PDS – LISTA DE EXERCÍCIOS – TRANSFORMADA Z

1. Encontre a Transformada-Z de $x[n] = -a^n.u[-n-1]$

2. Considere o sinal: $x[n] = a^n$ para $0 \le n \le N-1$, e $x[n] = 0$ caso contrário. Encontre Transformada-Z de $x[n]$ usando a definição.

3. Encontre a Transformada-Z das sequências $x[n]$ indicadas abaixo, e faça o mapa de polos e zeros com a RDC:
   a. $x[n] = (1/2)^n\, u[n] + (1/3)^n\, u[n]$
   b. $x[n] = (1/3)^n\, u[n] + (1/2)^n\, u[-n-1]$
   c. $x[n] = (1/2)^n\, u[n] + (1/3)^n\, u[-n-1]$

4. Para a sequência $x[n] = a^{|n|}$, com $a > 0$, encontre $X(z)$ e respectivo mapa de polos e zeros e a Região de Convergência, considerando $a < 1$ e $a > 1$. Trace também o gráfico de $x[n]$ para $a < 1$ e para $a > 1$.

5. Encontre a Transformada-Z e a RDC das sequências $x[n]$ indicadas abaixo, usando a definição.
   a. $x[n] = \delta[n-n_0]$
   b. $x[n] = u[n-n_0]$
   c. $x[n] = u[-n]$
   d. $x[n] = a^{n+1}\, u[n+1]$
   e. $x[n] = n.a^n\, u[n]$

   Solução:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n.a^n.1.z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n.\left(\frac{a}{z}\right)^n$$

   Um resultado conhecido é o limite da seguinte série infinita:

$$\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + 4\alpha^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n.\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}, |\alpha| < 1$$

   Portanto:

$$X(z) = \frac{\frac{a}{z}}{\left(1-\frac{a}{z}\right)^2} = \frac{\frac{a}{z}}{1-2\frac{a}{z}+\frac{a^2}{z^2}} = \frac{a}{z}.\frac{z^2}{z^2-2az+a^2} = \frac{az}{z^2-2az+a^2}, \left|\frac{a}{z}\right| < 1,$$

6. Usando apenas as transformadas z da Tabela 5.1 do livro-texto, determine a transformada z de cada um dos seguintes sinais:

   a. $u[n] - u[n-2]$
   b. $\gamma^{n-2}u[n-2]$
   c. $2^{n+1}u[n-1] + e^{n-1}u[n]$
   d. $\left[2^{-n}cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right]u[n-1]$
   e. $n\gamma^n u[n-1]$
   f. $n(n-1)(n-2)2^{n-3}u[n-m]$, para $m = 0, 1, 2, 3$
   g. $(-1)^n n u[n]$
   h. $\sum_{k=0}^{\infty} k\delta[n-2k+1]$

7. Determine a transformada z inversa dos seguintes sinais:

(a) $\dfrac{z(z-4)}{z^2-5z+6}$

(b) $\dfrac{z-4}{z^2-5z+6}$

(c) $\dfrac{(e^{-2}-2)z}{(z-e^{-2})(z-2)}$

(d) $\dfrac{(z-1)^2}{z^3}$

(e) $\dfrac{z(2z+3)}{(z-1)(z^2-5z+6)}$

(f) $\dfrac{z(-5z+22)}{(z+1)(z-2)^2}$

(g) $\dfrac{z(1.4z+0.08)}{(z-0.2)(z-0.8)^2}$

(h) $\dfrac{z(z-2)}{z^2-z+1}$

(i) $\dfrac{2z^2-0.3z+0.25}{z^2+0.6z+0.25}$

(j) $\dfrac{2z(3z-23)}{(z-1)(z^2-6z+25)}$

8. Calcule a Transformada Z da sequência $x[n] = \cos(\pi.n/4).u[n]$ usando apenas os pares 1 e 11b da Tabela 5.1 do livro-texto e a propriedade adequada da Transformada Z.

9. Algumas funções causais no domínio do tempo são mostradas a seguir. Liste as funções do tempo que correspondem a cada uma das seguintes funções no domínio z. Pouco ou nenhum cálculo é necessário! Cuidado, pois os gráficos podem estar com escalas diferentes.

a) $\dfrac{z^2}{(z-0{,}75)^2}$

b) $\dfrac{z^2-0{,}9z/\sqrt{2}}{z^2-0{,}9\sqrt{2}z+0{,}81}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} z^{-2k}$

d) $\dfrac{z^{-5}}{1-z^{-1}}$

e) $\dfrac{z^2}{z^4-1}$

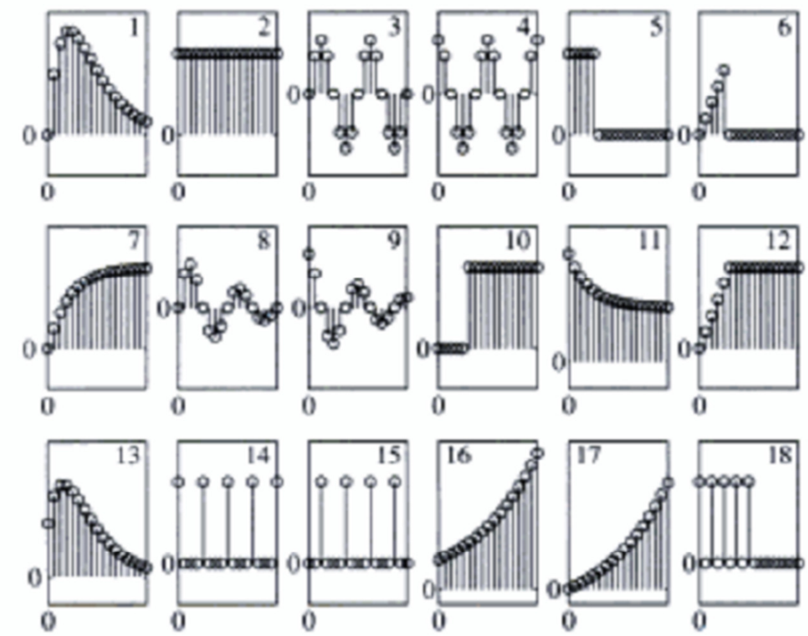
f) $\dfrac{0{,}75z}{(z-0{,}75)^2}$

g) $\dfrac{z^2-z/\sqrt{2}}{z^2-\sqrt{2}z+1}$

h) $\dfrac{z^{-1}-5z^{-5}+4z^{-6}}{5(1-z^{-1})^2}$

i) $\dfrac{z}{z-1{,}1}$

j) $\dfrac{0{,}25z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0{,}75z^{-1})}$



10. Resolva a EDLCC dada a seguir, calculando as componentes de entrada nula e de estado nulo da resposta, considerando $y[0] = 1$ e entrada $e^{-(n-1)}u[n]$.

$$y[n+1] + 2y[n] = x[n+1].$$

11. Calcule a saída de um SLITD especificado por sua EDLCC:

$$2y[n+2] - 3y[n+1] + y[n] = 4x[n+2] - 3x[n+1]$$

com condições iniciais: $y[-2] = 1$ e $y[-1] = 0$ e entrada $0{,}25^n u[n]$. Calcule as componentes de entrada nula e de estado nulo da resposta, assim como, as componentes transitórias e de regime permanente.

Solução:

Convertendo operadores em avanço para operadores em atraso, fazendo $m = n + 2$:

Assim: $2y[m] - 3y[m-1] + y[m-2] = 4x[m] - 3x[m-1]$

Aplicando transformada Z em ambos os lados da EDLCC e usando a propriedade do deslocamento temporal:

$$Z\{y[n-m]\} = y[-m] + y[-m+1]z^{-1} + \ldots + y[-1]z^{-(m-1)} + z^{-m}Y(z)$$

$$Z\{2y[m] - 3y[m-1] + y[m-2]\} = Z\{4x[m] - 3x[m-1]\}$$

$$2Y(z) - 3\{y[-1] + z^{-1}Y(z)\} + \{y[-2] + y[-1]z^{-1} + z^{-2}Y(z)\}$$
$$= 4X(z) - 3\{x[-1] + z^{-1}X(z)\}$$

Usando a tabela de pares: $Z\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}$, ou seja: $X(z) = Z\{0{,}25^n u[n]\} = \frac{z}{z-0{,}25}$

$$2Y(z) - 3z^{-1}Y(z) + 1 + z^{-2}Y(z) = (4 - 3z^{-1})\frac{z}{z-0{,}25}$$

$$Y(z)\{2 - 3z^{-1} + z^{-2}\} = (4 - 3z^{-1})\frac{z}{z-0{,}25} - 1$$

$$Y(z) = \frac{\frac{4z-3}{z}\frac{z}{z-0{,}25} - 1}{2 - 3z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2(3z - 2{,}75)}{(2z^2 - 3z + 1)(z - 0{,}25)} = \frac{z^2(3z - 2{,}75)}{(z-1)(z-0{,}5)(z-0{,}25)}$$

Expandindo em frações parciais:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z(3z - 2{,}75)}{(z-1)(z-0{,}5)(z-0{,}25)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-0{,}5} + \frac{c_3}{z-0{,}25}$$

Usando o Python para calcular os coeficientes c_i:

```
from numpy import array, convolve
from scipy.signal import residuez
b = array(3,-2.75,0)
a = convolve((2,-3,1),(1,-0.25))
c,p,k = residuez(b,a)
print(c,p,k)
```

Logo:

$$Y(z) = \frac{c_1}{z-1}z + \frac{c_2}{z-0,5}z + \frac{c_3}{z-0,25}z = \frac{0,3333}{z-1}z + \frac{2,5}{z-0,5}z - \frac{1,3333}{z-0,25}z$$

A saída do SLITD é:

$$y[n] = \left(\frac{1}{3} + \frac{10}{4}(0,5)^n - \frac{4}{3}(0,25)^n\right)u[n]$$

12. Resolva: $y[n+2] - 2y[n+1] + 2y[n] = x[n]$ com $y[-2] = 0$ e $y[-1] = 1$ e entrada $u[n]$.

13. Um SLITD com reposta impulsiva $2\left(\frac{1}{3}\right)^n . u[n-1]$ produz a saída $(-2)^n u[n-1]$. Calcule a entrada correspondente.

14. Uma determinada pessoa deposita $p[n]$ reais em sua conta bancária no primeiro dia de cada mês, exceto em Dezembro. Se $s[n]$ é o saldo da conta bancária no primeiro dia do mês n e admitindo que a conta tenha sido aberta em Janeiro ($n = 0$), que a taxa de juros seja de 1% e que ela faça depósitos indefinidamente (exceto em Dezembro), então o saldo da conta satisfaz a EDLCC $s[n] = 1{,}01\, s[n-1] + p[n]$. Determine uma expressão fechada para $s[n]$ que seja função apenas do mês n.

15. Para cada resposta impulsiva dada a seguir, determine a quantidade de polos do SLITD, se os polos são reais ou complexos e se o SLITD é BIBO estável ou não.

    a. $h_1[n] = (-1 + 0{,}5^n)\, u[n]$
    b. $h_2[n] = j^n\, (u[n] - u[n-10])$

16. Resolva o Prob. 3.8-16 do livro-texto pelo método da Transformada Z.

17. Determine e trace a resposta em amplitude e fase dos filtros digitais mostrados na figura seguinte.

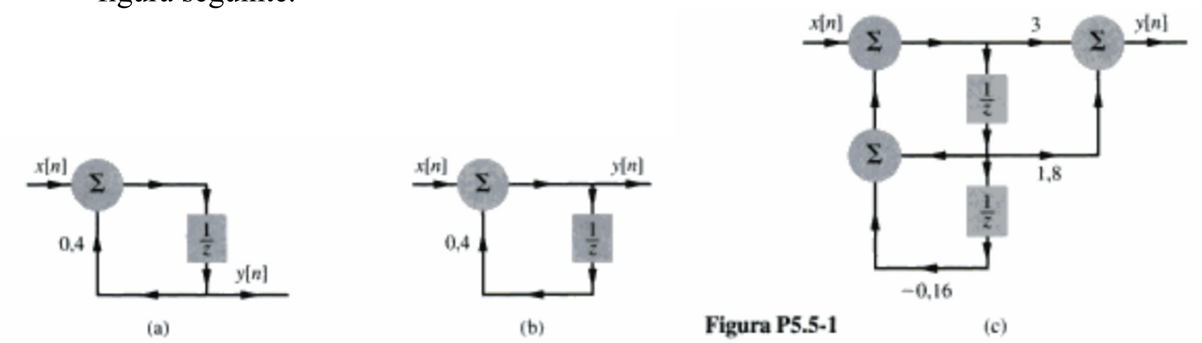


Figura P5.5-1

18. Uma interessante e útil aplicação dos sistemas discretos é a realização de sistemas complexos (ao invés de reais). Um sistema complexo é aquele cuja entrada de valor real pode produzir uma saída de valor complexo. Sistemas complexos que são descritos por equações de diferenças de coeficientes constantes necessitam de pelo menos um coeficiente de valor complexo e são capazes de operar com entradas de valor complexo. Considere o sistema complexo de tempo discreto:

$$H(z) = \frac{z^2 - j}{z - 0{,}9e^{j3\pi/4}}$$

a. Determine e trace o mapa de zeros e polos do sistema.
b. Trace a resposta em magnitude $|H(\Omega)|$ deste sistema para $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$. Comente sobre o comportamento do sistema

19. Resolva a seguinte EDLCC considerando condições iniciais $y[-1] = 2$ e $y[-2] = 0$ e degrau unitário como entrada.

$$y[n+2] - 5/6\, y[n+1] + 1/6\, y[n] = 5\, x[n+1] - x[n]$$