Universidade Estadual de Campinas

Relatório 4 F129
Estudo da Lei de Hooke e associação em série de molas
Versão 2 - 07/07/2022

Eduardo Rittner Coelho 250960
Gabriella San Martino Tomoda 193523
Henrique Parede de Souza 260497
Jasmine Battestin Nunes 247181
Victor Hoshikawa Satoh 260711

Introdução: Amortecedores de carro, relógios, balanças e alguns brinquedos. Ainda que a utilização da mola seja algo imperceptível no cotidiano, é inegável que sua presença é de suma importância em muitos objetos que utilizamos diariamente e, deste modo, seu estudo torna-se essencial.

Objetivo: O experimento visa desenvolver analiticamente o estudo das molas a partir das já fundamentadas leis existentes - como a de Hooke -, assim como o estudo da associação em série das molas.

Materiais e métodos: Primeiramente medimos as massas dos "pesos" e dos copos (balança analítica). Colocamos cada mola no suporte e medimos seu comprimento natural. Usando diferentes massas medimos as diferentes elongações provocadas na mola com o auxílio das medidas no próprio suporte.

Resultados: A partir da análise dos gráficos da distinção da mola em função do peso, nota-se que, além de aparentemente ser necessária uma força mínima para distensão, essa relação é linear, obedecendo a funçao f(x) = a.x + b, com b < 0. Utilizando a análise anterior em conjunto com o MMQ e as equações referentes às incertezas associadas aos valores medidos sendo iguais, concluímos que: para a mola menor, a = $(0,0508 \pm 0,0002)m.N^{-1}$ e b = -0,0221 m; mola maior: a = $(0,1256 \pm 0,0003)$m.N^{-1} e b = -0,0111 m; molas em série: a = $(0,1656 \pm 0,0002)$m.N^{-1} e b = -0,0196 m.

Ainda com os dados colhidos experimentalmente, inferimos que as constantes elásticas (k) das molas maior e da menor é dada por: $k_{maior} = (7,96 \pm 0,02)N/m$ e $k_{menor} = (19,69 \pm 0,08)N/m$. Com esses dados e fazendo o uso da equação da associação em séries das molas, constatamos que o conjunto das molas, conforme o modelo teórico I, possui constante elástica: $k_s = (5,6684 \pm 0,0004)N/m$ e $k_s = (27,65 \pm 0,08)N/m$ para o modelo teórico onde k_s é a soma dos k.

Discussão: Através do MMQ, obtivemos funções lineares que descrevem a distensão da mola em função da força sobre elas aplicada a partir de uma certa força mínima, da forma $F/k = x$, onde F se refere à força aplicada, x à distensão ocorrida, e k uma constante inerente à mola cuja unidade de medida é $N.m^{-1}$, ou seja para cada metro de distensão são necessárias k newtons de força. Essa constante é uma expressão direta das propriedades físicas da mola e do material que a compõem, ou seja, tanto a rigidez do material, quanto a rigidez da geometria da mola influenciam em sua constante elástica. Comparando os valores da combinação de molas em série obtidos experimentalmente com os obtidos nos modelos teóricos I e II, foi possível concluir que o modelo mais adequado para descrever a associação de molas em série é o modelo I.

Conclusão: Podemos concluir que de fato, a Lei de Hooke é válida para a grande parte dos casos e molas, salvo quando a força aplicada é menor que um certo limite mínimo, relacionado à rigidez da mola específica, ou quando a força aplicada é grande o suficiente para danificar a mola. Além disso, estamos corretos ao afirmar que a constante elástica equivalente da associação em série de duas molas é dada por $1/ks = 1/k1 + 1/k2$.

Figuras e Tabelas do Relatório “Estudo da Lei de Hooke e associação em série de molas”

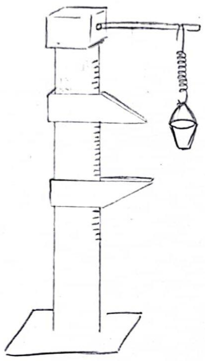

Figura 1: Diagrama do aparato experimental utilizado para medir a distensão da mola conforme o peso aplicado nela, consiste basicamente em uma régua perpendicular ao solo, logo paralela à mola solta que permite uma medição com certa precisão da distensão.

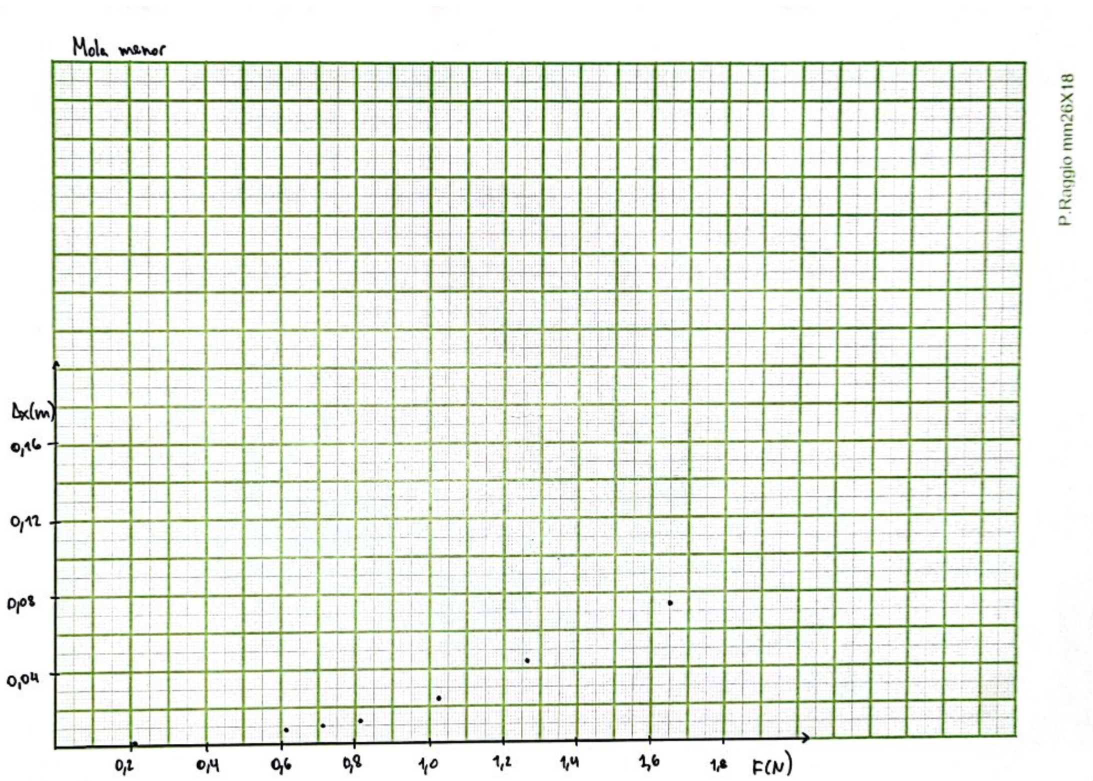

Figura 2: Gráfico das medidas da mola 1 (menor), é possível perceber que quando são aplicadas forças muito pequenas a distensão em função do peso aplicado (x = F/k) aparenta ser não linear, no entanto, a partir de um certo valor as medidas se assemelham cada vez mais à uma reta, e consequentemente uma função linear.

A partir do gráfico podemos analisar para que valores o gráfico formado se aproxima de uma reta, esse conjunto de valores são os que deverão ser considerados no ajuste. Os coeficientes da reta que melhor se ajusta aos dados conforme o método dos mínimos quadrados foram calculados e reunidos no Anexo 4, sendo esses: a = 0,0508 $m.N^{-1}$, b = -0,0221 m, e suas incertezas são, respectivamente, ua = 0,0002 $m.N^{-1}$ e ub = 0,0002 m; obtendo-se a equação $F = 19,68503937.x$.

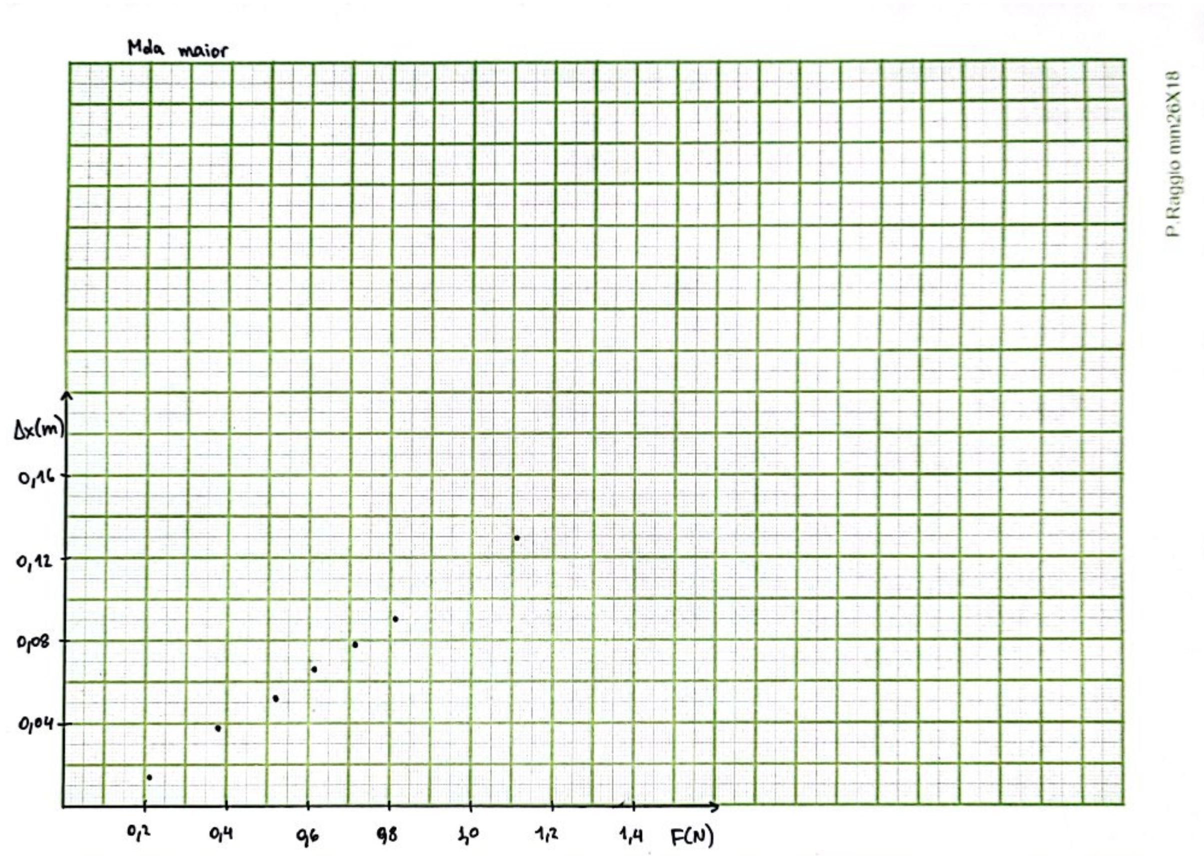

Figura 3: Gráfico das medidas da mola 2 (maior). É evidente que as medidas se assemelham a uma função linear, no entanto, é possível que o comportamento da segunda mola, quando aplicadas forças muito pequenas, seja semelhante ao comportamento da primeira mola (não-linear), devido aos pesos selecionados, não podemos ter certeza. Além disso, é possível perceber que essa mola possui uma constante elástica k maior que a primeira mola, visto que o coeficiente angular de sua reta é maior. O cálculo dos coeficientes da reta que melhor se ajusta aos dados conforme o método dos mínimos quadrados estão contidos no Anexo 4, onde se obteve: a = 0,1256 $m.N^{-1}$, b = -0,0111 m, e suas incertezas são, respectivamente, ua = 0,0003 $m.N^{-1}$ e ub = 0,0002 m; obtendo-se a equação $F = 7,961783439.x$.

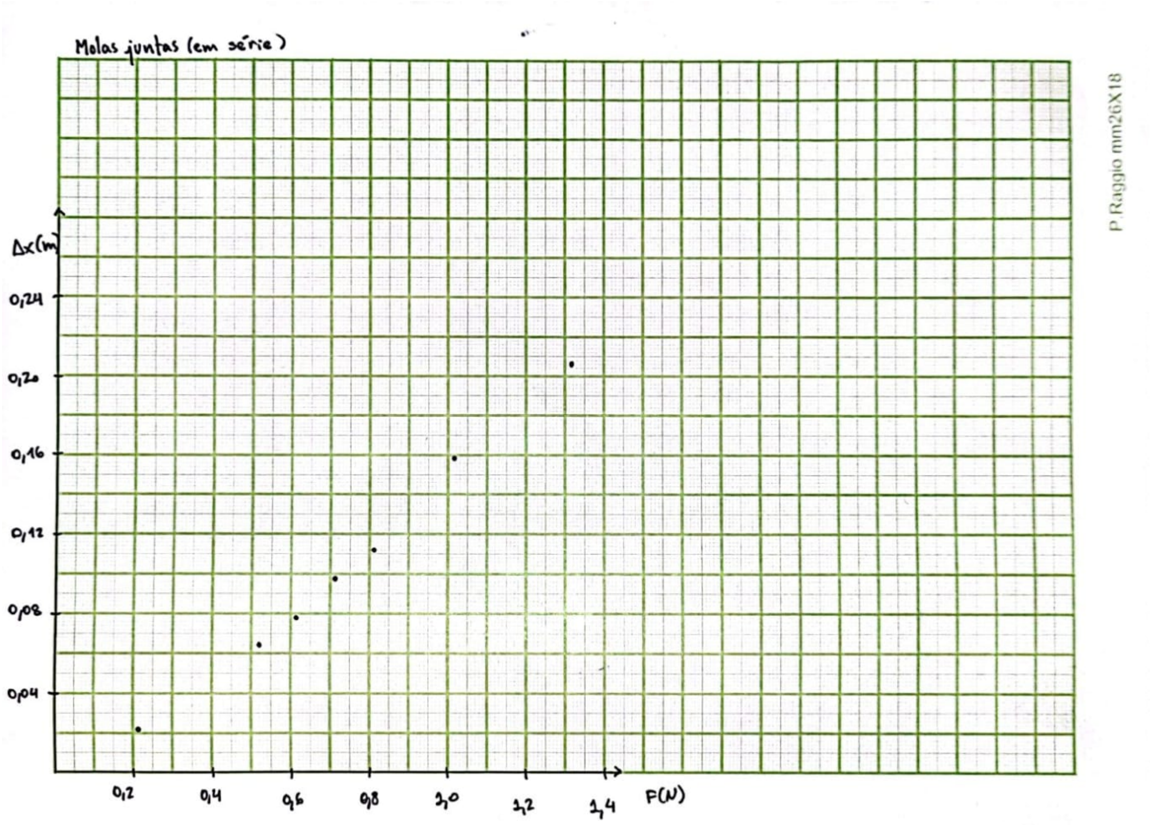

Figura 4: Gráfico das medidas das duas molas em série. Assim como no caso da segunda mola individual, não é possível aferir se a função da distensão por força aplicada tem comportamento não linear quando a força aplicada é muito pequena, pois ela aparenta ser linear em todo o intervalo de forças estudado. Outro fato importante de se destacar é que, quando colocadas em série, a constante elástica equivalente às duas molas é menor do que as duas individualmente, ou seja, $ks < k1 \ e \ ks < k2$. Dessa forma, é razoável concluir que a equação mais adequada que relaciona as 3 constantes elásticas em uma combinação em série é $1/ks = 1/k1 + 1/k2$, de forma que ks sempre será menor que k1 e k2. O cálculo dos coeficientes da reta que melhor se ajusta aos dados conforme o método dos mínimos quadrados também está contido no Anexo 4, onde se obteve: a = 0,1656 $m.N^{-1}$, b = -0,0196 m, e suas incertezas são, respectivamente, ua = 0,0002 $m.N^{-1}$ e ub = 0,0002 m; obtendo-se a equação $F = 6,038647343x$.

MASSA TOTAL(g)	FORÇA PESO(N)	Distensão(Δx,m)
22,1347	0,217141407	0,0007
53,2044	0,521935164	0,004
62,6778	0,614869218	0,0076
73,0997	0,717108057	0,0102
82,5731	0,810042111	0,0134
113,6428	1,114835868	0,0237
133,5381	1,310008761	0,0435
168,3369	1,651384989	0,0736

Tabela 1: Informações da massa total, força peso e distensão relacionados ao experimento com a mola menor.

MASSA TOTAL(g)	FORÇA PESO(N)	Distensão(Δx,m)
22,1347	0,0157	0,0157
53,2044	0,521935164	0,0537
62,6778	0,614869218	0,0662
39,2474	0,385016994	0,0387
73,0997	0,717108057	0,0792
82,5731	0,810042111	0,0896
113,6428	1,114835868	0,1294

Tabela 2: Informações da massa total, força peso e distensão relacionados ao experimento com a mola maior.

MASSA TOTAL(g)	FORÇA PESO(N)	Distensão(Δx,m)
22,1347	0,217141407	0,0221
53,2044	0,521935164	0,0653
62,6778	0,614869218	0,0793
73,0997	0,717108057	0,0975
82,5731	0,810042111	0,1126
113,6428	1,114835868	0,1594
133,5381	1,310008761	0,2052

Tabela 3: Informações da massa total, força peso e distensão relacionados ao experimento com as molas em série.

Anexo 1 Cálculo das incertezas

A expressão que determina a incerteza relacionada às constantes elásticas é dada por:

$$u_k^2 = \left(\frac{\partial k}{\partial a}\right)^2 \cdot u_a^2 \Rightarrow u_k = \frac{u_a}{a^2}$$

Para a mola menor:

$$u_{menor} = \frac{u_a}{a^2} = \frac{0{,}0002}{0{,}0508^2} = 0,077500155 = 0,08$$

Para a mola maior

$$u_{maior} = \frac{u_a}{a^2} = \frac{0{,}0003}{0{,}1256^2} = 0,019016998 = 0,02$$

Para as molas juntas:

$$u_s = \frac{u_a}{a^2} = \frac{0{,}0002}{0{,}1656^2} = 0,007293052 = 0,007$$

Anexo 2 Comparação dos valores experimentais e teóricos da constante elástica da associação em série

Com base nos valores obtidos experimentalmente, temos que a constante elástica da mola maior é dada por $k_{maior} \pm u_{maior} = 7,96 \pm 0,02\, N/m$, enquanto a da mola menor é dada por $k_{menor} \pm u_{menor} = 19,69 \pm 0,08\, N/m$. Sendo assim, conforme o modelo teórico (I) de combinação em série de molas abaixo

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_{maior}} + \frac{1}{k_{menor}} \quad \text{(I)},$$

temos que a constante elástica equivalente da combinação de molas em série é dada por:

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_{maior}} + \frac{1}{k_{menor}} \Rightarrow k_s = \frac{k_{maior} \cdot k_{menor}}{k_{maior} + k_{menor}} = \frac{7,96 \cdot 19,69}{7,96 + 19,69} = 5,6684\, N/m$$

Sua incerteza, por sua vez, é dada por:

$$u_s = \sqrt{\left(\frac{\delta k_s}{\delta k_{maior}} \cdot u_{maior}\right)^2 + \left(\frac{\delta k_s}{\delta k_{menor}} \cdot u_{menor}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{k_{maior}^2} \cdot u_{maior}\right)^2 + \left(\frac{-1}{k_{menor}^2} \cdot u_{menor}\right)^2}$$

$$\Rightarrow u_s = \sqrt{\left(\frac{-1}{7,96^2} \cdot 0,02\right)^2 + \left(\frac{-1}{19,69^2} \cdot 0,08\right)^2} = 0,0004\, N/m$$

Assim, obtemos que a constante elástica equivalente de combinação das molas deveria ser $k_s \pm u_s = 5,6684 \pm 0,0004\, N/m$, conforme o modelo teórico (I).

Por outro lado, calculando conforme outro modelo teórico (II), teríamos:

$$k_s = k_{maior} + k_{menor} = 7,96 + 19,69 = 27,65\, N/m,$$

cuja incerteza valeria:

$$u_s = \sqrt{\left(\frac{\delta k_s}{\delta k_{maior}} \cdot u_{maior}\right)^2 + \left(\frac{\delta k_s}{\delta k_{menor}} \cdot u_{menor}\right)^2} = \sqrt{u_{maior}^2 + u_{menor}^2}$$

$$\Rightarrow u_s = \sqrt{0,02^2 + 0,08^2} = 0,08\, N/m$$

Obtendo, portanto, neste caso, $k_s \pm u_s = 27,65 \pm 0,08\, N/m$.

Comparando os valores obtidos experimentalmente para a constante elástica das molas ($k_s = 6,039 \pm 0,007\, N/m$) com os valores obtidos nos modelos teóricos (I) e (II), conclui-se que o modelo teórico (I) é mais apropriado para se obter a constante elástica da mola equivalente de uma associação em série, uma vez que, apesar de, assim como o modelo (II), não concordar com os valores obtidos experimentalmente - isto é, não ter que seu intervalo definido pelo valor calculado se superpõe ao valor obtido experimentalmente -, os valores obtidos no modelo (I) são muito mais próximos aos valores experimentais do que os do modelo (II). A diferença entre os valores obtidos no modelo (I) e os valores experimentais pode estar relacionada às incertezas de medição que não foram consideradas.

Anexo 3 Valores experimentais adicionais

	Objeto 1	Objeto 2	Objeto 3	Objeto 4	Objeto 5	Copo (café)
Massa (g)	54,6941	19,8953	19,3521	50,9650	60,4384	2,2394

Tabela 1: Informações das massas de cada objeto utilizado e do copo suporte. No experimento foram utilizadas diferentes combinações das massas desses objetos.

	Mola Menor	Mola Maior	Associação em série
Distensão natural sem gancho (m)	0,1483	0,1795	0,3417
Distensão natural (m)	0,1551	0,1949	0,3488

Tabela 2: Informações das distensões naturais, com e sem gancho, das duas molas e da associação entre elas.

Anexo 4 Cálculos dos coeficientes da reta segundo o método dos mínimos quadrados

Para todas as molas, foi aplicado o método dos mínimos quadrados, segundo as equações:

$$a = \frac{N.(\Sigma xy) - (\Sigma x).(\Sigma y)}{\Delta}$$

$$b = \frac{(\Sigma y).(\Sigma x^2) - (\Sigma xy).(\Sigma x)}{\Delta}$$

$$\Delta = N.(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2$$

$$u_a = \left(\sqrt{\frac{N}{\Delta}}\right) \cdot u$$

$$u_b = \left(\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{\Delta}}\right) \cdot u$$

$u = \frac{\alpha}{2\sqrt{6}}$, Em que α é a menor medida do instrumento (Régua milimetrada)

$$u = \frac{1.10^{-3}}{2\sqrt{6}}$$

Primeiramente, para a mola menor, para fazer o ajuste, usando os valores da tabela 1 (x = Força Peso(N), y = Distensão(m)), obtemos:

a = 0,0508
b = -0,0221
ua = 0,0002
ub = 0,0002

Como "b" é muito pequeno, podemos desprezá-lo.
Onde o "a" tem unidade [a] = $m.N^{-1}$ e corresponde ao inverso da constante elástica da mola $k = \frac{1}{a}$ e "b" tem unidade [b] = m. Logo, a equação final é $F = 19,68503937.x$

Analogamente, utilizando-se o mesmo método para a mola maior, temos:
Usando os valores da tabela 2 (x = Força Peso(N), y = Distensão(m)), obtemos:

a = 0,1256
b = -0,0111
ua = 0,0003
ub = 0,0002

Como "b" é muito pequeno, podemos desprezá-lo.
Onde o "a" tem unidade [a] = $m.N^{-1}$ e corresponde ao inverso da constante elástica da mola $k = \frac{1}{a}$ e "b" tem unidade [b] = m. Logo, a equação final é $F = 7,961783439.x$

Por fim, utilizando o mesmo método para as molas em série, usando os valores da tabela 3 (x = Força Peso(N), y = Distensão(m)), obtemos:

a = 0,1656
b = -0,0196
ua = 0,0002
ub = 0,0002

Como “b” é muito pequeno, podemos desprezá-lo
Onde o “a” tem unidade [a] = $m.N^{-1}$ e corresponde ao inverso da constante elástica da mola $k = \frac{1}{a}$ e “b” tem unidade [b] = m. Logo, a equação final é $F = 6,038647343x$.