Cálculo Numérico – SME0104 – ICMC-USP

Lista 8: Integração Numérica

Professor: Afonso Paiva

Lembrete (informação que vai estar disponível na prova)

Regra do Trapézio

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,[\,f(x_0) + f(x_N)\,] + h\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)$$

$$|R(f)| \leq \frac{b-a}{12}\,h^2\,\|f''\|_\infty$$

Regra 1/3 de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_{2N}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,[\,f(x_0)+4\,f(x_1)+2\,f(x_2)+4\,f(x_3)+\cdots+2\,f(x_{2N-2})+4\,f(x_{2N-1})+f(x_{2N})\,]$$

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}\sum_{k=1}^{N}[f(x_{k-1}) + 4f(\overline{x}_k) + f(x_k)] \quad \text{com} \quad \overline{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$$

$$|R(f)| \leq \frac{b-a}{180}\,h^4\,|\left\|f^{(4)}\right\|_\infty$$

Quadratura de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} \omega_k\, f(\xi_k)$$

$$R(f) = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}\,f^{(2n+2)}(c)\,, \quad c \in (-1,1)$$

n	ξ_k	ω_k
1	± 0.5773502691	1.0000000000
2	± 0.7745966692	0.5555555555
	0.0000000000	0.8888888888
3	± 0.8611363115	0.3478548451
	± 0.3399810435	0.6521451548
4	± 0.9061798459	0.2369268850
	± 0.5384693101	0.4786286704
	0.0000000000	0.5688888888

Parte 1: Exercícios Teóricos

1. A Regra do Trapézio aplicada a $\int_0^2 f(x)\,dx$ fornece o valor 5 e a Regra do Ponto Médio fornece o valor 4. Que valor resulta a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson?

2. Determine h de modo que a Regra do Trapézio forneça o valor de:
$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx\ ,$$
com erro inferior a 0.5×10^{-6}.

3. Achar o número mínimo de intervalos que se pode usar para, utilizando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson, obter
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\,dx\ ,$$
com 4 casas decimais corretas.

4. A *Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson* utilizando quatro pontos consecutivos igualmente espaçados x_0, x_1, x_2 e x_3 é dada por
$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}h\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]\ ,$$
Dados $3N$ sub-intervalos igualmente espaçados, deduza a *Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson Generalizada* para aproximar $\int_{x_0}^{x_{3N}} f(x)\,dx$.

5. Determine uma Regra de Quadratura que seja exata para polinômios de grau menor ou igual a 2, da forma
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$$

6. Determine uma Regra de Quadratura que seja exata para polinômios de grau menor ou igual a 3, da forma
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(1) + \omega_2 f'(-1) + \omega_3 f'(1)\,.$$
Em seguida, utilizá-la para calcular um valor aproximado da integral:
$$\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$$

Parte 2: Exercícios Práticos e Computacionais (MATLAB ou Octave)

1. Calcular:

$$\int_{1.0}^{1.3} \sqrt{x}\, dx$$

utilizando os dados da tabela:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$\sqrt{x}$	1.000	1.0247	1.0488	1.0723	1.0954	1.1180	1.1401

   (a) Usando a Regra do Trapézio.

   (b) Usando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson.

2. Calcular:

$$\int_{0}^{0.8} \cos(x)\, dx\,,$$

utilizando os dados da tabela:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\cos(x)$	1.000	0.995	0.980	0.955	0.921	0.877	0.825	0.764	0.696

   (a) Usando a Regra do trapézio com $h = 0.2$.

   (b) Usando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson com $h = 0.4$.

3. A velocidade v de um foguete lançado do chão verticalmente (para cima, é claro) foi tabelada como se segue:

$t\ (seg)$	0	5	10	15	20
$v\ (m/s)$	0	60.6	180.1	341.6	528.4

Usando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson calcular a altura do foguete após 20 segundos.

4. Usando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson, calcular:

$$\int_{1}^{1.6} \ln(x)\, dx\,,$$

utilizando os dados da tabela:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$\ln(x)$	0.000	0.095	0.182	0.262	0.336	0.405	0.470

5. Calcular:

$$\text{(a)} \int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 + x + 1)\, dx \qquad \text{(b)} \int_{-2}^{0} (x^5 - 1)\, dx$$

Utilizando a Quadratura de Gauss-Legendre que forneça o valor exato (com o mínimo de pontos necessários) da integral.

6. Calcular:

$$\text{(a)} \int_{0}^{3} e^{-x^2} \text{sen}(x)\, dx \qquad \text{(b)} \int_{0}^{2\pi} x \cos(x)\, dx$$

Usando Quadratura de Gauss-Legendre que seja exata para polinômios de grau menor ou igual a 6.

7. Compare as respostas dos exercícios 1 a 6 da Parte 2, com as respostas fornecidas pelas funções em MATLAB discutidas em sala de aula.

8. Implemete a sua própria função no MATLAB para a Regra do Trapézio e compare a resposta com a função `trapz`.

9. Considere a curva paramétrica dada por:

$$s(t) = (\cos(t), \text{sen}\,(t), t)\,, \quad t \in [a, b]\,.$$

   (a) Plote a curva acima no MATLAB no intervalo $[0, 4\pi]$;

   (b) O comprimento de arco de uma curva é dado por

$$c = \int_{a}^{b} \|s'(t)\|_2\, dt \qquad \text{com} \qquad \|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

   Dados n pontos e o intervalo $[a, b]$. Faça uma função em MATLAB que calcule o comprimento de arco da curva $s(t)$ usando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson e que tenha como protótipo `c = comp_arco(a,b,n)`.

10. Dados uma função integrável $f(x)$ em $[a, b]$ e N o número de sub-intervalos igualmente espaçados em $[a, b]$. Faça uma função em MATLAB para a Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson (ver Exercício 4 da Parte 1) que tenha o seguinte protótipo `I = simpson38f(fun,a,b,N)`.