Lema do Bombeamento Linguagens Regulares

EDUARDO FREIRE NAKAMURA

Instituto de Computação
Universidade Federal do Amazonas
nakamura@icomp.ufam.edu.br

[1]Este material utiliza conteúdo das aulas fornecidas pelo Prof. Vilar da Câmara Neto (disponível em http://http://prof.vilarneto.com).
[2]Permissão de uso fornecida pelos autores.
[3]As figuras utilizadas neste material são de domínio público, disponíveis na Internet sem informações de direitos autorais.

Introdução

- Linguagens regulares são aquelas reconhecidas por AFs
  - Geradas por GRs
  - Representadas por ERs

- Há alguma característica comum às Linguagens Regulares tal que dada uma linguagem *L*, seja possível determinar se ela é ou não regular, antes de tentar construir um AF?

- Toda linguagem finita é regular!

- E se a linguagem for infinita?

Introdução

- O Lema do Bombeamento (LB) especifica uma propriedade comum à qualquer linguagem regular

- Outras linguagens não reconhecidas por AFs (não regulares) também possuem esta propriedade
  - Portanto, se *L* satisfaz o LB, não significa que *L* seja regular
  - Contudo, se *L* não satisfaz o LB, então *L* não é regular

Eduardo Freire Nakamura (nakamura@icomp.ufam.edu.br)

Intuição

- O LB diz que qualquer linguagem infinita de dada classe pode ser bombeada e ainda pertencer àquela classe

- A linguagem pode ser bombeada se
  - Qualquer cadeia suficientemente longa na linguagem pode ser quebrada em pedaços
  - Alguns destes pedaços podem ser repetidos um número arbitrário de vezes (bombeada) para produzir uma cadeia mais longa na linguagem

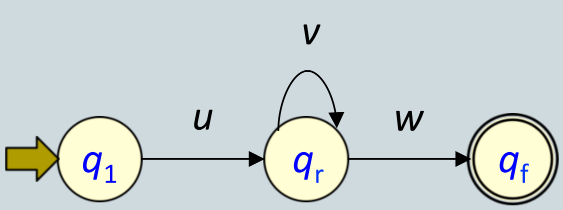
Intuição

- Para toda linguagem regular L, existe um AF que a reconhece
  - Seja o AF com o menor número de estados possível
  - Seja k, a quantidade de estados desse AF
  - Seja $z \in L$, tal que $|z| \geq k$
  - Portanto, há uma sequência de estados $q_1, \ldots, q_f$ (q_f final e q_1 inicial), que reconhece z
  - Como o AFD tem apenas k estados e $|z| \geq k$, ao menos um estado é visitado mais de uma vez
  - Seja q_r o estado visitado múltiplas vezes
- A cada visita ao estado q_r uma cadeia de símbolos se repete, ou seja, é bombeada

Intuição

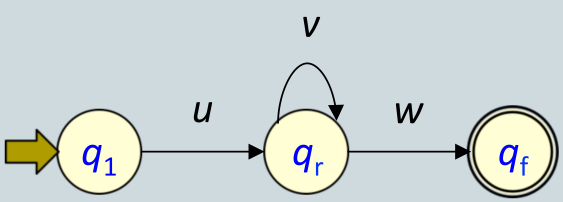
- Vamos dividir z em três subcadeias, ou seja $z = uvw$
  - u é a parte que aparece antes de q_r
  - v é a parte que aparece entre duas ocorrências de q_r
  - w é a parte que aparece após a segunda ocorrência de q_r

- Podemos representar esta situação com o AFNE abaixo



Intuição

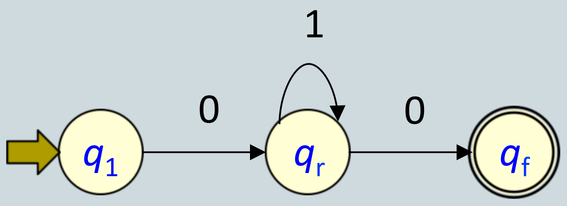
- Assim,
  - Para todo i ≥ 0, $uv^iw \in L$



uv^0w	=	uw	$\in$	L	(v não ocorre)
uv^1w	=	uvw	$\in$	L	(v ocorre uma vez)
uv^2w	=	$u(vv)w$	$\in$	L	(v ocorre duas vezes)
uv^3w	=	$u(vvv)w$	$\in$	L	(v ocorre três vezes)
		$\vdots$			
uv^nw	=	$u(v^n)w$	$\in$	L	(v ocorre n vezes)

Exemplo 1

- L_1 = 01*0
  - Ou seja, L_1 = {00, 010, 0110, ... }
- AF para L_1

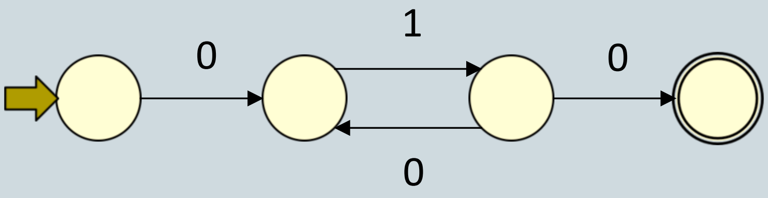


- A cadeia 0<u>1</u>0 é bombeável em L_1
  - A porção sublinhada pode ser bombeada quantas vezes se queira
  - A palavra obtida pertencerá a L_1
- Quais cadeias são bombeáveis obtendo-se uma palavra de L_1?
  - 0110
  - 011110
  - 0111110
  - 00

Eduardo Freire Nakamura (nakamura@icomp.ufam.edu.br)

Exemplo 2

- Seja L_2 definida pelo AF abaixo



- Quais palavras pertencem a L_2 e são bombeáveis?
  - 010
  - 01010
  - 0101010
  - 010101010

Lema do Bombeamento

- Lema: Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$, tal que para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem u, v e w, satisfazem as seguintes condições
  - $z = uvw$
  - $|uv| \leq k$
  - $v \neq \lambda$
  - $uv^iw \in L$ para todo $i \geq 0$

- v é a subcadeia que pode ser bombeada (removida ou repetida arbitrariamente)

Como usar o LB?

LB: Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$, tal que para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem u, v e w, satisfazem as seguintes condições

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^iw \in L$ para todo $i \geq 0$

1. Supõe-se que L seja regular
2. Escolhe-se uma palavra z cujo tamanho seja maior que k, a constante do LB
3. Mostra-se que, para toda decomposição de z em u, v e w, existe i tal que uv^iw não pertence a L

O segredo é escolher z e i tais que uv^iw não pertence a L

Exemplo 1

LB: Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$, tal que para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem u, v e w, satisfazem as seguintes condições

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^iw \in L$ para todo $i \geq 0$

1. Supõe-se que L seja regular
2. Escolhe-se uma palavra z cujo tamanho seja maior que k, a constante do LB
3. Mostra-se que, para toda decomposição de z em u, v e w, existe i tal que uv^iw não pertence a L

- $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x = x^R\}$
- Provar que L não é regular
  - Suponha L regular
  - Seja $z = 0^k10^k$, onde k é a constante referida no LB
  - Neste caso, v possui apenas 0's, pois $z = uvw = 0^k10^k$ e $|uv| \leq k$
  - v tem ao menos um 0, pois $v \neq \lambda$
  - Portanto, $uv^2w = (0^{k+|v|})10^k$ não pertence a L, uma contradição
  - Logo, L não pode ser regular

Eduardo Freire Nakamura (nakamura@icomp.ufam.edu.br)

Exemplo 2

LB: Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$, tal que para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem u, v e w, satisfazem as seguintes condições

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^iw \in L$ para todo $i \geq 0$

1. Supõe-se que L seja regular
2. Escolhe-se uma palavra z cujo tamanho seja maior que k, a constante do LB
3. Mostra-se que, para toda decomposição de z em u, v e w, existe i tal que uv^iw não pertence a L

- $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbf{N}\}$
- Provar que L não é regular
  - Suponha L regular
  - Seja $z = a^k b^k$, onde k é a constante referida no LB
  - Neste caso, v possui apenas a's, pois $z = uvw = a^k b^k$ e $|uv| \leq k$
  - v tem ao menos um a, pois $v \neq \lambda$
  - Portanto, $uv^2w = (a^{k+|v|})b^k$ não pertence a L, uma contradição
  - Logo, L não pode ser regular

Exemplo 3

LB: Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$, tal que para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem u, v e w, satisfazem as seguintes condições

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^iw \in L$ para todo $i \geq 0$

1. Supõe-se que L seja regular
2. Escolhe-se uma palavra z cujo tamanho seja maior que k, a constante do LB
3. Mostra-se que, para toda decomposição de z em u, v e w, existe i tal que uv^iw não pertence a L

- $L = \{a^m b^n \mid m > n \in \mathbf{N}\}$
- Provar que L não é regular
  - Suponha L regular
  - Seja $z = a^{k+1}b^k$, onde k é a constante referida no LB
  - Neste caso, v possui apenas a's, pois $z = uvw = a^{k+1}b^k$ e $|uv| \leq k$
  - v tem ao menos um a, pois $v \neq \lambda$
  - Portanto, $uv^0w = (a^{k+1-|v|})b^k$ não pertence a L, uma contradição
  - Logo, L não pode ser regular

Exemplo 4

LB: Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$, tal que para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem u, v e w, satisfazem as seguintes condições

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^iw \in L$ para todo $i \geq 0$

1. Supõe-se que L seja regular
2. Escolhe-se uma palavra z cujo tamanho seja maior que k, a constante do LB
3. Mostra-se que, para toda decomposição de z em u, v e w, existe i tal que uv^iw não pertence a L

- $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$
- Provar que L não é regular
  - Suponha L regular
  - Seja $z = 1^k01^k0$, onde k é a constante referida no LB
  - Neste caso, v possui apenas 1's, pois $z = uvw = 1^k01^k0$ e $|uv| \leq k$
  - v tem ao menos um 1, pois $v \neq \lambda$
  - Portanto, $uv^2w = 1^{k+|v|}01^k0$ não pertence a L, uma contradição
  - Logo, L não pode ser regular

Exercícios

- Prove que os conjuntos abaixo não são linguagens regulares

1. $\{0^m 1^n \mid m < n\}$
2. $\{0^n 1^{2n} \mid n \geq 0\}$
3. $\{0^m 1^n 0^m \mid m, n \geq 0\}$
4. $\{10^n 1^n \mid n \geq 0\}$