

MC558 - Lista 03

Henrique Parede de Souza - 260497

Novembro, 2024

Questão 1

Resolução feita para o problema da Questão 6

(a) Programa Linear

- **Variáveis:**

- x_{tinto} : Número de garrafas de Vinho Tinto produzidas.
- x_{branco} : Número de garrafas de Vinho Branco produzidas.
- $x_{rosé}$: Número de garrafas de Vinho Rosé produzidas.

- **Função Objetivo:**

$$\max 50 \cdot x_{tinto} + 40 \cdot x_{branco} + 45 \cdot x_{rosé}$$

- **Restrições:**

$$\begin{cases} 1.2 \cdot x_{tinto} + 0.8 \cdot x_{branco} + 1.0 \cdot x_{rosé} & \leq 1500 \\ 0.1 \cdot x_{tinto} + 0.1 \cdot x_{branco} + 0.1 \cdot x_{rosé} & \leq 70 \\ -x_{tinto} & \leq -100 \\ -x_{branco} & \leq -80 \\ -x_{rosé} & \leq -60 \\ x_{tinto}, x_{branco}, x_{rosé} & \geq 0 \end{cases}$$

(b) Programa Dual

- **Variáveis:**

- y_a : Custo do quilograma de uva.
- y_b : Custo do metro quadrado.
- y_c : Custo da demanda mínima de Vinho Tinto.
- y_d : Custo da demanda mínima de Vinho Branco.
- y_e : Custo da demanda mínima de Vinho Rosé.

- **Função Objetivo:**

$$\min 1500 \cdot y_a + 70 \cdot y_b + 100 \cdot y_c + 80 \cdot y_d + 60 \cdot y_e$$

- **Restrições:**

$$\begin{cases} 1.2 \cdot y_a + 0.1 \cdot y_b - 1.0 \cdot y_c & \geq 50 \\ 0.8 \cdot y_a + 0.1 \cdot y_b - 1.0 \cdot y_d & \geq 40 \\ 1.0 \cdot y_a + 0.1 \cdot y_b - 1.0 \cdot y_e & \geq 45 \\ y_a, y_b, y_c, y_d, y_e & \geq 0 \end{cases}$$

(c) Solução Viável Não Ótima

Uma solução viável para o problema primal é dada pelo seguinte vetor:

$$\begin{cases} x_{tinto} = 200 \\ x_{branco} = 200 \\ x_{rosé} = 200 \end{cases}$$

Podemos confirmar a viabilidade da solução substituindo os valores no sistema original:

$$\begin{cases} 1.2 \cdot (200) + 0.8 \cdot (200) - 1.0 \cdot (200) = 200 & \leq 1500 \\ 0.1 \cdot (200) + 0.1 \cdot (200) - 0.1 \cdot (200) = 20 & \leq 70 \\ -200 & \leq -100 \\ -200 & \leq -80 \\ -200 & \leq -60 \\ 200 & \geq 0 \end{cases}$$

Agora consideraremos o Teorema das Folgas Complementares para determinar a otimalidade da solução. Seja p e d a solução ótima do primal e do dual, respectivamente. Para testarmos se o vetor proposto é solução ótima do PLP devemos verificar se ele satisfaz a seguinte proposição:

$$(c - A^T d)^T p = 0 \wedge (b - Ap)^T d = 0$$

Como vimos no sistema anterior, as folgas complementares associadas à y_a, y_b, y_c, y_d, y_e são diferentes de zero. Portanto para satisfazer o teorema temos que $y_a = y_b = y_c = y_d = y_e = 0$.

Agora analisando as restrições duais com os valores encontrados temos:

$$\begin{cases} 1.2 \cdot (0) + 0.1 \cdot (0) - 1.0 \cdot (0) = 50 \\ 0.8 \cdot (0) + 0.1 \cdot (0) - 1.0 \cdot (0) = 40 \\ 1.0 \cdot (0) + 0.1 \cdot (0) - 1.0 \cdot (0) = 45 \end{cases}$$

Como não há solução para o sistema anterior, também não há solução viável do dual associada com o vetor do problema primal. Portanto a solução não é ótima.

(d) Solução Ótima e Prova de Otimalidade

Uma solução ótima para o problema primal é dada pelo seguinte vetor:

$$\begin{cases} x_{tinto} = 560 \\ x_{branco} = 80 \\ x_{rosé} = 60 \end{cases}$$

Podemos confirmar a viabilidade da solução substituindo os valores no sistema original:

$$\begin{cases} 1.2 \cdot (560) + 0.8 \cdot (80) + 1.0 \cdot (60) = 796 & \leq 1500 \\ 0.1 \cdot (560) + 0.1 \cdot (80) + 0.1 \cdot (60) = 70 & \leq 70 \\ -560 & \leq -100 \\ -80 & \leq -80 \\ -60 & \leq -60 \\ 560, 80, 60 & \geq 0 \end{cases}$$

Agora consideraremos o Teorema das Folgas Complementares para determinar a otimalidade da solução. Seja p e d a solução ótima do primal e do dual, respectivamente. Para testarmos se o vetor proposto é solução ótima do PLP devemos verificar se ele satisfaz a seguinte proposição:

$$(c - A^T d)^T p = 0 \wedge (b - Ap)^T d = 0$$

Como vimos no sistema anterior, as folgas complementares associadas à y_a, y_c são diferentes de zero, enquanto que as associadas à y_b, y_d, y_e são nulas. Portanto para satisfazer o teorema temos que:

$$\begin{cases} y_a = 0 \\ y_b \geq 0 \\ y_c = 0 \\ y_d \geq 0 \\ y_e \geq 0 \end{cases}$$

Agora analisando as restrições duais com os valores encontrados temos:

$$\begin{cases} 1.2 \cdot (0) + 0.1 \cdot y_b - 1.0 \cdot (0) = 50 \\ 0.8 \cdot (0) + 0.1 \cdot y_b - 1.0 \cdot y_d = 40 \\ 1.0 \cdot (0) + 0.1 \cdot y_b - 1.0 \cdot y_e = 45 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_a = 0 \\ y_b = 500 \\ y_c = 0 \\ y_d = 10 \\ y_e = 5 \end{cases}$$

Como y é solução viável do dual, o Teorema das Sobras Complementares garante a otimalidade da solução do primal apresentada.

(e) **Explicação Passo a Passo**

Explicado durante os itens (c) e (d).

(f) **Codificação em Python com PuLP**

Questão 6

```
from pulp import *

Tinto = LpVariable("Tinto", lowBound=0, cat='Integer')
Branco = LpVariable("Branco", lowBound=0, cat='Integer')
Rose = LpVariable("Rose", lowBound=0, cat='Integer')

problema = LpProblem("MaxLucro", LpMaximize)

problema += 50 * Tinto + 40 * Branco + 45 * Rose, "objetivo"

# Limite de Recursos
problema += 1.2 * Tinto + 0.8 * Branco + 1 * Rose <= 1500 # Uva
problema += 0.1 * Tinto + 0.1 * Branco + 0.1 * Rose <= 70 # Espaço

# Demanda Mínima
problema += Tinto >= 100
problema += Branco >= 80
problema += Rose >= 60

problema.solve(GLPK_CMD())

print('Valor ótimo: ' + str(value(problema.objective)))
print('Solução ótima: ')
for variavel in problema.variables():
    print(' ' + variavel.name + " = " + str(variavel.varValue))
```

Vinho	Garrafas
Tinto	560
Branco	80
Rosé	60
Lucro	R\$ 33900

Table 1: Solução ótima da Questão 6

Questão 2

```
from pulp import *

Acido = LpVariable("Acido", lowBound=0, cat='Integer')
Amonia = LpVariable("Amonia", lowBound=0, cat='Integer')
Metanol = LpVariable("Metanol", lowBound=0, cat='Integer')

problema = LpProblem("MaxLucro", LpMaximize)

problema += 50 * Acido + 40 * Amonia + 60 * Metanol, "objetivo"

# Disponibilidade de Recursos
problema += 2 * Acido + 1 * Amonia + 3 * Metanol <= 200
problema += 3 * Acido + 2 * Amonia + 2 * Metanol <= 300
problema += 1 * Acido + 3 * Amonia + 2 * Metanol <= 150

# Poluição
problema += 3 * Acido + 2 * Amonia + 4 * Metanol <= 500

# Horas de Trabalho
problema += 5 * Acido + 3 * Amonia + 6 * Metanol <= 400

problema.solve(GLPK_CMD())

print('Valor ótimo: ' + str(value(problema.objective)))
print('Solução ótima: ')
for variavel in problema.variables():
    print(' ' + variavel.name + " = " + str(variavel.varValue))
```

Produto	Unidades
Ácido Sulfúrico	62
Amônia	28
Metanol	1
Lucro	R\$ 4280

Table 2: Solução ótima da Questão 2

Questão 3

```
from pulp import *

# Hectares de recursos
milho = LpVariable("milho", lowBound=0, cat='Integer')
soja = LpVariable("soja", lowBound=0, cat='Integer')
trigo = LpVariable("trigo", lowBound=0, cat='Integer')

problema = LpProblem("MaxLucro", LpMaximize)

problema += 3000 * milho + 3500 * soja + 2500 * trigo, "objetivo"

# Limite de Recursos
problema += milho + soja + trigo <= 150 # Área
problema += 2000 * milho + 1700 * soja + 1500 * trigo <= 280000 # Água
problema += 50 * milho + 70 * soja + 40 * trigo <= 7500 # Fertilizante
problema += 4 * milho + 3 * soja + 2 * trigo <= 500 # Pesticida

# Rotação e Alocação de Cultivos
problema += trigo >= 0.3 * (milho + soja + trigo) # Trigo
problema += (milho + soja) >= 0.7 * (milho + soja + trigo) # Milho e Soja

problema.solve(GLPK_CMD())

print('Valor ótimo: ' + str(value(problema.objective)))
print('Solução ótima: ')
for variavel in problema.variables():
    print(' ' + variavel.name + " = " + str(variavel.varValue))
```

Produto	Hectares
Milho	83
Soja	22
Trigo	45
Lucro	R\$ 438500

Table 3: Solução ótima da Questão 3

Questão 4

```
from pulp import *

Analgesico = LpVariable("Analgesico", lowBound=0, cat='Integer')
Antibiotico = LpVariable("Antibiotico", lowBound=0, cat='Integer')
Antialergico = LpVariable("Antialergico", lowBound=0, cat='Integer')

problema = LpProblem("MaxLucro", LpMaximize)

problema += 8 * Analgesico + 12 * Antibiotico + 10 * Antialergico, "objetivo"

# Limite de Recursos
problema += 10 * Analgesico + 15 * Antibiotico + 12 * Antialergico <= 3000 # Ingrediente A
problema += 5 * Analgesico + 8 * Antibiotico + 10 * Antialergico <= 2000 # Ingrediente B
problema += 0.5 * Analgesico + 0.8 * Antibiotico + 0.6 * Antialergico <= 150 # Tempo de Máquina

# Demanda Mínima
problema += Analgesico >= 100
problema += Antibiotico >= 50
problema += Antialergico >= 75

problema.solve(GLPK_CMD())

print('Valor ótimo: ' + str(value(problema.objective)))
print('Solução ótima: ')
for variavel in problema.variables():
    print(' ' + variavel.name + " = " + str(variavel.varValue))
```

Medicamento	Unidades
Analgésico	100
Antibiótico	50
Antialérgico	100
Lucro	R\$ 2400

Table 4: Solução ótima da Questão 4

Questão 5

```
from pulp import *

Larger = LpVariable("Larger", lowBound=0, cat='Integer')
Ale = LpVariable("Ale", lowBound=0, cat='Integer')
Ipa = LpVariable("Ipa", lowBound=0, cat='Integer')

problema = LpProblem("MaxLucro", LpMaximize)

problema += 5 * Larger + 6 * Ale + 7 * Ipa, "objetivo"

# Limite de Recursos
problema += 0.4 * Larger + 0.5 * Ale + 0.6 * Ipa <= 1500 # Malte
problema += 0.01 * Larger + 0.015 * Ale + 0.02 * Ipa <= 100 # Lúpulo
problema += 1 * Larger + 1.2 * Ale + 1.5 * Ipa <= 4000 # Água

# Demanda Mínima
problema += Larger >= 200
problema += Ale >= 150
problema += Ipa >= 100

problema.solve(GLPK_CMD())

print('Valor ótimo: ' + str(value(problema.objective)))
print('Solução ótima: ')
for variavel in problema.variables():
    print(' ' + variavel.name + " = " + str(variavel.varValue))
```

Cerveja	Litros
Larger	3410
Ale	152
IPA	100
Lucro	R\$ 18662

Table 5: Solução ótima da Questão 5

Questão 6

```
from pulp import *

Tinto = LpVariable("Tinto", lowBound=0, cat='Integer')
Branco = LpVariable("Branco", lowBound=0, cat='Integer')
Rose = LpVariable("Rose", lowBound=0, cat='Integer')

problema = LpProblem("MaxLucro", LpMaximize)

problema += 50 * Tinto + 40 * Branco + 45 * Rose, "objetivo"

# Limite de Recursos
problema += 1.2 * Tinto + 0.8 * Branco + 1 * Rose <= 1500 # Uva
problema += 0.1 * Tinto + 0.1 * Branco + 0.1 * Rose <= 70 # Espaço

# Demanda Mínima
problema += Tinto >= 100
problema += Branco >= 80
problema += Rose >= 60

problema.solve(GLPK_CMD())

print('Valor ótimo: ' + str(value(problema.objective)))
print('Solução ótima: ')
for variavel in problema.variables():
    print(' ' + variavel.name + " = " + str(variavel.varValue))
```

Vinho	Garrafas
Tinto	560
Branco	80
Rosé	60
Lucro	R\$ 33900

Table 6: Solução ótima da Questão 6

Questão 7

```
from pulp import *

Chocolate = LpVariable("Chocolate", lowBound=0, cat='Integer')
Baunilha = LpVariable("Baunilha", lowBound=0, cat='Integer')
Morango = LpVariable("Morango", lowBound=0, cat='Integer')

problema = LpProblem("MaxLucro", LpMaximize)

problema += 12 * Chocolate + 10 * Baunilha + 11 * Morango, "objetivo"

# Limite de Recursos
problema += 0.5 * Chocolate + 0.4 * Baunilha + 0.45 * Morango <= 500 # Leite
problema += 0.1 * Chocolate + 0.15 * Baunilha + 0.12 * Morango <= 80 # Açúcar
problema += 10 * Chocolate + 8 * Baunilha + 9 * Morango <= 2000 # Saborizantes

# Demanda Mínima
problema += Chocolate >= 80
problema += Baunilha >= 60
problema += Morango >= 50

problema.solve(GLPK_CMD())

print('Valor ótimo: ' + str(value(problema.objective)))
print('Solução ótima: ')
for variavel in problema.variables():
    print(' ' + variavel.name + " = " + str(variavel.varValue))
```

Sorvete	Litros
Chocolate	80
Baunilha	87
Morango	56
Lucro	R\$ 2446

Table 7: Solução ótima da Questão 7