

USP - Universidade de São Paulo
Escola Politécnica
Engenharia de Computação - 1º Módulo acadêmico
MAP3122 - Métodos Numéricos e Aplicações

Implementação do Método de Euler Implícito para solução numérica de EDOs

Alunos:
Arthur Milani Giovanini - arthurusp@usp.br
Henrique de Andrade Assme - heniassme@usp.br

Professor:
Alexandre Roma - roma@ime.usp.br

São Paulo
2023

Sumário

Sumário	1
Lista de Figuras	2
Lista de Tabelas	3
1 Introdução	5
2 Modelagem Matemática	5
3 Metodologia Numérica	5
3.1 Análise de convergência para solução manufaturada	6
4 Resultados	6
4.1 Verificação por solução manufaturada	6
4.2 Utilização do método para o problema presa-predador sem solução conhecida	7
5 Conclusão	11
Apêndice	12
Apêndice A Teorema do Ponto fixo	12
Referência Bibliográficas	13

Lista de Figuras

1	Gráfico da população das Presa e dos Predadores para a maior precisão calculada . .	8
2	Gráfico da população das Presas com 3 valores de n	8
3	Gráfico da população dos Predadores com 3 valores de n	9
4	Gráfico da população das Presa e dos Predadores para a maior precisão calculada . .	10
5	Gráfico da população das Presas com 3 valores de n	10
6	Gráfico da população dos Predadores com 3 valores de n	11

Lista de Tabelas

1	Tabela de convergência do problema com solução manufaturada	6
2	Tabela de convergência do problema presa-predador para o intervalo $I = [0, 10]$. . .	7
3	Tabela de convergência do problema presa-predador para o intervalo $I = [0, 20]$. . .	9

Resumo

Utilizamos o método de Euler Implícito para aproximar soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias (EDOs). O código foi feito em python e testado com uma EDO de solução exata conhecida para verificar se estava correto. Depois disso, utilizamos o problema de presa-predador (Lotka-Volterra), problema esse que não possui solução exata, para estimar sua solução numérica. Os resultados obtidos foram satisfatórios e compatíveis com o esperado, visto que o erro das aproximações tendeu a zero e a ordem "p" convergiu para um, a qual é a ordem esperada para o método.

1 Introdução

O tópicos de equações diferenciais é muito abrangente e muito presente em diversas áreas da engenharia, física, matemática, biologia e em muitas outras. O objetivo desse trabalho foi utilizar o método de aproximação numérica para EDOs chamado Euler Implícito. Esse método utiliza o Teorema do Ponto Fixo para estimar qual o valor do ponto em um determinado instante de tempo. Fazendo esse processo algumas vezes, podemos fazer um gráfico estimado de uma solução, além de analisar os erros cometidos e a ordem do método.

2 Modelagem Matemática

Utilizamos a modelagem baseada no Problema de Cauchy para utilizar o método numérico Euler Implícito. A forma do Problema de Cauchy possui o seguinte formato:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f(y_1, y_2, t) \\ \frac{dy_2}{dt} = f(y_1, y_2, t) \\ y_1(t_0) = y_{1,0} \\ y_2(t_0) = y_{2,0} \end{cases}$$

Utilizamos para testar o funcionamento do código o seguinte sistema de EDOs, suas respectivas condições iniciais e as soluções exatas:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2, & y_1(t) = \cos t \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1, & y_2(t) = \sin t \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Para o problema com solução exata desconhecida utilizamos o problema de presa-predador. Seja a população das presas $y_1(t)$ e a população dos predadores $y_2(t)$. Na ausência de predadores, a população de presas possui aumento proporcional a quantidade de presas presentes ($a \cdot y_1(t)$). Na ausência de presas, a população de predadores diminui proporcionalmente a quantidade de predadores existente, ($-c \cdot y_2(t)$) devido a falta de alimento (presas). Chamaremos o evento de encontro de presas e predadores como $y_1(t) \cdot y_2(t)$. Esses encontros são favoráveis para o crescimento dos predadores ($d \cdot y_1(t) \cdot y_2(t)$) e desfavoráveis para o crescimento das presas ($-b \cdot y_1(t) \cdot y_2(t)$). $a, b, c, d \in R$. O modelo que descreve a taxa de crescimento dessas populações resultou nesse sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a \cdot y_1 - b \cdot y_1 \cdot y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -c \cdot y_2 + d \cdot y_1 \cdot y_2 \\ y_1(t_0) = y_{1,0} \\ y_2(t_0) = y_{2,0} \end{cases}$$

Os parâmetros usados no caso desse relatório foram: $a = 1; b = 0,02; c = 0,25; d = 0,02;$
 $y_{1,0} = 20; y_{2,0} = 20$.

3 Metodologia Numérica

O método Euler Implícito se baseia no Euler Explícito, que possui a seguinte equação característica:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t \cdot f(y_k, t_k)$$

Utilizamos o ponto anterior para calcular o próximo ponto. No Euler Implícito utilizamos a própria variável y_{k+1} para estimá-la:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t \cdot f(y_{k+1}, t_{k+1})$$

Para conseguir encontrar o valor de y_{k+1} através dessa aproximação, precisamos mudar o foco do problema. Vamos encontrar o ponto fixo de uma função φ , utilizando como base teórica o Teorema do Ponto Fixo. Nesse caso, a φ utilizada é o lado direito da equação do Euler implícito, pois os parâmetros y_k e Δt são fornecidos e t_{k+1} pode ser calculado, tornando o lado direito da equação dependente apenas de y_{k+1} :

$$y_{k+1} = \varphi(y_{k+1}), \text{ tal que } \varphi(y_{k+1}) = y_k + \Delta t \cdot f(y_{k+1}, t_{k+1})$$

$$y_{k+1} = x \Rightarrow \varphi(x) = x$$

Nosso problema agora se tornou encontrar o valor x para cada instante de tempo. Para saber se a função φ escolhida converge, precisamos verificar se a seguinte condição do teorema do ponto fixo é satisfeita:

$$|\varphi'(x)| \leq k, \text{ para } k < 1$$

Para que essa condição seja satisfeita, basta que a derivada de $\varphi(x)$ no intervalo $I = [a, b]$ escolhido tenha valor menor do que 1. A análise e escolha do intervalo foi feita para o caso manufaturado.

3.1 Análise de convergência para solução manufaturada

Para a solução manufaturada temos o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2, & y_1(t) = \cos t \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1, & y_2(t) = \sin t \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

E as respectivas φ_s de cada uma:

$$\begin{cases} \varphi_1 = y_{1k} - \Delta t \cdot \sin t \\ \varphi_2 = y_{2k} + \Delta t \cdot \cos t \end{cases}$$

Calculando as derivadas já com o módulo temos:

$$\begin{cases} |\varphi'_1| = \Delta t \cdot |\cos t| \\ |\varphi'_2| = \Delta t \cdot |\sin t| \end{cases}$$

Como o módulo de $\cos t$ e de $\sin t$ é sempre menor ou igual a 1 e $0 < \Delta t < 1$, temos que ambas as derivadas satisfazem a condição do ponto fixo e convergem independente do intervalo escolhido.

4 Resultados

4.1 Verificação por solução manufaturada

Para a solução manufaturada utilizamos as funções $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \sin t$ para verificar a implementação do método de Euler Implícito.

O intervalo I utilizado foi $I = [0, 3]$ e as condições iniciais foram $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 0$. O valor inicial escolhido para n foi 16 e é multiplicado por 2 a cada nova iteração. O erro foi calculado utilizando a norma euclidiana:

$$e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$$

A tabela 1 se refere à tabela de convergência do problema manufaturado.

n	$h_n = \frac{(T - t_0)}{n}$	$ e_{T, h_n} $	ordem p
n	ΔT	e	p
16	1.875e-01	0.000e+00	0.000e+00
32	9.375e-02	9.353e-02	1.002e+00
64	4.688e-02	4.676e-02	1.001e+00
128	2.344e-02	2.338e-02	1.000e+00
256	1.172e-02	1.169e-02	1.000e+00

Tabela 1: Tabela de convergência do problema com solução manufaturada

4.2 Utilização do método para o problema presa-predador sem solução conhecida

Para o caso do problema presa-predador utilizamos o seguinte sistema de equações no algoritmo criado:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 1 \cdot y_1 - 0,02 \cdot y_1 \cdot y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -0,25 \cdot y_2 + 0,02 \cdot y_1 \cdot y_2 \\ y_1(0) = 20 \\ y_2(0) = 20 \end{cases}$$

O intervalo I escolhido foi $I = [0, 10]$, pois é quando temos o primeiro pico das soluções e seus decaimentos. Depois utilizamos o intervalo $I = [0, 20]$ para analisar o que acontecia com a solução numérica depois do primeiro pico. As condições iniciais para ambas as populações foram de $y_1(0) = 20$ e $y_2(0) = 20$. O valor inicial escolhido para n foi 256 e é multiplicado por 2 a cada nova iteração. O erro foi calculado utilizando também a norma euclidiana:

$$e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$$

Para calcularmos o erro é necessário possuir a estimativa do valor de y obtido pelo método de Euler Implícito, mas também precisamos do valor exato de y . Entretanto, não sabemos a solução exata do problema de Presa-Predador e, por isso, estimaremos o erro de uma outra forma, utilizando as seguintes fórmulas:

$$e(t, \frac{h}{2}) \approx \frac{\eta(t, h) - \eta(t, \frac{h}{2})}{2^p - 1} \quad (1)$$

$$e(t, \frac{h}{8}) \approx \frac{\eta(t, h) - \eta(t, \frac{h}{8})}{8^p - 1} \quad (2)$$

A fórmula (1) se refere ao caso de intervalo $[0, 10]$, enquanto a fórmula (2) se refere ao caso de intervalo $[0, 20]$. Tais diferenças ocorrem pelo fato de os passos de integração serem divididos por 2, no primeiro caso, ao passo que são divididos por 8, no segundo caso.

A tabela 2 se refere à tabela de convergência do problema presa-predador para o intervalo $I = [0, 10]$.

n	$h_n = \frac{(T - t_0)}{n}$	$ e_{T, h_n} $	ordem p
n	ΔT	e	p
256	3.906e-02	0.000e+00	0.000e+00
512	1.953e-02	2.151e-01	0.000e+00
1024	9.766e-03	1.037e-01	1.053e+00
2048	4.883e-03	5.084e-02	1.028e+00
4096	2.441e-03	2.517e-02	1.015e+00
8192	1.221e-03	1.252e-02	1.007e+00
16384	6.104e-04	6.243e-03	1.004e+00
32768	3.052e-04	3.117e-03	1.002e+00
65536	1.526e-04	1.558e-03	1.001e+00
131072	7.629e-05	7.786e-04	1.000e+00

Tabela 2: Tabela de convergência do problema presa-predador para o intervalo $I = [0, 10]$

Foram feitos 3 gráficos diferentes. No primeiro utilizamos a maior precisão para a presa e para o predador no mesmo gráfico. O segundo possui apenas o gráfico das presas para $n \in \{256, 2048, 131072\}$ e o terceiro possui apenas o gráfico dos predadores para $n \in \{256, 2048, 131072\}$.

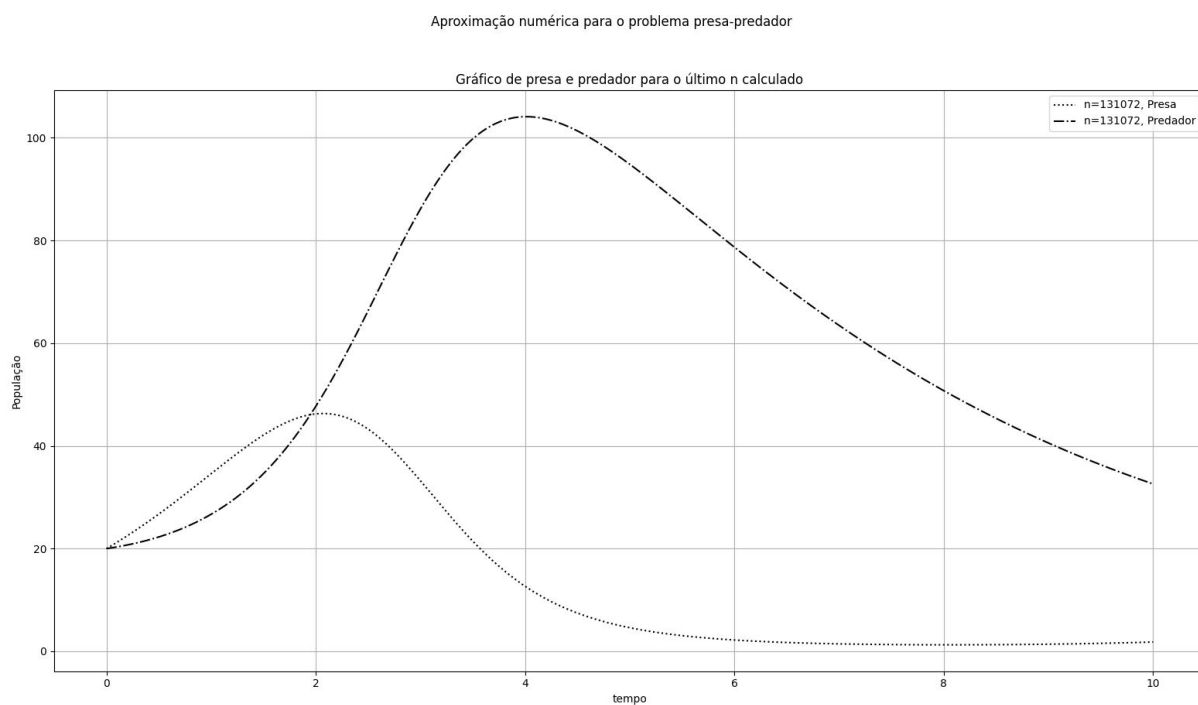


Figura 1: Gráfico da população das Presa e dos Predadores para a maior precisão calculada

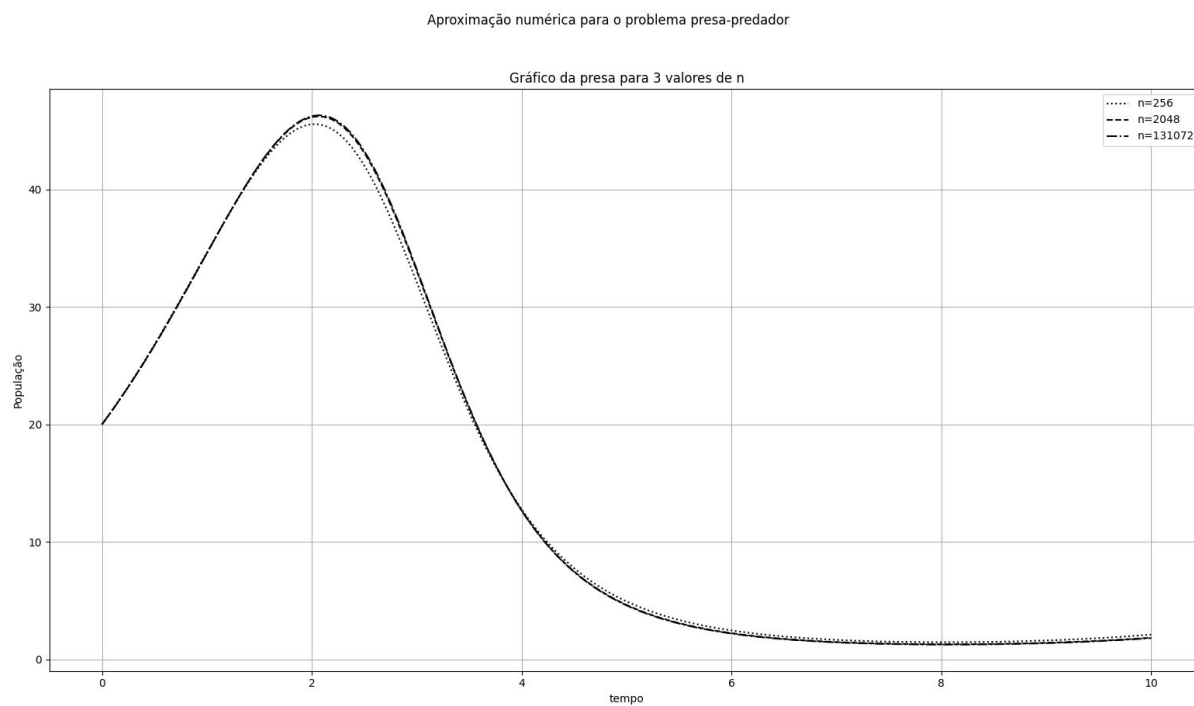
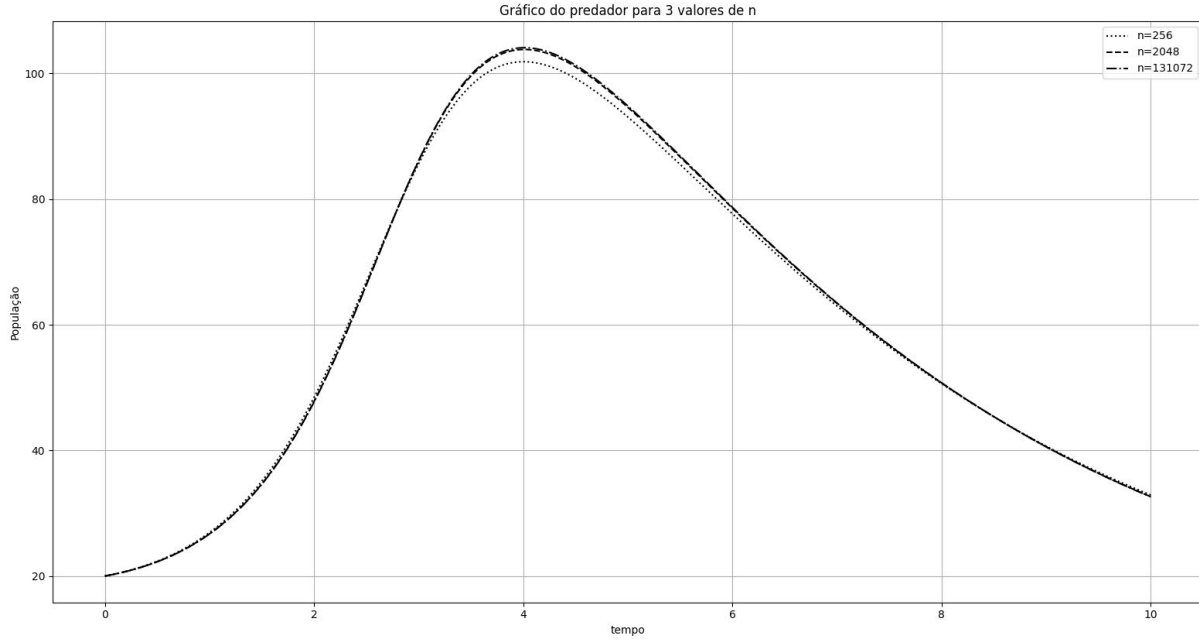


Figura 2: Gráfico da população das Presas com 3 valores de n

Figura 3: Gráfico da população dos Predadores com 3 valores de n

Para o intervalo $I = [0, 20]$ modificamos o valor inicial de n para 512 e utilizamos um fator multiplicativo de 8 para cada novo n , só assim obtivemos uma tabela de convergência que consideramos adequada.

A tabela 3 se refere à tabela de convergência do problema presa-predador para o intervalo $I = [0, 20]$.

n	$h_n = \frac{(T - t_0)}{n}$	$ e_{T, h_n} $	ordem p
n	ΔT	e	p
512	3.906e-02	0.000e+00	0.000e+00
4096	4.883e-03	7.681e-01	0.000e+00
32768	6.104e-04	1.078e-01	9.444e-01
262144	7.629e-05	1.367e-02	9.929e-01
2097152	9.537e-06	1.712e-03	9.991e-01
16777216	1.192e-06	2.141e-04	9.999e-01

Tabela 3: Tabela de convergência do problema presa-predador para o intervalo $I = [0, 20]$

Também foram feitos 3 gráficos diferentes. No primeiro utilizamos a maior precisão para a presa e para o predador no mesmo gráfico. O segundo possui apenas o gráfico das presas para $n \in \{512, 32768, 16777216\}$ e o terceiro possui apenas o gráfico dos predadores para $n \in \{512, 32768, 16777216\}$.

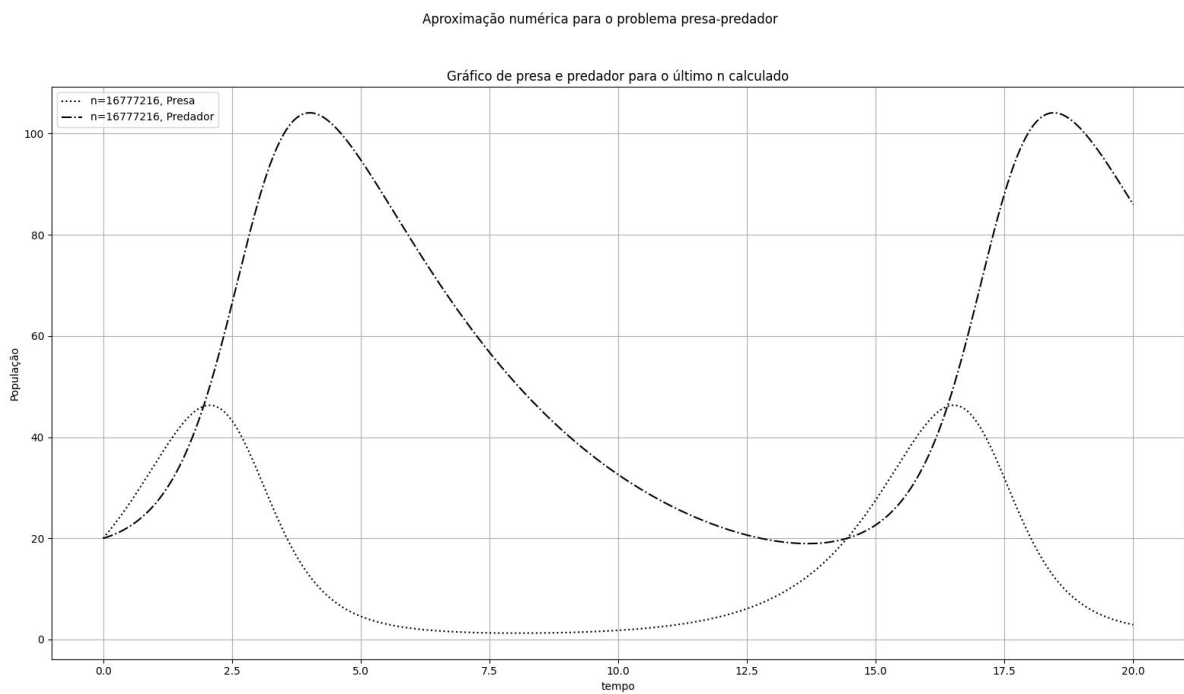


Figura 4: Gráfico da população das Presa e dos Predadores para a maior precisão calculada

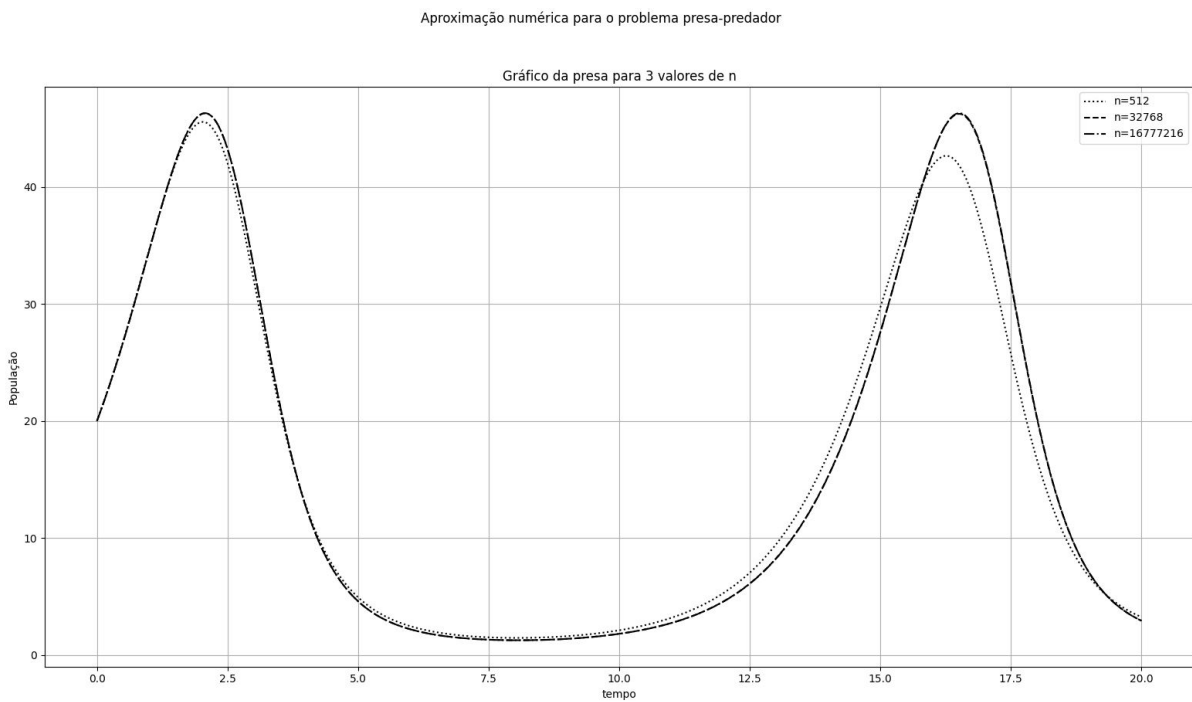


Figura 5: Gráfico da população das Presas com 3 valores de n

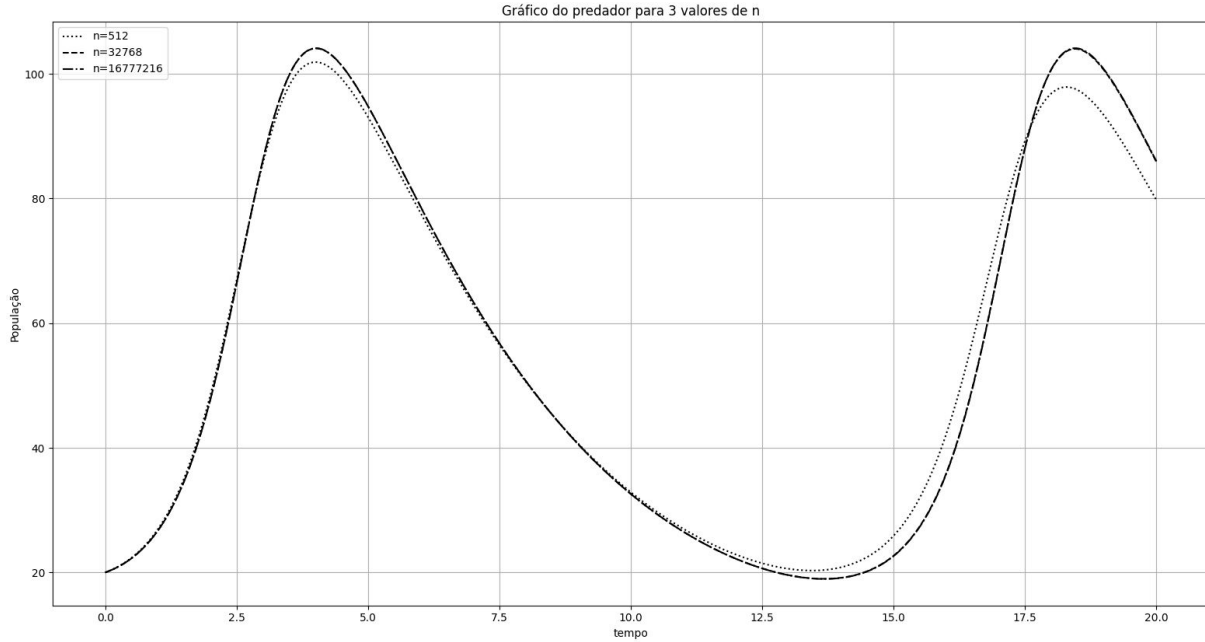


Figura 6: Gráfico da população dos Predadores com 3 valores de n

5 Conclusão

Através da tabela de convergência da solução manufaturada é possível perceber se o método foi bem implementado ou não. Particularmente, o código foi bem implementado, uma vez que o erro, "e", se aproxima de 0 conforme aumentamos os passos de integração e a ordem do método, "p", se aproxima de 1 que é a ordem do método de Euler Implícito. O erro aproximar de zero significa que ao aumentarmos os passos de integração, a solução numérica se aproxima cada vez mais da solução exata.

Para o problema presa-predador analisado, dado que o código funciona por conta do teste realizado com a solução manufaturada, tivemos resultados satisfatórios nas tabelas de convergência para ambos os intervalos estudados.

Na tabela 2 é perceptível que a ordem do problema converge para 1 e que o erro se aproxima cada vez mais de 0, diminuindo, aproximadamente, pela metade para cada novo valor de Δt , uma vez que o Δt cai pela metade para cada novo passo de integração e o erro do método é proporcional ao Δt .

Na tabela 3 também é possível perceber essas duas características, a ordem do problema se aproximando de 1 e o erro se tornando cada vez menor. Nessa tabela o erro é aproximadamente dividido por 8 para cada novo valor de Δt , uma vez que o valor de n é multiplicado por 8, o valor de Δt é dividido por 8 para cada novo passo de integração e, novamente, o erro do método é proporcional ao Δt .

A diferença entre usar o fator multiplicativo de 2 ou de 8 foi justamente pela quantidade de pontos utilizados em cada análise. Como o intervalo $I = [0, 20]$ possui o dobro de pontos que o intervalo $I = [0, 10]$, tivemos que aumentar o fator de 2 para 8 para cada novo passo de integração e ainda modificar o n inicial para o segundo intervalo, de 256 para 512. Somente com essas modificações conseguimos atingir uma tabela de convergência que consideramos satisfatória para provar que o método implementado está correto.

Uma observação é que tentamos modificar os valores para que a ordem p da tabela 3 chegasse no valor 1,0000. Porém, nenhum dos computadores da dupla suportou a quantidade de contas que o programa estava fazendo e decidimos deixar com o valor máximo que conseguimos atingir (0,9999).

Apêndice

A Teorema do Ponto fixo

Um número é um ponto fixo de uma função $g(t)$ se

$$g(p) = p.$$

Seja $g(t) \in C^1[a, b]$ tal que $g(t) \in [a, b] \forall t \in [a, b]$. Suponha ainda que $g'(t)$ exista em (a, b) com

$$|g'(t)| \leq k \forall t \in (a, b),$$

onde $k < 1$ é uma constante positiva. Então, para um número qualquer $p_0 \in [a, b]$, a sequência definida por

$$p_{n+1} = g(p_n), n \geq 0$$

converge para o único ponto fixo $p \in [a, b]$.

Referência Bibliográficas

- 1 - [TNEDO.pdf](#)
- 2 - Material do kitTarefa03 disponibilizado pelo professor Alexandre Roma
- 3 - [MODELAGEM MATEMÁTICA E ESTABILIDADE DE SISTEMAS PREDADOR-PRESA](#)