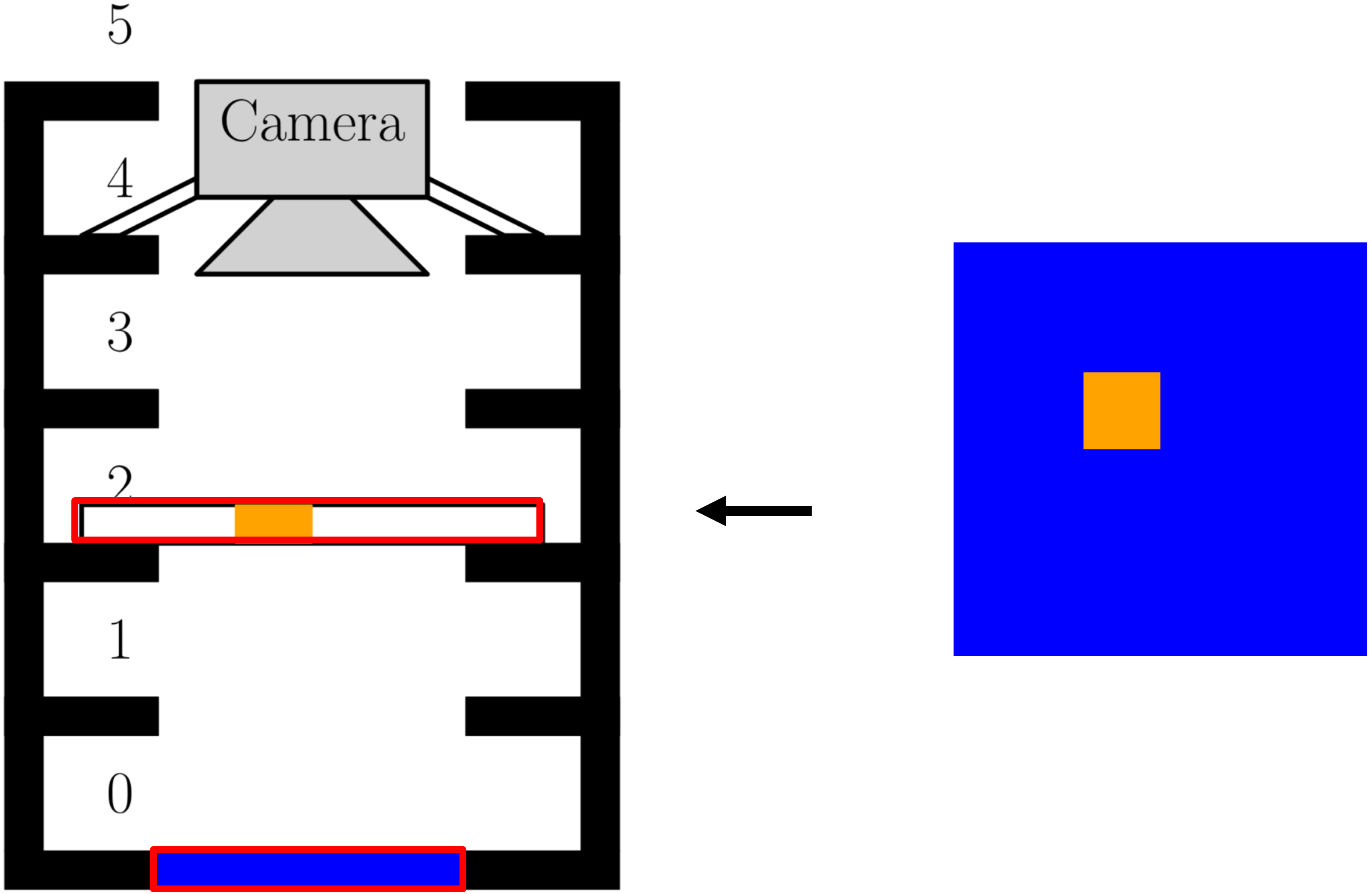
x ist für die Horizontale,
y für die vertikale

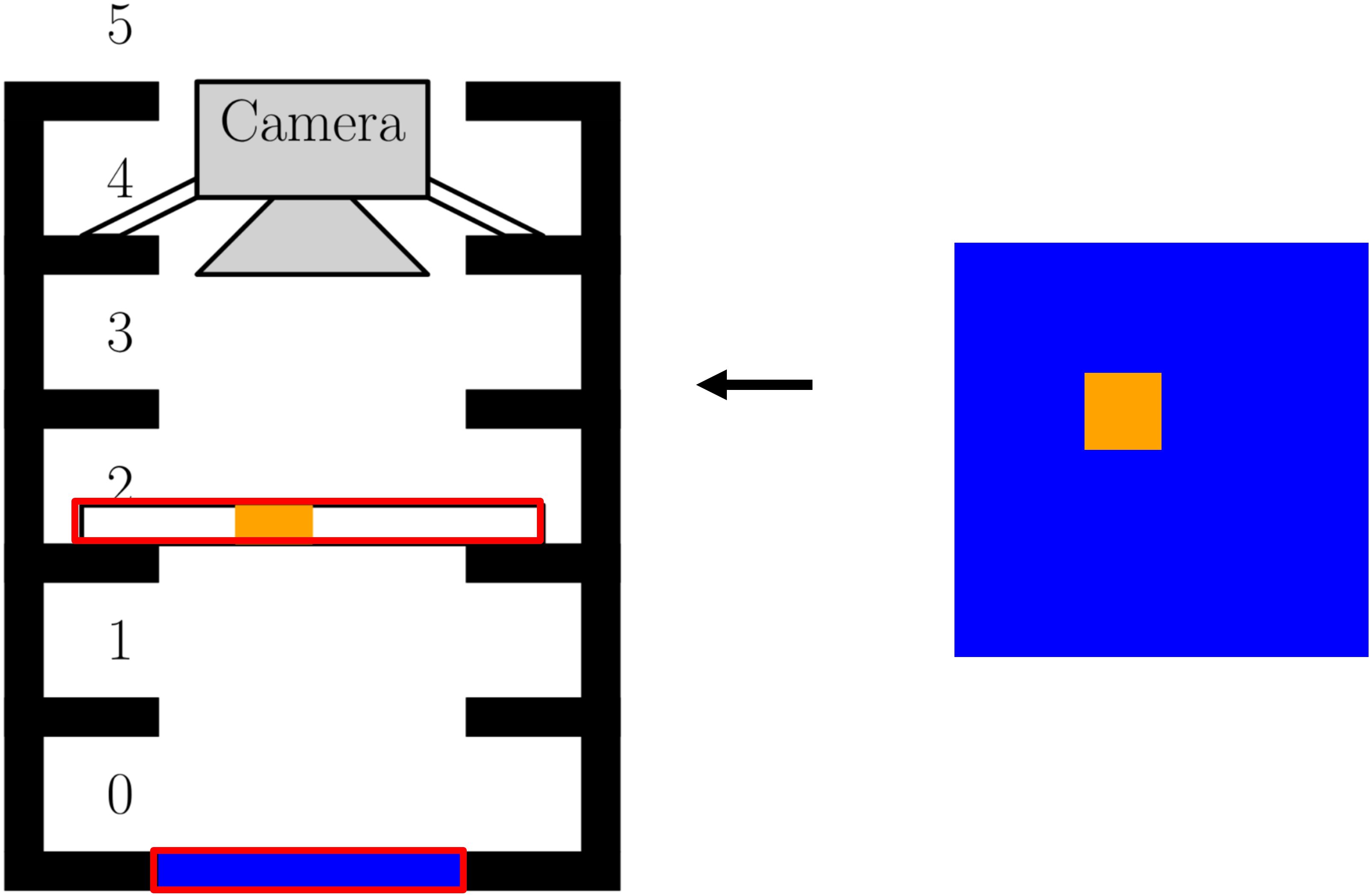
```java
public static void drawDiagonal(int x0, int y0, int r, int g, int b){
    int min = Math.min(frame.height, frame.width);
    for(int i = 0; i + x0 < frame.height && i+y0 < frame.width; i++){
        frame[x0+i][y0+i] = new Pixel(r,g,b);
    }
}
```


5
Camera
4
3
2
1
0


5
Camera
4
3
2
1
0


5
Camera
4
3
2
1
0


5
Camera
4
3
2
1
0


5
Camera
4
3
2
1
0

Lösungsweg

Hoare Logic

$\{p\}\ s\ \{t\}$

```
{                }

if (x > y) {
  z = x - y
} else {
  z = y - x;
}

{z > 0}
```

```
Precondition   {                 }

                if (x > y) {
                  z = x - y
                } else {
                  z = y - x;
                }

Postcondition  {z > 0}
```

Stärkere und schwächere Aussagen

- Wir können *stärkere* und *schwächere* Aussagen unterscheiden
  - Wenn $P_1 \Longrightarrow P_2$ gilt, dann ist P_1 stärker als P_2 (und P_2 schwächer als P_1)

- Die stärkste Aussage ist `false`, da `false` alles impliziert
- Die schwächste Aussage ist `true`, **da `true` nur `true` impliziert**

Finde die Weakest Precondition:
Finde das schwächste `p`, sodass nach Ausführung von `s` `t` gilt

Rückwärtsschliessen: Vorgehen

```
{Precondition}
   Statement₁;
   ...
{Assertionₙ₋₂}
   Statementₙ₋₁;
{Assertionₙ₋₁}
   Statementₙ;
{Postcondition}
```

- **Start:** Wählen (wissen, raten) einer sinnvollen *Nachbedingung*
- **Schrittweise:** Herleiten der vorherigen Aussage (`Assertion`$_{i-1}$) durch Einbeziehen des *Effekts* der vorherigen Anweisung (`Statement`$_i$)
- **Ziel:** Herleiten einer *notwendigen und hinreichenden Vorbedingung*

- Rückwärts = «Welche Vorbedingung braucht mein Code, damit er die gewählten Garantien (Nachbedingung) geben kann?»

Weakest Precondition

- Die **schwächste Vorbedingung (weakest precondition)** ist die schwächste Vorbedingung, die die Postcondition impliziert.
  - Falls die Postcondition `{ true }` ist, so ist `{ true }` die schwächste Vorbedingung. Alles impliziert die Postcondition, also insbesondere auch die schwächste Bedingung `true`.
  - Falls die Postcondition `{ false }` ist, so ist `{ false }` die schwächste Vorbedingung. Nur `{ false }` impliziert die Postcondition, demensprechend ist es die schwächste (und einzige) Vorbedingung.
- Die vorgestellten Regeln fürs Rückwärtsschliessen ergeben direkt die schwächsten Vorbedingungen.

Weakest Precondition – Einfaches Beispiel

{ }

x = y*y

{x>4}

Weakest Precondition – Einfaches Beispiel

{ }

x = y*y ―――――― {x>4}

{x>4}

Weakest Precondition – Einfaches Beispiel

{ }

x = y*y ———————— {y*y>4}

{x>4}

Weakest Precondition – Einfaches Beispiel

{y*y>4}

x = y*y

{x>4}

Weakest Precondition – Einfaches Beispiel

$\{|y|>2\}$

$x = y*y$ ______

$\{x>4\}$

Weakest Precondition – Zweites Beispiel

$\{ \qquad \}$

y = x+3 ______

z = y+1 ______

$\{z>4\}$

Weakest Precondition – Zweites Beispiel

{ }

$y = x+3$ ______

$z = y+1$ ______ $\{z>4\}$

$\{z>4\}$

Weakest Precondition – Zweites Beispiel

$\{ \qquad \}$

$y = x+3$ ______

$z = y+1$ ______ $\{y+1 > 4\}$

$\{z>4\}$

Weakest Precondition – Zweites Beispiel

$\{ \qquad \qquad \}$

$y = x+3$ ______________ $\{y+1 > 4\}$

$z = y+1$ ______________

$\{z>4\}$

Weakest Precondition – Zweites Beispiel

$\{ \qquad\qquad \}$

$y = x+3$ __________ $\{x+3+1 > 4\}$

$z = y+1$ __________

$\{z>4\}$

Weakest Precondition – Zweites Beispiel

{ }

y = x+3 ______ {x > 0}

z = y+1 ______

{z>4}

Weakest Precondition – Zweites Beispiel

$\{x > 0\}$

$y = x+3$ ____________

$z = y+1$ ____________

$\{z>4\}$

Weakest Precondition – Aufgabe 1

```
{              }

   x = a - 4;

{x>0}
```

Weakest Precondition – Aufgabe 2

```
{              }

  x = y + z;

  y = y - 5;

{y < 0}
```

Weakest Precondition – Prüfungsbeispiel

```
{                }

  w = a

  x = w + b;

  y = x * 2;

{y > 0 && b > 10}
```

Weakest Precondition – Prüfungsbeispiel

```
{                    }

 p = 3 * q

 p = p + 1;

{p > 15}
```

If-Anweisungen und Aussagen

- **Ziel:** Regel für Tripel `{P} if (b)` S_1 `else` S_2 `{Q}`

- **Beobachtungen**
  - Ausführung von S_1 wenn b hält
  - Ausführung von S_2 wenn ¬b hält
  - P hält in beiden Fällen vor der Ausführung
  - Q muss in beiden Fällen nachher gelten

```
{P}
  if (b) {
    S1;
  } else {
    S2;
  }
{Q}
```

Hoare-Logik-Regel für if-Anweisungen

- Das Tripel $\{P\}$ `if (b)` S_1 `else` S_2 $\{Q\}$ ist gültig, genau dann wenn
  1. $\{P \land b\}\ S_1\ \{Q\}$ gültig ist
  2. $\{P \land \neg b\}\ S_2\ \{Q\}$ gültig ist

Vorgehen für if-Anweisungen

- **Situation:** Entscheide, ob `{P} if (b)` S_1 `else` S_2 `{Q}` gültig ist

- **Empfohlenes Vorgehen:**
  1. Wende bekannte Regeln wie rechts gezeigt an (auf S_1 und S_2)
  2. Zeige notwendige Implikationen
     1. $P \land b \quad \Longrightarrow \quad R_1$
     2. $P \land \neg b \quad \Longrightarrow \quad R_2$

```
if (b) {
  {P ∧ b}
  {R₁}
    S₁;
  {Q}
} else {
  {P ∧ ¬b}
  {R₂}
    S₂;
  {Q}
}
```

If-Anweisungen im Kontext: Beispiel

Zu zeigen: Gültigkeit des Tripels

```
{n > 2}
  m = n + 3;

  if (m % 2 == 0) {
    m = m / 2;
  } else {
    m = m + 1;
  }

  k = m + n;
{k > 5}
```

Rückwärts vorgehen:

```
{n > 2}
  m = n + 3;
{P}
  if (m % 2 == 0) {
2.  {P ∧ m % 2 ==0}
    ⇒ {(m / 2) + n > 5}
3.    m = m / 2;
2.  {m + n > 5}
  } else {
    {P ∧ ¬(m % 2 ==0)}
    ⇒ {(m + 1) + n > 5}
3.    m = m + 1;
2.  {m + n > 5}
  }
{m + n > 5}
1.  k = m + n;
{k > 5}
```

Offene Frage: Wie bestimmen wir ***P*** (die Vorbedingung der if-Anweisung)?

Möglichkeit 1: Clever (vorwärts) raten

```
{n > 2}
  m = n + 3;
{m>5 ∧ n>2}
  if (m % 2 == 0) {
   {m>5 ∧ n>2 ∧
m%2==0}
   {(m / 2) + n > 5}
      m = m / 2;
   {m + n > 5}
  } else {
   {m>5 ∧ n>2 ∧ ¬(m %
2 == 0)}
   {(m + 1) + n > 5}
      m = m + 1;
   {m + n > 5}
  }
{m + n > 5}
  k = m + n;
{k > 5}
```

- **Vorbedingung der if-Anweisung clever raten bzw. durch *Vorwärtsschliessen* herleiten**
- **Dann notwendig**
  1. Zeigen, dass der Code vor der Schleife diese Vorbedingung garantiert. D.h. hier:
     - Gültigkeit von $\{n > 2\}$ `m = n + 3;` $\{m>5 \land n>2\}$ ✓ (Regel für Zuweisung)
  2. Implikationen zeigen. D.h. hier:
     1. $(m>5 \land n>2 \land m\%2=0) \implies ((m/2) + n > 5)$ ✓
     2. $(m>5 \land n>2 \land m\%2\neq0) \implies ((m+1) + n > 5)$ ✓

Möglichkeit 2: Systematisch rückwärts

```
{P}
if (b) {
   {P ∧ b}
   {R₁}
      S₁;
   …
} else {
   {P ∧ ¬b}
   {R₂}
      S₂;
   …
}
…
```

1. **Beobachtung:**
   a. S_1 wird nur ausgeführt, falls b hält
   b. S_2, falls ¬b hält

2. **Konsequenz:**
   a. R_1 muss daher nur halten, wenn b hält
   b. R_2, falls ¬b hält

3. **Systematische Wahl für *P* daher:**

$$(b \implies R_1) \land (\neg b \implies R_2)$$

Möglichkeit 2: Systematische Wahl richtig?

```
{P}
if (b) {
  {P ∧ b}
⇒ {R₁}
    S₁;
  …
} else {
  {P ∧ ¬b}
⇒ {R₂}
    S₂;
  …
}
…
```

- Systematische Wahl für ***P***:

$$(b \Longrightarrow R_1) \;\wedge\; (\neg b \Longrightarrow R_2)$$

- **Konsequenz:** Es halten die notwendigen Implikationen

  1. $\boldsymbol{P} \wedge \mathrm{b} \;\Longrightarrow\; R_1$,
     also $((\boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{R_1}) \wedge (\boldsymbol{\neg b} \Longrightarrow \boldsymbol{R_2})) \wedge \mathrm{b} \;\Longrightarrow\; R_1$
  2. Analog für $\boldsymbol{P} \wedge \neg\mathrm{b} \;\Longrightarrow\; R_2$

Möglichkeit 2: Beispiel Schritt für Schritt

v1

```
{n > 2}

m = n + 3;

if (m%2==0) {
 m = m / 2;
} else {
 m=m+1;
}
{m + n > 5}
k = m + n;
{k > 5}
```

v2

```
{n > 2}

m = n + 3;

if (m%2==0) {
 m = m / 2;
 {m + n > 5}
} else {
 m=m+1;
 {m + n > 5}
}
{m + n > 5}
k = m + n;
{k > 5}
```

v3

```
{n > 2}

m = n + 3;

if (m%2==0) {
 {(m/2) + n > 5}
 m = m / 2;
 {m + n > 5}
} else {
 {(m+1) + n > 5}
 m=m+1;
 {m + n > 5}
}
{m + n > 5}
k = m + n;
{k > 5}
```

v4

```
{n > 2}

m = n + 3;
{(m%2=0 ⟹ (m/2) + n > 5)
∧(m%2=1 ⟹ (m+1) + n > 5)}
if (m%2==0) {
 {(m/2) + n > 5}
 m = m / 2;
 {m + n > 5}
} else {
 {(m+1) + n > 5}
 m=m+1;
 {m + n > 5}
}
{m + n > 5}
k = m + n;
{k > 5}
```

v4

v5

```
{n > 2}
{((n+3)%2=0 ⟹ ((n+3)/2) + n>5)
∧((n+3)%2=1 ⟹ ((n+3)+1) + n>5)}
  m = n + 3;
{(m%2=0 ⟹ (m/2) + n > 5)
∧(m%2=1 ⟹ (m+1) + n > 5)}
  if (m%2==0) {
    {(m/2) + n > 5}
    m = m / 2;
    {m + n > 5}
  } else {
    {(m+1) + n > 5}
    m=m+1;
    {m + n > 5}
  }
  {m + n > 5}
  k = m + n;
{k > 5}
```

Dann noch zu zeigen:

$$(n > 2)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{array}{ll} (& ((n+3)\%2=0 \Longrightarrow ((n+3)/2) + n > 5) \\ \wedge & ((n+3)\%2=1 \Longrightarrow ((n+3)+1) + n > 5)) \end{array}$$

Fallunterscheidung (zwei Konjunkte):

1. Wenn $n > 2$ und $(n+3)\%2=0$, dann $(3n+3)/2 > 5$ ✓
2. Wenn $n > 2$ und $(n+3)\%2=1$, dann $2n + 4 > 5$ ✓

Weakest Precondition mit Verzweigung

Schwächste Vorbedingung - Beispiel

```
{              }

  if (x >= y){
    y = x
  }

{y >= x}
```

Weakest Precondition – Mit Verzweigung

{ }

```
if (x<5) {
        y = x*x;
} else {
        y = x+1;
}
```

{y>9}

Weakest Precondition – Mit Verzweigung

{ }

```
if (x<5)
        y = x*x;
else
        y = x+1;
```

{y>9}

{x<5}

{x>=5}

Weakest Precondition – Mit Verzweigung

{ }

```
if (x<5)
        y = x*x;
else
        y = x+1;
```

{x<5}	{x>=5}
{y>9}	{y>9}

Weakest Precondition – Mit Verzweigung

{ }

```
if (x<5)
        y = x*x;
else
        y = x+1;
```

{x<5}	{x>=5}
{y>9}	{x+1>9}

Weakest Precondition – Mit Verzweigung

{ }

```
if (x<5)
        y = x*x;
else
        y = x+1;
```

{x<5}

{y>9}

{x>=5}

{x+1>9}

Weakest Precondition – Mit Verzweigung

{ }

```
if (x<5)
        y = x*x;
else
        y = x+1;
```

{x<5}

{x*x>9}

{x>=5}

{x+1>9}

{(**x<5** && x*x>9) || (**x>=5** && x+1>9)}

{ }

```
if (x<5)
        y = x*x;
else
        y = x+1;
```

{x<5}

{x*x>9}

{x>=5}

{x+1>9}

Weakest Precondition - Prüfungsbeispiel

$\{ \qquad\qquad \}$

```
if (x > y)
      z = x – y;
else
      z = y – x;
```

$\{ \ z > 0 \ \}$

Weakest Precondition - Prüfungsbeispiel

{ }

```
if (x > y)
        z = x – y;
else
        z = y – x;
```

{ z > 0 }

{x > y}

{x <= y}

Weakest Precondition - Prüfungsbeispiel

{ }

```
if (x > y)
        z = x – y;
else
        z = y – x;
```

{ z > 0 }

{x > y}

{z > 0}

{x <= y}

{z > 0}

Weakest Precondition - Prüfungsbeispiel

{ }

if (x > y)

z = x – y;

else

z = y – x;

{ z > 0 }

{x > y}

{z > 0}

{x <= y}

{z > 0}

Weakest Precondition - Prüfungsbeispiel

{ }

if (x > y)

z = x – y;

else

z = y – x;

{ z > 0 }

{x > y}

{x - y > 0}

{x <= y}

{y – x > 0}

Weakest Precondition - Prüfungsbeispiel

$\{ \qquad \}$

```
if (x > y)
        z = x – y;
else
        z = y – x;
```

$\{\ z > 0\ \}$

{x > y}	**{x <= y}**
$\{x - y > 0\}$	$\{y - x > 0\}$

Weakest Precondition - Prüfungsbeispiel

$\{ \qquad\qquad \}$

```
if (x > y)
        z = x – y;
else
        z = y – x;
```

$\{\ z > 0\ \}$

$\{x > y\}$	**$\{x <= y\}$**
$\{x > y\}$	$\{y - x > 0\}$

$\{((\mathbf{x > y})\ \&\&\ (x > y))\ ||\ ((\mathbf{x <= y})\ \&\&(y > x))\}$

$\{\quad\quad\}$

```
if (x > y)
        z = x – y;
else
        z = y – x;
```

$\{\ z > 0\ \}$

$\{\mathbf{x > y}\}$

$\{x > y\}$

$\{\mathbf{x <= y}\}$

$\{y > x\}$

Gültig/Ungültig

Hoare Tripel – Prüfungsbeispiel HS18

```
{ b > c }
 if (x > b) {
     a = x;
} else {
     a = b;
}
{ a > c }
```

Hoare Tripel – Prüfungsbeispiel HS18

```
{ true }
 if (x > y) {
     y = x;
} else {
     y = -x;
}
{ y >= x}
```

Hoare Tripel – Prüfungsbeispiel HS18

```
{ x > 0 }
    y = x * x;
    z = y / 2;
{ z > 0 }
```

Prüfungsbeispiel HS21

```
1. WP: {                                                    }

   k = m * 3;
   Q: { k > 0 }
```

Prüfungsbeispiel HS21

```
2. WP: {                                                    }


   x = y * 2;
   x = x + 1;
   Q: {x > 2 }
```

Prüfungsbeispiel HS21

```
3. WP: {                                        }

   if (a > b) {
     c = (-2) * a;
   } else {
     c = a + 4;
   }
   Q: { c > 0 }
```

Vorbesprechung Übung 6