Prof. Cláudio A. Fleury

2012-2

Processamento Digital de Sinais

Aula 3 – Sinais e Operações

Cap.1 Lathi

Slides: 60

Conteúdo

- Sinais e Sistemas
  - Tamanho do Sinal
- Representações de Sinais Discretos
  - Gráfica
  - Conjunto de Amostras
  - Analítica
  - Decomposição de Sinais em Impulsos
- Sinais Elementares
- Operações com Sinais
  - Variável Dependente
  - Variável Independente
- Aplicações
- Exercícios

SINAIS E SISTEMAS

Fundamentação Teórica

- **Sinal**
  - É a representação da informação (conjunto de dados)
  - Exemplos
    - Sinal de telefone, sinal de TV, registro de vendas de um comércio, índice de fechamento da bolsa de valores (variável independente: *tempo*), índice pluviométrico diário (variáveis independentes: *tempo* e *espaço*)
    - Movimentação de cargas elétricas no interior de células biológicas = densidade de íons (var. independente: *espaço* ou *volume*)
    - Mudanças de temperatura na meteorologia, variações de preços no mercado de ações, exame de eletroencefalograma (EEG)

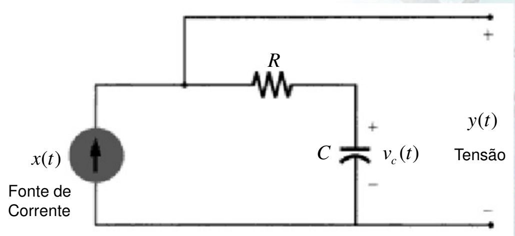
Fundamentação Teórica

- **Sistema**
  - É um conjunto de elementos que processa (modifica) um ou mais sinais, produzindo novos sinais ou extraindo (imprimindo) informações deles (neles)
  - Exemplos
    - De Comunicação: sinal de entrada (voz ou dados), sinal de saída (estimativa da informação original)
  - Estudos
    - Modelagem Matemática para Análise e Síntese (projeto)

Sistemas

- Sistema Elétrico Simples
  - Descrição (modelo matemático determinístico)

$$y(t) = R.x(t) + v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0$$



Sistemas

- Sistema de Controle
  - Ex.: malha fechada (retroalimentado, *feedback*)

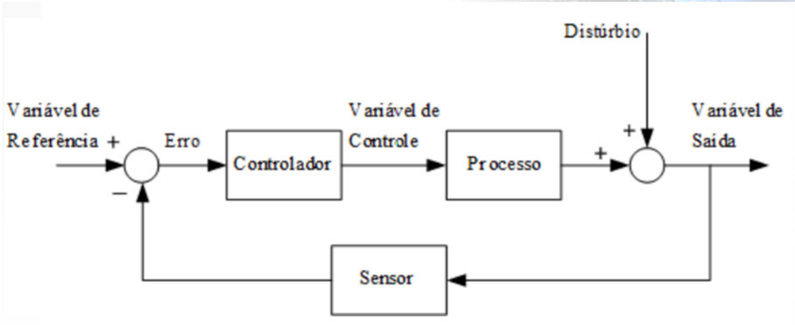


Diagrama de Blocos

Sistemas

- Sistema de Controle Digital

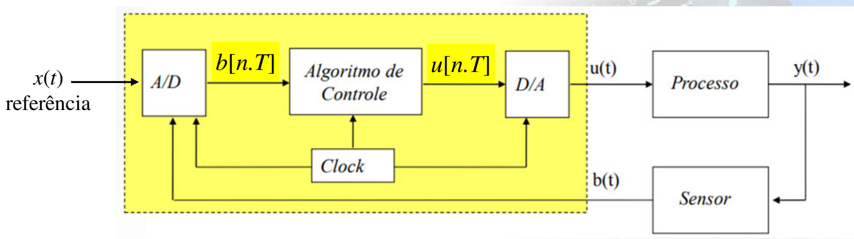


Diagrama de Blocos

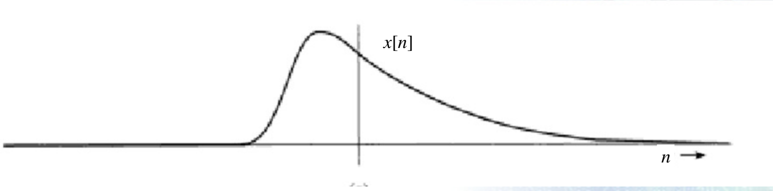
Tamanho do Sinal

- **Energia** do sinal $x[n]$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Convencionalmente, a Energia num sistema elétrico depende do sinal (tensão ou corrente) e da carga, mas pode ser calculada em função apenas do sinal, como sendo a energia dissipada numa carga normalizada de 1,0 Ω

  - Sinal de Energia: é o sinal cuja energia $\boldsymbol{E_x}$ é finita e não nula (amplitude $\rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$)



Tamanho do Sinal

- **Potência** do sinal $x[n]$ (média temporal da Energia)

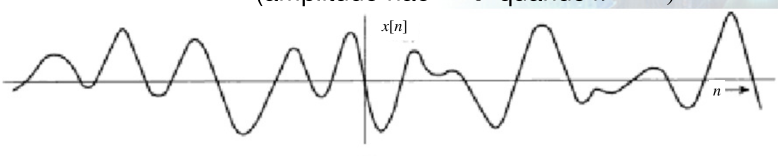
$$P_x = \lim_{N\rightarrow\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

  - Para $x[n]$ periódico com N amostras/período:

Para sinais periódicos a Potência pode ser calculada em apenas um período

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

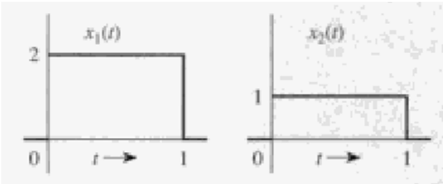
  - Sinal de Potência: sinal cuja potência $\boldsymbol{P_x}$ é finita e não nula (amplitude não $\rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$)



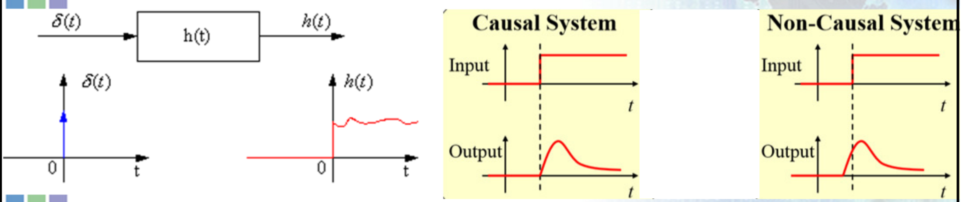
Raiz Quadrada Média (Root Mean Square): RMS = $(P_x)^{1/2}$

Sinal/Sistema Causal

Sinal Causal: $x(t) = 0$ para $t < 0$



Sistema Causal: resposta ao impulso, $h(t) = 0$ para $t < 0$



Sinais Discretos Elementares

- Impulso Unitário
- Degrau Unitário
- Rampa Unitária
- Seno e Cosseno
- Exponencial
  - Real
  - Complexa

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

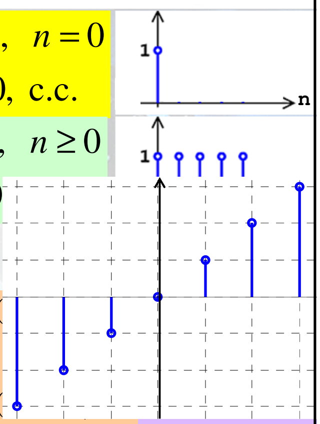
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$r[n] = n$$

$x[n] = \text{sen}($

ou

$x[n] = \cos($



$\sigma < 0$ taxa de decaimento

$$x[n] = e^{(\sigma + j\Omega).n}$$

$$= e^{\sigma.n}[\cos(\Omega n) + j.\text{sen}(\Omega n)]$$

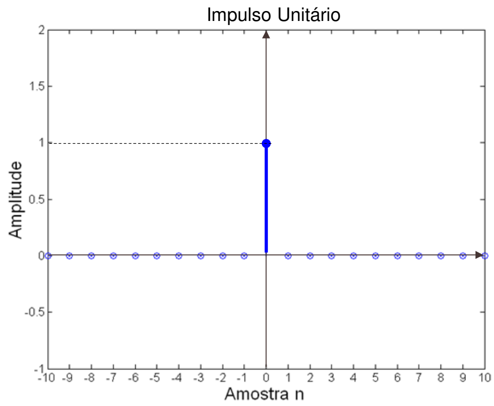
Sinais Discretos Elementares

- **Impulso Unitário** (Delta de Kronecker)

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Conjunto de Amostras:

$\delta[n] = \{ \underline{\mathbf{1}} \}$



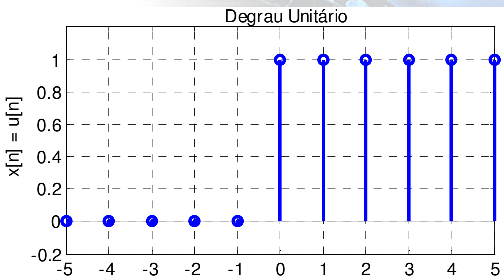
Sinais Discretos Elementares

- **Degrau unitário**

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Conjunto de Amostras:

$u[n] = \{ \underline{\mathbf{1}}, 1, 1, 1, 1, \ldots \}$



- Relações

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \qquad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

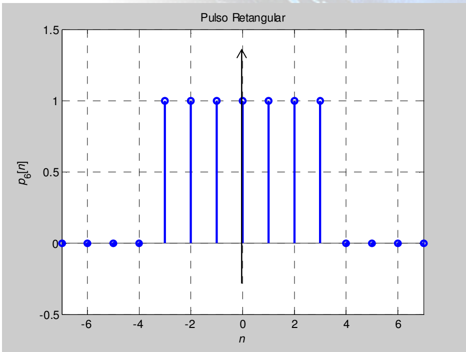
Sinais Discretos Elementares

- **Pulso Retangular**

(trem de impulsos unitários, janela, porta, *window*, *gate*, *boxcar* normalizada, *brickwall*...)

de largura N e centrado na origem:

$$p_N[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N/2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$



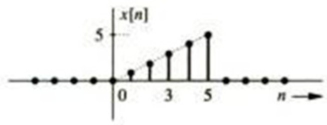
Conjunto de Amostras:

$p_7[n] = \{ 1, 1, 1, \underline{\mathbf{1}}, 1, 1, 1 \}$

$$p_N[n] = u[n+3] - u[n-4]$$

Exercícios

1. Calcule o tamanho dos seguintes sinais e classifique-os em termos de causalidade.

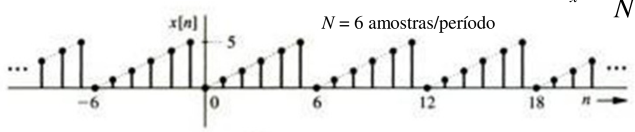


(a)

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

$N = 6$ amostras/período



(b)

Solução:

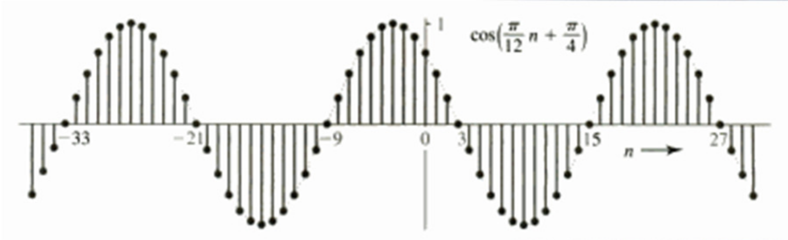
$$a) \quad E_x = \sum_{n=0}^{5} n^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

CAUSAL

$$b) \quad P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{5} n^2 = \frac{55}{6}$$

NÃO CAUSAL

Senóide Discreta



$$\cos(\Omega.n+\varphi)=\cos\left(\frac{\pi}{12}n+\frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \Omega=\frac{2\pi}{N}$$

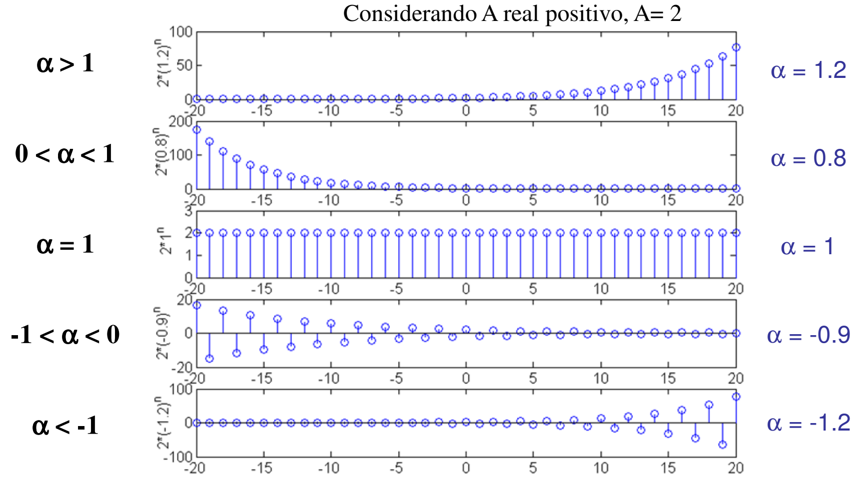
$$\text{Como}: \quad \Omega=\frac{\pi}{12}\ \text{rad/amostra}$$

$$\text{Logo}: \quad N=24\ \text{amostras/ciclo}$$

Sequência Exponencial Real: $x[n]=A.\alpha^n$

- Se A e α forem números reais então $x[n]$ será um sinal real

Considerando A real positivo, A= 2



Sequência Exponencial Complexa: $\boxed{x[n] = A.\alpha^n}$

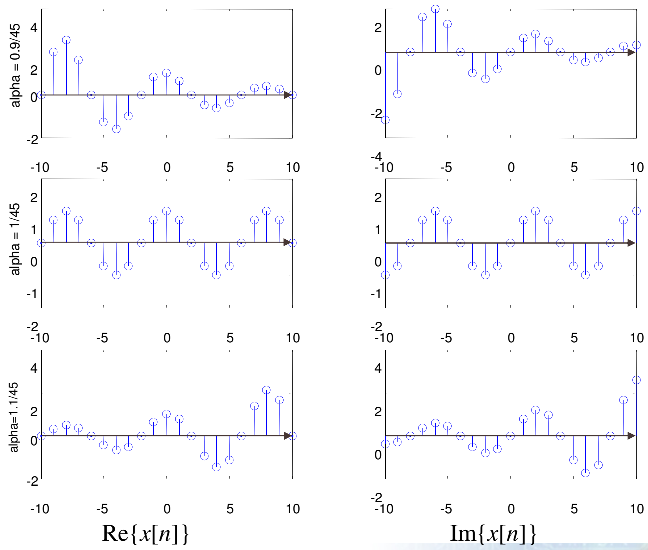
complexo

$A = 1$

$|\alpha| < 1$

$|\alpha| = 1$

$|\alpha| > 1$



Exponencial Complexa - Propriedades

Sinal Contínuo: $\boxed{e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)}$

Propriedade: Periódico – sinal repete ampl. de 2π em 2π

Obs.: a) Aumentando-se ω_0 $\rightarrow$ aumenta-se a taxa de oscilação
b) Para $\forall\omega_0$ $\rightarrow$ o sinal **sempre será periódico**
c) Em um intervalo de tempo ***T*** podem existir infinitas senóides

Sinal Discreto: $\boxed{e^{j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) + j\,\mathrm{sen}(\Omega_0 n)}$

- Aumentando-se Ω_0 de 2π (ou de múltiplos inteiros de 2π):

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi).n} = e^{j(\Omega_0 n)}.e^{j.2\pi.n} = e^{j(\Omega_0 n)}$$

Exponencial Complexa - Propriedades

Propriedade: Para um sinal discreto ser periódico com ***N*** amostras por período, é preciso que ***x*[*n*] = *x*[*n*+*N*], ∀*n***

Assim: $e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 (n+N)}$

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n} . e^{j\Omega_0 N}$$

Para que a igualdade exista, esse termo deve ser unitário...

Logo: $1 = e^{j\Omega_0 N} = \cos(\Omega_0 N) + j.\text{sen}(\Omega_0 N)$

Mas : $\cos(\theta) = 1$ para $\theta = 2\pi$ e múltiplos inteiros

Assim: $\Omega_0 N = 2\pi m,$ com $m \in Z$

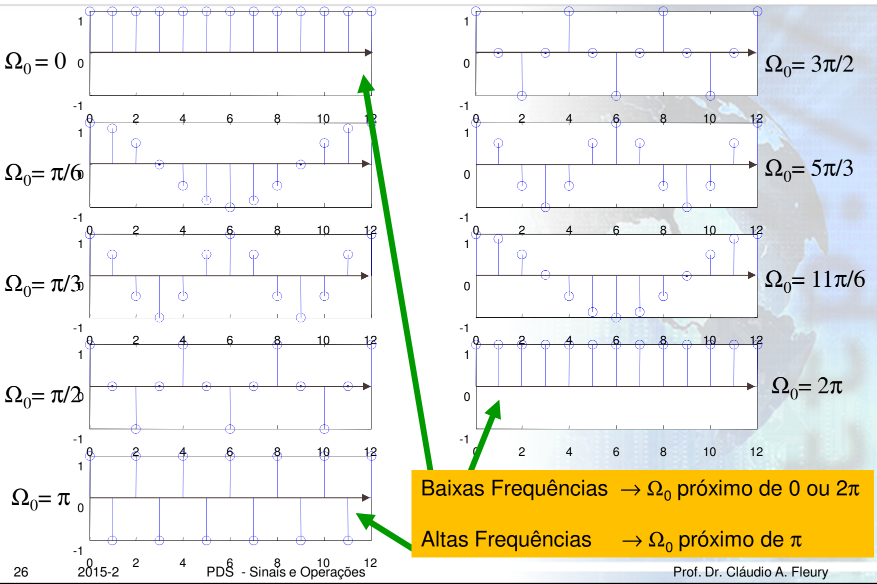
Ou: $\dfrac{\Omega_0}{2\pi} = \dfrac{m}{N}$

Exponencial Complexa Discreta não é periódica para qualquer Ω_0

Período Fundamental: $N = m\left(\dfrac{2\pi}{\Omega_0}\right)$

Freqüência Fundamental: $\dfrac{\Omega_0}{m}$

Sequência Exponencial Complexa: $x[n] = e^{j\Omega n}$



Senóides de Frequência Complexa

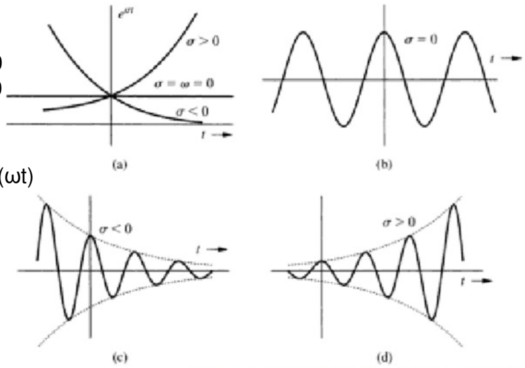
- Exponencial Complexa Contínua: $e^{(\sigma+j\omega)t}$

a) Constante: $\sigma = \omega = 0$
Exp. crescente: $\sigma > 0$ e $\omega = 0$
Exp. decrescente: $\sigma < 0$ e $\omega = 0$

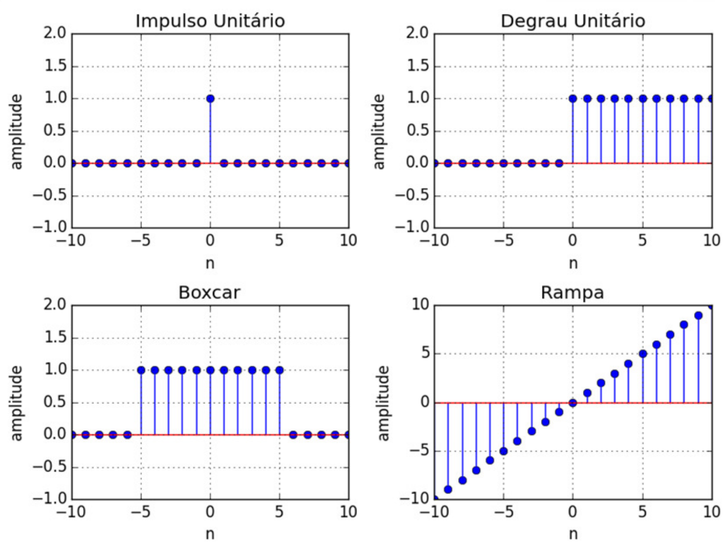
b) Cossenóide: $\sigma = 0$
$\mathrm{Re}\{e^{j\omega t}\} = \cos(\omega t)$

c) Cossenóide exponencialmente decrescente: $\sigma < 0$ e $\omega \neq 0$

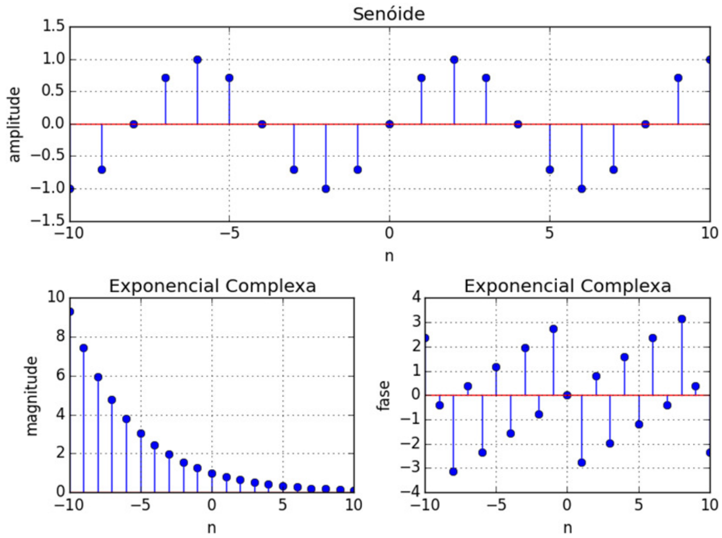
d) Cossenóide exponencialmente crescente: $\sigma > 0$ e $\omega \neq 0$



Sinais Discretos Elementares



Sinais Discretos Elementares



Sinais Discretos Elementares Script

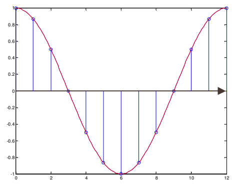
```
# -*- coding: utf-8 -*-
""" Sinais Discretos Elementares: impulso, degrau, boxcar, seno, exponencial
@author: kaw, 14/04/16. """

from numpy import arange, zeros, sin, exp, pi, abs, angle, logical_and
from matplotlib.pylab import stem, xlabel, ylabel, title, ylim, grid, figure, \
                              subplot, tight_layout

n = arange(-10,11)                                          # abscissas - base temporal

delta = zeros(21); delta[n==0] = 1                          # ou: delta[10] = 1
subplot(2,2,1); stem(n,delta); xlabel('n'); ylabel('amplitude')
title(u'Impulso Unitário'); ylim(-1,2); grid(True)          # ou: grid('on')

degrau = zeros(21); degrau[n>=0] = 1                        # ou: degrau[10:] = 1
subplot(2,2,2); stem(n,degrau); xlabel('n'); ylabel('amplitude')
title(u'Degrau Unitário'); ylim(-1,2); grid(True)

boxcar = zeros(21); boxcar[logical_and(n>=-5,n<=5)] = 1     # ou: boxcar[n>=-5] = 1; boxcar[n>5] = 0
subplot(2,2,3); stem(n,boxcar); xlabel('n'); ylabel('amplitude')
title(u'Boxcar'); ylim(-1,2); grid(True)

rampa = n
subplot(2,2,4); stem(n,rampa); xlabel('n'); ylabel('amplitude')
title(u'Rampa'); grid(True); tight_layout()

seno = sin(n*pi/4.)
figure(); subplot(2,1,1); stem(n,seno); xlabel('n'); ylabel('amplitude')
title(u'Senóide'); ylim(-1.5,1.5); grid(True)

comp = ((-0.8)**n)*(exp(1j*n*pi/8.))                        # exponencial complexa
subplot(2,2,3); stem(n,abs(comp)); xlabel('n'); ylabel('amplitude')
title(u'Exponencial Complexa'); grid(True); subplot(2,2,4); stem(n,angle(comp)); xlabel('n')
ylabel('fase'); title(u'Exponencial Complexa'); grid(True); tight_layout()
```

Exercícios

As seguintes sequências são periódicas?

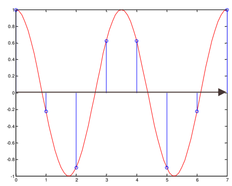
1) $x[n] = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}n\right)$

$\Omega_0 = \dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{\Omega_0}{2\pi} = \dfrac{\pi/6}{2\pi} = \dfrac{\pi}{6}.\dfrac{1}{2\pi} = \dfrac{1}{12}$ periódica



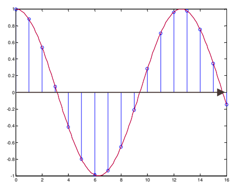
2) $x[n] = \cos\left(\dfrac{4\pi}{7}n\right)$

$\Omega_0 = \dfrac{4\pi}{7}$ e $\dfrac{\Omega_0}{2\pi} = \dfrac{4\pi/7}{2\pi} = \dfrac{4\pi}{7}.\dfrac{1}{2\pi} = \dfrac{2}{7}$ periódica



3) $x[n] = \cos\left(\dfrac{n}{2}\right)$

$\Omega_0 = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{\Omega_0}{2\pi} = \dfrac{1/2}{2\pi} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2\pi} = \dfrac{1}{4\pi}$ não periódica



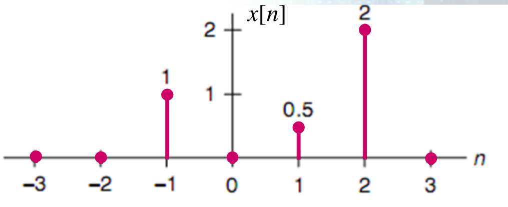
REPRESENTAÇÕES DE SINAIS DISCRETOS

Representações de Sinais Discretos

- **Decomposição em Impulsos Unitários**

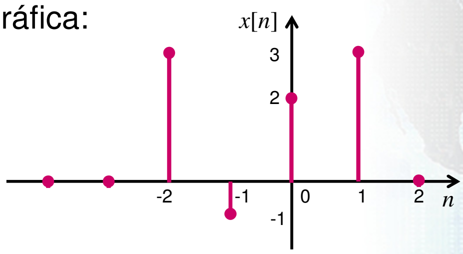
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].\delta[n-k]$$

- Conjunto de Amostras: $x[n] = \{1, \underline{\mathbf{0}}, 1/2, 2\}$
- Algébrico: $x[n] = \delta[n+1] + \delta[n-1]/2 + 2.\delta[n-2]$
- Gráfico:



Representações de Sinais Discretos

- Exemplo:
  a) Conjunto de amostras: $x[n] = \{3, -1, \underset{\uparrow}{\mathbf{2}}, 3\}$
  b) Gráfica:



  c) Algébrica:
  $x[n] = 3.\delta[n+2] - \delta[n+1] + 2.\delta[n] + 3.\delta[n-1]$

OPERAÇÕES COM SINAIS

Operações com Sinais

- Reversão Temporal: $y[n] = x[-n]$
- Reversão de Polaridade: $y[n] = -x[n]$
- Deslocamento: $y[n] = x[n \pm M]$
- Soma: $z[n] = x[n] + y[n]$
- Produto: $z[n] = x[n]\ .\ y[n]$
- Mudança de Esc. Temporal[1]: $y[n] = x[\alpha.n]$

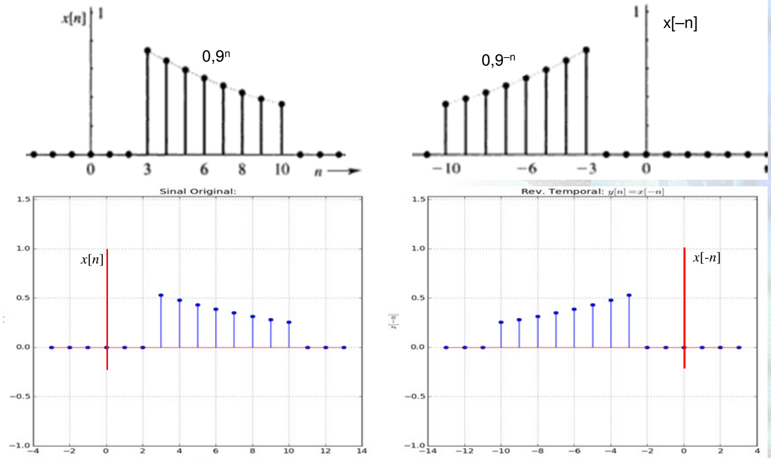
(Compresssão: $\alpha > 1$; Expansão: $0 < \alpha < 1$)

[1] ou Escalonamento Temporal

Operações com Sinais

- **Reversão Temporal**
  - Reflexão em relação ao eixo vertical

$$y[n] = x[-n]$$



Reversão Temporal

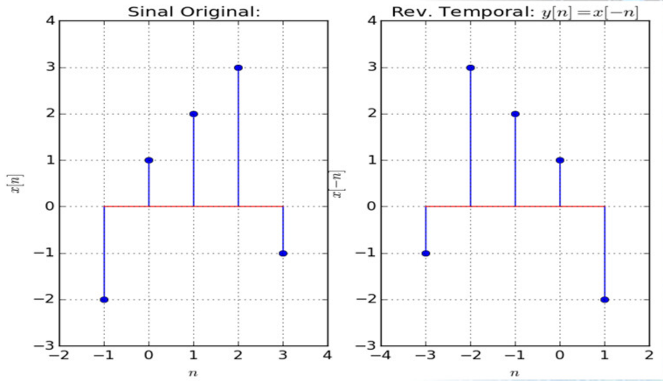
Script

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
""" Simetria Par/Ímpar de Sinais Discretos
    @author: kaw, 16/05/17                    """

from numpy import array, arange, zeros
from pylab import stem, subplot, title, xlabel, ylabel, xlim, ylim, grid, figure

def rebat(x,orig,tipo='vert'):
    ''' Rebatimento do sinal 'x' em relação ao eixo
        'vert'ical, 'horiz'ontal ou 'ambos' (tipo).'''
    if tipo == 'vert':
        return x[::-1], len(x)-orig-1
    elif tipo == 'horiz':
        return -1*x, orig
    else:
        return -1*x[::-1], len(x)-orig-1

def plota(x,y,tit,rotx,roty,grade):
    stem(x,y); title(tit); xlabel(rotx); ylabel(roty); grid(grade)
    ylim(min(y)-1,max(y)+1); xlim(x[0]-1,x[-1]+1)

origem = 3; n = arange(-3,14); x = zeros(len(n)); x[6:14] = 0.9**arange(3,11)

xr, origr = rebat(x,origem); nr = arange(-origr,len(xr)-origr)
subplot(121); plota(n,x,'Sinal Original:','$n$','$x[n]$','on')
subplot(122); plota(nr,xr,'Rev. Temporal: $y[n] = x[-n]$','$n$','$x[-n]$','on')
```

Operações com Sinais

- **Reversão Temporal**
  - Reflexão em relação ao eixo vertical

$y[n] = x[-n]$

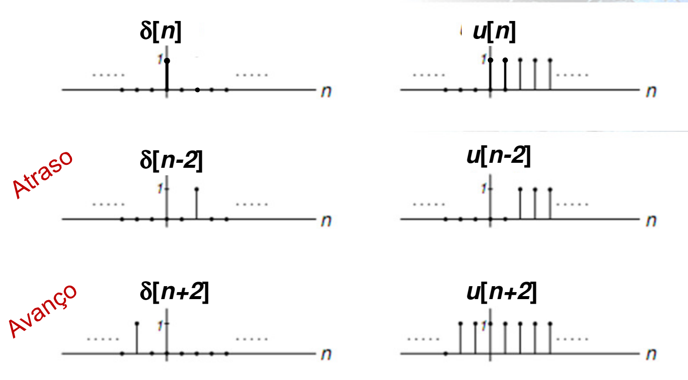



```
x = array([-2,1,2,3,-1]); origem = 1; n = arange(-origem,len(x)-origem)
```


Operações com Sinais

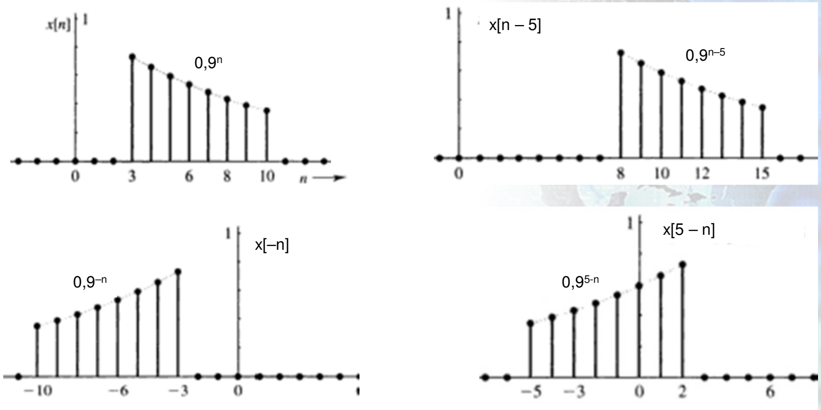
- **Deslocamento Temporal**
  - Movimenta o sinal para esquerda ou para direita em relação ao eixo vertical

$y[n] = x[n \pm N]$



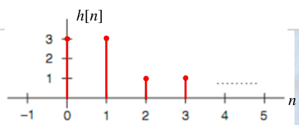
Operações com Sinais

- Deslocamento Temporal



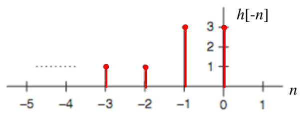
Operações com Sinais

- Exemplo



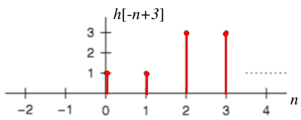
Sinal: $h[n] = \{\ \underline{3}, 3, 1, 1\ \}$

a) Reversão Temporal: $h[-n]$:



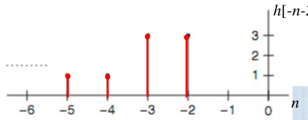
Rebata o sinal $h[n]$ em relação ao eixo vertical

b) Reversão e Deslocamento: $h[-n+3]$:



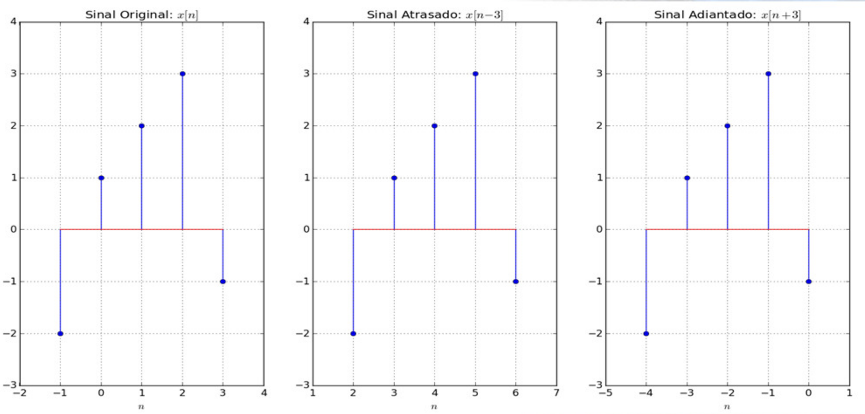
Desloca $h[-n]$ três amostras para a direita

c) Reversão e Desloc.: $h[-n-2]$:



Desloca $h[-n]$ duas amostras p/ esquerda

Deslocamento Temporal



Deslocamento Temporal

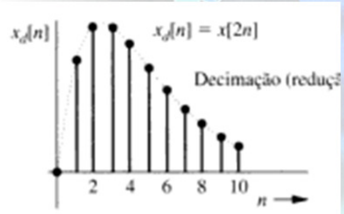
Script

```
# -*- coding: utf-8 -*-
""" Deslocamento Temporal de Sinais Discretos
    @author: Prof. Kaw, 16/05/17                   """

from numpy import array, arange
from pylab import stem, subplot, title, xlabel, ylabel, xlim, ylim, grid, figure

def plota(x,y,tit,rotx='x',roty='y',grade=True):
    stem(x,y); title(tit); xlabel(rotx); ylabel(roty); grid(grade)
    ylim(min(y)-1,max(y)+1); xlim(x[0]-1,x[-1]+1)

x = array([-2,1,2,3,-1]); origem = 1; n = arange(-origem,len(x)-origem)

subplot(131); plota(n,x,'Sinal Original: $x[n]$','$n$','','on')
subplot(132); plota(n+3,x,'Sinal Atrasado: $x[n-3]$','$n$','','on')
subplot(133); plota(n-3,x,'Sinal Adiantado: $x[n+3]$','$n$','','on')
```

Operações com Sinais

- **Decimação*** (compressão) pelo fator inteiro $M > 1$
  - Seleção de uma amostra a cada M amostras

$$x_d[n] = x[M.n]$$

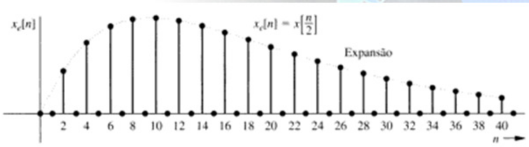


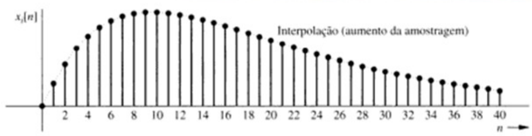
* *Downsampling* = diminuir (dizimar) quantidade de amostras

Operações com Sinais

- **Expansão**[1] e **Interpolação**[2] pelo fator inteiro $M > 1$
  - Acréscimo de $M - 1$ amostras a cada amostra original

$$x_e[n] = x[n/M]$$





[1] *Upsampling* = incluir novas amostras com amplitudes nulas
[2] *Interpolation* = ajusta amplitude das novas amostras de acordo com o comportamento local do sinal

Operações com Sinais

- **Operações Combinadas**: $y[n] = x[a.n \pm b]$
- A **ordem** de realização das operações **muda** o resultado!
  - **Modo 1**:
    Faça o deslocamento de $x[n]$ por b, obtendo-se $x[n \pm b]$, e depois faça o escalonamento temporal, substituindo n por $a.n$, obtendo-se $x[a.n \pm b]$
  - **Modo 2**:
    Faça o escalonamento temporal primeiro, obtendo-se o sinal $x[a.n]$ e depois faça o deslocamento temporal por b/a, substituindo n por $n \pm b/a$, obtendo-se $x[a.(n \pm b/a)] = x[a.n \pm b]$

Operações com Sinais

- Exemplo: $y[n] = x[2n\text{-}6]$
  - **Modo 1**: atrase $x[n]$ por 6 unidades de tempo para gerar $x[n\text{-}6]$ e em seguida faça a compressão por 2, substituindo $n = 2n$, gerando $x[2n\text{-}6]$
  - **Modo 2**: comprima $x[n]$ por 2 para gerar $x[2n]$ e em seguida atrase o sinal $x[2n]$ por 3, substituindo $n = n - 3$, gerando $x[2(n\text{-}3)] = x[2n\text{-}6]$

Operações com Sinais

- **Exercício:** Indique os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ para transformar o sinal $x[n]$ em $x[a.n + b]$ com as operações indicadas:
  a) Reversão temporal: a = ? b = ?
  b) Atraso de seis unidades de tempo: a = ? b = ?
  c) Avanço de três unidades de tempo: a = ? b = ?
  d) Operações (a) e (b): a = ? b = ?
  e) Operações (a) e (c): a = ? b = ?
  f) Compressão de fator 3: a = ? b = ?
  g) Operações (b) e (f): a = ? b = ?
- Gabarito:
  - a) -1, 0; b) 1, -6; c) 1, +3; d) -1, +6; e) -1, -3; f) 3, 0; g) 3, -6

Classificações de Sinais

- **Simetria**
  - **Par**: ocorre quando $x[n] = x[-n]$ → Rebatimento em relação ao eixo vertical
  - **Ímpar**: ocorre quando $x[n] = -x[-n]$ → Rebatimento em relação aos eixos vertical e horizontal
- **Decomposição** em componentes par e ímpar

$$x_p[n] = (\,x[n] + x[-n]\,)\,/\,2$$

$$x_i[n] = (\,x[n] - x[-n]\,)\,/\,2$$

  - Propriedade: $x[n] = x_p[n] + x_i[n]$

Classificações de Sinais

- **Simetria**
  - Exemplo:
    Calcule as componentes simétricas do sinal $x[n] = \{\ 3, \underline{\mathbf{5}}, -2\ \}$

$$x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} = \frac{\{3, \underline{5}, \ -2\} + \{-2, \underline{5}, 3\}}{2} = \frac{\{1, \ \underline{10}, \ 1\}}{2} = \{\frac{1}{2}, \underline{5}, \frac{1}{2}\}$$

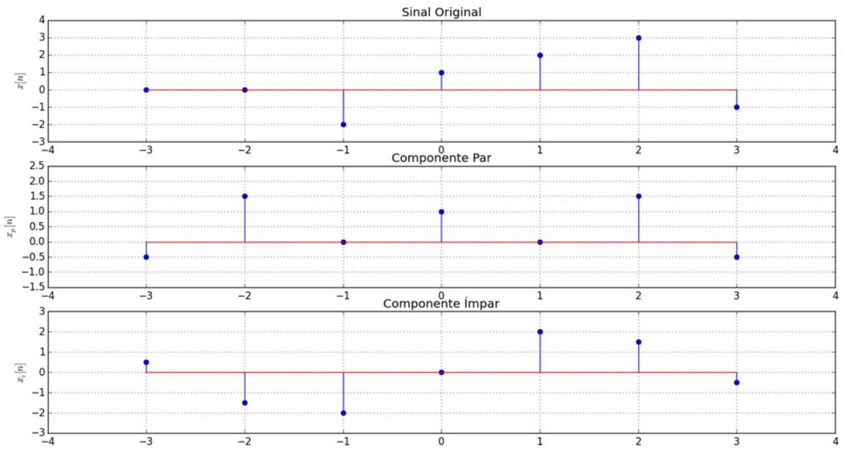
$$x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} = \frac{\{3, \underline{5}, \ -2\} - \{-2, \underline{5}, 3\}}{2} = \frac{\{5, \ \underline{0}, -5\}}{2} = \{\frac{5}{2}, \underline{0}, \frac{-5}{2}\}$$

Comprovação

$$x_p[n] + x_i[n] = \left\{\frac{1}{2}, \underline{5}, \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{5}{2}, \underline{0}, \frac{-5}{2}\right\} = \{3, \underline{5}, -2\} = x[n]$$

Classificações de Sinais

- Simetria
  - Exemplo: componentes simétricas do sinal $x[n] = \{-2, \underline{\mathbf{1}}, 2, 3, -1\ \}$



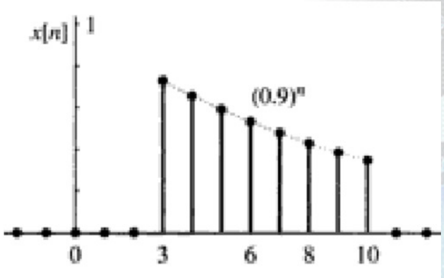
Simetria

Script

```python
def par_impar(x,orig):
    ''' Calcula as componentes par e ímpar do sinal 'x' com origem em 'orig' .
        Retorna:
           'xp' - vetor com as amplitudes da componente par do sinal 'x'
           'origrv' - índice do vetor p/ amostra da origem da componente par
           'xi' - vetor com as amplitudes da componente ímpar do sinal 'x'
           'origrvh' - índice do vetor p/ amostra da origem da componente ímpar '''
    xrv,origrv = rebat(x,orig)          # 'x' rebatido em relação ao eixo vert
    # Alinhamento das origens dos sinais 'x' e 'xrv' para fazer a soma vetorial
    xalinh = array([0]*abs(orig-origrv) + list(x))
    xrvalinh = array(list(xrv) + [0]*abs(orig-origrv))
    xp = (xalinh + xrvalinh)/2.
    xrvh,origrvh = rebat(x,orig,'ambos')# 'x' rebatido em relação a ambos eixos
    # Alinhamento das origens dos sinais 'x' e 'xrvh' para fazer a soma vetorial
    xrvhalinh = array(list(xrvh) + [0]*abs(orig-origrvh))
    xi = (xalinh + xrvhalinh)/2.
    return xp,origrv,xi,origrvh

def rebat(x,orig,eixos=1):
    if eixos > 1:
        return -x[::-1], len(x)-orig
    return  x[::-1], len(x)-orig

x = array([-2,1,2,3,-1]); origem = 1
p,op,i,oi = par_impar(x,origem)  # componentes par e ímpar: 'p'  e 'i',
n = arange(-op,len(p)-op)        #   e respectivas origens: 'op' e 'oi'
figure()
subplot(3,1,1); plota(n,p+i,'Sinal Original','','$x[n]$','on')
subplot(3,1,2); plota(n,p,'Componente Par','','$x_p[n]$','on')
subplot(3,1,3); plota(n,i,u'Componente Ímpar','$n$','$x_i[n]$','on')
```


Exercícios

1. Dado $x[n]$, represente $x[n+3]$, $x[-n]$ e $x[-3-n]$ nas diversas formas estudadas (analítica, gráfica, conjunto de amostras e decomposição em impulsos unitários).

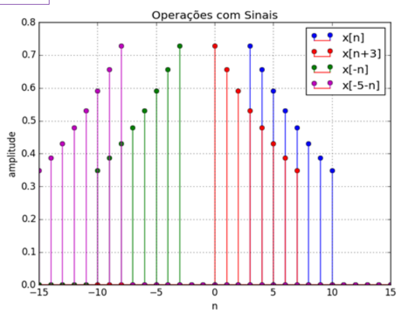


Exercícios
Gabarito

1. Dado $x[n]$, represente $x[n+3]$, $x[-n]$ e $x[-3-n]$ nas diversas formas estudadas
(analítica, gráfica, conjunto de amostras e decomp. em impulsos unitários).

$$x[n] = \{\underline{0}; 0; 0; 0{,}9^3; 0{,}9^4; \dots; 0{,}9^{10}\}$$
$$x[n+3] = \{\underline{1}; 0{,}9; 0{,}9^2; \dots; 0{,}9^7\}$$
$$x[-n] = \{0{,}9^{-10}; 0{,}9^{-9}; \dots; 0{,}9^{-3}; 0; 0; \underline{0}\}$$

Gráfica



Analítica

$$x[n] = 0{,}9^n(u[n-3] - u[n-11])$$
$$x[n+3] = 0{,}9^{n+3}(u[n] - u[n-8])$$
$$x[-n] = 0{,}9^{-n}(u[-n-3] - u[-n-11])$$

Conjunto de Amostras

$$x[n] = \{\underline{0}; 0; 0; 0{,}9^3; 0{,}9^4; \dots; 0{,}9^{10}\}$$
$$x[n+3] = \{\underline{1}; 0{,}9; 0{,}9^2; \dots; 0{,}9^7\}$$
$$x[-n] = \{0{,}9^{-10}; 0{,}9^{-9}; \dots; 0{,}9^{-3}; 0; 0; \underline{0}\}$$

$$x[n] = 0{,}9^3\delta[n-3] + 0{,}9^4\delta[n-4] + \cdots + 0{,}9^{10}\delta[n-10]$$
$$x[n+3] = \delta[n] + 0{,}9\delta[n-1] + \cdots + 0{,}9^7\delta[n-7]$$
$$x[-n] = 0{,}9^{-10}\delta[n+10] + 0{,}9^{-9}\delta[n+9] + \cdots + 0{,}9^{-3}\delta[n+3]$$

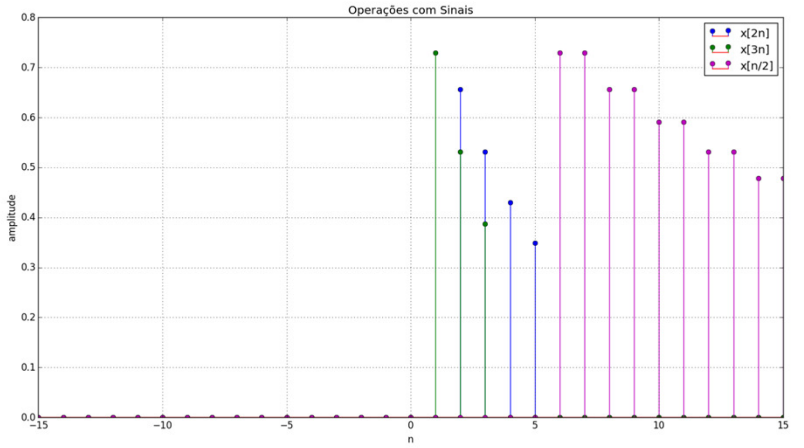
Decomposição em Impulsos Unitários

Exercícios
Gabarito

```
# -*- coding: utf-8 -*-
""" Sinais Discretos Elementares: impulso, degrau, boxcar, seno, exponencial
@author: kaw, 14/04/16. """
from numpy import arange, zeros, sin, exp, pi, abs, angle, logical_and
from matplotlib.pylab import stem, xlabel, ylabel, title, ylim, grid, figure, \
                             subplot, tight_layout, legend
def degrau(n):
    return (n>=0)*1.

def sinal(n):
    x = 0.9**n*(degrau(n-3)-degrau(n-11))
return x

# Exercício 1
n = arange(-15,16) # abscissas - base temporal

x = sinal(n); stem(n,x,label='x[n]')
xlabel('n'); ylabel('amplitude'); title(u'Operações com Sinais'); grid(True)

y = sinal(n+3); stem(n,y,label='x[n+3]',linefmt='r',markerfmt='ro')

z = sinal(-n); stem(n,z,label='x[-n]',linefmt='g',markerfmt='go')

w = sinal(-5-n); stem(n,w,label='x[-5-n]',linefmt='m',markerfmt='mo'); legend()
```

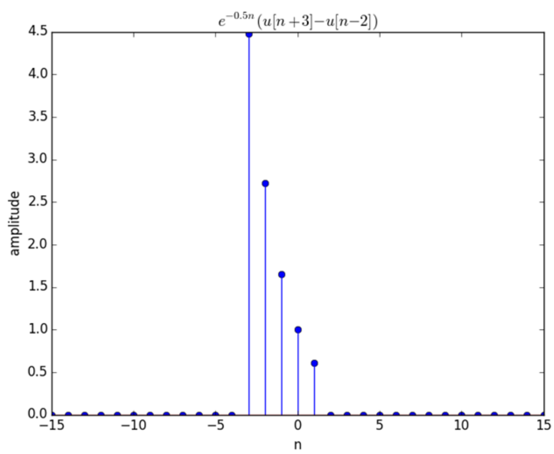
Exercícios

2. Represente graficamente os sinais $x[2n]$, $x[3n]$ e $x[n/2]$.



Exercícios

3. Represente o sinal $y[n] = e^{-0,5n}.(u[n+3] – u[n–2])$ nas diversas formas estudadas (gráfica, conjunto de amostras e decomposição em impulsos unitários).



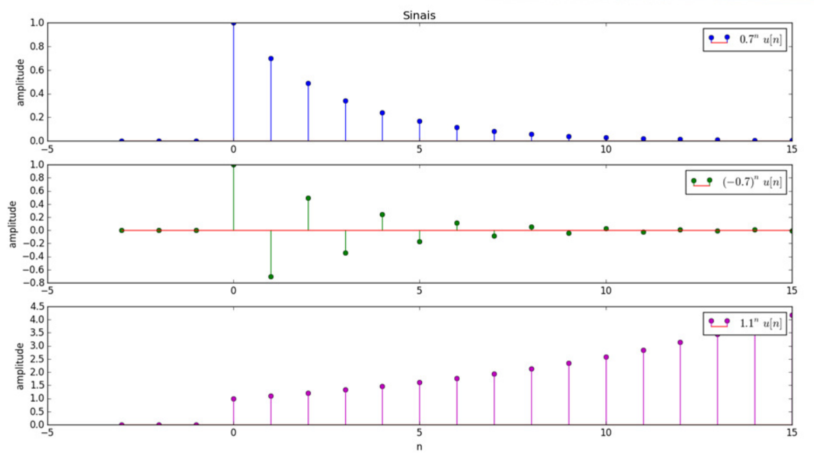
Exercícios

Gabarito

```
# continuação...

# Exercício 3
figure()
r = sinal(2*n)
stem(n,r,label='x[2n]',linefmt='b',markerfmt='bo')

s = sinal(3*n)
stem(n,s,label='x[3n]',linefmt='g',markerfmt='go')

t = sinal(n/2)
stem(n,t,label='x[n/2]',linefmt='m',markerfmt='mo')
xlabel('n'); ylabel('amplitude'); title(u'Operações com Sinais'); grid(True)
legend()


figure()
v = exp(-0.5*n)*(degrau(n+3)-degrau(n-2))

stem(n,v, linefmt='b', markerfmt='bo')
title('$e^{-0.5n}(u[n+3]-u[n-2])$')
xlabel('n')
ylabel('amplitude')
```


Exercícios

4. Trace o gráfico de hastes para os sinais $0{,}7^n.u[n]$; $(-0{,}7)^n.u[n]$ e $1{,}1^n.u[n]$ considerando $-3 \leq n \leq 15$.



Exercícios

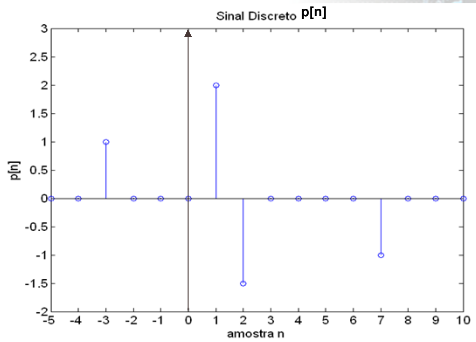
Gabarito

```
# continuação...

# Exercício 4
figure()
n = arange(-3,16)           # abscissas - base temporal
y = 0.7**n*degrau(n)
subplot(311); stem(n,y,label='$0.7^nu[n]$',linefmt='b',markerfmt='bo')
title('Sinais'); ylabel('amplitude'); legend()

z = (-0.7)**n*degrau(n)
subplot(312); stem(n,z,label='$(-0.7)^nu[n]$',linefmt='g',markerfmt='go')
ylabel('amplitude'); legend()

w = 1.1**n*degrau(n)
subplot(313); stem(n,w,label='$1.1^nu[n]$',linefmt='m',markerfmt='mo')
xlabel('n'); ylabel('amplitude'); legend()
```


Exercícios

5. Dado o sinal $p[n] = \{ 1, 0, 0, \underline{\mathbf{0}}, 2, -1.5, 0, 0, 0, 0, -1 \}$, determine a decomposição em Impulsos Unitários do sinal $p[n]$.

Representação **Gráfica**:

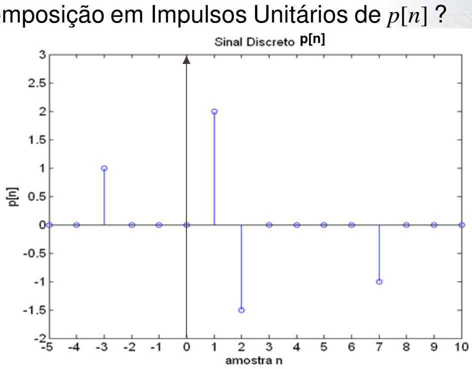


Exercícios

Gabarito

5. Dado o sinal $p[n] = \{ 1, 0, 0, \underline{\mathbf{0}}, 2, -1.5, 0, 0, 0, 0, -1 \}$, qual é a decomposição em Impulsos Unitários de $p[n]$?

Representação **Gráfica:**



Solução:

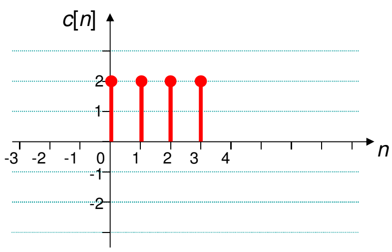
Representação **Algébrica** (em Impulsos Unitários):

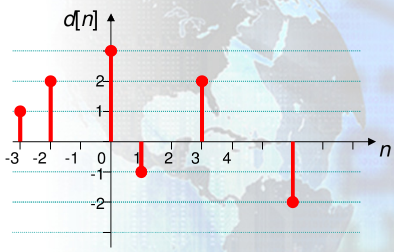
$$p[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_7\delta[n-7]$$

$$p[n] = \boldsymbol{\delta[n+3] + 2.\delta[n-1] - 1{,}5.\delta[n-2] - \delta[n-7]}$$

Exercícios

6. Represente os sinais $c[n]$ e $d[n]$ em conjunto de amostras e decomposição em impulsos unitários:

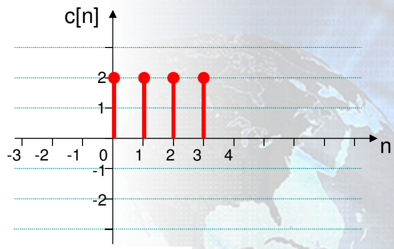




Exercícios

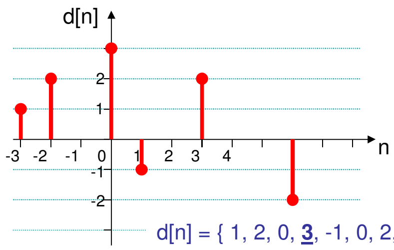
Gabarito

6. Represente os sinais usando conjunto de amostras e decomposição em impulsos unitários:



c[n] = { **2**, 2, 2, 2 }

c[n] $= 2.\delta[n] + 2.\delta[n-1] + 2.\delta[n-2] + 2.\delta[n-3]$
$= 2.\{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]\}$



d[n] = { 1, 2, 0, **3**, -1, 0, 2, 0, 0, -2 }

$d[n] = \delta[n+3] + 2.\delta[n+2] + 3.\delta[n] - \delta[n-1] + 2.\delta[n-3] - 2.\delta[n-6]$

Fontes

- Lathi, B.P. "Sinais e Sistemas Lineares"; 2ª Ed., Porto Alegre; Bookman, 2007. 856p.