PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Análise de Fourier e Aplicações

Fundamentação Teórica

Dado uma sequência $x[n]$, com $0 \le n \le N$-1, a **Transformada de Fourier de Tempo Discreto** (**DTFT**) dessa seqüência, denominada por $X(\Omega)$, é uma função contínua e complexa da "frequência digital" Ω (medida em radianos), e é definida por:

$$\textit{Direta}: \quad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$\textit{Inversa}: \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_T X[\Omega].e^{j\Omega n} d\Omega$$

E a **Transformada Discreta de Fourier** (**DFT**) calcula amostras da **DTFT**, é definida como:

$$\textit{Direta}: \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\Omega nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{\ nk} \quad \textit{para} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\textit{Inversa}: \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\Omega nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{\ -nk} \quad \textit{para} \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

onde: $$W_N = e^{-j\Omega} = e^{-j2\pi/N} = \cos(\Omega) - j\text{sen}(\Omega)$$

Em 1965, os matemáticos americanos Cooley e Tukey propuseram um algoritmo mais eficiente para calcular a DFT, denominado ***Fast Fourier Transform*** (FFT).

O Matlab e o pacote Python/Numpy possuem funções ***`fft()`*** e **`ifft()`** que calculam a DFT Direta e a Inversa de um sinal discreto, respectivamente, usando a FFT.

Matlab:

```
X = fft(x)      % Calcula a DFT direta da seq. x[n]
x = ifft(X)     % Calcula a DFT inversa
```

Python:

```
from numpy.fft import fft, ifft
X = fft(x)      # Calcula a DFT direta da seq. x[n]
x = ifft(X)     # Calcula a DFT inversa
```

O **espectro de potência** de um dado sinal demonstra a distribuição de potência em cada frequência, e o **espectro de amplitude**, a distribuição das amplitudes em cada frequência:

Potência:

$$P_k = \frac{1}{N^2} |X[k]|^2 = \frac{1}{N^2} \left[(\text{Re}(X[k]))^2 + (\text{Im}(X[k]))^2 \right] \quad \textit{para} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Amplitude:

$$A_k = \frac{1}{N} |X[k]| = \frac{1}{N} \sqrt{(\text{Re}(X[k]))^2 + (\text{Im}(X[k]))^2} \quad \textit{para} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Fase:

$$\theta_k = arctg\left(\frac{\text{Im}(X[k])}{\text{Re}(X[k])} \right) \quad \textit{para} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Procedimentos

1. A título de exemplo, vamos obter o espectro de frequência do sinal $x[n] = \{\ \underline{1}, 2, 3, 4\ \}$ usando a DFT. O comprimento da sequência é de quatro amostras, $N = 4$.

A raiz da DFT: $W_4 = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2}$ logo: $X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n].W_4^{nk} = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{(-j\pi/2).n.k}$

Calculando para $0 \le k \le N - 1$:

$$X[0] = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{-j\pi 0n/2} = x[0].e^{-j0} + x[1].e^{-j0} + x[2].e^{-j0} + x[3].e^{-j0}$$
$$= x[0] + x[1] + x[2] + x[3] = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$X[1] = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{-j\pi 1n/2} = x[0].e^{-j0} + x[1].e^{-j\pi/2} + x[2].e^{-j\pi} + x[3].e^{-j3\pi/2}$$
$$= x[0] - jx[1] - x[2] + jx[3] = 1 - j2 - 3 + j4 = -2 + j2$$
$$X[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{-j\pi 2n/2} = x[0].e^{-j0} + x[1].e^{-j\pi} + x[2].e^{-j2\pi} + x[3].e^{-j3\pi}$$
$$= x[0] - x[1] + x[2] - x[3] = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$$
$$X[3] = \sum_{n=0}^{3} x[n].e^{-j\pi 3n/2} = x[0].e^{-j0} + x[1].e^{-j3\pi/2} + x[2].e^{-j3\pi} + x[3].e^{-j9\pi/2}$$
$$= x[0] + jx[1] - x[2] - jx[3] = 1 + j2 - 3 - j4 = -2 - j2$$

Matlab:
```
>> X = fft([1 2 3 4])
>> X = 10.00   -2.00+2.00i   -2.00   -2.00-2.00i
```
Python:
```
>>> X = fft([1,2,3,4])
>>> X = array([ 10.+0.j, -2.+2.j, -2.+0.j, -2.-2.j])
```

Da mesma forma pode-se obter a sequência original a partir da DFT Inversa:

Matlab:
```
>> x = ifft([ 10  -2+2j  -2  -2-2j ]);
>> x = 1    2    3    4
```
Python:
```
>>> x = ifft([10,-2+2j,-2,-2-2j])
>>> x = array([ 1.+0.j,  2.+0.j,  3.+0.j,  4.+0.j])
```

Os $N/2$ coeficientes da DFT, $X[k]$, representam as componentes frequenciais do sinal entre 0 Hz e $f_s/2$ Hz (frequência de Nyquist), ou seja, o termo de ordem k representa a frequência:

$$f = k.f_s / N \quad \text{(Hz)} \qquad \text{ou} \qquad \omega = k.\omega_s / N \quad \text{(rad/s)}$$

Resolução Frequencial:

$$\Delta f = f_s / N \quad \text{(Hz)} \qquad \text{ou} \qquad \Delta\omega = \omega_s / N \quad \text{(rad/s)}$$

2. Sabendo que a taxa de amostragem usada na geração da sequência $x[n]$ do exemplo anterior foi de 10 Hz, determine:

a. O período de amostragem, o índice temporal e o instante de tempo da amostra digital $x[3]$.
b. A resolução frequencial e a frequência mapeada dos coeficientes DFT $X[1]$ e $X[3]$.
c. A amplitude, a fase, e a potência do espectro de frequências, e trace seus gráficos.

3. Repita os dois procedimentos anteriores para o sinal $x[n] = e^{0,5\pi n}(u[n] - u[n-5])$.

4. Considere um sinal digital amostrado a uma taxa de 10 kHz e que 1024 amostras são usadas, determine:

a. A resolução de frequência do espectro.
b. A frequência mais alta representada no espectro.

5. Desenvolva um procedimento prático em bancada real, usando o material abaixo relacionado, para gerar sinais diversos e exibir graficamente a potência espectral desses sinais em tempo real através de uma aplicação com interface gráfica adequada (Matlab-GUIDE ou Python-Kivy).

- 2 (dois) geradores de sinais,
- 1 (um) osciloscópio,
- 1 (uma) placa de aquisição de dados,
- 1 (um) circuito somador de sinais (amplificador operacional),
- 1 (um) PC com software matemático (Matlab/Python)

Atenção: Tome cuidado para não **curto-circuitar** a entrada da placa de aquisição e do gerador de sinais durante a montagem do circuito, pois danos sérios ao equipamento e a você podem advir dessa atividade.

Questões:

1. Usando as funções do Matlab/Python-scikits.audiolab para manipulação de sinais de áudio no formato *wave* (*wavread, wavrecord, wavwrite, wavplay*), desenvolva um *script* para gravar 1 (um) segundo de sinal oriundo da entrada de áudio do PC, com diferentes taxas de amostragem, traçando respectivos espectros de potência, com resolução mínima de 100 Hz para o cálculo da DFT (*fft*).

2. É possível calcular a densidade espectral de potência de um determinado sinal em tempo real? Justifique a sua resposta, apresentando técnicas alternativas em caso negativo.

3. Qual é a diferença entre a DFT e a FFT, em termos teóricos e práticos? Qual a influência da resolução de frequência na apresentação do espectro obtida a partir da DFT (ou FFT)?

4. Demonstre teoricamente os resultados obtidos no item 5 do procedimento prático.