

Universidade Estadual de Campinas

Relatório 1 F129

Determinação do alcance de uma esfera lançada de uma rampa

Versão 2 - 02/05/2022

Eduardo Rittner Coelho 250960

Gabriella San Martino Tomoda 193523

Henrique Parede de Souza 260497

Jasmine Battestin Nunes 247181

Victor Hoshikawa Satoh 260711

**Introdução:** O experimento consiste em realizar duas séries de lançamentos de esferas distintas (madeira e aço) a partir de uma determinada altura em uma rampa. Com isso, é possível estudar o comportamento do alcance horizontal das esferas, compreendendo assim as relações entre o modelo obtido experimentalmente, um determinado tipo de distribuição estatística e as incertezas envolvidas.

**Objetivo:** Descrever o padrão dos modelos obtidos experimentalmente como uma Distribuição Gaussiana ou Normal (DN), além de mostrar o efeito das incertezas envolvidas e dos efeitos dissipativos diversos. Para isso, pretende-se comparar os valores obtidos experimentalmente com os valores teóricos calculados.

**Materiais e métodos:** Primeiramente, medimos massa (balança analítica) e diâmetro (paquímetro) das esferas. Nivelamos a rampa com um nível de bolha de ar - garantir o lançamento horizontal. Em seguida, posicionamos os papéis milimetrado e carbono em frente a rampa, a distância entre seu fim e o início da graduação do papel foi medida com um prumo de linha e uma régua milimetrada. Medimos com essa régua a altura de lançamento e a em que a esfera deixou a rampa (mesa até o centro da esfera), com esses dados calculamos o alcance teórico - garantimos a condição inicial do lançamento anexando, com fita adesiva, um giz à rampa. Por fim, lançamos a esfera de madeira 50 vezes e com um novo papel milimetrado lançamos a esfera de aço 100 vezes.

**Resultados:** No Anexo 1, calculamos o alcance teórico de cada esfera. No Anexo 2, calculamos as incertezas relacionadas às condições iniciais. Outrossim, calculamos as incertezas relacionadas aos valores experimentais, Anexo 3. As Tab. e Fig. de numeração ímpar estão relacionadas à esfera de madeira e as de numeração par à de aço. Nas Tab. 1-2, anotamos todos os valores do alcance e calculamos os intervalos do histograma. Nas Tab. 3-4, montamos as tabelas de ocorrência com os dados das Tab. 1-2. Com isso, construímos um histograma para cada esfera, Fig. 1-2. Paralelamente, calculamos o valor médio do alcance e o desvio padrão dos lançamentos. Assim, desenhemos as Gaussianas, Fig. 3-4. Ademais, estão presentes (Fig. 5-6) os papéis milimetrados usados nos lançamentos.

**Discussão:** Para a esfera de madeira, temos que o resultado esperado ( $D_m = 476,0 \text{ mm}$ ), pelo cálculo do alcance teórico) difere do resultado experimental ( $média = 344,5 \text{ mm}$  e  $\max(D_m) = 435,0 \text{ mm}$ , pela Fig.1). O mesmo vale para a esfera de aço, pois o resultado teórico ( $D_a = 478,0 \text{ mm}$ , pelo cálculo do alcance teórico) novamente divergiu em relação ao experimental ( $média = 364,5 \text{ mm}$  e  $\max(D_a) = 371,50 \text{ mm}$ , pela Fig.2). Como os valores esperados são consideravelmente maiores que os experimentais (mesmo considerando os máximos), podemos explicar essa diferença tanto pelas incertezas associadas quanto por efeitos dissipativos. Porém, ao compararmos as Gaussianas da esfera de madeira e da de aço, podemos observar claramente que o desvio padrão da curva do aço é menor do que a de madeira, mostrando que a esfera de aço é menos suscetível à efeitos dissipativos quando comparada a de madeira.

**Conclusão:** Os resultados de alcance obtidos experimentalmente apresentaram discrepâncias consideráveis em relação aos previstos teoricamente, indicando a alta influência da energia cinética rotacional e dos efeitos dissipativos, difíceis de serem previstos. Todavia, foi possível obter distribuições satisfatórias, ao se comparar os histogramas com as gaussianas esperadas.

## Figuras e Tabelas

**Tabela 1:** Organizamos os dados obtidos pelos lançamentos da bola de madeira em ordem crescente, e através desses dados podemos calcular o intervalo ideal para construir o histograma utilizando a fórmula:

$$\Delta = \frac{d_{max}-d_{min}}{\sqrt{N}} = \frac{435-267,9}{\sqrt{100}} = 16,7 \text{ mm} \approx 17 \text{ mm}$$

$$\text{Número de Intervalos} = \sqrt{N} = \sqrt{100} = 10$$

Logo, utilizamos 10 intervalos de 15 mm para organizar uma tabela de ocorrências.

267.9	311.4	331.4	329.3	343.1	346,0	346.1	361.4	364.6	380,0
268,0	312.6	333.8	331.3	340.9	350.8	345.5	363.9	356.4	382.9
279.3	315,0	327,0	335,0	336.3	350.7	349.4	362,0	363.4	379.6
290.9	323.9	326,0	335,0	340,0	350.6	350.6	360.3	358.3	377.8
298.7	323.5	325,0	340.2	336.8	348.2	352.6	357.9	368.9	377,0
303.5	320,0	331.5	340.2	336.5	346.7	361.9	361.5	371,0	385,0
302.4	323.6	328.4	342.4	343.2	351.2	361.6	358,0	371.1	393.6
306,0	323,0	334,0	343.7	338,0	349.9	356.7	360,0	374,0	390,0
309.5	320.4	328,0	336.2	335.7	353.8	364.8	363.7	373.5	413,0
310.4	329.9	329.6	342,0	335.9	351.3	360,0	359.2	384.4	435,0

**Tabela 2:** Organizamos os dados obtidos pelos lançamentos da bola de aço em ordem crescente, e através desses dados podemos calcular o intervalo ideal para construir o histograma utilizando a fórmula:

$$\Delta = \frac{d_{max}-d_{min}}{\sqrt{N}} = \frac{371,4-350,7}{\sqrt{50}} = 2,93 \sim 3mm$$

$$\text{Número de Intervalos} = \sqrt{N} = \sqrt{50} \approx 7$$

Logo, utilizamos 7 intervalos de 3 mm para organizar uma tabela de ocorrências.

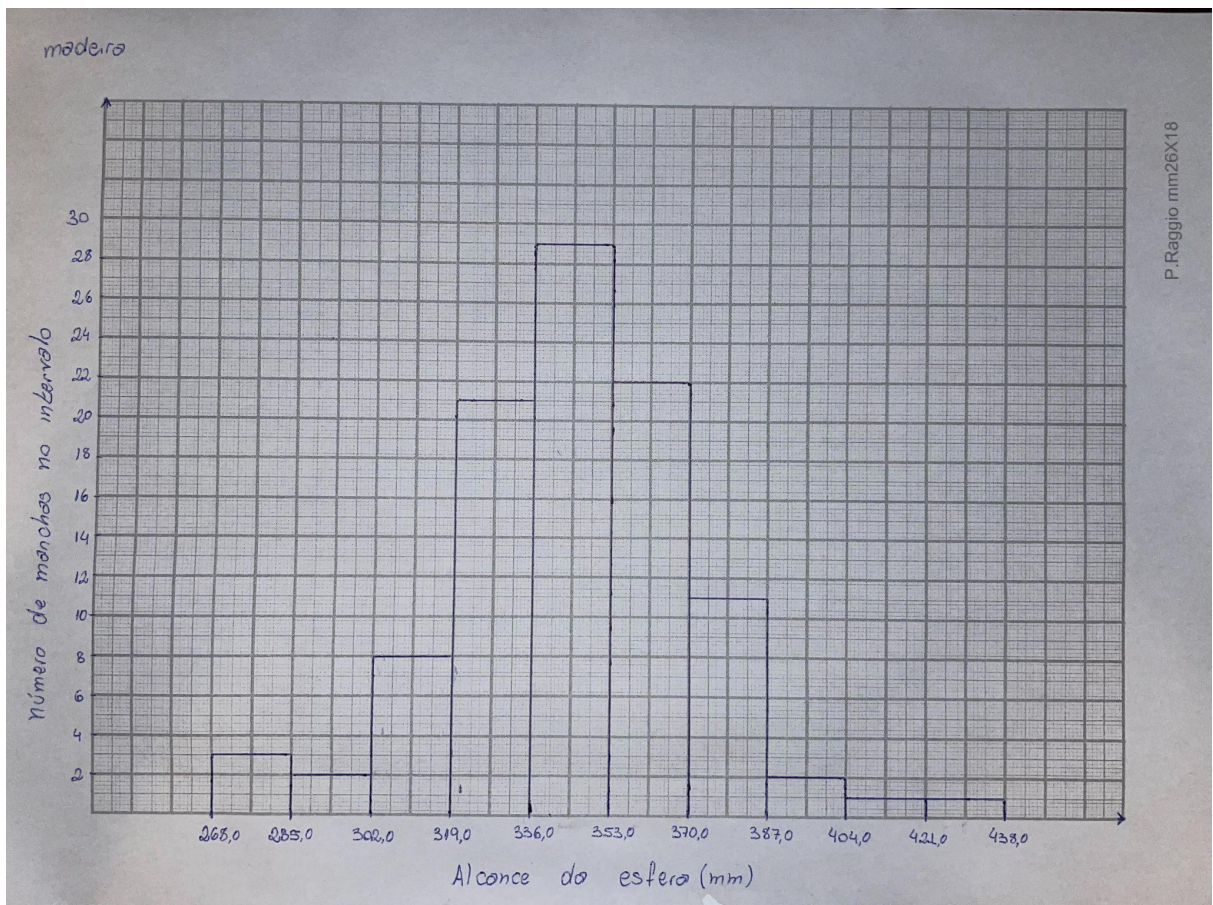
350,7	359,1	362,3	364,3	366,0
353,1	359,6	362,5	364,4	366,1
354,0	360,0	362,8	364,5	366,2
354,2	360,2	362,9	364,5	366,2
355,6	360,3	363,0	364,7	366,3
355,9	360,7	363,0	365,0	367,0
356,0	361,2	363,6	365,2	368,3
356,7	361,9	364,0	365,3	369,2
357,5	362,1	364,0	365,4	370,1
358,4	362,3	364,0	365,7	371,4

**Tabela 3:** Tabela de ocorrência dos lançamentos com a bola de madeira.

Alcance(mm)	Ocorrência
[ 268,0 – 285,0 )	3
[ 285,0 – 302,0 )	2
[ 302,0 – 319,0 )	8
[ 319,0 – 336,0 )	21
[ 336,0 – 353 ,0)	29
[ 353,0 – 370,0 )	22
[ 370,0 – 387,0)	11
[ 387,0 – 404,0)	2
[ 404,0 – 421,0 )	1
[ 421,0 – 438,0 )	1
Total :	100

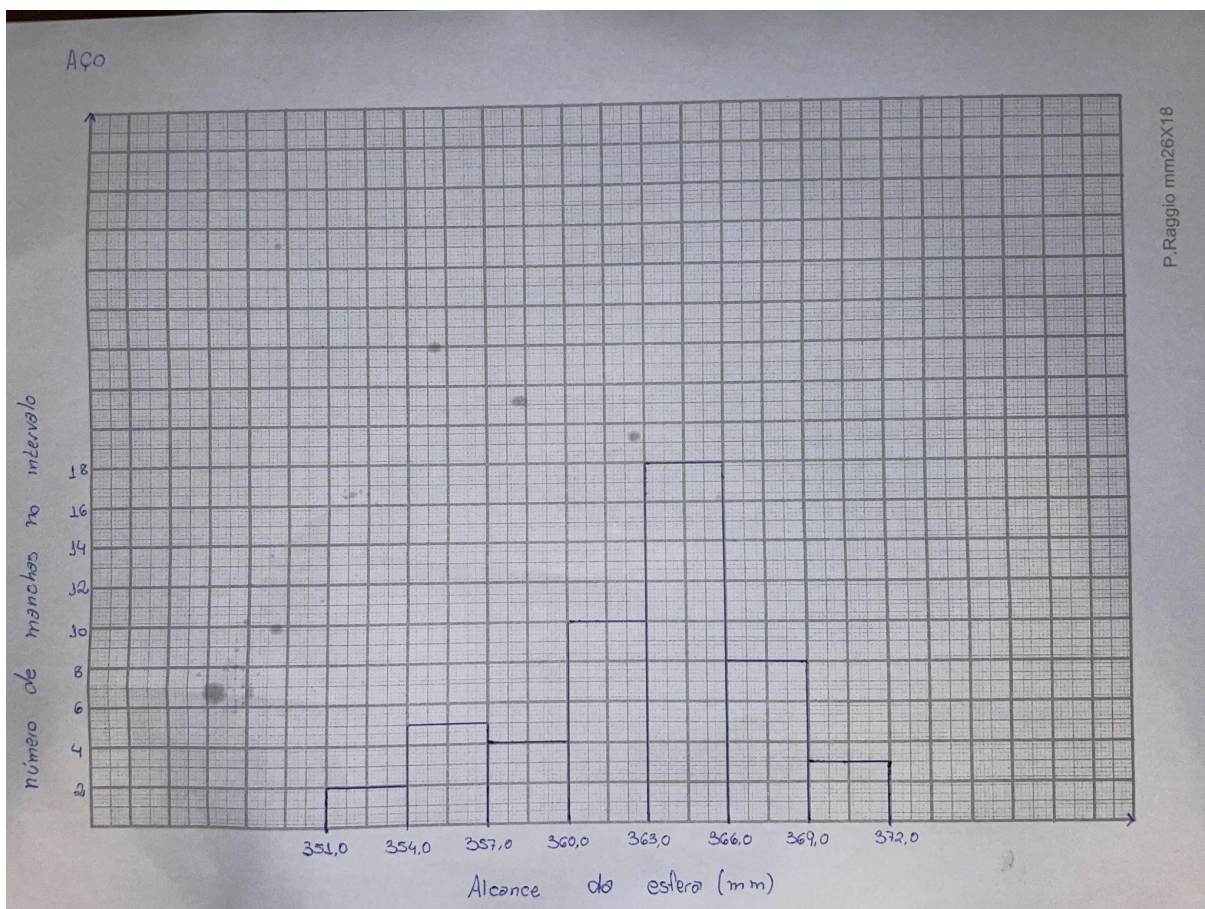
**Tabela 4:** Tabela de ocorrência dos lançamentos com a bola de aço

Alcance (mm)	Ocorrência
[ 351,0 - 354,0 )	2
[ 354,0 - 357,0 )	5
[ 357,0 - 360,0 )	4
[ 360,0 - 363,0 )	10
[ 363,0 - 366,0 )	18
[ 366,0 - 369,0)	8
[ 369,0 - 372,0 )	3
Total:	50

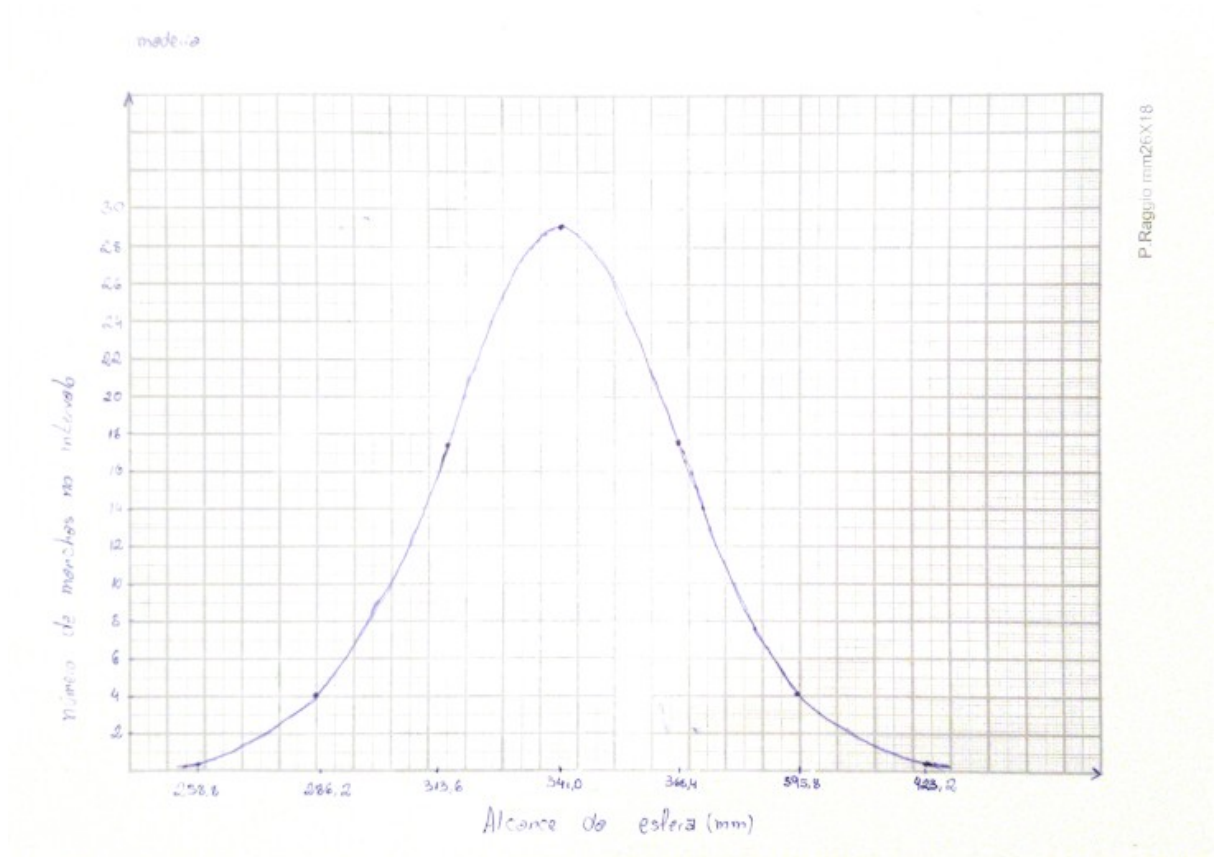


**Figura 1:** Para determinar o valor médio dos alcances da bola de madeira, utilizamos o valor intermediário do ponto mais alto, que é o ponto intermediário do intervalo 336 mm - 353 mm, 344,5 mm. Além disso, foram 29 ocorrências no ponto mais alto, logo para  $x \pm \sigma$  a altura será  $29 \cdot 0,6 = 17,4$ , no gráfico o intervalo 370 mm - 387 mm possui 11 ocorrências, logo podemos usar o seu valor intermediário, 378,5 mm como referência. Assim,  $\sigma = 378,5 \text{ mm} - 344,5 \text{ mm} = 34 \text{ mm}$ . Logo, a gaussiana aproximada tem *média* = 344,5 mm e  $\sigma = 34 \text{ mm}$ . As incertezas associadas às medições estão contidas nos anexos 2 e 3.





**Figura 2:** Para determinar o valor médio dos alcances da bola de aço, utilizamos o valor intermediário do ponto mais alto, que é o ponto intermediário do intervalo 363 mm - 366 mm, 364,5 mm. Além disso, foram 18 ocorrências no ponto mais alto, logo para  $x \pm \sigma$  a altura será  $18 \cdot 0,6 = 10,8$ , no gráfico o intervalo 366 mm - 369 mm possui 8 ocorrências, logo podemos usar o seu valor intermediário, 367,5 mm como referência. Assim,  $\sigma = 367,5 \text{ mm} - 364,5 \text{ mm} = 3 \text{ mm}$ . Logo, a gaussiana aproximada tem *média* = 364,5mm e  $\sigma = 3 \text{ mm}$ . As incertezas associadas às medições estão contidas nos anexos 2 e 3.



**Figura 3:** Para desenhar a gaussiana aproximada dos lançamentos com a bola de madeira, usamos os valores (y é o eixo vertical):

$\sigma = 34 \text{ mm}$

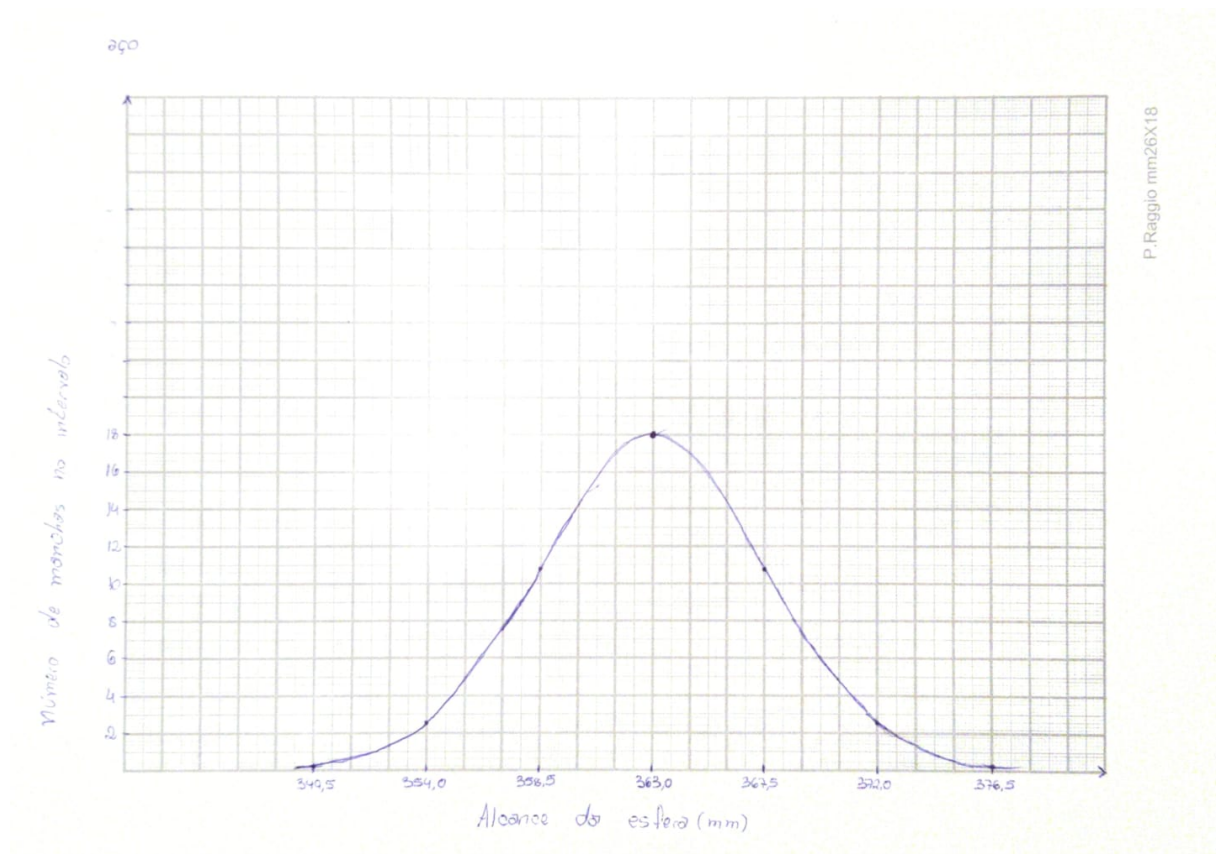
	$x - 3\sigma$	$x - 2\sigma$	$x - \sigma$	$x$	$x + \sigma$	$x + 2\sigma$	$x + 3\sigma$
Alcance	258,8	286,2	313,6	341	368,4	395,8	423,2

$x: y = 29$

$x \pm \sigma: y = 17,4$

$x \pm 2\sigma: y = 4$

$x \pm 3\sigma: y = 0,3$



**Figura 4:** Para desenhar a gaussiana aproximada dos lançamentos com a bola de aço, usamos os valores (y é o eixo vertical):

$\sigma = 3 \text{ mm}$

	$x - 3\sigma$	$x - 2\sigma$	$x - \sigma$	$x$	$x + \sigma$	$x + 2\sigma$	$x + 3\sigma$
Alcance	349,5	354	358,5	363	367,5	372	376,5

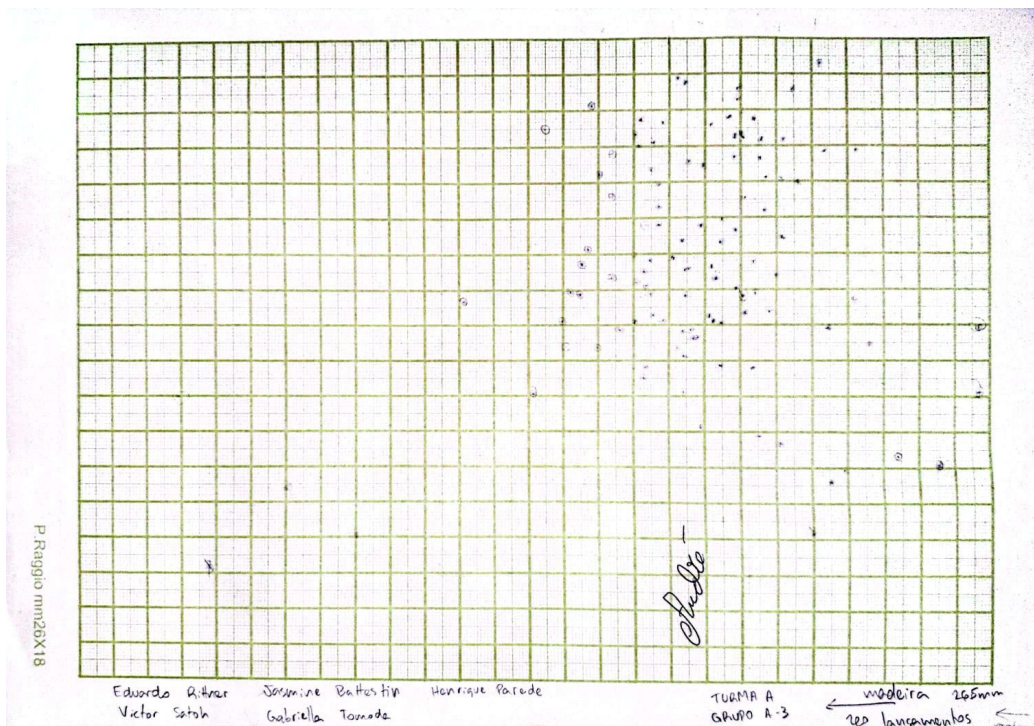
$x: y = 18$

$x \pm \sigma: y = 10,8$

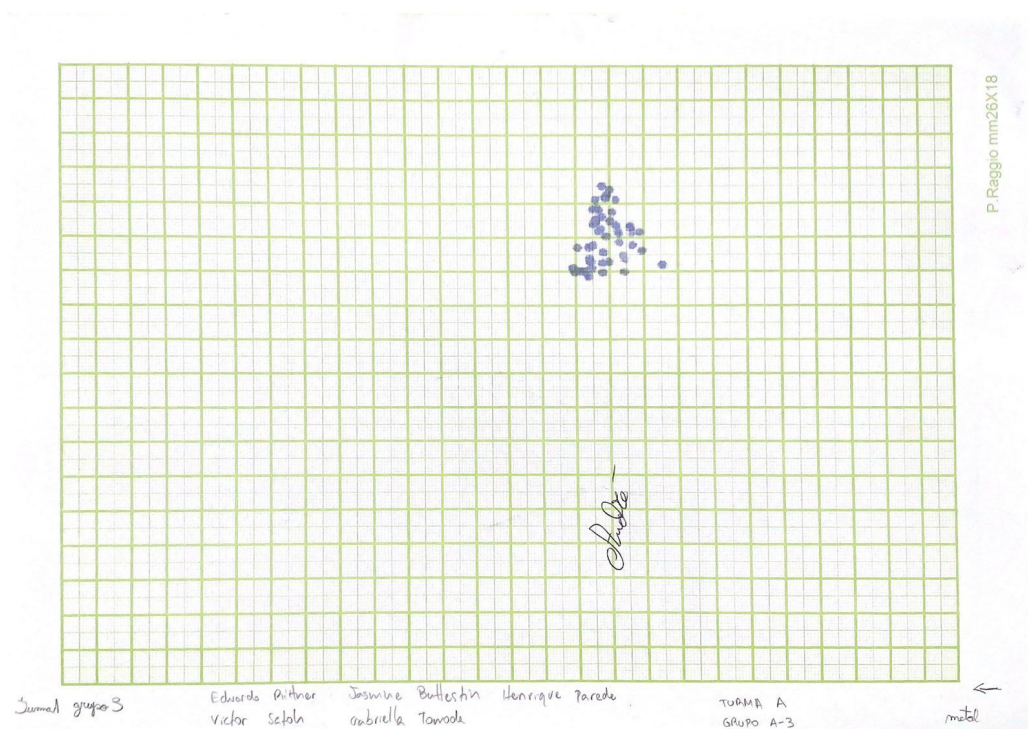
$x \pm 2\sigma: y = 2,5$

$x \pm 3\sigma: y = 0,2$



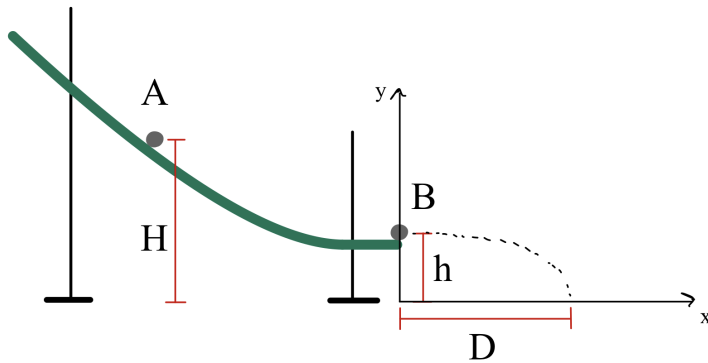


**Figura 5:** Papel milimetrado contendo as marcações da série de lançamentos da esfera de madeira.



**Figura 6:** Papel milimetrado contendo as marcações da série de lançamentos da esfera de aço.

## Anexo 1: Cálculo do alcance teórico



**Figura CAT-1:** Ilustração das variáveis associadas ao cálculo do alcance de uma esfera.

Seja:

H: altura inicial

h: altura do lançamento horizontal

D: alcance horizontal

m: massa da esfera

v: velocidade no ponto B

t: tempo de voo

Foram desprezadas possíveis interferências externas

Conservação da Energia Mecânica (Entre os pontos A e B)

$$E_{mi} = E_{mf}$$

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf}$$

$$mgH = mgh + \frac{mv^2}{2} \text{ (no início a energia cinética é 0)}$$

$$mg(H - h) = \frac{mv^2}{2}$$

$$\sqrt{2g(H - h)} = v \text{ (i)}$$

Lançamento em B:

Movimento em y:

$$h' = h + v_y t - \frac{gt^2}{2}$$

Como nesse ponto a esfera possui apenas velocidade horizontal e a razão entre o raio de cada esfera por  $h$  é significativamente menor que 1, têm-se:

$$0 = h + 0 - \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ (ii)}$$

Movimento em x:

$$D = v_x t$$

$$D = vt \text{ (iii)}$$

De (i) e (ii) em (iii):

$$D = vt$$

$$D = \sqrt{2g(H - h)}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$D = \sqrt{4h(H - h)}$$

Os valores medidos foram:

Para a esfera de madeira

$$h = 159 \text{ mm}$$

$$H = 515 \text{ mm}$$

Para a esfera de aço:

$$h = 160 \text{ mm}$$

$$H = 516 \text{ mm}$$

Portanto:

$$\text{Esfera de madeira: } D_m = 475,8 \text{ mm} = 476 \text{ mm}$$

$$\text{Esfera de aço: } D_a = 477,6 \text{ mm} = 478 \text{ mm}$$

Esses valores teóricos diferem dos experimentais por conta de no cálculo teórico termos desprezado a energia cinética rotacional, a qual é relevante no experimento. Parte da energia potencial foi transformada em energia cinética rotacional, fato que acarretou na divergência entre valores teóricos e experimentais.

## ANEXO 2 CÁLCULOS DE INCERTEZAS ASSOCIADAS ÀS CONDIÇÕES INICIAIS

Para as condições iniciais, mediu-se a altura de lançamento da esfera,  $H$ , e a distância entre o final da rampa e a bancada,  $h$ , a partir do centro de uma esfera colocada na posição determinada pelo giz. As fontes de incerteza associadas a essas medições estão representadas nas tabelas a seguir, respectivamente para a esfera de madeira e para a esfera de aço.

**Tabela CIACN-1:** Distância entre o final da rampa e a bancada (esfera de madeira) -  $h$

Melhor estimativa	Incerteza de leitura da régua ( $u_1$ )	Incerteza de localização do centro da esfera ( $u_2$ )	Incerteza de paralaxe ( $u_3$ )	Incerteza estatística	Incerteza combinada ( $u_c$ )
159 mm	$\pm 0,2$ mm	$\pm 0,2$ mm	$\pm 1$ mm	-	$\pm 1$ mm

**Tabela CIACN-2:** Altura de lançamento da esfera (esfera de madeira) -  $H$

Melhor estimativa	Incerteza de leitura da régua ( $u_1$ )	Incerteza de localização do centro da esfera ( $u_2$ )	Incerteza de paralaxe ( $u_3$ )	Incerteza estatística	Incerteza combinada ( $u_c$ )
515 mm	$\pm 0,2$ mm	$\pm 0,2$ mm	$\pm 1$ mm	-	$\pm 1$ mm

**Tabela CIACN-3:** Distância entre o final da rampa e a bancada (esfera de aço) -  $h$

Melhor estimativa	Incerteza de leitura da régua ( $u_1$ )	Incerteza de localização do centro da esfera ( $u_2$ )	Incerteza de paralaxe ( $u_3$ )	Incerteza estatística	Incerteza combinada ( $u_c$ )
160 mm	$\pm 0,2$ mm	$\pm 0,2$ mm	$\pm 1$ mm	-	$\pm 1$ mm

**Tabela CIACN-4:** Altura de lançamento da esfera (esfera de aço) -  $H$

Melhor estimativa	Incerteza de leitura da régua ( $u_1$ )	Incerteza de localização do centro da esfera ( $u_2$ )	Incerteza de paralaxe ( $u_3$ )	Incerteza estatística	Incerteza combinada ( $u_c$ )
516 mm	$\pm 0,2$ mm	$\pm 0,2$ mm	$\pm 1$ mm	-	$\pm 1$ mm

Para ambas as esferas (aço e madeira) e ambas as variáveis (h e H), teve-se como incerteza instrumental (de leitura da régua) e como incerteza de localização do centro da esfera  $u_1 = u_2 = 1/(2\sqrt{6}) = 0,204 \approx 0,2 \text{ mm}$ , que corresponde à incerteza-padrão de distribuição de probabilidade triangular, isto é, leitura única analógica. Além disso, julgou-se necessário considerar a incerteza devida à paralaxe, por causa da postura ergonomicamente instável adotada pelos alunos para efetuar as medidas (isto é, não foi possível garantir que as medidas fossem feitas sem alguma angulação), adotando-se como incerteza de paralaxe  $u_3 = 1 \text{ mm}$ . Por fim, desconsiderou-se a incerteza estatística porque a medição foi feita somente uma vez por um instrumento analógico. A incerteza combinada foi obtida pela fórmula:

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{(0,2)^2 + (0,2)^2 + (1)^2} \approx 1 \text{ mm}.$$



## ANEXO 3 CÁLCULOS DE INCERTEZAS ASSOCIADAS AOS VALORES FINAIS PARA O ALCANCE DAS ESFERAS

Tanto para a esfera de madeira quanto para a de aço, a melhor estimativa do alcance correspondeu ao valor médio (média aritmética) dos dados coletados. Quanto às incertezas, para a incerteza instrumental (de leitura da régua) e para a incerteza de localização do centro da esfera, fez-se  $u_1 = u_2 = 1/(2\sqrt{6}) = 0,204 \approx 0,2 \text{ mm}$ ; enquanto a incerteza de paralaxe foi desconsiderada, uma vez que as medidas de alcance foram feitas diretamente no papel (plano). A incerteza estatística, por sua vez, foi obtida pela expressão  $u_{est} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ , donde  $\sigma$  é o desvio-padrão e  $N$  é a quantidade de lançamentos. A incerteza combinada, por fim, foi calculada pela expressão

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_{est}^2} = \sqrt{(0,2)^2 + (0,2)^2 + (0,4)^2} = 0,5.$$

Os valores obtidos por meio das operações descritas estão reunidos nas duas tabelas abaixo.

**Tabela CIAVFAE-1:** Valores finais para o alcance da esfera de madeira.

Previsão teórica	Melhor estimativa do alcance	Incerteza de leitura da régua ( $u_1$ )	Incerteza de localização do centro da esfera ( $u_2$ )	Incerteza de paralaxe ( $u_3$ )	Incerteza estatística ( $u_{est}$ )	Incerteza combinada para o alcance
476 mm	367,6 mm	$\pm 0,2 \text{ mm}$	$\pm 0,2 \text{ mm}$	-	$\pm 0,6 \text{ mm}$	$\pm 0,7 \text{ mm}$

**Tabela CIAVFAE-2:** Valores finais para o alcance da esfera de aço.

Previsão teórica	Melhor estimativa do alcance	Incerteza de leitura da régua ( $u_1$ )	Incerteza de localização do centro da esfera ( $u_2$ )	Incerteza de paralaxe	Incerteza estatística ( $u_{est}$ )	Incerteza combinada para o alcance
478 mm	363,5 mm	$\pm 0,2 \text{ mm}$	$\pm 0,2 \text{ mm}$	-	$\pm 0,4 \text{ mm}$	$\pm 0,5 \text{ mm}$