

Autômatos de Pilha

1

EDUARDO FREIRE NAKAMURA

Instituto de Computação
Universidade Federal do Amazonas
nakamura@icomp.ufam.edu.br

¹Este material utiliza conteúdo das aulas fornecidas pelo Prof. Vilar da Câmara Neto (disponível em <http://http://prof.vilarneto.com>).

²Permissão de uso fornecida pelos autores.

³As figuras utilizadas neste material são de domínio público, disponíveis na Internet sem informações de direitos autorais.

Autômatos de Pilha Determinísticos

2

OBJETIVO

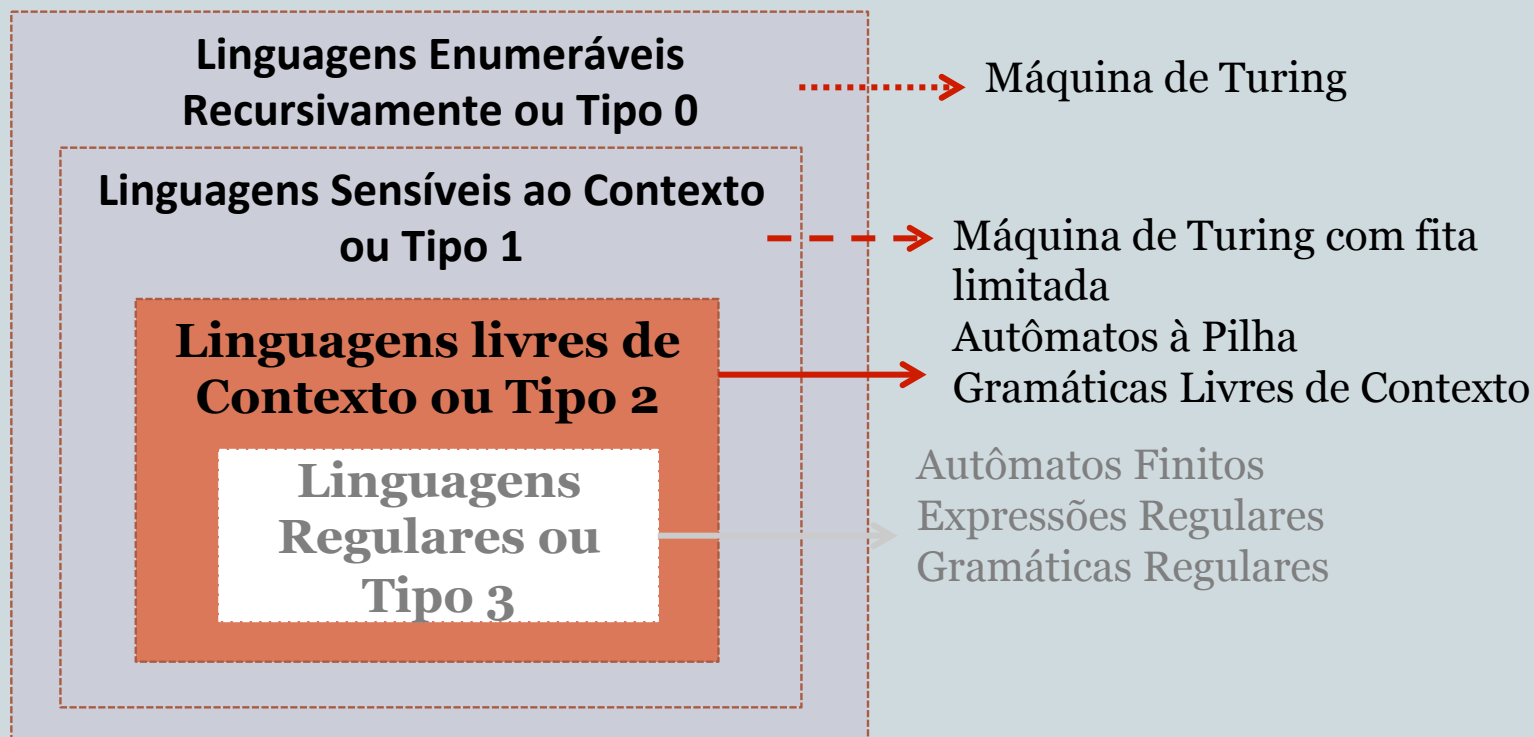
COMPREENDER O FUNCIONAMENTO DE UM APD

PROJETAR UM APD

Introdução

3

Hierarquia de Chomsky:



Introdução

- Um **Autômato de Pilha (AP)** é um modelo de máquina de estados, assim como os AFs, que permite representar um determinado conjunto de linguagens (as linguagens livres de contexto).
- Em contraste com os AFs (que armazenam apenas o estado atual e a sequência de símbolos restantes), os APs possuem um mecanismo primitivo de memória capaz de registrar alguma informação sobre os passos anteriores da execução da máquina.
- Esta memória é uma **pilha de símbolos**, de onde elementos podem ser retirados (desempilhados) e empilhados a cada transição.

Alfabeto de Pilha

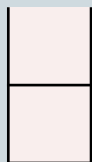
5

- Os símbolos que podem ser empilhados e desempilhados fazem parte de um alfabeto próprio, chamado de alfabeto da pilha e é designado pela letra Γ
- O alfabeto da pilha é distinto do alfabeto de entrada Σ

Empilhamento e Desempilhamento

6

- Exemplo de sequência de empilhamento e desempilhamento de símbolos, com $\Gamma = \{X, Y, Z\}$



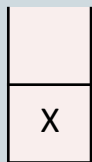
Pilha vazia



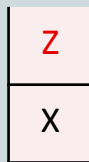
Empilhamento de X



Empilhamento de Y



Desempilhamento de Y



Empilhamento de Z



Desempilhamento de Z e empilhamento de X

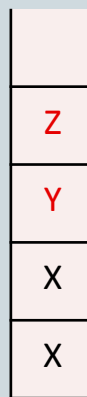
Empilhamento e Desempilhamento

7

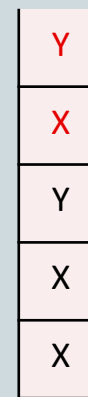
- Pode-se também empilhar qualquer palavra, e a palavra λ também pode ser desempilhada
- Neste caso, o empilhamento ocorre na **ordem inversa**



Estado atual da pilha



Empilhamento da
palavra ZY



Desempilhamento de Z e
empilhamento de YX

Iniciação e Reconhecimento

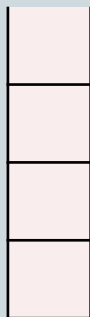
8

- O AP sempre inicia a sua execução com a pilha vazia
- O modelo padrão de AP reconhece uma palavra quando as três condições seguintes são obedecidas **simultaneamente**
 1. a palavra de entrada é inteiramente consumida
 2. a máquina pára em um estado final
 3. a pilha encontra-se vazia no instante em que a palavra de entrada termina de ser consumida

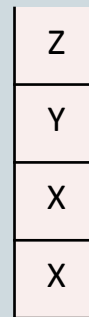
Representação da Pilha

9

- O conteúdo da pilha em um determinado instante é representado por uma palavra s , onde $s \in \Gamma^*$, cujo conteúdo é a sequência de símbolos da pilha do **topo para a base**



Pilha vazia é representada
pela palavra $s = \lambda$

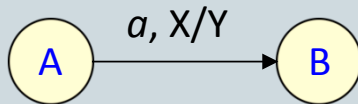


A pilha acima é representada
pela palavra $s = ZYXX$

Transições

10

- Nos APs, as transições representam
 - O símbolo da palavra consumida (assim como nos AFs)
 - Um **símbolo** a ser desempilhado (ou λ , caso nada deva ser empilhado)
 - Uma **palavra** a ser empilhada



$$\delta(A, a, X) = (B, Y)$$



A função de transição opera sobre um argumento adicional (o símbolo, ou λ , que será desempilhado) e retorna uma tupla (que inclui a palavra que será empilhada)

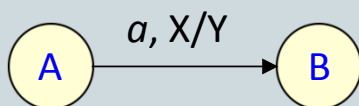
Significa: Se o autômato está no estado **A** e puder consumir o símbolo a , e **o símbolo X está no topo da pilha**, então ele transitará para o estado **B**, **desempilhará o símbolo X** , e **empilhará a palavra Y** . Portanto, para a transição ocorrer é necessário que o símbolo X esteja no topo da pilha!

Exemplo

11

- Transição

- Palavra de entrada: *abcba*
- Estado atual: *A*
- Pilha atual: *s = XYYX*



$$\delta(A, a, X) = (B, Y)$$

- A transição ocorre

- Após a transição

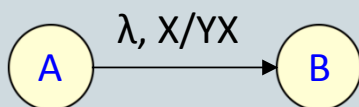
- Palavra de entrada: *bcba* (consumiu *a*)
- Estado atual: *B*
- Pilha atual: *s = YYYX* (desempilhou *X* e empilhou *Y*)

Exemplo

12

- Transição

- Palavra de entrada: *abcba*
- Estado atual: *A*
- Pilha atual: *s = XYYX*



$$\delta(A, \lambda, X) = (B, YX)$$

- A transição ocorre

- Após a transição

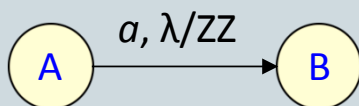
- Palavra de entrada: *abcba* (consumiu λ)
- Estado atual: *B*
- Pilha atual: *s = YXYYX* (desempilhou *X* e empilhou *YX*)

Exemplo

13

- Transição

- Palavra de entrada: *abcba*
- Estado atual: *A*
- Pilha atual: *s = XYYX*



$$\delta(A, a, \lambda) = (B, ZZ)$$

- A transição ocorre

- Após a transição

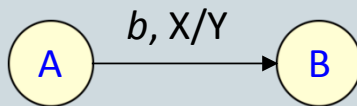
- Palavra de entrada: *bcba* (consumiu *a*)
- Estado atual: *B*
- Pilha atual: *s = ZZXYYX* (desempilhou *λ*, empilhou *ZZ*)

Exemplo

14

- Transição

- Palavra de entrada: *abcba*
- Estado atual: *A*
- Pilha atual: *s = XYYX*



$$\delta(A, b, X) = (B, Y)$$

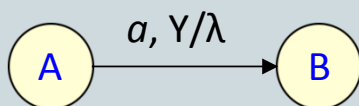
- A transição **não ocorre**
- Não é possível consumir *b*

Exemplo

15

- Transição

- Palavra de entrada: *abcba*
- Estado atual: *A*
- Pilha atual: *s = XYYX*



$$\delta(A, a, Y) = (B, \lambda)$$

- A transição **não ocorre**

- É possível consumir *a*
- Mas não é possível desempilhar *Y*

Casos de Uso e Exemplos

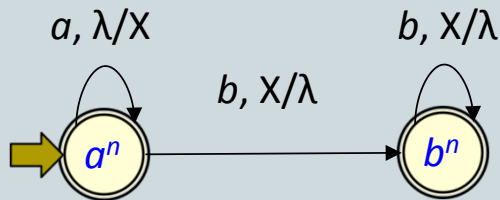
16

- O caso de uso mais comum de APs é utilizar a pilha como um contador de símbolos
 - Em uma primeira etapa, a pilha é populada para registrar o número de ocorrências de um determinado símbolo de entrada
 - Posteriormente, a pilha é esvaziada para controlar o número de ocorrências de outro símbolo de entrada

Casos de Uso e Exemplos

17

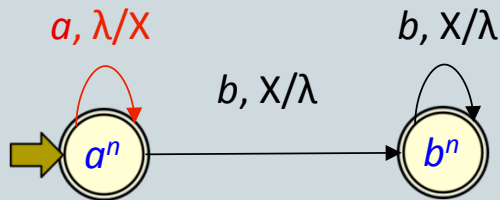
- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$



Casos de Uso e Exemplos

18

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

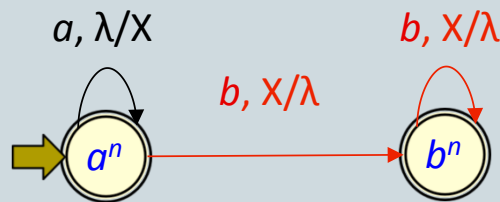


- A primeira transição **empilha** um símbolo X para cada símbolo a da palavra de entrada

Casos de Uso e Exemplos

19

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

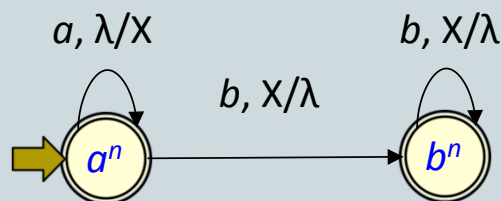


- A primeira transição **empilha** um símbolo X para cada símbolo a da palavra de entrada
- As demais transições **desempilham** um símbolo X para cada símbolo b da palavra de entrada

Casos de Uso e Exemplos

20

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

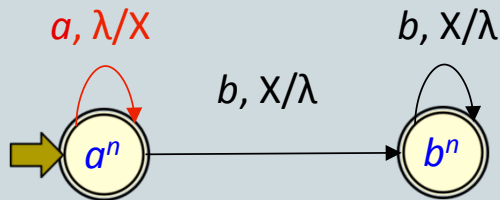


- Palavra de entrada: $a a a a b b b b$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = \lambda$

Casos de Uso e Exemplos

21

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

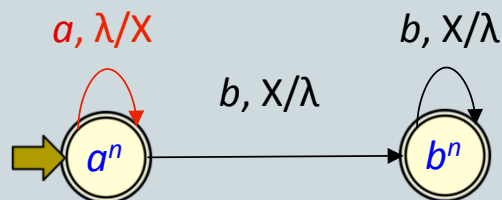


- Palavra de entrada: $a a a b b b b$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = X$

Casos de Uso e Exemplos

22

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

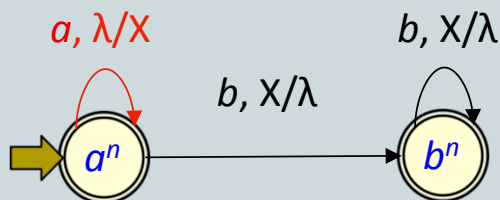


- Palavra de entrada: $aabbbb$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = XX$

Casos de Uso e Exemplos

23

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

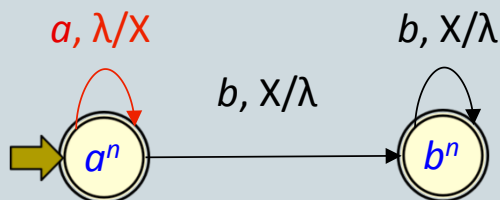


- Palavra de entrada: $a b b b b$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = X X X$

Casos de Uso e Exemplos

24

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

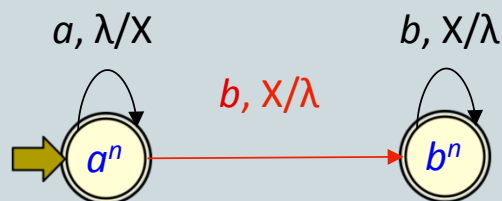


- Palavra de entrada: $b b b b$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = X X X X$

Casos de Uso e Exemplos

25

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

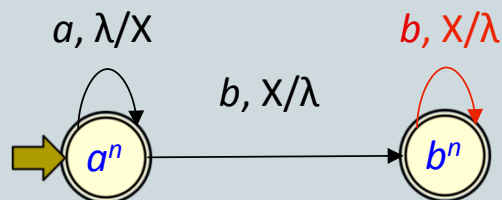


- Palavra de entrada: bbb
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = XXX$

Casos de Uso e Exemplos

26

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

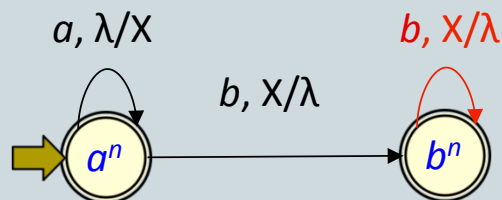


- Palavra de entrada: bb
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = XX$

Casos de Uso e Exemplos

27

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

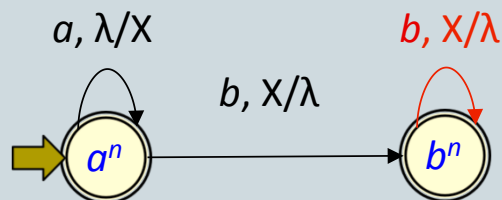


- Palavra de entrada: b
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = X$

Casos de Uso e Exemplos

28

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

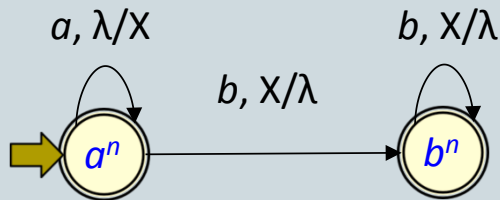


- Palavra de entrada: λ
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = \lambda$

Casos de Uso e Exemplos

29

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$



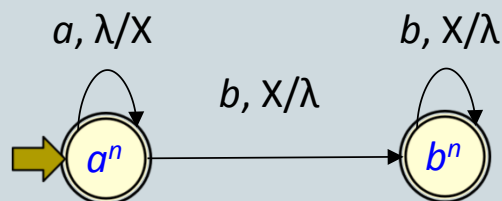
- Palavra de entrada: λ
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = \lambda$

- ✓ Palavra consumida
- ✓ Estado final
- ✓ Pilha vazia
- ✓ Reconhece a palavra!

Casos de Uso e Exemplos

30

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

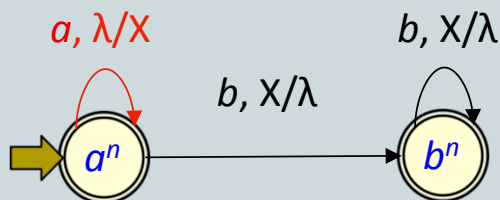


- Palavra de entrada: $a a a a b b$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = \lambda$

Casos de Uso e Exemplos

31

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

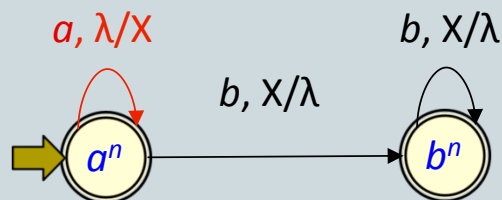


- Palavra de entrada: $a a a b b$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = X$

Casos de Uso e Exemplos

32

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

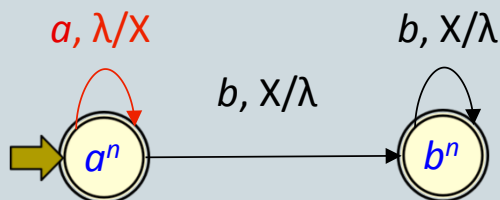


- Palavra de entrada: $aabb$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = XX$

Casos de Uso e Exemplos

33

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

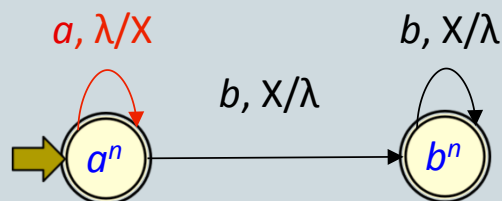


- Palavra de entrada: abb
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = XXX$

Casos de Uso e Exemplos

34

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

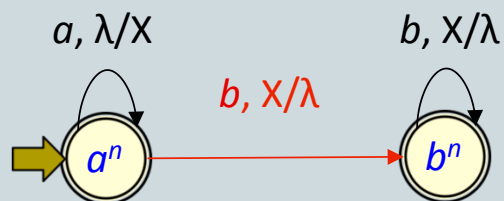


- Palavra de entrada: bb
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = XXXX$

Casos de Uso e Exemplos

35

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

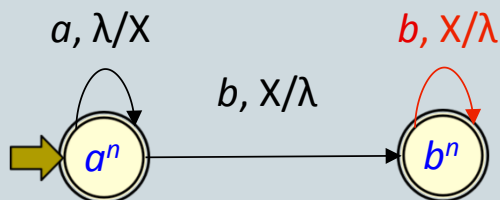


- Palavra de entrada: b
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = XXX$

Casos de Uso e Exemplos

36

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

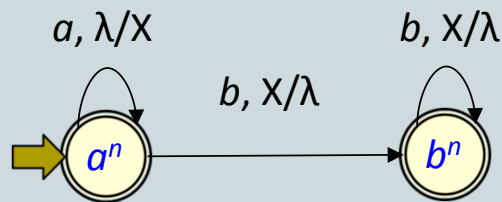


- Palavra de entrada: λ
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = XX$

Casos de Uso e Exemplos

37

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$



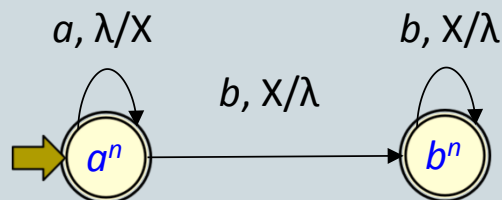
- Palavra de entrada: λ
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = XX$

- ✗ Palavra consumida
- ✗ Estado final
- ✗ Pilha não vazia
- ✗ Não reconhece a palavra!

Casos de Uso e Exemplos

38

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

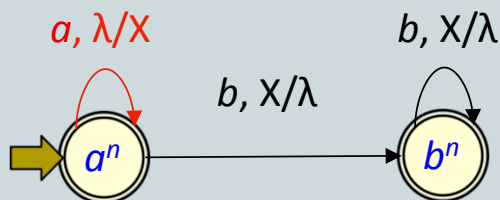


- Palavra de entrada: $aabbbb$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = \lambda$

Casos de Uso e Exemplos

39

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

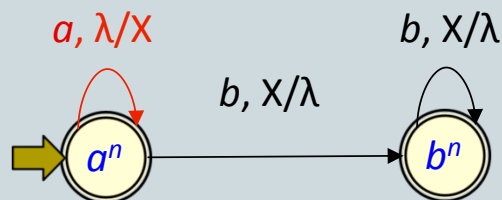


- Palavra de entrada: $a b b b b$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = X$

Casos de Uso e Exemplos

40

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

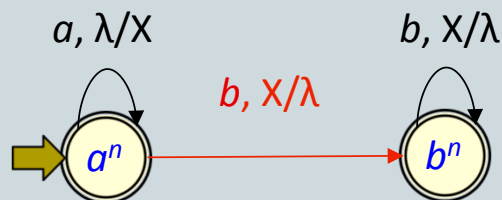


- Palavra de entrada: $b b b b$
- Estado atual: a^n
- Pilha atual: $s = X X$

Casos de Uso e Exemplos

41

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

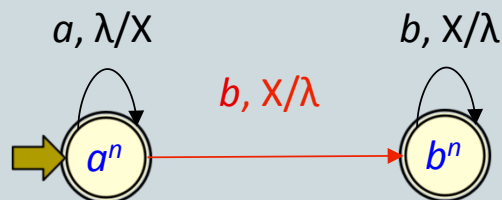


- Palavra de entrada: bbb
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = X$

Casos de Uso e Exemplos

42

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

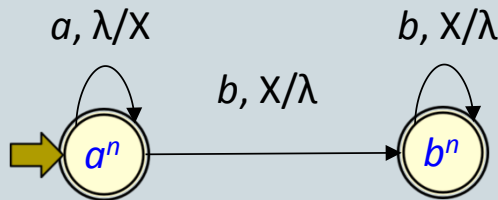


- Palavra de entrada: bb
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = \lambda$

Casos de Uso e Exemplos

43

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$



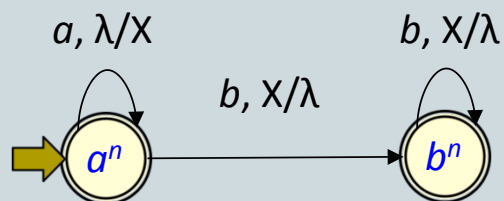
- Palavra de entrada: bb
- Estado atual: b^n
- Pilha atual: $s = \lambda$

- ✗ Palavra não consumida
- ✗ Estado final
- ✗ Pilha vazia
- ✗ Não reconhece a palavra!

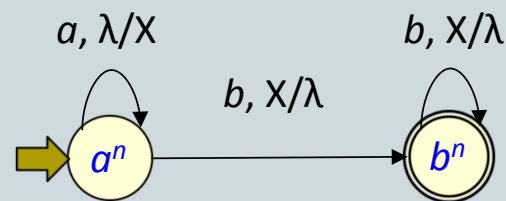
Casos de Uso e Exemplos

44

- Exemplo 1: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$



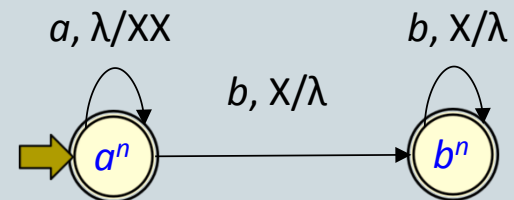
- E se $n > 0$ no exemplo?



Casos de Uso e Exemplos

45

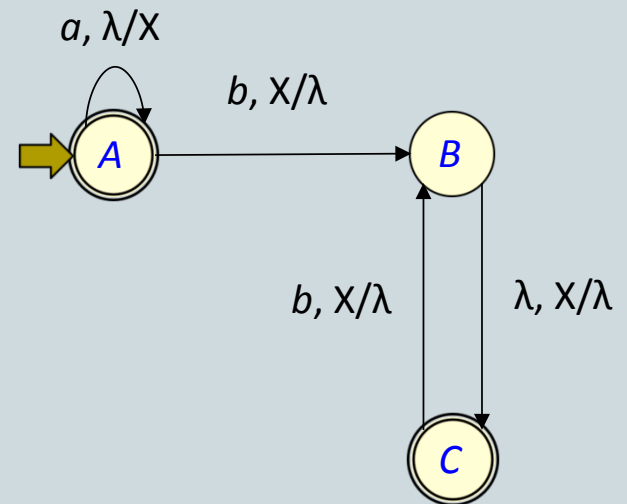
- Exemplo 2: $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$
- O número de b 's é o dobro do número de a 's
- Solução
 - Empilhar dois símbolos para cada a consumido
 - Desempilhar um símbolo para cada b consumido



Casos de Uso e Exemplos

46

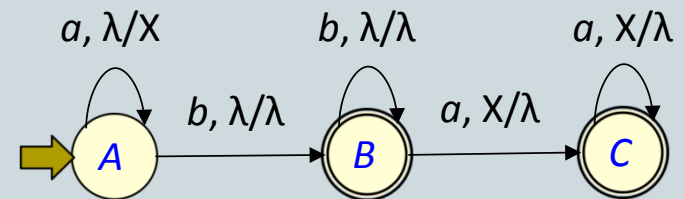
- Exemplo 3: $\{a^{2^n}b^n \mid n \geq 0\}$
- O número de a 's é o dobro do número de b 's
- Não é permitido desempilhar mais de um símbolo de cada vez!?



Casos de Uso e Exemplos

47

- O “contador” implementado pela pilha não precisa ser utilizado imediatamente
- A contagem pode ser necessária em um ponto mais adiante
- Exemplo 4:
 - $\{a^n b^m a^n \mid n \geq 0 \text{ e } m > 0\}$

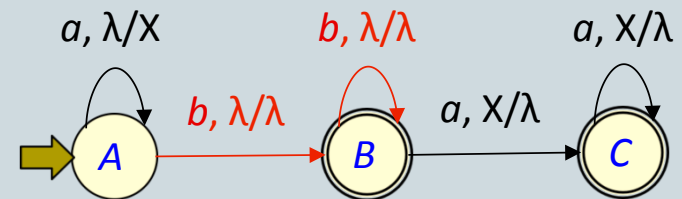


Casos de Uso e Exemplos

48

- O “contador” implementado pela pilha não precisa ser utilizado imediatamente
- A contagem pode ser necessária em um ponto mais adiante
- Exemplo 4:
 - $\{a^n b^m a^n \mid n \geq 0 \text{ e } m > 0\}$

- Algumas transições **não alteram a pilha**, pois durante o consumo de b 's o valor “contado” pela pilha não é utilizado



Exercício

49

1. $L = \{xy \mid x \in \{a,b\}^*, y \in \{c,d\}^* \text{ e } |x| = |y| \}$
2. $L = \{a^m b^n c^{m+n} \mid m, n \geq 0\}$
3. $L = \{a^i b^j c^k d^m \mid i+j = k+m, i, j, k, m \geq 0\}$
4. $L = \{a^m b^n c^n d^m, \mid m, n \geq 0\}$
5. $L = \{p \in \{0,1\}^* \mid \text{o número de 0s é igual ao número de 1s}\}$

Autômatos de Pilha Não Determinísticos

50

OBJETIVO

COMPREENDER O FUNCIONAMENTO DE UM APN

COMPREENDER AS DIFERENÇAS ENTRE APD E APN

PROJETAR UM APN

Introdução

51

- No caso dos AFs, é simples determinar se ele é determinístico ou não
 - Se houver transições λ , então o AF é **não determinístico**
 - Se existir transição de saída a partir de todos os estados para cada símbolo do alfabeto de entrada e não houver mais de uma transição de saída para o mesmo símbolo a partir de algum estado, então o AF é **determinístico**
 - Caso contrário, ele é **não determinístico**

Introdução

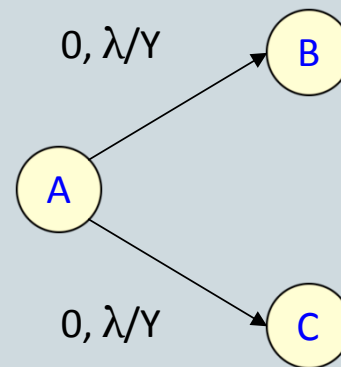
52

- Nos APs, a questão é mais complexa
- Informalmente, um AP é **não determinístico** se houver mais de um caminho possível para alguma configuração da máquina a partir de algum estado
- Note que este conceito é diferente daquele visto para os AFs!

Não Determinismo

53

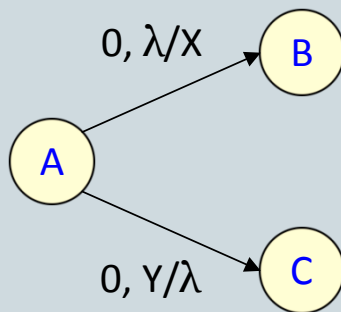
- Há os casos óbvios de não determinismo
- Duas transições idênticas levando a estados distintos
- Mas esse não é o único caso!



Não Determinismo

54

- Observe

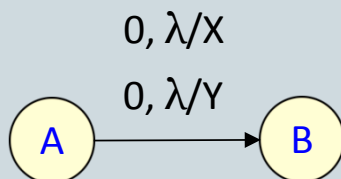


- Se o autômato entrar no estado **A** com o símbolo **Y** no topo da pilha, há dois caminhos possíveis
 1. Empilhar **X** e transitar para **B**
 2. Desempilhar **Y** e transitar para **C**
- Portanto, há ambiguidade entre essas duas transições!

Não Determinismo

55

- A ambiguidade também pode ocorrer com transições que seguem para o mesmo estado

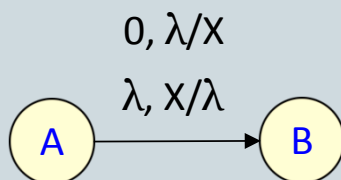


- O autômato pode transitar de A para B com dois efeitos distintos
 1. Consumir 0 e empilhar X
 2. Consumir 0 e empilhar Y

Não Determinismo

56

- A ambiguidade pode ocorrer até mesmo quando a palavra a ser consumida é diferente



- O autômato pode transitar de **A** para **B** com dois efeitos distintos, caso o próximo símbolo seja 0 e a pilha contiver X no topo
 1. Consumir 0 e empilhar X
 2. Não consumir símbolo de entrada e desempilhar X

Não Determinismo

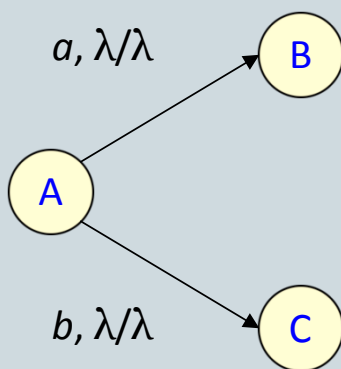
57

- Em resumo, a ambiguidade pode ocorrer dependendo dos seguintes fatores (para transições saindo do mesmo estado)
 - Símbolo a ser consumido da palavra de entrada
 - Símbolo a ser retirado da pilha
- Um AP é não determinístico se houver pelo menos **duas transições compatíveis**
- **Transições compatíveis** são aquelas que partem do mesmo estado e que podem ser executadas simultaneamente para certas palavras de entrada e certos conteúdos da pilha

Transições Compatíveis

58

- Exemplo 1



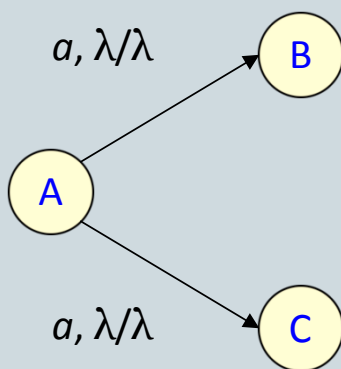
As transições **não são compatíveis!**

O símbolo a ser consumido (“a” ou “b”) define a transição a ser executada.

Transições Compatíveis

59

- Exemplo 2



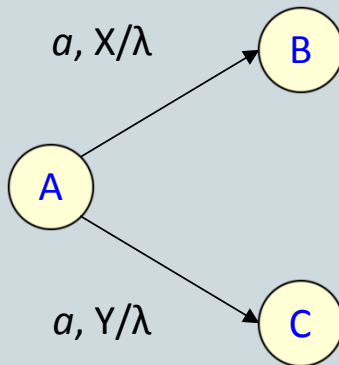
As transições **são compatíveis!**

O símbolo a ser consumido (“a”) não é suficiente para determinar a transição a ser executada.

Transições Compatíveis

60

- Exemplo 3



As transições **não são compatíveis!**

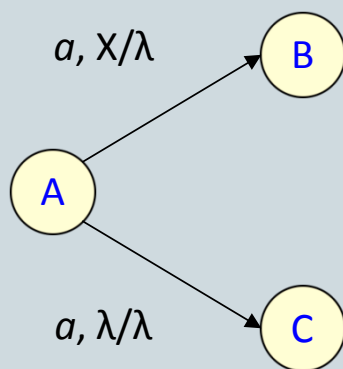
Embora ambas consumam o mesmo símbolo (“a”), o símbolo no topo da pilha (“X” ou “Y”) decide qual é a transição a ser executada.

Se o símbolo no topo da pilha for outro, ou se a pilha estiver vazia, então nenhuma das duas transições é executada.

Transições Compatíveis

61

- Exemplo 4



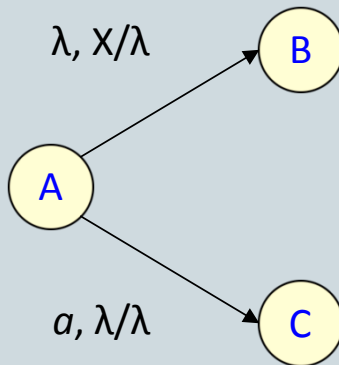
As transições **são compatíveis!**

Se o próximo símbolo a ser consumido for “a” e o topo da pilha contiver “X”, então o autômato pode seguir tanto para B (consumindo o topo da pilha) quanto para C (deixando a pilha intacta)

Transições Compatíveis

62

- Exemplo 5



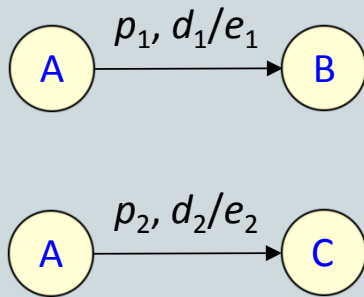
As transições **são compatíveis!**

Se o próximo símbolo a ser consumido for “a” e o topo da pilha contiver “X”, então o autômato pode seguir tanto para B (consumindo o topo da pilha) quanto para C (deixando a pilha intacta)

Transições Compatíveis

63

Formalmente, duas transições



são **compatíveis** se, e somente se

$$p_1 = p_2 \text{ ou } p_1 = \lambda \text{ ou } p_2 = \lambda$$

e

$$d_1 = d_2 \text{ ou } d_1 = \lambda \text{ ou } d_2 = \lambda$$

- Note que **transições compatíveis** sempre partem do mesmo estado!
- Lembrando o conceito
 - O **APN** possui pelo menos duas transições compatíveis
 - O **APD** não possui transições compatíveis

APD vs APN

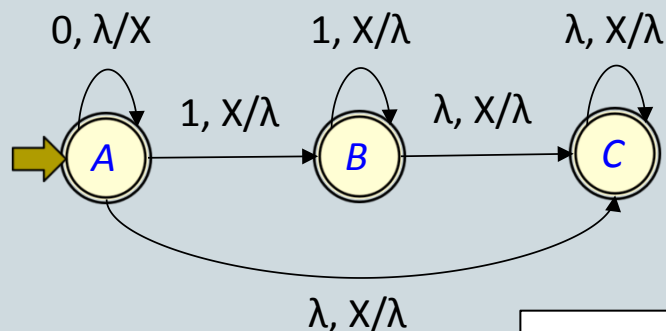
64

- APD e APN possuem a mesma capacidade?
- Existem linguagens reconhecidas por um APN, mas não pelo APD?

Exemplo 01

65

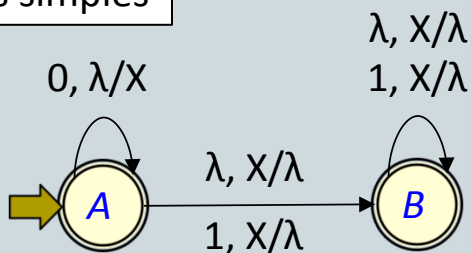
- $L_1 = \{0^m 1^n \mid m \geq n\}$



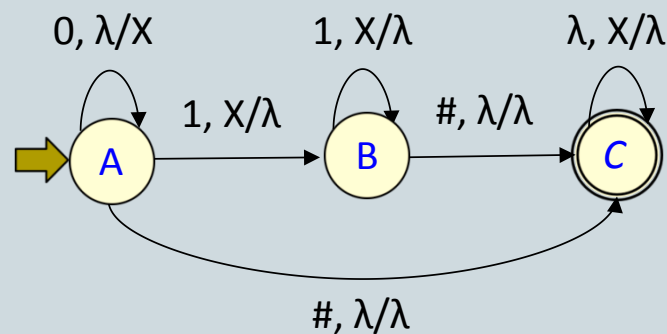
APD ou APN?

APN

APN mais simples



- $L_2 = \{0^m 1^n \# \mid m \geq n\}$



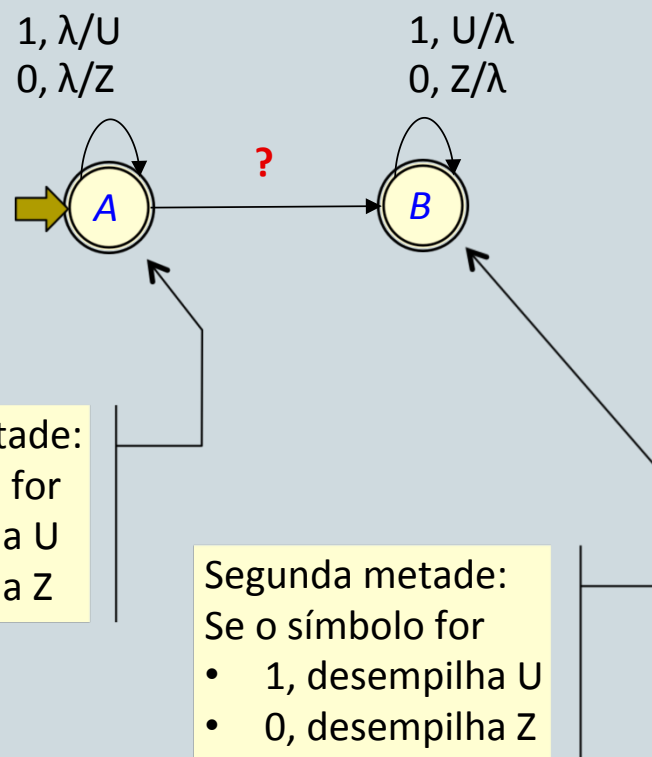
APD ou APN?

APD

Exemplo 02

66

- $L_1 = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R \}$
- Três casos

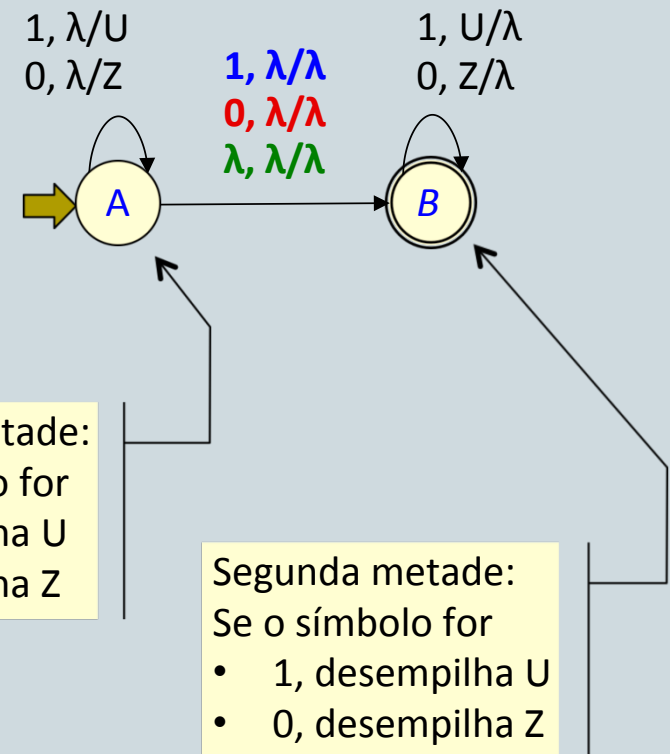


Exemplo 02

67

- $L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R \}$
- Três casos
 1. $|w|$ é par
 - ✦ Ex: 0110
 2. $|w|$ é ímpar com 0 no meio
 - ✦ Ex: 01010
 3. $|w|$ é ímpar com 1 no meio
 - ✦ Ex: 01110

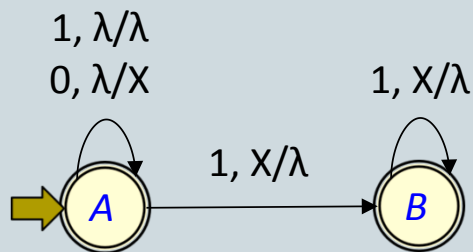
É possível fazer um APD que reconhece L ?



Exemplo 03

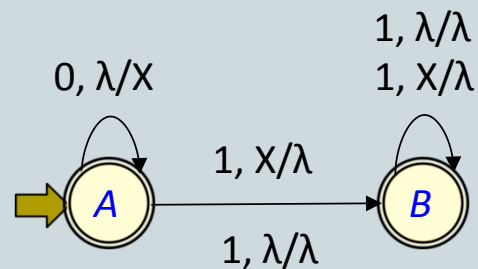
68

- $L = \{ 0^m 1^n \mid m \leq n \}$



Está correto este APN?

O que acontece com a palavra 101?



E este?

Exercício

69

1. $L = wcw^R : w \in \{a,b\}^*$
2. $L = ww^R : w \in \{a,b\}^*$
3. $L = \{0^k 1^n \mid k \leq n \leq 2k\}$
4. $L = \{p \in \{0,1\}^* \mid \text{o número de 0s é diferente do número de 1s}\}$