EULER IMPLÍCITO + NEWTON

Roma 26/8

MÉTODO DE EULER IMPLÍCITO

$$z_{k+1} = z_k + \Delta t \, f(t_{k+1}, z_{k+1}) \quad , \quad k = 0, 1, 2 \dots, n-1$$

DÁ ORIGEM A UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA QUE DEVE SER RESOLVIDA EM <u>TODO</u> O PASSO DE INTEGRAÇÃO t_{k+1}, $k = 0, 1 \dots, n-1$.

- NO CASO BIDIMENSIONAL PRESA-PREDADOR, TEMOS UM SISTEMA COM DUAS EQUAÇÕES E DUAS INCÓGNITAS, A SABER:

$$k = 0,1,2\dots,n-1 \begin{cases} t_{k+1} = t_k + \Delta t \, ; \\ x_{k+1} = x_k + \Delta t \left(\alpha_1 x_{k+1} - \beta_1 x_{k+1} y_{k+1} \right) \\ y_{k+1} = y_k + \Delta t \left(-\alpha_2 y_{k+1} + \beta_2 x_{k+1} y_{k+1} \right) \end{cases} \quad (A)$$

onde as incógnitas são x_{k+1} e y_{k+1}, as constantes α e β são <u>todas positivas</u> e dadas.

Observe que os valores de x_{k+1} e y_{k+1} são determinados resolvendo-se um sistema bidimensional de equações algébricas não linear (por causa dos produtos "$x_{k+1} y_{k+1}$") dado por

ñ linear

$$(B) \begin{cases} g_1(x_{k+1}, y_{k+1}) = x_{k+1} - x_k - \Delta t \left(\alpha_1 x_{k+1} - \beta_1 x_{k+1} y_{k+1} \right) \\ g_2(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_{k+1} - y_k - \Delta t \left(-\alpha_2 x_{k+1} + \beta_2 x_{k+1} y_{k+1} \right) \end{cases}$$

Observe que ~~[illegible]~~ resolver (A) é equivalente encontrar a raiz de (B), isto é (x_{k+1}, y_{k+1}) faz com que

$$\left(g_1(x_{k+1}, y_{k+1}), g_2(x_{k+1}, y_{k+1}) \right) = (0, 0).$$

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (\, g_1(x,y),\, g_2(x,y)\,) = g(x,y)$$

a função cuja raiz procuramos, $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$.

Vamos usar Newton bidimensional p/ gerar uma sequência de aproximações p/ a raiz $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$,

$$\left\{ \left(x_{k+1}^{[i]}, y_{k+1}^{[i]} \right) \right\}_{i \in \mathbb{N}}$$

"Com sorte", $\left(x_{k+1}^{[i]}, y_{k+1}^{[i]} \right) \xrightarrow[i \uparrow +\infty]{} (\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$,

isto é, a sequência convergirá p/ a raiz de $g(x,y)$ que é, também, a aproximação numérica da sol. do modelo em $t = t_{k+1}$, $(x(t_{k+1}), y(t_{k+1})) \approx (\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$.

Isto encerra o passo de integração t_{k+1} e estaremos prontos p/ prosseguir p/ o próximo instante de tempo $t_{k+1} + \Delta t$, continuando o "laço do tempo" ("loop" tempo/temporal).

Seguindo as ideias de Humes et al., pp. 28-31 (Veja pdf no site, T#3), temos, no nosso caso/contexto, que encontrar (x_{k+1}, y_{k+1}) tal que

$$g(x_{k+1}, y_{k+1}) = 0 \iff \begin{cases} g_1(x_{k+1}, y_{k+1}) = 0 \\ g_2(x_{k+1}, y_{k+1}) = 0 \end{cases}$$

Por Taylor 2D, expandindo g ao redor de $\left(x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]}\right)$

temos

$$g\left(x_{k+1}^{[j+1]}, y_{k+1}^{[j+1]}\right) \simeq g\left(x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]}\right) + J\left(x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]}\right)\left(\left(x_{k+1}^{[j+1]}, y_{k+1}^{[j+1]}\right) - \left(x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]}\right)\right) \quad (C)$$

onde $\left(x_{k+1}^{[m]}, y_{k+1}^{[m]}\right)$ $m = j, j+1$ é a "m-ésima" aproximação gerada por Newton da ~~aproximação~~ raiz $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$ que, por sua vez, é a aproximação pelo mét. de Euler implícito de $(x(t_{k+1}), y(t_{k+1}))$, a sol. exata do modelo presa-predador em $t = t_{k+1}$. Muitos índices... É verdade.

<u>Índices superiores</u>, dentro de colchetes "$[\cdot]$" são <u>iterações de Newton</u>, construindo uma sequência de vetores em $\mathbb{R}^2$ que, com sorte, tende à sol. do sistema de equações algébricas, $\left(x_{k+1}^{[m]}, y_{k+1}^{[m]}\right) \xrightarrow[m \uparrow +\infty]{} (\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$

O índice inferior é o <u>índice temporal</u> e é do mét. de Euler implícito. Cuidado!

NA ~~EXPRESSÃO~~ DE TAYLOR, (C), "impomos" $g(x_{k+1}^{[j+1]}, y_{k+1}^{[j+1]}) \cong 0$ e, assim, determinamos o próximo elemento da sequência gerada por Newton, $(x_{k+1}^{[j+1]}, y_{k+1}^{[j+1]})$, isto é,

$$0 \cong g(x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]}) + J(x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]}) \underbrace{\left[(x_{k+1}^{[j+1]}, y_{k+1}^{[j+1]}) - (x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]}) \right]}_{\doteq \Delta \mathbb{X}^{[j+1]}}$$

"incremento" ~~em~~ na (j+1)-ésima iteração de Newton.

Assim, numericamente, precisamos resolver

$$\underbrace{J(x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]})}_{\text{matriz Jacobiana } 2\times 2} \underbrace{\Delta \mathbb{X}^{[j+1]}}_{\text{"vetor" incremento}} = -g(x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]}) \doteq -\begin{bmatrix} g_1(x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]}) \\ g_2(x_{k+1}^{[j]}, y_{k+1}^{[j]}) \end{bmatrix}$$

uma vez encontrado $\Delta \mathbb{X}^{[j+1]} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{[j+1]} - x_{k+1}^{[j]} \\ y_{k+1}^{[j+1]} - y_{k}^{[j]} \end{bmatrix}$

temos a nova aprox. de Newton p/ $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$: $\begin{pmatrix} x_{k+1}^{[j+1]} \\ y_{k+1}^{[j+1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1}^{[j]} \\ y_{k+1}^{[j]} \end{pmatrix} + \Delta \mathbb{X}^{[j+1]}$.

Faremos isto até o critério de parada ser atingido p/ Newton