Prof. Cláudio A. Fleury

2012-2

Processamento Digital de Sinais

Sistemas Lineares de Tempo Discreto
SLITDs

Cap.1 Lathi

Slides: 21

Conteúdo

- Sistemas
  - Classificação quanto:
    - Ao tipo de Sinais manipulados: **Contínuo, Amostrado, Discreto, Digital**
    - Ao uso de memória: **Com Memória** ou **Sem Memória**
    - À relação Saída/Entrada: **Linear** ou **Não-linear**
    - À estabilidade: **Estável, Marginalmente Estável** e **Instável**
    - À relação entre causa e efeito: **Causal** ou **Não-causal** (antecipativo)
    - À mudança de características no tempo: **Invariante** ou **Variante**
    - À sua Resposta Impulsiva e Equação de Diferenças: **FIR** ou **IIR**
- Resumo
- Exercícios

Classificação de Sistemas

Classificação de Sistemas

Quanto ao tipo de Sinais manipulados

Contínuo

Ex.: Filtros ativos e passivos

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t)$$

Amostrado

Ex.: Filtros a capacitor chaveado

$$x_a(t) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y_a(t)$$

Discreto

Ex.: Filtros digitais com
Precisão Infinita

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y[n]$$

Digital

Ex.: Filtros digitais com
Precisão Finita

$$x_q[n] \longrightarrow \boxed{H_q(z)} \longrightarrow y_q[n]$$

Representação: diagrama de blocos

Classificação de Sistemas

- Sistema Discreto
  - Transforma uma sequência de entrada $x[n]$ em uma sequência de saída $y[n]$

Representações

Matemática (eq. de diferenças): $y[n] = T\{ x[n] \}$

Diagrama de Blocos: $x[n] \longrightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow y[n]$

Exemplo 1: Sistema de Atraso/Avanço

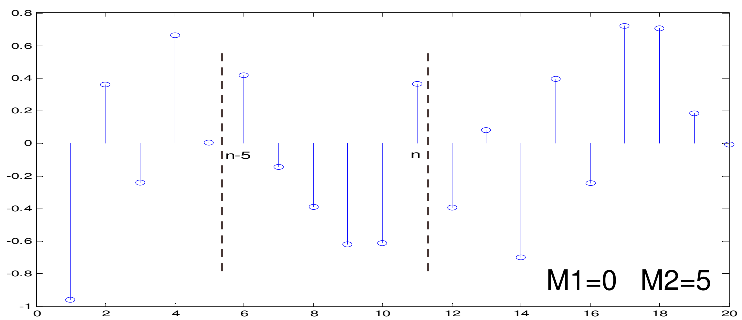
$$y[n] = x[n\text{-}n_0]$$

$n_0 > 0 \Rightarrow$ atraso

$n_0 < 0 \Rightarrow$ avanço

Exemplo 2: Média Móvel
(*Moving Average* - MA)

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$



Classificação de Sistemas

Quanto ao uso de memória

- Sistemas Sem Memória
  - A saída corrente $y[n]$ depende somente da entrada $x[n]$ corrente
  - Exemplo:

$$y[n] = 5.x[n]$$

EDLCC

- Sistemas Com Memória
  - A saída corrente $y[n]$ depende de entrada(s) $x[n]$ atual e/ou anteriores, e/ou de saída(s) anterior(es)
  - Exemplo:

$$y[n] = 2x[n] - 3x[n-1] - 2\,y[n-1]$$

EDLCC

Classificação de Sistemas

Quanto à relação entre Saída/Entrada

– Um sistema é **Linear** quando ele obedece ao **Princípio da Superposição**

Admitindo: $y_1[n] = \mathrm{T}\{x_1[n]\}$ e $y_2[n] = \mathrm{T}\{x_2[n]\}$

$$x_1[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y_1[n] \qquad x_2[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y_2[n]$$

Aditividade: $\mathrm{T}\{x_1[n] + x_2[n]\} = \mathrm{T}\{x_1[n]\} + \mathrm{T}\{x_2[n]\}$

$$x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y_1[n] + y_2[n]$$

Homogeneidade: $\mathrm{T}\{a.x_1[n]\} = a.\mathrm{T}\{x_1[n]\} = a.y_1[n]$

$$a.x_1[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow a.y_1[n]$$

Linearidade: $\mathrm{T}\{a.x_1[n] + b.x_2[n]\} = a.\mathrm{T}\{x_1[n]\} + b.\mathrm{T}\{x_2[n]\}$

Sistema Linear

- Exemplo

Amplificador Digital: $\boldsymbol{y[n] = 10.x[n]}$ é um sistema linear?

Sejam $x_1[n] = u[n]$ e $x_2[n] = \delta[n]$ sinais colocados na entrada do sistema, logo as respectivas saídas serão:

$y_1[n] = 10u[n]$ e $y_2[n] = 10\delta[n]$

Agora, usando a soma das entradas anteriores multiplicadas por a=2 e b=5, como entrada do sistema, teremos:

$$x[n] = 2x_1[n] + 5x_2[n] = 2u[n] + 5\delta[n],$$

Assim, a saída gerada pelo sistema será:

$$y[n] = 10.x[n] = 10.(2u[n] + 5\delta[n]) = 20u[n] + 50\delta[n] = 2y_1[n] + 5y_2[n]$$

Logo, trata-se de um **Sistema Linear**

Sistema Linear

- Exemplo

Quadrado: $\boldsymbol{y[n] = x^2[n]}$ é um sistema linear?

Sejam $x_1[n] = u[n]$ e $x_2[n] = \delta[n]$ sinais colocados na entrada do sistema, logo as respectivas saídas serão:

$y_1[n] = u^2[n]$ e $y_2[n] = \delta^2[n]$

Agora, usando a soma das entradas anteriores multiplicadas por a=2 e b=5, como sendo a entrada do sistema, teremos:

$x[n] = 2u[n] + 5\delta[n]$, e a saída gerada pelo sistema será:

$$y[n] = x^2[n] = (2u[n] + 5\delta[n])^2 = 4u^2[n] + 20u[n]\delta[n] + 25\delta^2[n]$$

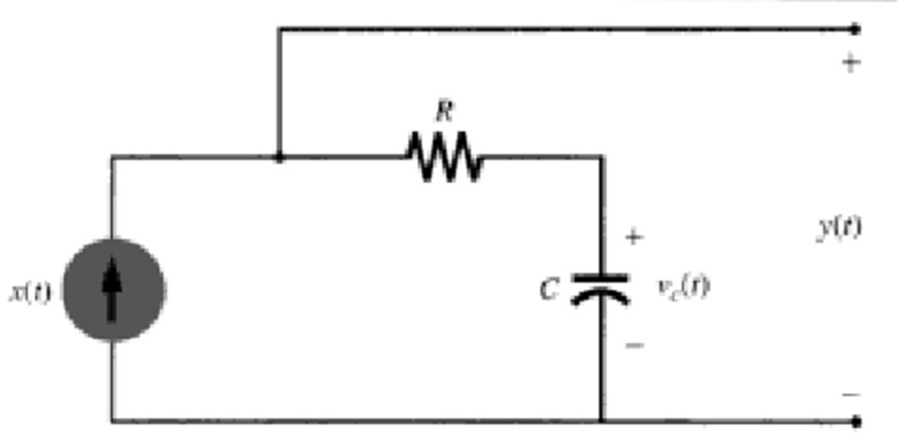
$$y[n] = 4y_1[n] + 20u[n]\delta[n] + 25y_2[n] \neq 2y_1[n] + 5y_2[n]$$

Logo, trata-se de um **Sistema Não Linear**

Sistemas

- Sistema Elétrico Simples
  - Descrição (modelo matemático)

$$y(t) = v_C(t) + R.x(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau, \qquad t \geq t_0$$



Sistema Linear

- Resposta Total de um Sistema Linear
  - Resposta à entrada nula
    - Condições Iniciais do Sistema (energia inicial)
  - Resposta ao estado nulo
    - Sistema descarregado e estimulado apenas pela entrada

resposta total = resposta entrada nula + resposta estado nulo

$$y(t) = \underbrace{v_C(0)}_{\text{componente: \textbf{entrada nula}}} + \underbrace{R.x(t) + \frac{1}{C}\int_0^t x(\tau)d\tau}_{\text{componente: \textbf{estado nulo}}}$$

Classificação de Sistemas

Quanto à mudança de características no tempo

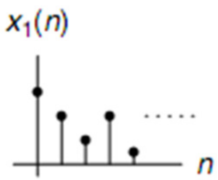
* Sistemas Invariantes não alteram suas características com o passar do Tempo

- Um sistema é dito ser **Invariante no Tempo** se um sinal de entrada sofrer um deslocamento no tempo e a saída correspondente também sofrer o mesmo deslocamento no tempo

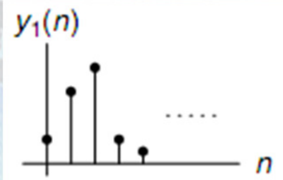
Invariância no Tempo:

$$\text{se } y[n] = \mathrm{T}\{\, x[n] \,\}, \ \text{ então } \ y[n-n_0] = \mathrm{T}\{\, x[n-n_0] \,\}$$

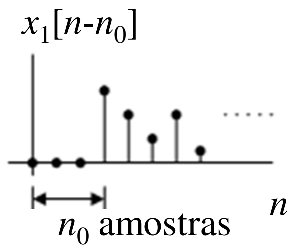
Se: $y[n] = \mathrm{T}\{\, x[n] \,\}$



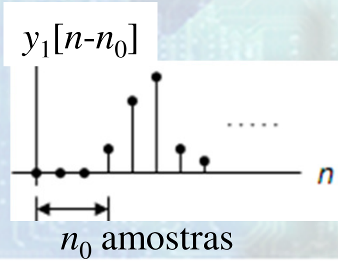
$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n]$$



Invariância ao Tempo: $y[n-n_0] = \mathrm{T}\{\, x[n-n_0] \,\}$



$$x[n-n_0] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n-n_0]$$



Sistemas Invariantes no Tempo

- Exemplo

Amplif. c/ Atraso: $\mathbf{y[n] = 2.x[n\text{-}5]}$ é um sistema invariante ao tempo?

Para uma entrada $x_1[n]$ a saída gerada pelo sistema será:

$y_1[n] = 2.x_1[n-5]$

Agora, vamos usar uma entrada $x_2[n]$, obtida a partir da entrada $x_1[n]$ deslocada no tempo n_0 amostras:

$x_2[n] = x_1[n-n_0]$, e a saída gerada pelo sistema será:

$y_2[n] = 2.x_2[n-5] = 2.x_1[(n-n_0)-5]$

Enquanto que deslocar a saída $y_1[n]$ de n_0 amostras resulta em:
$y_1[n-n_0] = 2x_1[n-5-n_0] = 2.x_1[(n-n_0)-5]$

Logo, trata-se de um **Sistema Invariante ao Tempo**

Sistemas Invariantes no Tempo

- Exemplo

Amplif. Compressor: $\boldsymbol{y[n] = 2.x[3n]}$ é um sist. invariante ao tempo?

Para uma entrada $x_1[n]$ a saída gerada pelo sistema será:

$$y_1[n] = 2.x_1[3n]$$

Agora, vamos usar uma entrada $x_2[n]$, obtida a partir da entrada $x_1[n]$ deslocada no tempo:

$x_2[n] = x_1[n-n_0]$, a saída será:

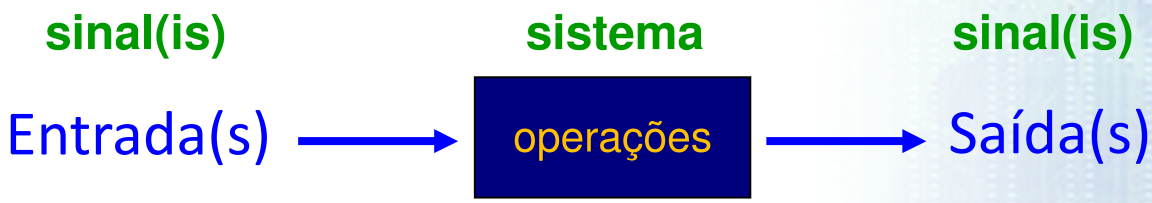
$$y_2[n] = 2.x_2[3n] = 2x_1[3(n-n_0)]$$

Enquanto que deslocar a saída $y_1[n]$ de n_0 amostras resulta em:
$y_1[n-n_0] = 2x_1[3n-n_0]$

Logo, trata-se de um **Sistema Variante ao Tempo**

Sistema Linear e Invariante no Tempo

- Um sistema é **linear** se
  - Ele pode ser representado por uma, ou mais, equações de diferenças lineares com coeficientes constantes (EDLCC)
  - Ele obedece ao Princípio da Superposição
- **Invariância ao Tempo** significa que as operações executadas pelo sistema não mudam ao longo do tempo
  - As **operações** executadas pelo bloco só dependem das variáveis de entrada e/ou das saídas (realimentação) e **nunca** da variável tempo



Classificação de Sistemas

Quanto à relação entre causa e efeito

- Causalidade:
  - Um sistema é causal se a saída $y[n_0]$ depende de $y[n]$ e/ou $x[n]$ para $n \leq n_0$, ou seja, não depende de valores futuros
  - Exemplos:

Forward Difference:	*y[n] = x[n+1] - x[n]*	Não Causal (antecipativo)
Backward Difference:	*y[n] = x[n] - x[n-1]*	Causal

O sistema é dito ser causal se sua **Resposta ao Impulso** é nula para tempos negativos

$$\boxed{h[n] = 0, \quad n < 0}$$

Sistemas Causais

- Exemplo

Filtro: $\mathbf{y[n] = 0{,}5\ x[n] + 2{,}5\ x[n\text{-}2]}$, para $n \geq 0$; é um sistema causal?

Como a saída $y[n]$ para $n \geq 0$ só depende da entrada corrente $x[n]$ e de seu valor passado $x[n\text{-}2]$, então o sistema é causal (não antecipativo).

Logo, trata-se de um **Sistema Causal**

Obs.: Todo sistema causal é realizável em TEMPO REAL.

Sistemas Causais

- Exemplo

Filtro:

$\boldsymbol{y[n] = 0{,}25.x[n\text{-}1] + 0{,}5.x[n+1] - 0{,}4.y[n\text{-}1]}$, para $n \geq 0$; é causal?

Como a saída $y[n]$ para $n \geq 0$ depende do valor futuro $x[n+1]$, então o sistema é não causal.

Logo, trata-se de um **Sistema Não Causal (antecipativo)**

Obs.: Todo sistema antecipativo não pode ser realizado em TEMPO REAL.

Sistemas Estáveis
Quanto à estabilidade

- Estabilidade
  - Um sistema é considerado estável se a sua saída $\boldsymbol{y[n]}$ for limitada para toda e qualquer entrada $\boldsymbol{x[n]}$ limitada

    A entrada $x[n]$ é limitada se: $|\, x[n] \,| \le B_x < \infty, \quad \forall n$

    A saída $y[n]$ é limitada se: $|\, y[n] \,| \le B_y < \infty, \quad \forall n$
  - Exemplos:

$$y[n] = x^2[n],$$

$$y[n] = \log(x[n]),$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]$$

SLIT estável $\Leftrightarrow$ Resposta ao Impulso é absolutamente somável

$$\boxed{S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty}$$

Critério BIBO (Bounded Input – Bounded Output)

Sistemas Estáveis

- Exemplo

Filtro: $h[n] = 0{,}25^n u[n]$ para $n \geq 0$ e com $y[-1] = 0$; é estável?

Usando o critério BIBO: $$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(0{,}25^k\, u[k]\right)$$

Aplicando a definição de degrau unitário: $$S = \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}25^k = 1 + 0{,}25 + 0{,}25^2 + \ldots$$

Soma de **Séries Geométricas** de razão a: $$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \qquad |a| < 1$$

onde: $|a| = |0{,}25| < 1 \quad \Rightarrow \quad S = 1 + 0{,}25 + 0{,}25^2 + \ldots = \frac{1}{1-0{,}25} = \frac{4}{3} < \infty$

Logo, trata-se de um **Sistema Estável**

Resumo

- Algumas características de sistemas que facilitam a sua análise, projeto e implementação:
  - *Linearidade*
  - *Invariância ao tempo*
  - *Causalidade*
  - *Estabilidade*

- A Resposta ao Impulso e a Equação de Diferenças (EDLCC) são formas de representação dos SLITD's.

Exercícios

1. Determine quais dos sistemas seguintes é linear:
   a. $y[n] = 5x[n] + 2x^2[n]$
   b. $y[n] = x[n\text{-}1] + 4x[n]$
   c. $y[n] = 4x^3[n\text{-}1] - 2x[n]$

2. Determine quais dos sistemas seguintes é invariante ao tempo:
   a. $y[n] = \text{-}5x[n\text{-}10]$
   b. $y[n] = 4x[n^2]$

3. Determine quais dos seguintes sistemas é causal.
   a. $y[n] = 0.5x[n] + 100x[n\text{-}2] - 20x[n\text{-}10]$
   b. $y[n] = x[n+4] + 0.5x[n] - 2x[n\text{-}2]$

4. Determine a estabilidade dos seguintes SLIT's:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 0.75^k \, x(n-k) \qquad\qquad y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \, x(n-k)$$

Gabarito

1.	a) e c) são sistemas não lineares.	
2.	a) invariante	b) variante
3.	a) causal	b) não causal
4.	a) Estável	b) Instável