Função de Transferência: Definição, Propriedades e Realizações

1. Introdução

A saída $y[n]$ de um SLITD em repouso é dada pela convolução da entrada $x[n]$ com a resposta ao impulso $h[n]$ do SLITD:

$$y[n] = x[n] \; * \; h[n] \tag{1}$$

Aplicando a propriedade da Transformada-Z da convolução de sinais no domínio do tempo:

$$Y(z) = X(z).\, H(z) \tag{2}$$

onde: $Y(z)$, $X(z)$ e $H(z)$ são as Transformadas-Z dos sinais $y[n]$, $x[n]$ e $h[n]$, respectivamente.

A **Função de Transferência do Sistema** (Função Sistema, Função Transmissão) é definida a partir da *Equação* (*2*). Esta função no domínio Z, assim como a resposta ao impulso no domínio do tempo, caracteriza completamente o comportamento dinâmico de um SLITD:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{3}$$

A *Figura 1* ilustra a relação entre as equações 1 e 2.

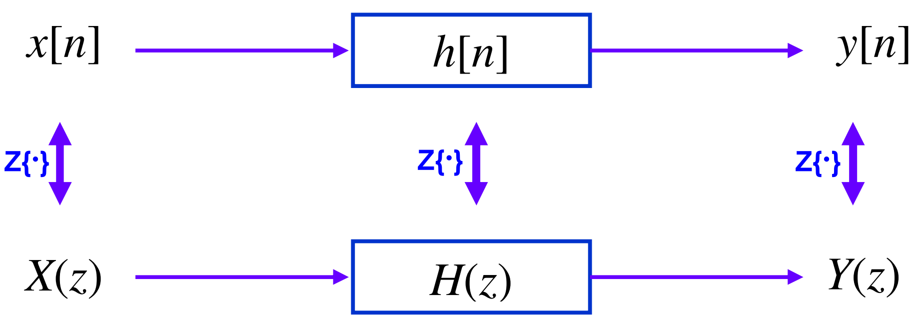


Figura 1 – SLITD representado no domínio do tempo e no domínio Z

Muitas propriedades dos SLITDs podem ser associadas às características da Função de Transferência, $H(z)$, e em particular, à sua Região de Convergência (RDC) e à localização de seus pólos no plano-z.

Em geral, a Função de Transferência pode ser escrita na forma de uma razão polinomial em *z*:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \tag{4}$$

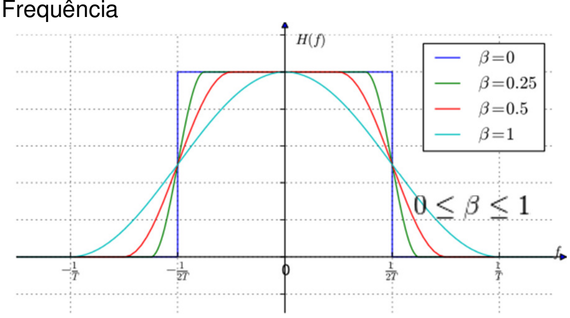
Todo SLIT pode ser descrito por uma Função de Transferência, e existem algumas famílias de funções de transferência especiais que são mais frequentemente usadas.

Alguns filtros típicos são projetados para realizar essas famílias de funções de transferência, como mostra a seguinte lista de filtros, com respectivas características:

- Filtro Casado – ótima resposta impulsiva para qualquer forma de pulso (resposta ao degrau é uma rampa). Usado na maximização da relação sinal/ruído (SNR), minimizando a probabilidade da não detecção de erros em sinais recebidos.
- Filtro de Butterworth – banda passante mais plana possível, para uma dada ordem.
- Filtro de Chebyshev (Tipo I) – sem ripple na banda de rejeição, menor banda de transição em relação às dos filtros de Butterworth.
- Filtro de Chebyshev (Tipo II) – sem ripple na banda passante, menor banda de transição em relação às dos filtros de Butterworth.
- Filtro de Bessel – melhor resposta impulsiva para uma dada ordem, porque não apresenta ripple no atraso de grupo (resposta de fase a mais plana possível).
- Filtro Elíptico – menor banda de transição possível, para uma dada ordem.
- Filtro Ampulheta (Hourglass) – similar ao Chebyshev Tipo II, com menor banda de transição, maior atraso de grupo, maior atenuação na banda de rejeição e ligeira oscilação na banda passante (caso especial de filtro Eliptico).
- Filtro Gaussiano – menor atraso de grupo possível, para uma dada ordem; sem overshoot para entradas do tipo degrau.
- Filtro Cosseno Levantado (*raised-cosine*) – usado na moldagem de pulsos em sistemas digitais de comunicação para diminuir a interferência entre símbolos (ISI – *Inter-Symbol Interference*). A resposta ao impulso desse filtro é caracterizada por dois parâmetros: β, fator de decaimento (*roll-off*) (medida do excesso de largura de banda ocupada além do limite de Nyquist, $1/(2T)$) e T, recíproco da taxa de símbolos.

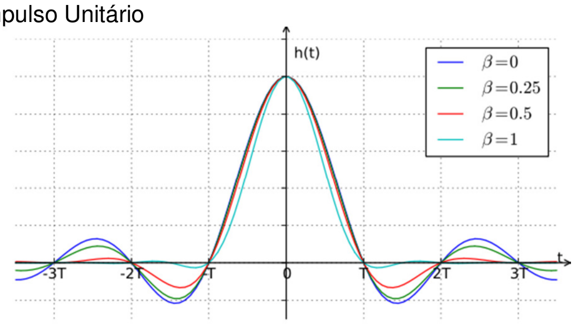
Resposta em Frequência

$$H(f)=\begin{cases} T, & |f|\le \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi T}{\beta}\left[|f|-\frac{1-\beta}{2T}\right]\right)\right], & \frac{1-\beta}{2T}<|f|\le\frac{1+\beta}{2T} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Resposta ao Impulso Unitário

$$h(t)=\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi\beta t}{T}\right)}{1-\left(\frac{2\beta t}{T}\right)^2}$$



A função de transferência também é usada na representação de SLITDs em formas padronizadas de realização, usando diagrama de blocos.

2. Propriedades

2.1. Causalidade

Para um SLITD causal a seguinte condição deve ser atendida:

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \tag{5}$$

Como $h[n]$ é uma sequência unilateral direita, a condição correspondente para convergência de $H(z)$ é que a sua RDC seja externa ao círculo de raio $\sigma_{máx}$:

$$|\, z \,| > \sigma_{máx} \tag{6}$$

onde: $\sigma_{máx}$ é o maior polo em valor absoluto de $H(z)$.

2.2. Estabilidade

Um SLITD será estável se sua resposta ao impulso for absolutamente somável:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{7}$$

A condição correspondente para $H(z)$ é que sua RDC contenha o círculo unitário, $|z| = 1$.

2.3. Sistemas Causais e Estáveis

Se um sistema for a mesmo tempo causal e estável, então todos os pólos de $H(z)$ devem estar no interior do círculo unitário do plano z, porque a RDC será da forma $|z| > \sigma_{máx}$, e, como o círculo unitário deverá estar contido na RDC, então o raio da RDC deverá ser menor que a unidade: $\sigma_{máx} < 1$.

3. Realização de Sistemas

Os SLITDs[1] descritos por funções de transferências podem ser realizados por algumas formas padronizadas, conhecidas por **Formas de Realização**: Direta I, Direta II, Cascata e Paralela.

As realizações são representadas em diagramas de blocos, e os blocos mais usados são:

- *Bloco de Multiplicação*: amplifica ou atenua o sinal na entrada.

- *Bloco de Atraso Unitário*: atrasa o sinal na entr. em uma unidade de tempo (memória).

A Figura 2 mostra a representação gráfica desses blocos.

[1] filtros digitais

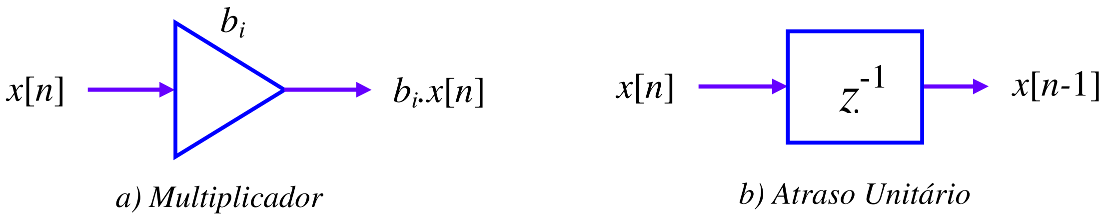


Figura 2 – Blocos para realização de SLITDs

A partir das equações (3) e (4):

$$\left[1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_N z^{-N}\right].Y(z)=\left[b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_M z^{-M}\right].X(z) \qquad (8)$$

Calculando a Transformada-Z Inversa da *Equação 8*, produzimos uma EDLCC que relaciona a entrada $x[n]$ e a saída $y[n]$ do SLITD no domínio do tempo:

$$y[n] = b_0.x[n] + b_1.x[n-1] + \ldots + b_M.x[n-M] - a_1.y[n-1] - a_2.y[n-2] \ldots - a_N.y[n-N] \qquad (9)$$

3.1 Realização pela Forma Direta I

A *Equação 9* pode ser implementada pela **Forma Direta I**, conforme *Figura 3*.

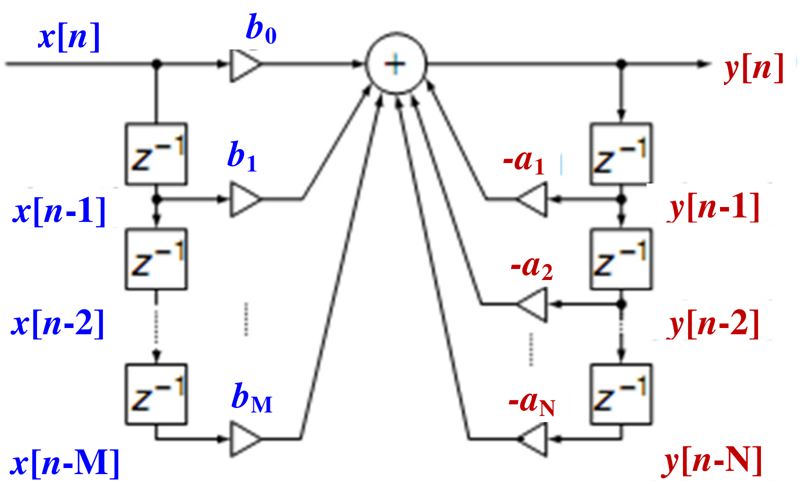


Figura 3 – Realização pela Forma Direta I

3.2 Realização pela Forma Direta II (Canônica)

A partir das equações (3) e (4) podemos escrever:

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} X(z) = B(z).\frac{X(z)}{A(z)} = B(z).W(z) \tag{10}$$

onde $W(z) = X(z)/A(z)$

Ou seja:

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \tag{11}$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}).W(z) \tag{12}$$

As equações de diferenças correspondentes podem ser obtidas pela Transformada Z Inversa das equações (11) e (12):

$$w[n] = x[n] - a_1.w[n\text{-}1] - \ldots - a_N.w[n\text{-}N] \tag{13}$$

e

$$y[n] = b_0.w[n] + b_1.w[n\text{-}1] + \ldots + b_M.w[n\text{-}M] \tag{14}$$

As equações (13) e (14) podem ser realizadas pela **Forma Direta II**, considerando $N = M$, conforme *Figura 4*.

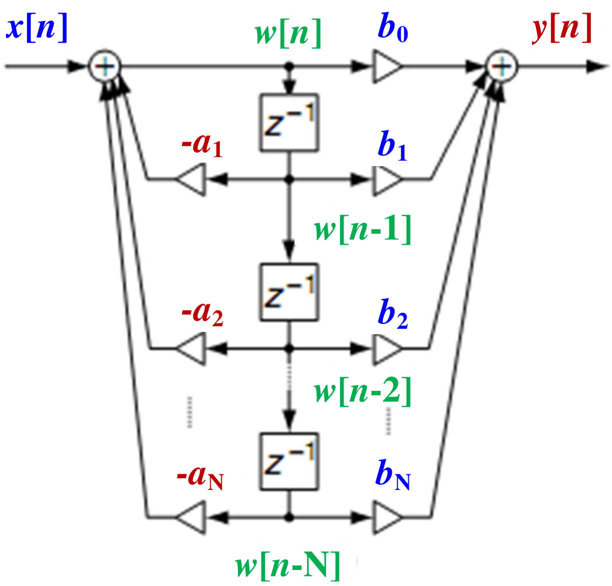


Figura 4 – Realização pela Forma Direta II, considerando $N = M$

3.3 Realização em Cascata

Outra forma padronizada para realizar um filtro digital colocar em série (cascatear) a função de transferência fatorada em funções de transferência de 1ª ou 2ª ordem (seções):

$$H(z) = H_1(z).H_2(z)\ldots H_k(z) \tag{15}$$

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1}} \qquad \text{ou} \qquad H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}}$$

1ª ordem 2ª ordem

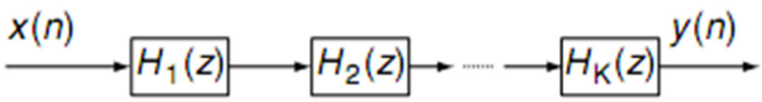


Figura 5 – Realização em Cascata

3.4 Realização em Paralelo

Outra forma de se realizar um filtro digital é escrever a função de transferência em soma de funções de transferência de 1ª ou 2ª ordem (seções), ou seja, seções em paralelo:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \ldots + H_k(z) \tag{16}$$

$$H_k(z) = \frac{b_{k0}}{1 + a_{k1}z^{-1}} \qquad \text{ou} \qquad H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}}$$

A *Figura 6* mostra a realização de filtros digitais na forma paralela.

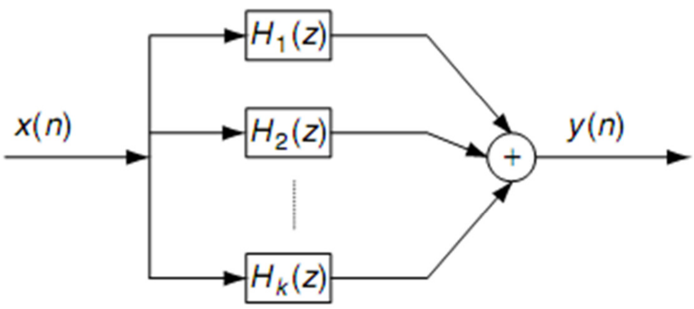


Figura 6 – Realização em Paralelo

4. Procedimento

Seja o SLITD causal, em repouso, descrito por sua função de transferência:

$$H(z) = \frac{0{,}5(1 - z^{-2})}{1 + 1{,}3z^{-1} + 0{,}36z^{-2}}$$

Esboce o diagrama de blocos de cada uma das formas de realização estudadas, indicando a equação de diferenças em cada caso. Use seções de 1ª ordem para as formas cascata e paralelo.

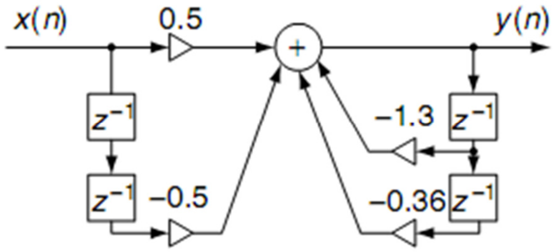
Formas Diretas I e II (F.D.I e F.D.II): Nesses casos basta identificar os coeficientes a_k e b_k da função de transferência do SLITD: $a_0 = 1$; $a_1 = 1{,}3$; $a_2 = 0{,}36$; $b_0 = 0{,}5$; $b_1 = 0$; $b_2 = -0{,}5$.

Da *Equação 9* da F.D.I: $y[n] = 0{,}5x[n] - 0{,}5x[n\text{-}2] - 1{,}3y[n\text{-}1] - 0{,}36y[n\text{-}2]$

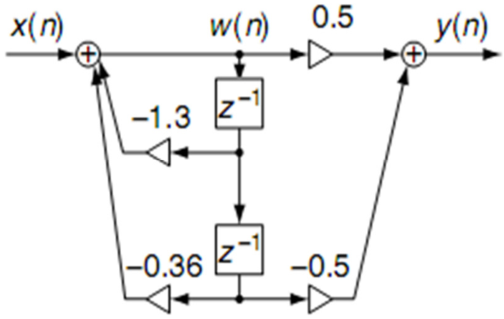
Das *Equações 13* e *14* da F.D.II:

$$\begin{cases} w[n] = x[n] - 1{,}3w[n\text{-}1] - 0{,}36w[n\text{-}2] \\ y[n] = 0{,}5w[n] - 0{,}5w[n\text{-}2] \end{cases}$$

Considerando os diagramas mostrados nas *Figuras 3* e *4*, produzimos o diagrama de blocos da **Forma Direta I** e da **Forma Direta II**, respectivamente:



Forma Direta I



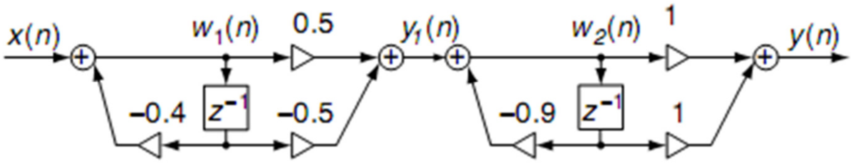
Forma Direta II

Forma Cascata: fatorando $H(z)$ em seções de 1ª ordem, teremos:

$$H(z) = \frac{0.5(1 - z^{-2})}{1 + 1{,}3z^{-1} + 0.36z^{-2}} = 0{,}5\frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 + 0{,}4z^{-1})(1 + 0{,}9z^{-1})} = \left(\frac{0{,}5 - 0{,}5z^{-1}}{1 + 0{,}4z^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{1 + z^{-1}}{1 + 0{,}9z^{-1}}\right)$$

As equações de diferenças para a realização da Forma Direta II:

$$w_1[n] = x[n] - 0{,}4w_1[n-1] \qquad w_2[n] = y_1[n] - 0{,}9w_2[n-1]$$
$$y_1[n] = 0{,}5w_1[n] - 0{,}5w_1[n-1] \qquad y[n] = w_2[n] + w_2[n-1]$$



Forma Paralela: expandindo H(z)/z em frações parciais, teremos:

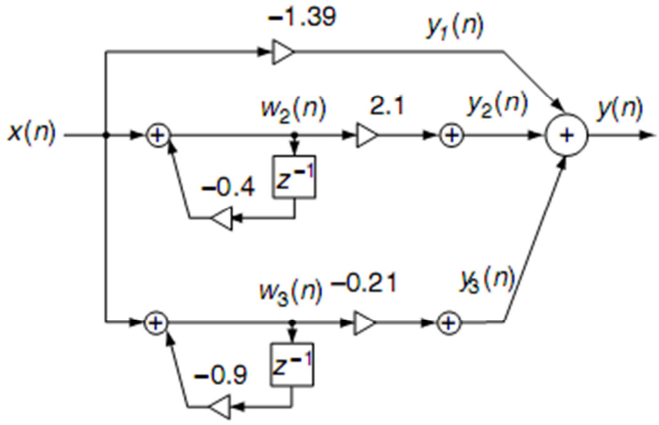
$$\frac{H(z)}{z} = \frac{0.5(z^2-1)}{z(z+0{,}4)(z+0{,}9)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+0{,}4} + \frac{C}{z+0{,}9}$$

$$A = z\left(\frac{0.5(z^2-1)}{z(z+0.4)(z+0.9)}\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{0.5(z^2-1)}{(z+0.4)(z+0.9)}\Bigg|_{z=0} = -1.39$$

$$B = (z+0.4)\left(\frac{0.5(z^2-1)}{z(z+0.4)(z+0.9)}\right)\Bigg|_{z=-0.4} = \frac{0.5(z^2-1)}{z(z+0.9)}\Bigg|_{z=-0.4} = -0.21$$

$$C = (z+0.9)\left(\frac{0.5(z^2-1)}{z(z+0.4)(z+0.9)}\right)\Bigg|_{z=-0.9} = \frac{0.5(z^2-1)}{z(z+0.4)}\Bigg|_{z=-0.9} = 0.21.$$

Finalmente: $H(z) = -1{,}39 + \frac{2{,}1z}{z+0{,}4} + \frac{-0{,}21z}{z+0{,}9}$ ou $Y(z) = \left(-1{,}39 + \frac{2{,}1z}{z+0{,}4} + \frac{-0{,}21z}{z+0{,}9}\right)X(z)$



5. Questões

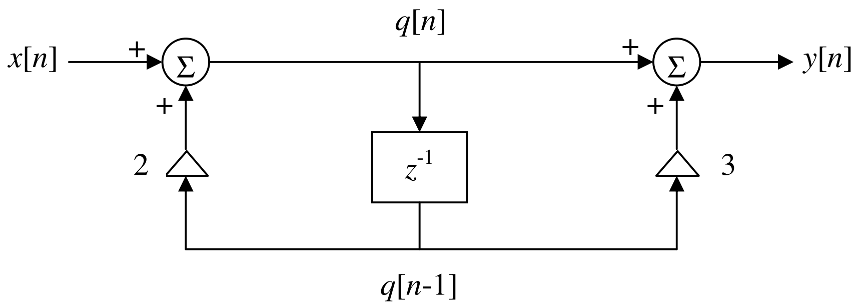
1. Um SLITD causal em repouso é descrito por sua EDLCC:

$$y[n] - 3y[n-1]/4 + y[n-2]/8 \;=\; x[n]$$

   a) Determine $H(z)$.
   b) Trace o diagrama de polos e zeros e RDC.
   c) Classifique o sistema quanto à estabilidade.
   d) Encontre a resposta ao impulso e a resposta ao degrau.
   e) Desenhe o diagrama de blocos de realização nas formas estudadas.

2. Repita o item anterior para os SLITDs descritos por $H(z)$ = B(z)/A(z):
   a) A = [1, -0.4], B = [0.42, 0]
   b) A = [1, -2.7, 2.43, -0.729], B = [1/1000]
   c) A = [1, -2/3, 13/16], B = [5/16, 0, 0]

3. Considere o sistema descrito pelo diagrama mostrado a seguir. Escreva uma equação de diferenças relacionando a entrada $x[n]$ com a saída $y[n]$, usando a Transformada Z.



Dica: Relacione os sinais $q[n]$, $x[n]$ e $y[n]$, e em seguida aplique a Transformada-Z para encontrar $H(z)$, e depois usando a propriedade do deslocamento de tempo, obtenha a equação de diferenças.

4. Indique as funções de transferência dos filtros citados no item **1-Introdução**, além de suas respostas em frequência, características e aplicações mais usuais (no modelo do que foi feito para o filtro Cosseno Levantado).

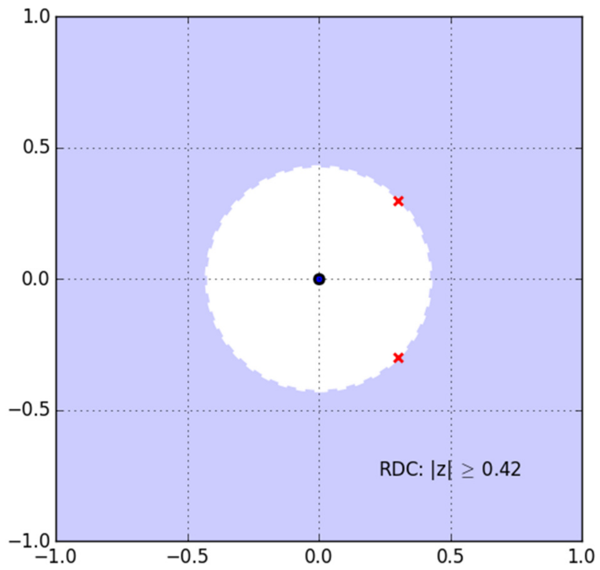
Apêndice:

1. *Script* Python para traçar o mapa de polos e zeros, e a Região de Convergência de SLITDs:

```
# -*- coding: utf-8 -*-
from matplotlib.pyplot import figure, subplot, plot, grid, gcf, axes, text
from matplotlib.patches import Circle, Rectangle

#%% mostra o mapa de polos e zeros de SLITD causal
fig4 = figure()
ax4 = fig4.add_subplot(111, aspect='equal')
xpolos = [0.3,0.3]
ypolos = [-0.3,0.3]
xzeros = [0.]
yzeros = [0.]
plot(xpolos[0],ypolos[0],'rx', markeredgewidth=2.)
plot(xpolos[1],ypolos[1],'rx', markeredgewidth=2.)
plot(xzeros[0],yzeros[0],'bo', markeredgewidth=2.)
ax4.axis((-1.,1.,-1.,1.)); grid('on')

# mostra a RDC da Função de Transferência
ax4.add_patch(Rectangle((-1., -1.), 2., 2., alpha=0.2, fill=True))
raio = (0.3**2 + 0.3**2)**0.5   # valor absoluto de um dos polos conjugados
ax4.add_patch(Circle((0., 0.), raio, color='w', fill=True, linestyle='dashed',
              edgecolor='black', linewidth=3))
text(0.5,-0.75,r'RDC: |z| $\geq$ %4.2f' % raio, horizontalalignment='center')
fig4.canvas.draw()
```



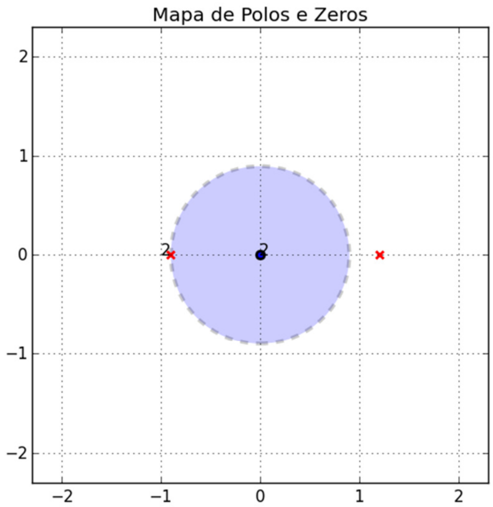
2. *Script* para representar e traçar o mapa de zeros e polos do SLITD: $H(z) = z^2 / (z^2 + 3z/4 + 1/8)$

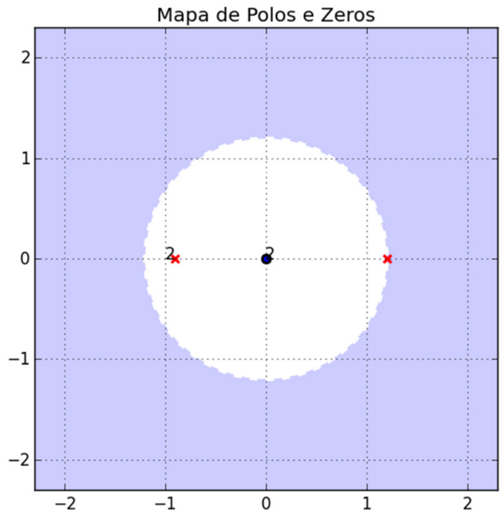
```
# -*- coding: utf-8 -*-
from matplotlib.pyplot import figure, title, plot, grid, text
from matplotlib.patches import Circle, Rectangle
from numpy import array; from scipy.signal import tf2zpk; from math import ceil

def pzmapa(polos,zeros,causal=True):
    # Traça o mapa de zeros e polos e a RDC de um SLITD
    fig = figure(); eixos = fig.add_subplot(111, aspect='equal')
    pd = {x:list(polos).count(x) for x in set(list(polos))}  # dicion. de polos
    for p in pd:                # polos
        pc = complex(p); plot(pc.real,pc.imag,'rx', markeredgewidth=2.)
        if pd[p] > 1:
          x = pc.real*1.1; y = pc.imag*1.1
          if pc.real == 0: x = 0.05
          if pc.imag == 0: y = 0.05
          text(x, y, pd[p])  # multiplicidade
    zd = {x:list(zeros).count(x) for x in set(list(zeros))}  # dicion. de zeros
    for z in zd:                # zeros
        zc = complex(z); plot(zc.real,zc.imag,'bo', markeredgewidth=2.)
        if zd[z] > 1:
          x = zc.real*1.1; y = zc.imag*1.1
          if zc.real == 0: x = 0.05
          if zc.imag == 0: y = 0.05
          text(x, y, zd[z])  # multiplicidade

    # Desenha a RDC
    args = {"xy":(0.,0.),"fill":True,"linestyle":'dashed',"edgecolor":'black',
            "linewidth":3}
    if causal:
        raio = max(abs(polos)); lim = ceil(raio) + 0.3
        args["color"] = 'w'
    else:
        raio = min(abs(polos)); lim = ceil(max(abs(polos))) + 0.3
        args["alpha"] = 0.2
    args["radius"] = raio; eixos.axis((-lim,lim,-lim,lim)); grid('on')
    eixos.add_patch(Rectangle((-lim,-lim),2*lim,2*lim, alpha=0.2, fill=causal))
    eixos.add_patch(Circle(**args)); title("Mapa de Polos e Zeros")

# b = [1., 0., 0.]; a = [1.,4.,5.,2.]      para   H(Z) = z^2/(z^2+3z/4+1/8), causal
zeros = array([0.,0.]); polos = array([2.,-0.9,-0.9])
pzmapa(polos,zeros)
pzmapa(polos,zeros,False)
```


Mapa de Polos e Zeros
2
2
2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2


Mapa de Polos e Zeros
2
2
2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2