

Universidade Estadual de Campinas

Relatório 3 F129

Estudo de colisões unidimensionais e propagação de incertezas

Versão 1 - 13/06/2022

Eduardo Rittner Coelho 250960
Gabriella San Martino Tomoda 193523
Henrique Parede de Souza 260497
Jasmine Battestin Nunes 247181
Victor Hoshikawa Satoh 260711

Introdução: A partir de um simples experimento utilizando uma rampa e várias esferas, é possível estudar a física por trás das colisões ao relacionar os dados coletados com os conhecimentos prévios de mecânica básica do grupo.

Objetivo: Apresentar as análises a respeito das colisões (se são elásticas, ou não) sob a lente da conservação de quantidade de movimento, além de estudar e calcular as propagações das incertezas teóricas e experimentais relacionadas ao experimento.

Materiais e métodos: Medimos o diâmetro das esferas (aço e madeira) com um paquímetro e medimos sua massa (balança analítica). Nivelamos a rampa com um nível de bolha de ar, medimos as alturas (régua milimetrada - centro de massa até a mesa), em que esfera seria solta e ocorreria a colisão, e marcamos com fita crepe. Alinhamos o início dos papéis milimetrado (prumo de linha e régua milimetrada) e carbono com o final da rampa. Lançamos as esferas sem e com colisão, movendo os papéis entre alguns lançamentos (evitando marcações sobrepostas). Além disso, gravamos os lançamentos para simulações no *Tracker*.

Resultados: No anexo 1 foram calculados o alcance teórico e velocidade da esfera alvo, além de estimar que 29% da energia cinética da esfera é convertida em energia rotacional. No anexo 2, calculamos todas as incertezas (Tabelas 1-3, Anexo 2) e propagações de incertezas associadas às medidas e valores teóricos e obtidos. Assim, obtendo os seguintes resultados; Desconsiderando a energia cinética rotacional: $V_0 = 1,268 \pm 0,002 \text{ m/s}$, $V_p = (3,30 \pm 0,01)10^{-4} \text{ m/s}$, $V_a = 1,268 \pm 0,002 \text{ m/s}$ e $A = 0,2255 \pm 0,0004 \text{ m}$; Considerando a energia cinética rotacional: $V_o = 1,071 \pm 0,002 \text{ m/s}$, $V_a = 1,071 \pm 0,002 \text{ m/s}$ e $A = 0,1905 \pm 0,0004 \text{ m}$. Os alcances obtidos no experimento estão registrados nas Figs. 1-2, e através do Tracker obtivemos uma análise detalhada das velocidades associadas aos experimentos realizados detalhada no anexo 3. Por fim, no anexo 4, comparou-se os valores de alcances teóricos com experimentais, analisou-se as causas de dissipação de energia cinética, apontando como principais causas a rotação, o arrasto exercido pelo ar e o atrito entre a rampa e a bolinha; bem como as velocidades médias obtidas.

Discussão: Os valores dos alcances experimentais se aproximam muito dos valores teóricos se levando em conta a energia rotacional da esfera projétil, o que corrobora a tese de que neste experimento a principal fonte de perda de energia é a energia rotacional e que todas as outras são desprezíveis. Além disso, visto que a diferença entre os alcances entre os lançamentos com e sem colisão é pequena, é razoável classificar a colisão como sendo elástica, visto que pouquíssima energia é perdida na colisão.

Um ponto interessante a se notar é que o lançamento com as duas esferas de madeira teve um alcance consideravelmente menor do que o alcance das esferas de aço e consequentemente do alcance esperado. Acreditamos que essa discrepância se deve em grande parte ao arrasto, que afetou mais o lançamento das esferas de madeira devido à sua menor massa em comparação com as esferas de aço.

Conclusão: Concluímos que a colisão entre as duas esferas pode de fato ser considerada elástica, e que ao considerar a energia rotacional nas estimativas teóricas, fomos capazes de chegar muito perto dos valores obtidos na prática.

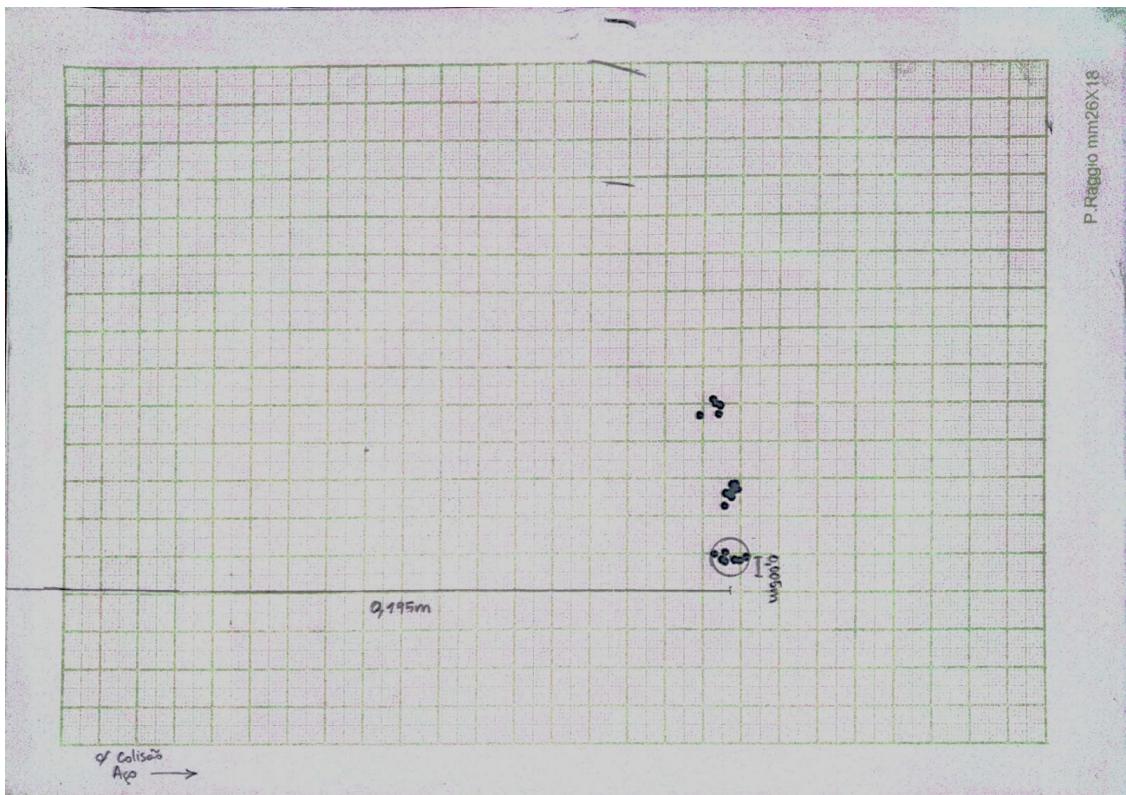
Figuras e Tabelas do Relatório “Estudo de colisões unidimensionais e propagação de incertezas”

Tabela 1: Incertezas para o alcance médio da esfera alvo de aço. Medindo-se cada alcance da esfera alvo de aço com uma régua, foi possível obter um desvio padrão da média de $\bar{\sigma} = 1 \text{ mm}$, configurando a incerteza estatística. Já para a incerteza de medição da régua milimetrada, considerou-se sua menor unidade de medida ($a = 1 \text{ mm}$), configurando a incerteza instrumental. Por fim, julgou-se pertinente considerar a incerteza de paralaxe, arbitrando-a com valor de 1 mm.

Fonte da Incerteza	Símbolo para esta incerteza	Incerteza-padrão	f.d.p. utilizada	Tipo de avaliação
Incerteza estatística	u_{est}	$u_{est} = \bar{\sigma} = 1 \text{ mm}$	Gaussiana	Tipo “A”
Incerteza instrumental	u_{inst}	$u_{inst} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = 0,2 \text{ mm}$	Triangular	Tipo “B”
Incerteza de paralaxe	u_p	$u_p = 1 \text{ mm}$	-	Tipo “B”
Incerteza-padrão combinada para esta grandeza: $u_c = \sqrt{u_{est}^2 + u_{inst}^2 + u_p^2} = 1 \text{ mm}$				

Tabela 2: Incertezas para o alcance médio da esfera alvo de madeira. Medindo-se cada alcance da esfera alvo de madeira com uma régua, foi possível obter um desvio padrão da média de $\bar{\sigma} = 6 \text{ mm}$, configurando a incerteza estatística. Considerou-se, de forma análoga à esfera alvo de aço, a incerteza instrumental e a incerteza de paralaxe.

Fonte da Incerteza	Símbolo para esta incerteza	Incerteza-padrão	f.d.p. utilizada	Tipo de avaliação
Incerteza estatística	u_{est}	$u_{est} = \bar{\sigma} = 6 \text{ mm}$	Gaussiana	Tipo “A”
Incerteza instrumental	u_{inst}	$u_{inst} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = 0,2 \text{ mm}$	Triangular	Tipo “B”
Incerteza de paralaxe	u_p	$u_p = 1 \text{ mm}$	-	Tipo “B”
Incerteza-padrão combinada para esta grandeza: $u_c = \sqrt{u_{est}^2 + u_{inst}^2 + u_p^2} = 6 \text{ mm}$				



P.Raggio mm26X18

Figura 1: Esboço de círculo contendo a maior parte dos lançamentos das esferas de aço com colisão. Esboçou-se um círculo contendo a maior parte dos lançamentos, conforme a figura acima. Medindo-se a distância, x_1 , do centro desse círculo à margem inferior da folha de papel milimetrado, e somando-a à distância x_0 , da margem inferior da folha até a ponta da rampa - que é $x_0 = 0$ porque o começo da folha foi alinhado com o final da rampa -, obteve-se o valor médio do alcance da esfera alvo, i.e. $\bar{x} = x_1 + x_0 = (19,0\text{ cm})$. Ainda, mediu-se o raio desse círculo, obtendo-se $R = (0,5\text{ cm})$. Aproximando-se o diâmetro do círculo esboçado para 4σ (onde σ é o desvio padrão), foi possível obter que o desvio padrão para este caso vale $\sigma = \frac{R}{2} = (0,25\text{ cm})$. Essa aproximação pode ser feita porque, numa distribuição normal, a probabilidade de que um dos dados obtidos pertença ao conjunto de valores com desvios de até 2σ em relação ao valor médio é de 95,4%; contendo, portanto, a maior parte dos lançamentos. De maneira análoga, obteve-se o alcance médio e o desvio padrão a partir desse método aproximado para as demais configurações (esfera de madeira com colisão, esfera de aço sem colisão e esfera de madeira sem colisão).

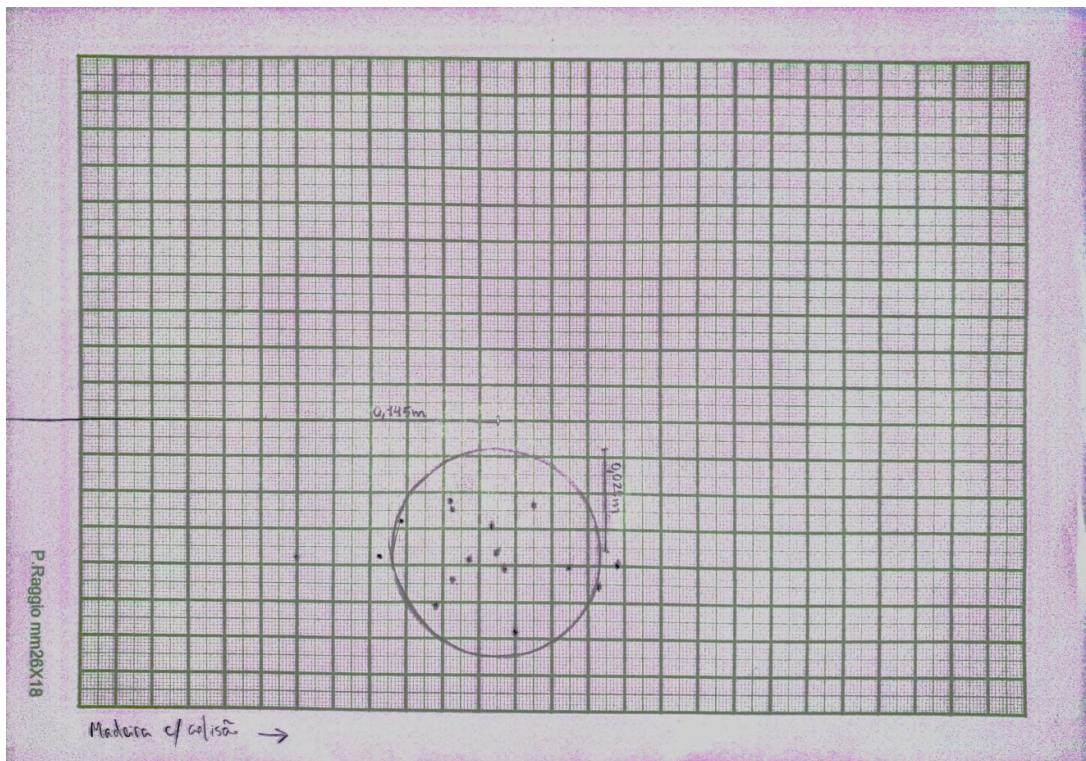


Figura 2: Esboço de círculo contendo a maior parte dos lançamentos das esferas de madeira com colisão. Obteve-se o valor médio do alcance da esfera alvo pela equação $\bar{x} = x_1 + x_0 = (14,5\text{ cm})$. O raio do círculo medido foi $R = (1,4\text{ cm})$, a partir do qual obteve-se que o desvio padrão para este caso vale $\sigma = \frac{R}{2} = (0,70\text{ cm})$.

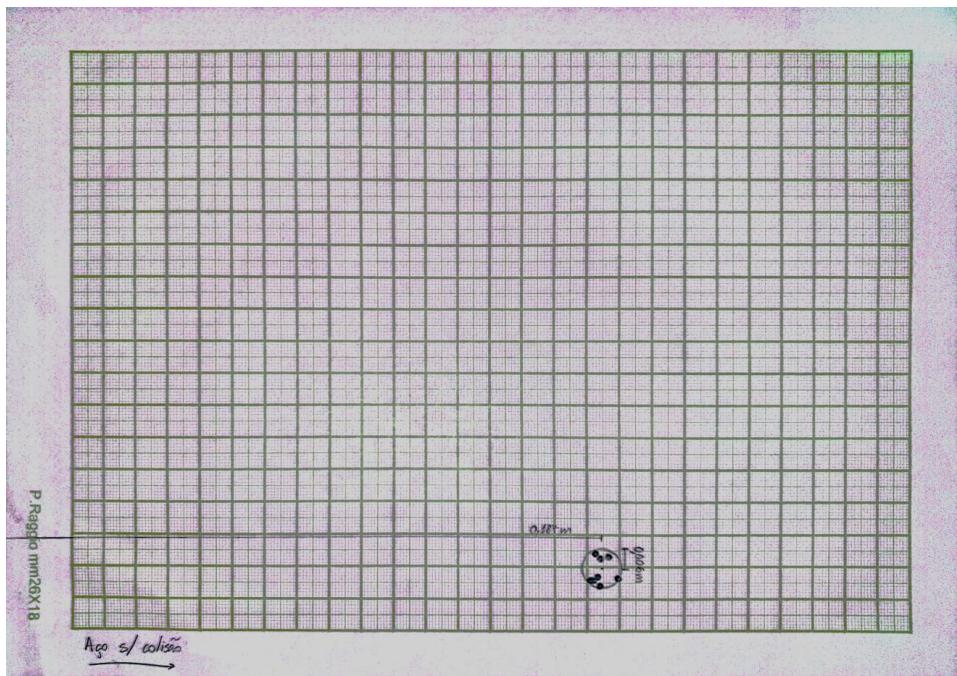


Figura 3: Esboço de círculo contendo a maior parte dos lançamentos das esferas de aço sem colisão. Obteve-se o valor médio do alcance da esfera alvo pela equação $\bar{x} = x_1 + x_0 = (18,9\text{ cm})$. O raio do círculo medido foi $R = (0,6\text{ cm})$, a partir do qual obteve-se que o desvio padrão para este caso vale $\sigma = \frac{R}{2} = (0,3\text{ cm})$.

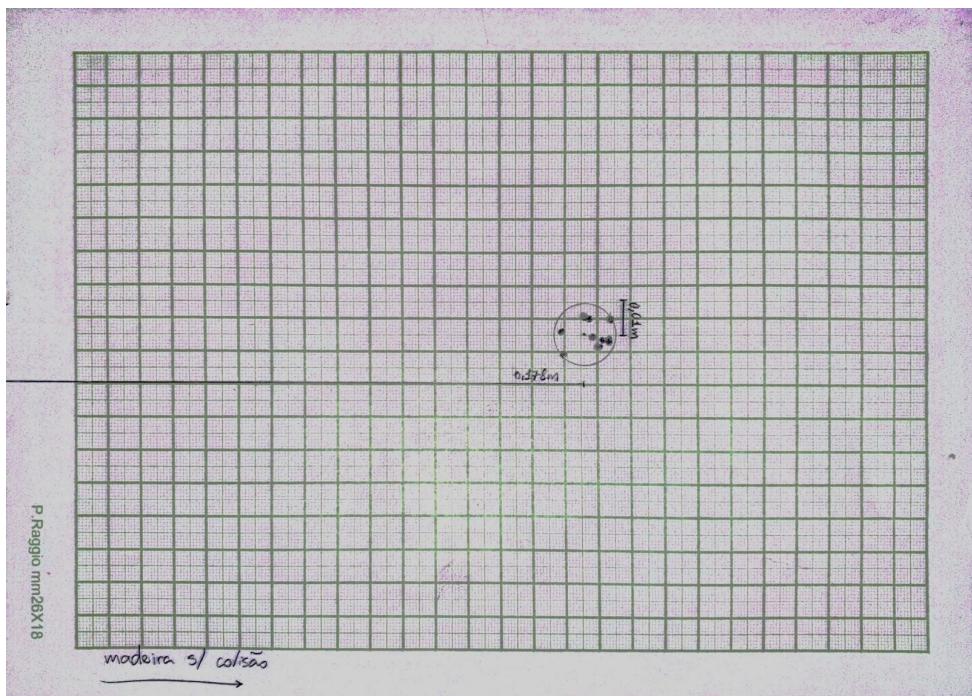


Figura 4: Esboço de círculo contendo a maior parte dos lançamentos das esferas de madeira sem colisão. Obteve-se o valor médio do alcance da esfera alvo pela equação $\bar{x} = x_1 + x_0 = (18,5\text{ cm})$. O raio do círculo medido foi $R = (1,0\text{ cm})$, a partir do qual obteve-se que o desvio padrão para este caso vale $\sigma = \frac{R}{2} = (0,5\text{ cm})$.

ANEXO 1 CÁLCULOS DOS ALCANCES TEÓRICOS DA BOLA DE AÇO COM COLISÃO

Desconsiderando quaisquer perdas de energia, temos que em ambos os casos a energia cinética da primeira bolinha no instante imediatamente anterior ao impacto é a diferença entre a energia potencial gravitacional no topo da rampa e a energia potencial gravitacional no fim da rampa. Ou seja:

$$Ec = Epgi - Epgf = mg \cdot (H - h)$$

$$Vo = \sqrt{2g(H - h)}$$

$$Vo = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot (23,70 - 15,50) \cdot 10^{-2}}$$

$$Vo = 1,268 \text{ m/s}$$

Através da conservação da quantidade de movimento e partindo do pressuposto de que a colisão entre as duas bolas de aço é elástica, temos:

$$Vp = \frac{Vo(2mp - M)}{M}, \text{ onde } M = mp + ma$$

$$Va = \frac{2Vo \cdot mp}{M}$$

Como $mp = 28,0972 \text{ g}$ e $ma = 28,0826 \text{ g}$:

$$Vp = 3,30 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$Va = 1,268 \text{ m/s}$$

Para descobrir o alcance teórico, a fórmula é simples:

$$A = Va \cdot t$$

$$A = Va \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$A = 0,2255 \text{ m}$$

No entanto, se formos considerar que parte da energia cinética da bola é convertida em energia de rotação, temos o seguinte:

$$Vo = \sqrt{\frac{10}{7}g(H - h)}$$

$$Vo = 1,071 \text{ m/s}$$

Utilizando novamente a conservação da quantidade de movimento temos que $Va = 1,071 \text{ m/s}$ e $A = 0,1905 \text{ m}$.

Os valores teóricos finais são 0,2255m e 0,1905m, se considerando o lançamento sem qualquer perda de energia e com a rotação como única perda. Para descobrir qual porcentagem da energia cinética é convertida em energia rotacional, temos:

$$E \text{ total} = Ec + Er$$

$Er = E \text{ total} - Ec$, onde E total é a diferença entre as energias potenciais gravitacionais inicial e final:

$$Er = mg(H - h) - \frac{mv_2^2}{2} = 0,23J$$

Como $E_{total} = 0,8036J$, $Er = E_{total} \cdot 0,286$, em outras palavras, aproximadamente 29% da energia de translação da esfera é convertida em energia rotacional.

ANEXO 2 CÁLCULOS DAS INCERTEZAS ASSOCIADAS AOS CÁLCULOS TEÓRICOS E MEDIÇÕES

Tabela 1 Anexo 2: Incertezas para a altura.

Fonte da Incerteza	Símbolo para esta incerteza	Incerteza-padrão	f.d.p. utilizada	Tipo de avaliação
Régua milimetrada	u_H	$\frac{1.10^{-3}}{2\sqrt{6}} m$	Triangular	Tipo “B”
Incerteza-padrão combinada para esta grandeza: $\frac{1.10^{-3}}{2\sqrt{6}} m$				

Tabela 2 Anexo 2: Incertezas para a massa.

Fonte da Incerteza	Símbolo para esta incerteza	Incerteza-padrão	f.d.p. utilizada	Tipo de avaliação
Balança analítica	u_m	$\frac{1.10^{-7}}{2\sqrt{3}} Kg$	Retangular	Tipo “B”
Incerteza-padrão combinada para esta grandeza: $\frac{1.10^{-7}}{2\sqrt{3}} Kg$				

Tabela 3 Anexo 2: Incertezas para o diâmetro.

Fonte da Incerteza	Símbolo para esta incerteza	Incerteza-padrão	f.d.p. utilizada	Tipo de avaliação
Paquímetro	u_p	$\frac{1.10^{-4}}{2\sqrt{6}} m$	Triangular	Tipo “B”
Incerteza-padrão combinada para esta grandeza: $\frac{1.10^{-4}}{2\sqrt{6}} m$				

Propagação de incerteza em V_o :

A incerteza da altura é dada por:

$$u_H = u_h = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{1.10^{-3}}{2\sqrt{6}} m$$

$$u_{V_o}^2 = \left(\frac{\partial V_o}{\partial H} \right)^2 \cdot u_H^2 + \left(\frac{\partial V_o}{\partial h} \right)^2 \cdot u_h^2$$

$$u_{V_o}^2 = \left(\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{H-h}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1.10^{-3}}{2\sqrt{6}} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{H-h}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1.10^{-3}}{2\sqrt{6}} \right)^2$$

$$u_{V_o} = 0,002 m/s$$

Propagação de incerteza em V_p :

A incerteza da massa é dada por:

$$u_m = u_{mp} = u_{ma} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{1.10^{-7}}{2\sqrt{3}} Kg$$

$$u_{Vp}^2 = \left(\frac{\partial Vp}{\partial Vo}\right)^2 \cdot u_{Vo}^2 + \left(\frac{\partial Vp}{\partial mp}\right)^2 \cdot u_{mp}^2 + \left(\frac{\partial Vp}{\partial ma}\right)^2 \cdot u_{ma}^2$$

$$u_{Vp}^2 = \left(\frac{(2mp-M)}{M}\right)^2 \cdot u_{Vo}^2 + \left(\frac{2.Vo.(M-mp)}{M^2}\right)^2 \cdot u_{mp}^2 + \left(-\frac{2.Vo.mp}{M^2}\right)^2 \cdot u_{ma}^2$$

$$u_{Vp} = 0,01 \cdot 10^{-4} m/s$$

Propagação da incerteza em Va

$$u_{Va}^2 = \left(\frac{\partial Va}{\partial Vo}\right)^2 \cdot u_{Vo}^2 + \left(\frac{\partial Va}{\partial mp}\right)^2 \cdot u_{mp}^2 + \left(\frac{\partial Va}{\partial ma}\right)^2 \cdot u_{ma}^2$$

$$u_{Va}^2 = \left(\frac{2mp}{M}\right)^2 \cdot u_{Vo}^2 + \left(\frac{2.Vo.(M-mp)}{M^2}\right)^2 \cdot u_{mp}^2 + \left(-\frac{2.Vo.mp}{M^2}\right)^2 \cdot u_{ma}^2$$

$$u_{Va} = 0,002 m/s$$

Propagação da incerteza no alcance:

$$u_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial Va}\right)^2 \cdot u_{Va}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)^2 \cdot u_h^2$$

$$u_A^2 = \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 \cdot u_{Va}^2 + \left(\frac{Va}{\sqrt{2gh}}\right)^2 \cdot u_h^2$$

$$u_A = 0,0004 m$$

Propagação da incerteza em Vo, considerando a energia cinética rotacional:

$$u_{Vo}^2 = \left(\frac{\partial Vo}{\partial H}\right)^2 \cdot u_H^2 + \left(\frac{\partial Vo}{\partial h}\right)^2 \cdot u_h^2$$

$$u_{Vo}^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10g}}{\sqrt{7(H-h)}}\right)^2 \cdot u_H^2 + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10g}}{\sqrt{7(H-h)}}\right)^2 \cdot u_h^2$$

$$u_{Vo} = 0,002 m/s$$

Propagação da incerteza em Va com a nova estimativa:

$$u_{Va}^2 = \left(\frac{\partial Va}{\partial Vo}\right)^2 \cdot u_{Vo}^2 + \left(\frac{\partial Va}{\partial mp}\right)^2 \cdot u_{mp}^2 + \left(\frac{\partial Va}{\partial ma}\right)^2 \cdot u_{ma}^2$$

$$u_{Va}^2 = \left(\frac{2mp}{M}\right)^2 \cdot u_{Vo}^2 + \left(\frac{2.Vo.(M-mp)}{M^2}\right)^2 \cdot u_{mp}^2 + \left(-\frac{2.Vo.mp}{M^2}\right)^2 \cdot u_{ma}^2$$

$$u_{Va} = 0,002 m/s$$

Propagação da incerteza no alcance considerando o rolamento

$$u_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial Va}\right)^2 \cdot u_{Va}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)^2 \cdot u_h^2$$

$$u_A^2 = \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 \cdot u_{Va}^2 + \left(\frac{Va}{\sqrt{2gh}}\right)^2 \cdot u_h^2$$

$$u_A = 0,0004 m$$

ANEXO 3 SIMULAÇÕES GRÁFICAS FEITAS NO SOFTWARE TRACKER

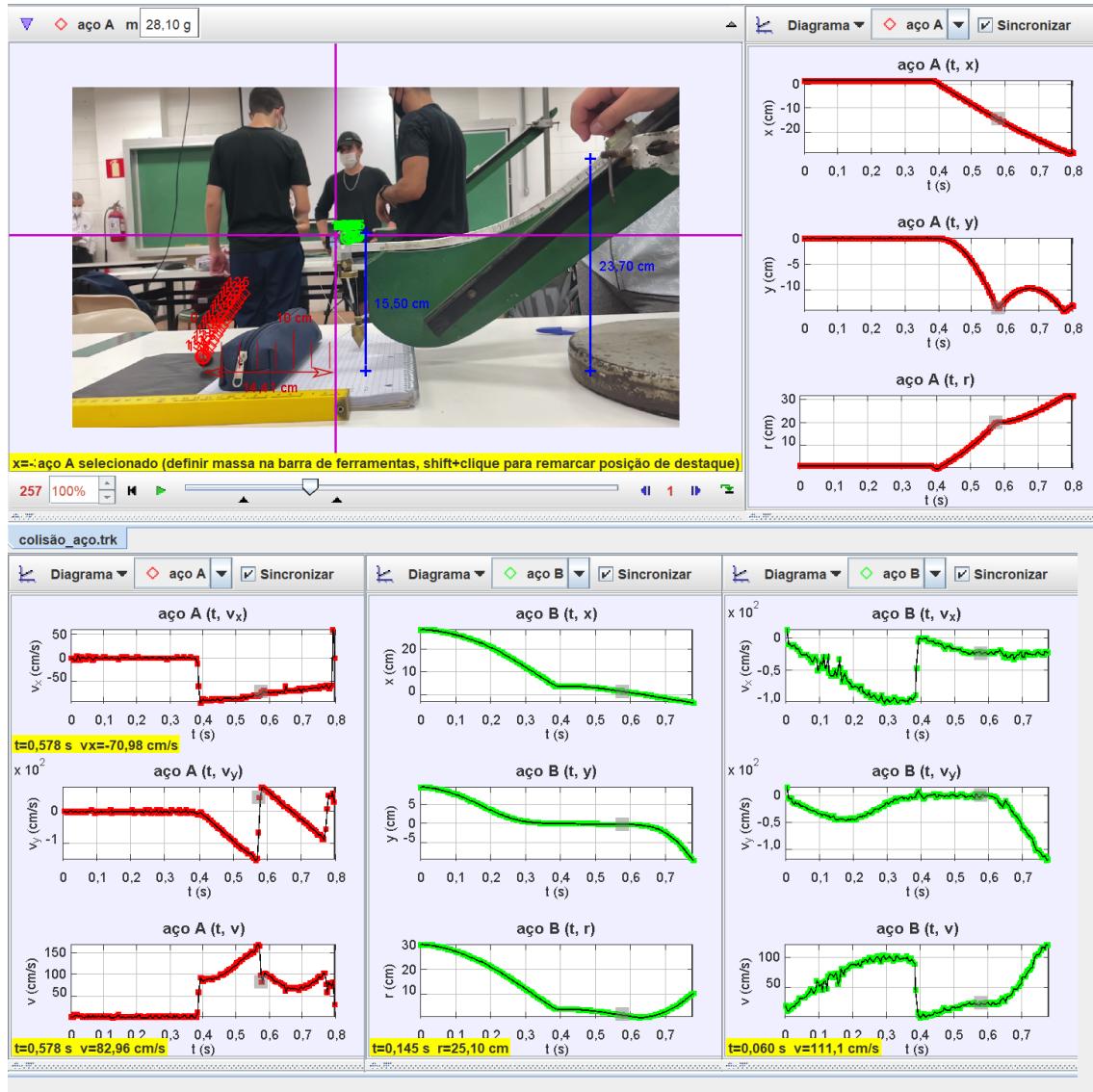


Figura Simulação 1: Figura do aplicativo da colisão entre duas esferas idênticas de aço (“aço A” é a alvo e “aço B” a projétil). A esfera A mantém seu estado inercial de repouso até que B a atinge com velocidade aproximada de 0,925 m/s. A demora $t = 0,57 - 0,40 = 0,17$ s para cair e possui alcance horizontal de 0,1441 m

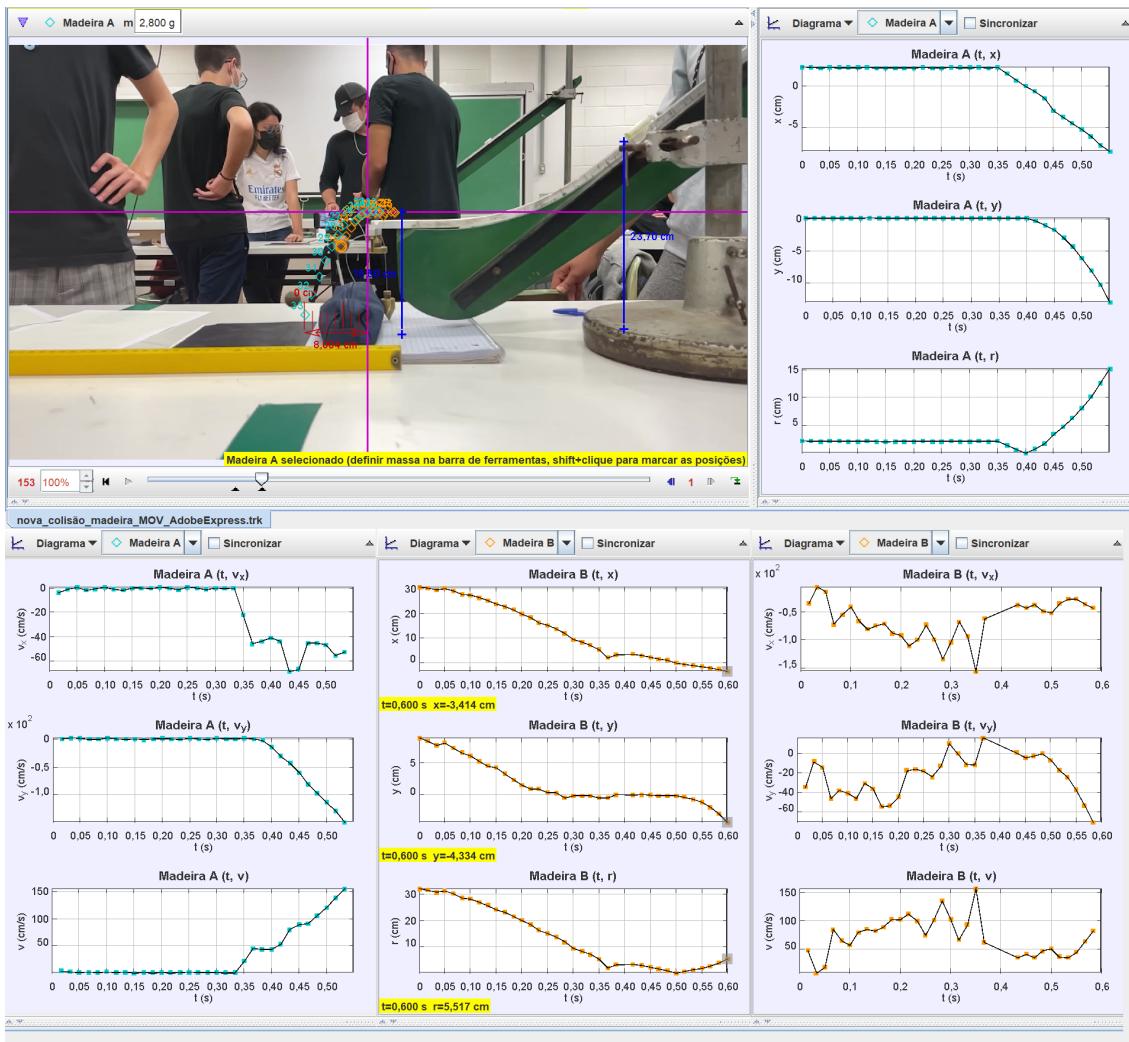


Figura Simulação 2: Figura do aplicativo da colisão entre 2 esferas idênticas de madeira (“Madeira A” é a alvo e “Madeira B” a projétil). A esfera A mantém seu estado inercial de repouso até que B a atinge com velocidade aproximada de 0,632 m/s. A demora $t = 0,43 - 0,15 = 0,28$ s para cair e possui alcance horizontal de 0,0800 m

ANEXO 4 COMPARAÇÕES ENTRE RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

Como os valores teóricos se aproximam bastante dos dados experimentais, podemos concluir que a colisão é de fato elástica, visto que a quantidade de energia dissipada é desprezível. Além disso, outra conclusão que se pode tirar da proximidade dos valores calculados e obtidos experimentalmente é que não existem outras fontes de dissipaçāo de energia significativas além da conversão de parte da energia cinética em energia rotacional no lançamento das esferas de aço.

Para analisar mais detalhadamente o impacto da energia rotacional, partimos do princípio de conservação de energia (onde $Ec_1 = Epgi - Epgf$):

$$\begin{aligned}Epg + Ec_1 &= Epg + Ec_2 + Er \\Ec_1 &= Ec_2 + Er \\(mv_1^2)/2 &= (mv_2^2)/2 + Er \\(mv_1^2)/2 - (mv_2^2)/2 &= Er \\Er &= 0,29 \cdot Ec_1\end{aligned}$$

Ou seja, 29% da energia cinética da bola é convertida em energia cinética de rotação.

Além da rotação, os 2 principais candidatos para explicar a discrepância entre os valores teóricos e experimentais seriam o arrasto exercido sobre a bolinha e o atrito, visto que a bolinha poderia deslizar e não rolar pela rampa.

Analizando os vídeos, percebe-se que:

A esfera projétil parte com velocidade inicial nula, enquanto a alvo está em repouso. Antes de atingir a esfera alvo, sua variação de energia potencial gravitacional foi inteiramente convertida em energia cinética e em energia rotacional, obedecendo assim a Lei da Conservação de Energia.

Durante a colisão, observa-se a conservação do momento linear. Como o intervalo de interação é desprezível, pode-se desconsiderar o efeito da rotação na colisão.

Se as inéncias dos dois corpos fossem iguais, haveria a permuta das velocidades. Porém como há uma discreta diferença nas inéncias temos que a esfera projétil continua seu percurso com velocidade reduzida e próxima de zero, enquanto que a alvo é arremessada da rampa com a velocidade da projétil.

Analizando as consequências dos possíveis valores para as velocidades

Caso a velocidade média do lançamento sem colisão seja igual a com colisão (dentro das incertezas), têm-se:

$$Va = Vo \Rightarrow \frac{2Vo \cdot mp}{mp + ma} = Vo \Rightarrow \frac{2mp}{mp + ma} = 1 \Rightarrow 2mp = mp + ma \therefore mp = ma$$

Assim, podemos concluir que as massas das esferas são iguais.

Caso as velocidades sejam diferentes.

Pensando no caso em que a esfera com colisão tenha alcance menor que sem colisão, isso é possível caso a velocidade da esfera alvo seja menor que a Vo da esfera projétil, pois o alcance é diretamente proporcional a velocidade da esfera alvo. Então, têm-se:

$$Va < Vo \Rightarrow \frac{2Vo \cdot mp}{mp + ma} < Vo \Rightarrow \frac{2mp}{mp + ma} < 1 \Rightarrow 2mp < mp + ma \therefore mp < ma$$

Logo, para esse caso, conclui-se que a massa do projétil é menor que a massa alvo

Pensando no caso em que a esfera com colisão tenha alcance maior que sem colisão, isso é possível caso a velocidade da esfera alvo seja maior que a Vo da esfera projétil, pois o alcance é diretamente proporcional a velocidade da esfera alvo. Então, têm-se:

$$Va > Vo \Rightarrow \frac{2Vo \cdot mp}{mp + ma} > Vo \Rightarrow \frac{2mp}{mp + ma} > 1 \Rightarrow 2mp > mp + ma \therefore mp > ma$$

Logo, para esse caso, conclui-se que a massa do projétil é maior que a massa alvo.