Cálculo Numérico – SME0104 – ICMC-USP

Lista 6: Interpolação Polinomial

Professor: Afonso Paiva

Lembrete (informação que vai estar disponível na prova)

Fórmula de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\, \ell_k(x) \quad \text{com} \quad \ell_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Fórmula de Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + \cdots + (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

Erro na Interpolação

$$|E_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\, \|f^{(n+1)}\|_\infty \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

$$\|E_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}\, \|f^{(n+1)}\|_\infty\, (b-a)^{n+1}$$

Nós de Chebyshev

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), \qquad i = 0, \ldots, n$$

Spline Cúbica Natural

$$S_{3,i}(x) = a_i\,(x - x_i)^3 + b_i\,(x - x_i)^2 + c_i\,(x - x_i) + d_i \qquad \text{com}$$

$$a_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{6h_i}, \quad b_i = \frac{z_i}{2}, \quad c_i = -\frac{h_i\, z_{i+1}}{6} - \frac{h_i\, z_i}{3} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \quad d_i = y_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ h_0 & u_1 & h_1 & & & & \\ & h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} & \\ & & & & h_{n-2} & u_{n-1} & h_{n-1} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad u_i = 2(h_i + h_{i-1}), \quad v_i = w_i - w_{i-1}, \quad w_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

$$\|f - S_3\|_\infty \leq \frac{5\,h^4}{384}\, \|f^{(4)}\|_\infty \quad \text{com} \quad h = \max_i\{|x_i - x_{i+1}|\}$$

Parte 1: Exercícios Teóricos

1. Dados $(n+1)$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ onde os pontos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ são igualmente espaçados, isto é, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Mostre que o polinômio de interpolação na forma de Lagrange pode ser escrito da forma:

$$P_n(u) = P_n(x_0 + uh) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(u) \quad \text{com} \quad L_k(u) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (u-i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (k-i)}.$$

2. Mostre que $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_1, x_0]$.

3. Dados $(n+1)$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, quais as hipóteses para que o polinômio interpolador exista e seja único? Se os valores das derivadas $\{y_0', y_1', \cdots, y_n'\}$ estão disponíveis, qual será o grau máximo do único polinômio de Hermite P tal que $P(x_i) = y_i$ e $P'(x_i) = y_i'$?

4. Sabendo-se que a equação $x - \exp(-x) = 0$ tem uma raiz em $[0, 1]$, pode-se aproximar tal raiz utilizando polinômio de interpolação sobre 3 pontos. Forneça um limitante superior para o erro de aproximação da raiz.

5. Considerando a função $f(x) = \sqrt{x}$ tabelada:

x	1.00	1.10	1.15	1.25	1.30
$f(x)$	1.000	1.048	1.072	1.118	1.140

   (a) Determinar o valor aproximado de $\sqrt{1.12}$ usando polinômio de interpolação de Newton sobre 3 pontos.

   (b) Calcular um limitante superior para o erro.

6. Considere a função $f(x) = \cos(x)$ definida no intervalo $[0, 1]$. Suponha que f deva ser aproximada por um polinômio de grau n de tal forma que o erro cometido seja menor que 10^{-4}. Supondo uma amostragem de f com pontos igualmente espaçados, qual o menor valor de n para que tal erro seja atingido?

7. Dados $(n+1)$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, quais são as restrições que se deve impor para obter uma interpolação por spline cúbico?

8. Seja $f(x) = \exp(x)$ forneça um limitante superior para $\|f - S_3\|_\infty$, onde S_3 é uma spline cúbica que interpola $f(x)$ em 5 pontos igualmente espaçados.

9. Sejam $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ e $P_1(x)$ o polinômio de interpolação (linear) de $f(x)$ em $[a, b]$. Mostre que:

$$\|f(x) - P_1(x)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Parte 2: Exercícios Práticos e Computacionais (MATLAB ou Octave)

1. Considere a tabela:

x	1	3	4	5
$f(x)$	0	6	24	60

   (a) Determinar o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.

   (b) Calcular $f(3.5)$.

2. Construir o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, para a função $y = \text{sen}(\pi x)$, escolhendo os pontos: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$.

3. Seja a função tabelada:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	0	6	24	60

   (a) Determinar o polinômio de interpolação de Newton sobre todos os pontos.

   (b) Calcular $f(0.5)$.

4. Dada a função tabelada:

x	0.0	1.0	1.5	2.5	3.0
$f(x)$	1.0	0.5	0.4	0.286	0.25

   Calcular $f(0.5)$ usando:

   (a) o polinômio de interpolação de Newton sobre 2 pontos (interpolação linear).

   (b) o polinômio de interpolação de Newton sobre 3 pontos (interpolação quadrática).

5. Sabendo-se que a equação $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ tem uma raiz em $[0, 1]$, determinar o valor aproximado dessa raiz usando polinômio de interpolação de Newton sobre 3 pontos.

6. Considerando as funções tabeladas:

x	0.0	0.5
$f(x)$	1.0000	2.0000
$f'(x)$	2.7183	5.4366

x	0.1	0.2	0.3
$g(x)$	-0.2900	-0.5608	-0.8140
$g'(x)$	-2.8019	-2.6159	-2.4534

   Determinar o polinômio de interpolação de Hermite para cada uma das funções acima usando todos os pontos.

7. Dada a função $f(x) = \exp(x)\,\text{sen}(5x)$ cuja derivada é $f'(x) = \exp(x)(\text{sen}(5x) + 5\cos(5x))$ no intervalo $[0, 1]$.

   (a) Calcule uma aproximação para $f(0.6)$ usando a interpolação de Hermite com 4 igualmente espaçados;

   (b) Calcule uma aproximação para $f(0.6)$ usando a interpolação de Hermite com 4 nós de Chebyshev.

8. Um carro viajando em linha reta é cronometrado em alguns pontos. Os dados coletados das observações são fornecidos na tabela abaixo:

tempo (s)	3	5
posição (m)	225	380
velocidade	77	81
aceleração	$\times$	11

Usando a interpolação de Hermite forneça uma aproximação da velocidade do carro no instante de tempo $t = 4\,s$.

9. Dada a função tabelada

x	1	2	3	5
$f(x)$	2.0	3.0	7.0	4.0

Utilize uma spline linear interpolante para calcular uma aproximação de:

$$\int_1^5 f(x)\,dx$$

10. Forneça uma aproximação para $f(0.25)$ utilizando uma spline cúbica natural, interpolante da função dada pela tabela abaixo:

x	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00
$f(x)$	3.00	1.86	-0.56	-4.20	-9.05

11. Refaça o exercício anterior, substituindo a condições de contorno naturais ($S_3(x_0) = S_3(x_n) = 0$) pelas *condições de contorno fixadas*, isto é, $S_3'(x_0) = f'(x_0)$ e $S_3'(x_n) = f'(x_n)$. Use $f'(x_0) = 1$ e $f'(x_n) = 2$.

12. Implemente uma função em MATLAB que calcule o polinômio de interpolação $P_n(x)$ usando a forma de Lagrange para pontos igualmente espaçados (ver Exercício 1 da Parte 1). **Considerações:** a função deve ter o seguinte protótipo `function y = lagrange_igual(xi,yi,x)`, onde onde os parâmetros de entrada `xi` e `yi` são vetores contendo os pontos e valores a serem interpolados e `x` é um vetor contendo os pontos onde o polinômio interpolador deve ser avaliado.

13. Dados um conjunto pontos distintos $\{x_i\}$, valores de uma função avaliada nestes pontos $\{y_i\}$, e as derivadas $\{y_i'\}$ desta função nos mesmos pontos.

    (a) Implemente uma função em MATLAB que calcule o polinômio de interpolação de Hermine na forma de Newton. **Considerações:** a função deve ter o seguinte protótipo `function y = hermite(xi,yi,dyi,x)`, onde onde os parâmetros de entrada `xi` e `yi` são vetores contendo os pontos e valores a serem interpolados, `dyi` o vetor dos valores de y_i' e `x` é um vetor contendo os pontos onde o polinômio interpolador deve ser avaliado.

    (b) Reimplemente o exercício anterior, usando o polinômio de Hermite na *forma de Lagrange*:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i A_i(x) + y_i' B_i(x) \right] , \quad \text{com}$$

$$A_i(x) = \left[1 - 2(x - x_i)\ell_i'(x_i)\right] \ell_i^2(x) \quad \text{e} \quad B_i(x) = (x - x_i)\ell_i^2(x)$$

14. Implemente uma função em MATLAB que calcule splines cúbicas com condições de contorno fixadas (ver Exercício 11).

15. O polinômio de interpolação $P_n(x)$ pode ser representado na *forma baricêntrica*:

$$P_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k}\, y_k}{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k}} \quad \text{com} \quad w_k = \left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i) \right)^{-1}, \quad k = 0, \dots, n\,.$$

Implemente uma função em MATLAB que calcule $P_n(x)$ na forma baricêntrica e compare (plotando gráficos) com forma de Lagrange (Exercício 12) usando a função $f(x) = 1/(1+25x^2)$, $x \in [-1, 1]$, com 5, 10 e 15 pontos igualmente espaçados.

16. Considere quatro pontos uniformemente espaçados sobre o semicírculo, os quais podem ser calculados como:

```
t = linspace(0,pi/2,4);
x = sin(t); y = cos(t);
```

Faça um código em MATLAB que interpole os quatro pontos utilizando:

(a) Polinômio de Lagrange (Exercício 12);
(b) Polinômio de Hermite (Exercício 13);
(c) Spline cúbico natural;
(d) Hermite cúbico em cada um dos três subintervalos.

Compare graficamente (plotando gráficos) os resultados obtidos com cada um dos métodos e calcule o erro de aproximação. Qual dos métodos resulta em menor erro?