Cálculo Numérico – SME0104 – ICMC-USP

Lista 5: Zero de Funções

Lembrete (informação que vai estar disponível na prova)

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J^{-1}F(\mathbf{x}_k)$$

Método da Secante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\,\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Parte 1: Exercícios Teóricos

---

1. Justifique que a função:

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 - 3\,,$$

possui uma raiz no intervalo $[0, 2]$. Ela é única?

2. Quais são as condições para que o método do ponto fixo $x_k = g(x_k)$ convirja?

3. Considere as funções $f, h \in \mathcal{C}^1([a, b])$ e uma função $g(x)$ definida como:

$$g(x) = x + h(x)f(x)$$

Assumindo que α é ponto fixo de g, isto é, $\alpha = g(\alpha)$ e que $h(\alpha) \neq 0$, mostre que se $g'(\alpha) = 0$ então o processo iterativo de ponto fixo acima é de fato o Método Newton.

4. Seja a uma constante positiva dada e $g(x) = 2x - ax^2$.

   (a) Mostre que se o **Método do Ponto Fixo** converge para um limite diferente de zero, então o limite é $\alpha = 1/a$. Dessa forma, o inverso de um número pode ser encontrado utilizando-se apenas subtrações e multiplicações.

   (b) Encontre um intervalo em torno de $1/a$ para o qual o **Método do Ponto Fixo** converge, desde que x_0 esteja nesse intervalo.

5. Mostre que a raiz quadrada de um número a pode ser aproximada pela fórmula:

$$\sqrt{a} \approx x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Em que intervalo de valores a convergência do método é garantida? Utilize a fórmula acima para aproximar $\sqrt{10}$.

6. Considere as seguintes funções:

   a) $g_1(x) = 2x - 1$,

   b) $g_2(x) = x^2 - 2x + 2$,

   c) $g_3(x) = x^2 - 3x + 3$.

   Verifique que 1 é ponto fixo de todas estas funções. Qual delas você escolheria para obter a raiz 1, utilizando o processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$? O que se pode falar da ordem de convergência do processo iterativo escolhido?

7. Considere a equação $2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são: $\alpha_1 = 0.5$ e $\alpha_2 = 2$. Considere ainda os processos iterativos:

   (a) $x_{k+1} = \frac{2x_k^2+2}{5}$,

   (b) $x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}$.

   Qual dos dois processos você utlizaria para obter a raiz α_1? Por que?

8. Para cada uma das equações a seguir, determine um intervalo $[a, b]$ na qual as iterações do **Método do Ponto Fixo** serão convergentes. Estime o número de iterações necessárias para se obter aproximações com precisão de 10^{-5}.

   (a) $x = \frac{2-e^x+x^2}{3}$

   (b) $x = \frac{1}{2}[\mathrm{sen}(x) + \cos(x)]$

9. Utilize o **Método de Newton** para aproximar, com precisão de 10^{-4}, o valor de x que produz o ponto mais próximo de $(1, 0)$ no gráfico de $y = x^2$. Dica: minimize $[dist(x)]^2$, onde $dist(x)$ representa a distância de (x, x^2) ao ponto $(1, 0)$.

10. Suponha que α seja um zero de f de multiplicidade m, onde $f \in \mathcal{C}^m$ em um intervalo aberto que contém α. Mostre que o seguinte **Método do Ponto Fixo** tem $g'(\alpha) = 0$:

$$g(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

11. Suponha que α seja um zero de f de multiplicidade m, onde $f \in \mathcal{C}^m$ em um intervalo aberto que contém α. Mostre que o seguinte **Método do Ponto Fixo** tem $g'(\alpha) = \frac{m-1}{m}$:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Parte 2: Exercícios Práticos e Computacionais (MATLAB ou Octave)

1. Utilize o **Método da Bisseção** e encontre uma raiz aproximada, com erro relativo $e_k = |x_{k+1} - x_k| \, / \, |x_{k+1}|$ menor do que 10^{-1} para as seguintes funções nos respectivos intevalos:

   (a) $f(x) = 2\cos(x) - \frac{e^x}{2}$ em $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

   (b) $g(x) = 3\ln(x) - \frac{x^2}{2}$ em $I = [2, 2.3]$

2. A função $f(x) = x^2 + x - 0.25$ possui uma raiz real intervalo [-0.4,0.4]. A seqüência produzida por $x_{k+1} = -x_k^2 + 0.25$ será convergente para esta raiz? Exiba os 5 primeiros termos da sequência gerada a partir da condição inicial $x_0 = 0.2$.

3. Usando o **Método de Newton**, com erro absoluto $e_k = |x_{k+1} - x_k|$ inferior a 10^{-2} e chute inicial $x_0 = 1.5$, determine uma raiz das seguintes equações:

   (a) $5x^3 + x^2 - 12x + 4 = 0$

   (b) $\operatorname{sen}(x) - e^x = 0$

4. O valor de π pode ser obtido através da resolução das seguintes equações:

   (a) $\operatorname{sen}(x) = 0$

   (b) $\cos(x) + 1 = 0$

   Aplique o **Método de Newton** com $x_0 = 3$ e com erro relativo $e_k = |x_{k+1} - x_k| \, / \, |x_{k+1}|$ inferior a 0.5×10^{-2} e compare os resultados obtidos.

5. Usando o **Método da Secante**, com erro absoluto $e_k = |x_{k+1} - x_k|$ inferior a 10^{-2} e chute iniciais $x_0 = 1.5$ e $x_1 = 1.6$, determine uma raiz das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

   (b) $f(x) = e^{-x^2} - \cos(x) = 0$

6. Considere o **Método de Newton** como implementado abaixo:

```
function [x,k] = newton(func,dfunc,x,tol,kmax)
% dfunc:  derivada de func(x)
% x:  chute inicial x0
k = 0;
dx = func(x)/dfunc(x)
while abs(dx) > tol && k < kmax
    x = x - dx;
    dx = func(x)/dfunc(x);
    k = k+1;
end
```

   Reescreva o código acima substituindo o comando `while` pelo comando `for`. Assegure que o loop `for` termine assim que a tolerância for atingida.

7. Encontre um valor aproximado para $\sqrt{3}$ com precisão de 10^{-4} utilizando o **Método de Newton**.

8. Determine quantas iterações são necessárias, empregando-se o **Método de Newton** com $p_0 = \pi/4$, para encontrar uma raiz para a função $f(x) = \cos(x) - x$ com precisão de 10^{-15}.

9. O polinômio de 4° grau $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$ tem dois zeros reais, um em $[-1, 0]$ e outro em $[0, 1]$. Encontre uma aproximação para os dois zeros reais utilizando o **Método de Newton**. Compare o resultado obtido com a saída do comando `roots` do MATLAB.

10. Implemente o **Método de Newton** com o *processo de deflação implícita* em MATLAB e utilize para determinar todas as raízes de $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$. Compare os resultados usando o processo de deflação explícita.

11. A função $f(x) = (x - 1)^{11}\ln(x)$ possui uma raiz $\alpha = 1$ de multiplicidade 12. Calcule uma aproximação para essa raiz usando o **Método de Newton** com chute inicial $x_0 = 4$. Implemente em MATLAB uma solução para que o **Método de Newton** convirja quadraticamente para α.

12. Resolva os sistemas não-lineares abaixo usando o **Método de Newton**, com erro absoluto $e_k = \|x_{k+1} - x_k\|_2$ como critério de parada e precisão 10^{-6} :

    (a) $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases}$ com $(x_0, y_0) = (2, 1)$

    (b) $\begin{cases} x^3 + 2z = 1 \\ \operatorname{sen}(x) + 3y = 0 \\ xy + z^2 = 0 \end{cases}$ com $(x_0, y_0, z_0) = (0.6, -0.2, 0.3)$

13. Uma solução aproximada de um sistema não-linear pode ser obtida usando a seguinte implementação do **Método de Newton** no MATLAB:

```
function x = newton_sis(F,J,x,tol)
for kmax=1:1000
    v = J(x)\F(x);
    x = x - v;
    if (norm(v)<tol) return end;
end
```

    Use uma chamada da função acima no MATLAB para resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x - \cos(xy) + \sqrt{xz} & = & 0.5 \\ x^3 - 15(z+2)^2 + \operatorname{sen}(yz) & = & -1.1 \\ \exp(-xy) + 5z & = & -9.4 \end{cases}$$

14. Considere a seguinte função:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left(\left(1.5 - x(1-y)\right)^2 + \left(2.25 - x(1-y^2)\right)^2 + \left(2.625 - x(1-y^3)\right)^2\right)$$

    utilize o **Método de Newton** para encontrar um ponto de mínimo de f. Utilizando como ponto inicial $(x_0, y_0) = (3, 0.5)$, qual o ponto de convergência do **Método de Newton**? Você pode afirmar que o ponto de convergência é um mínimo? O que acontece quando $(x_0, y_0) = (8, 0.8)$? O ponto de convergência é um ponto de mínimo?

15. Utilize o processo de deflação implícita e o método de Newton para determinar todas as raízes de $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$. O mesmo para $x^5 + 1.5x^4 - 4.29x^3 - 9.035x^2 - 3.21x + 1.035 = 0$. Observe que neste último caso há tanto raízes simples quanto múltiplas. O que fazer para manter a ordem de convergência do **Método de Newton**?

16. Considere duas curvas em $\mathbb{R}^2$ parametrizadas por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos(t), \text{sen}\,(t)) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(s) = (s, s^2)\,.$$

Encontre os dois pontos em $\mathbb{R}^2$ onde uma mesma reta tangencie as curvas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ simultaneamente. Para isso, é preciso impor que as tangentes a cada curva nas posições dadas pelos parâmetros t_0 e s_0 estejam na mesma direção, isto é, $\mathbf{x}'(t_0) \times \mathbf{y}'(s_0) = 0$, e que a tangente em um dos pontos esteja alinhada com a reta $\mathbf{y} - \mathbf{x}$, ou seja, $(\mathbf{y}(s_0) - \mathbf{x}(t_0)) \times \mathbf{y}'(s_0) = 0$. Isso resulta em um sistema não-linear cuja solução analítica é de difícil obtenção. Utilize finalmente o **Método de Newton** para encontrar os valores de t_0 e s_0 e finalmente responder a questão colocada no início do exercício. Desenhe as duas curvas, a reta tangente e as soluções obtidas pelo **Método de Newton**.