

Gramáticas Livres de Contexto

1

EDUARDO FREIRE NAKAMURA

Instituto de Computação
Universidade Federal do Amazonas
nakamura@icomp.ufam.edu.br

Introdução

2

- O estudo de Linguagens Livres de Contexto pode ser abordado através dos formalismos:
 - Reconhecedor (Autômato de pilha)
 - Gerador (Gramática Livre de Contexto)

Introdução

3

- **Gramáticas livres de contexto (GLC)** foram desenvolvidas por linguistas para representar linguagens naturais:

⟨frase⟩	→	⟨grupo nominal⟩ ⟨grupo verbal⟩
⟨grupo nominal⟩	→	⟨artigo⟩ ⟨substantivo⟩ ⟨adjetivo⟩
⟨grupo verbal⟩	→	⟨verbo intransitivo⟩
⟨artigo⟩	→	“o”
⟨nome⟩	→	“aluno”
⟨adjetivo⟩	→	“responsável”
⟨verbo intransitivo⟩	→	“estudou”
...

- Entretanto, descobriu-se que GLC não são adequadas para linguagens como o inglês
- Em paralelo, cientistas da computação desenvolviam a notação de Backus e Naur (BNF), para descrever linguagens de programação, equivalente às GLC

Classe das linguagens livres de contexto

4

- Compreende um universo mais amplo de linguagens do que a classe das linguagens regulares
- Os algoritmos reconhecedores são relativamente simples e eficientes
- Aplicação
 - Analisadores sintáticos
 - Tradutores de linguagens e
 - Processadores de textos em geral

Gramáticas livres de contexto

5

- As linguagens livres de contexto têm uma grande importância para definir a sintaxe de linguagens de programação.
- As **gramáticas livres de contexto** são as gramáticas que **geram linguagens livres de contexto**.
- **Estruturas de bloco** bem balanceadas (como **begin** e **end** associados) ou **parênteses aninhados**, não podem ser escritos com linguagens regulares, e sim com **linguagens livres de contexto**.

Gramática livre de contexto

6

- Uma GLC é uma gramática $G = (V, \Sigma, R, P)$
 - V – Conjunto de variáveis
 - Σ – alfabeto
 - R – conjunto de regras
 - P – variável de partida
- Com a restrição de que
 - Toda produção é da forma $A \rightarrow \alpha$
 - A é uma variável e α pode conter variáveis ou terminais, em qualquer ordem
- Uma linguagem é dita Linguagem Livre de Contexto (LLC) se for gerada por uma Gramática Livre de Contexto

Exemplo 1

7

- Duplo balanceamento: $L_1 = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$
 - $G_1 = (\{ S \}, \{ a, b \}, R, S)$,
 $R = \{ S \rightarrow aSb \mid \lambda \}$
 - Exemplo: geração da palavra *aabb*

$S \Rightarrow aSb$
 $\Rightarrow a**S**bb$
 $\Rightarrow aa**\lambda**bb$
 $\Rightarrow aabb$

- O duplo balanceamento é um exemplo clássico no estudo das LLCs, pois permite a implementação de estruturas balanceadas como:
 - a) blocos do tipo BEGIN – END
 - ✦ $S \rightarrow \text{begin } S \text{ end} \mid L \mid \lambda$, onde L gera uma lista de comandos por exemplo
 - b) Linguagens com parênteses balanceados na forma ()
 - ✦ $S \rightarrow (S) \mid E \mid \lambda$, onde E gera uma expressão aritmética por exemplo

Livre de Contexto – razão?

Ex: Dada a cadeia aaSbb, obtida no passo 2 da derivação de aabb:



A regra $S \rightarrow aSb$ diz que podemos substituir S pela cadeia aSb , independentemente das cadeias que a envolvem \rightarrow **independentemente do contexto de S .**

Exemplo 2

9

- $G = (\{ P \}, \{ +, *, (,), x \}, R, P)$, onde R:
 - $P \rightarrow P+P \mid P*P \mid (P) \mid x$
- Como podemos gerar a expressão $(x+x)*x$?

$P \Rightarrow P*P$	$P \rightarrow P*P$
$\Rightarrow (P)*P$	$P \rightarrow (P)$
$\Rightarrow (P+P)*P$	$P \rightarrow P+P$
$\Rightarrow (x+P)*P$	$P \rightarrow x$
$\Rightarrow (x+x)*P$	$P \rightarrow x$
$\Rightarrow (x+x)*x$	$P \rightarrow x$

- Base para as gramáticas de operandos e expressões como
 - $P \rightarrow P \text{ and } P \mid P \text{ or } P \mid \text{not } P \mid (P) \mid X$
 - $X \rightarrow E > E \mid E < E \mid E = E \mid E <> E \mid \text{True} \mid \text{False}$
 - $E \rightarrow E+E \mid E*E \mid (E) \mid x$

Derivação

10

- Considere as regras

- $E \rightarrow E+E \mid E-E \mid (E) \mid C$

- $C \rightarrow CC \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6$
 $\mid 8 \mid 7 \mid 9$

- Derivação de $(10 - 2) + 3$

$E \Rightarrow E+E$	$E \rightarrow E+E$
$\Rightarrow (E)+E$	$E \rightarrow (E)$
$\Rightarrow (E-E)+E$	$E \rightarrow E-E$
$\Rightarrow (C-E)+E$	$E \rightarrow C$
$\Rightarrow (CC-E)+E$	$C \rightarrow CC$
$\Rightarrow (CC-C)+E$	$E \rightarrow C$
$\Rightarrow (CC-C)+C$	$E \rightarrow C$
$\Rightarrow (1C-C)+C$	$C \rightarrow 1$
$\Rightarrow (10-C)+C$	$C \rightarrow 0$
$\Rightarrow (10-2)+C$	$C \rightarrow 2$
$\Rightarrow (10-2)+3$	$C \rightarrow 3$

Exercícios

11

- Construa GLC para as linguagens

1. $L = \{0^n 1^{n+3}, n \geq 0\}$

2. $L = \{0^n 1^{2n}, n \geq 0\}$

3. $L = \{0^m 1^n, m > n\}$

4. $L = \{0^m 1^n, m \leq n \leq 2m\}$

5. $L = \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$

6. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$

Árvore de derivação

12

- É conveniente representar a derivação de palavras em uma árvore de derivação, onde:
 - A raiz é a variável de partida da gramática;
 - Os vértices interiores obrigatoriamente são variáveis;
 - Se A é um vértice interior e X_1, X_2, \dots, X_n são os filhos de A , então $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$ é uma derivação da gramática
 - Um vértice folha é um símbolo terminal ou a palavra vazia λ (neste caso, λ é filho único)

Árvore de derivação

13

- Considere as regras

- $E \rightarrow E + E \mid E - E \mid (E) + C$

- $C \rightarrow CC \mid 0 \mid 1 \mid 8 \mid 7 \mid 9$

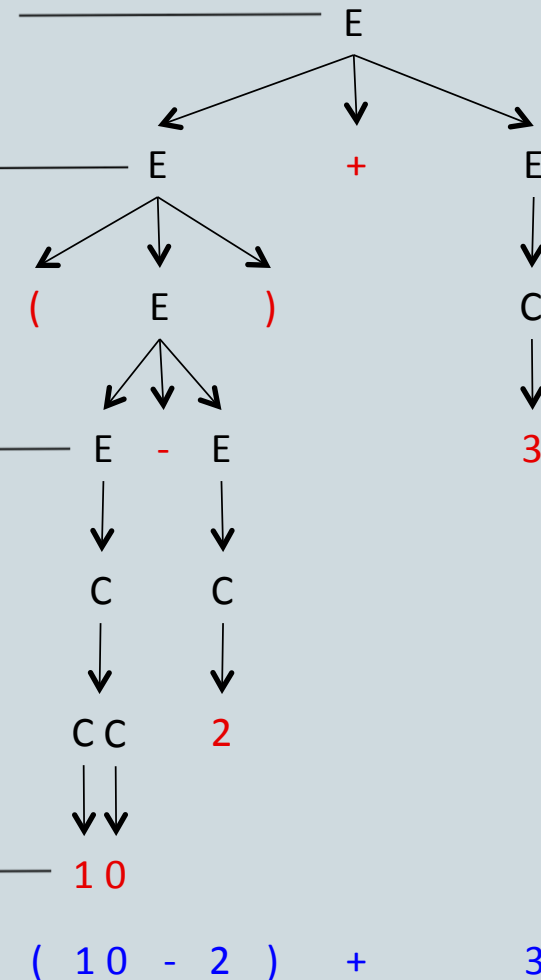
Vértices internos
são sempre
variáveis

- Qual a árvore de derivação de $(10-2)+3$?

$E - E$ (filhos) é uma
derivação de E (pai)

Toda folha é um
terminal (ou λ)

Raiz é a variável de
partida



Derivação mais à esquerda (DME)

14

- É a sequência de derivação aplicada sempre à **variável mais à esquerda**
- Regras
 - $E \rightarrow E+E \mid E-E \mid (E) \mid C$
 - $C \rightarrow CC \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 8 \mid 7 \mid 9$

- DME para $(10-2)+3$

$E \Rightarrow E+E$
 $\Rightarrow (E)+E$
 $\Rightarrow (E-E)+E$
 $\Rightarrow (C-E)+E$
 $\Rightarrow (CC-E)+E$
 $\Rightarrow (1C-E)+E$
 $\Rightarrow (10-E)+E$
 $\Rightarrow (10-C)+E$
 $\Rightarrow (10-2)+E$
 $\Rightarrow (10-2)+C$
 $\Rightarrow (10-2)+3$

Derivação mais à direita(DMD)

15

- É a sequência de derivação aplicada sempre **à variável mais à direita**
- Regras
 - $E \rightarrow E+E \mid E-E \mid (E) \mid C$
 - $C \rightarrow CC \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 8 \mid 7 \mid 9$

- DMD para $(10-2)+3$

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E+E \\ &\Rightarrow E+C \\ &\Rightarrow E+3 \\ &\Rightarrow (E)+3 \\ &\Rightarrow (E-E)+3 \\ &\Rightarrow (E-C)+3 \\ &\Rightarrow (E-2)+3 \\ &\Rightarrow (C-2)+3 \\ &\Rightarrow (CC-2)+3 \\ &\Rightarrow (C0-2)+3 \\ &\Rightarrow (10-2)+3 \end{aligned}$$

Ambiguidade

16

- Uma Gramática Livre do Contexto é dita uma **Gramática Ambígua**, se existe uma palavra que possua **duas ou mais árvores de derivação**
- Uma forma equivalente de definir ambiguidade de uma gramática é a existência de uma palavra com duas ou mais derivações mais à esquerda (direita)

Ambiguidade

17

- $G = (\{ P \}, \{ +, *, (,), x \}, R, P)$, onde R:

○ $P \rightarrow P+P \mid P*P \mid (P) \mid x$

- Como podemos gerar a expressão $x+x*x$?

- Possibilidades de DME para $x+x*x$

$$\begin{aligned} P &\Rightarrow P*P \\ &\Rightarrow P+P*P \\ &\Rightarrow x+P*P \\ &\Rightarrow x+x*P \\ &\Rightarrow x+x*x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &\Rightarrow P+P \\ &\Rightarrow x+P \\ &\Rightarrow x+P*P \\ &\Rightarrow x+x*P \\ &\Rightarrow x+x*x \end{aligned}$$

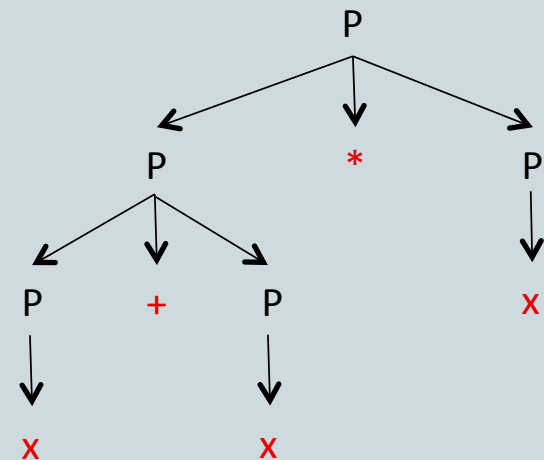
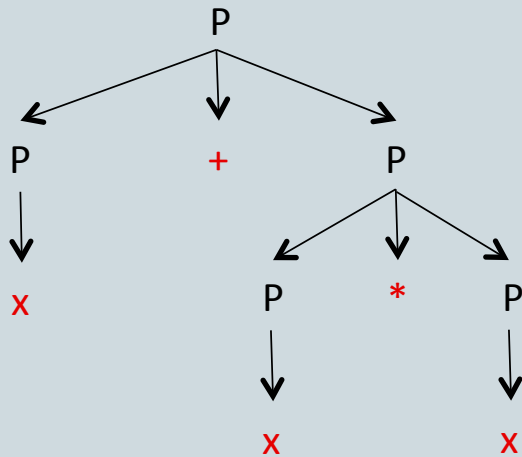
Ambiguidade

18

$P \Rightarrow P+P$
 $\Rightarrow x+P$
 $\Rightarrow x+P^*P$
 $\Rightarrow x+x^*P$
 $\Rightarrow x+x^*x$

$x+x^*x$

$P \Rightarrow P^*P$
 $\Rightarrow P+P^*P$
 $\Rightarrow x+P^*P$
 $\Rightarrow x+x^*P$
 $\Rightarrow x+x^*x$



Linguagem inerentemente ambígua

19

- Uma linguagem é Inerentemente Ambígua se qualquer Gramática Livre de Contexto que a define é ambígua
- Exemplo: $\{ w \mid w = a^n b^n c^m d^m \text{ ou } w = a^n b^m c^m d^n, n \geq 1, m \geq 1 \}$

Eliminando Regras λ

20

- Para qualquer GLC, existe uma GLC equivalente cuja única regra λ , se houver, é $P \rightarrow \lambda$, sendo P o símbolo de partida

Eliminando Regras λ

21

Exemplo

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid C$

$A \rightarrow AaaA \mid \lambda$

$B \rightarrow BBb \mid C$

$C \rightarrow cC \mid \lambda$

$P \rightarrow APB \mid C$

$A \rightarrow AaaA \mid \lambda$

$B \rightarrow BBb \mid C$

$C \rightarrow cC \mid \lambda$

Eliminando Regras λ

22

Exemplo

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

$A \rightarrow \lambda$ (regra a ser eliminada)

Eliminando Regras λ

23

Exemplo

$$\begin{aligned} P &\rightarrow APB \mid C \\ A &\rightarrow AaaA \mid \lambda \\ B &\rightarrow BBb \mid C \\ C &\rightarrow cC \mid \lambda \end{aligned}$$

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$$\begin{aligned} P &\rightarrow \textcolor{red}{A}PB \mid C \\ \textcolor{red}{A} &\rightarrow \textcolor{red}{A}aa\textcolor{red}{A} \mid \textcolor{red}{\lambda} \\ B &\rightarrow BBb \mid C \\ C &\rightarrow cC \mid \lambda \end{aligned}$$

$\textcolor{red}{A} \rightarrow \textcolor{red}{\lambda}$ (regra a ser eliminada)

Eliminando Regras λ

24

Exemplo

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

$P \rightarrow \textcolor{red}{APB} \mid \textcolor{red}{PB} \mid C$
 $\textcolor{red}{A} \rightarrow \textcolor{red}{AaaA} \mid \textcolor{red}{Aaa} \mid \textcolor{red}{aaA} \mid \textcolor{red}{aa}$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

$\textcolor{red}{A} \rightarrow \lambda$ (regra a ser eliminada)

Eliminando Regras λ

25

Exemplo

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid PB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid Aaa \mid aaA \mid aa$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

$C \rightarrow \lambda$ (regra a ser eliminada)

Eliminando Regras λ

26

Exemplo

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid PB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid Aaa \mid aaA \mid aa$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

$C \rightarrow \lambda$ (regra a ser eliminada)

Eliminando Regras λ

27

Exemplo

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid PB \mid C \mid \lambda$
 $A \rightarrow AaaA \mid Aaa \mid aaA \mid aa$
 $B \rightarrow BBb \mid C \mid \lambda$
 $C \rightarrow cC \mid c$

$C \rightarrow \lambda$ (regra a ser eliminada)

Eliminando Regras λ

28

Exemplo

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid PB \mid C \mid \lambda$
 $A \rightarrow AaaA \mid Aaa \mid aaA \mid aa$
 $B \rightarrow BBb \mid C \mid \lambda$
 $C \rightarrow cC \mid c$

$B \rightarrow \lambda$ (regra a ser eliminada)

Eliminando Regras λ

29

Exemplo

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow AP\textcolor{red}{B} \mid P\textcolor{red}{B} \mid C \mid \lambda$
 $A \rightarrow AaaA \mid Aaa \mid aaA \mid aa$
 $\textcolor{red}{B} \rightarrow \textcolor{red}{B}Bb \mid C \mid \textcolor{red}{\lambda}$
 $C \rightarrow cC \mid c$

$\textcolor{red}{B} \rightarrow \textcolor{red}{\lambda}$ (regra a ser eliminada)

Eliminando Regras λ

30

Exemplo

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid C$

$A \rightarrow AaaA \mid \lambda$

$B \rightarrow BBb \mid C$

$C \rightarrow cC \mid \lambda$

$P \rightarrow APB \mid PB \mid AP \mid C \mid \lambda$

$A \rightarrow AaaA \mid Aaa \mid aaA \mid aa$

$B \rightarrow BBb \mid Bb \mid b \mid C$

$C \rightarrow cC \mid c$

$B \rightarrow \lambda$ (regra a ser eliminada)

Eliminando Regras λ

31

Exemplo

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

$P \rightarrow APB \mid PB \mid AP \mid C \mid \lambda$
 $A \rightarrow AaaA \mid Aaa \mid aaA \mid aa$
 $B \rightarrow BBb \mid Bb \mid b \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid c$

$P \rightarrow \lambda$ (regra a ser substituída)

Eliminando Regras λ

32

Exemplo

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow A\textcolor{red}{P}B \mid \textcolor{red}{P}B \mid A\textcolor{red}{P} \mid C \mid \textcolor{red}{\lambda}$
 $A \rightarrow AaaA \mid Aaa \mid aaA \mid aa$
 $B \rightarrow BBb \mid Bb \mid b \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid c$

$\textcolor{red}{P} \rightarrow \textcolor{red}{\lambda}$ (regra a ser substituída)

Eliminando Regras λ

33

Exemplo

$P \rightarrow APB \mid C$
 $A \rightarrow AaaA \mid \lambda$
 $B \rightarrow BBb \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid \lambda$

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid PB \mid AP \mid AB \mid A \mid B \mid C \mid \lambda$
 $A \rightarrow AaaA \mid Aaa \mid aaA \mid aa$
 $B \rightarrow BBb \mid Bb \mid b \mid C$
 $C \rightarrow cC \mid c$

$P \rightarrow \lambda$ (regra a ser substituída)

Eliminando Regras λ

34

Exemplo

Acrescentar regras substituindo X recursivamente, se existir " $X \rightarrow \lambda$ "

$P \rightarrow APB \mid C$

$A \rightarrow AaaA \mid \lambda$

$B \rightarrow BBb \mid C$

$C \rightarrow cC \mid \lambda$

$P \rightarrow APB \mid PB \mid AP \mid AB \mid A \mid B \mid C \mid \lambda$

$A \rightarrow AaaA \mid Aaa \mid aaA \mid aa$

$B \rightarrow BBb \mid Bb \mid b \mid C$

$C \rightarrow cC \mid c$

Forma Normal de Chomsky

35

- Uma GLC $G = (V, \Sigma, R, P)$ é dita estar na **forma normal de Chomsky (FNC)** se todas as suas regras estão nas formas
 - $P \rightarrow \lambda$, se λ pertence à $L(G)$
 - $X \rightarrow YZ$ para Y, Z pertencentes a V
 - $X \rightarrow a$ para a pertencente a Σ
- Para toda GLC G , existe uma GLC na FNC equivalente à G

Forma Normal de Chomsky

36

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Eliminar regras λ

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Forma Normal de Chomsky

37

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Eliminar regras λ

$$P \rightarrow 0A1 \mid 01$$
$$A \rightarrow AB \mid B$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Forma Normal de Chomsky

38

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Eliminar regras unitárias

$$P \rightarrow 0A1 \mid 01$$
$$A \rightarrow AB \mid B$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Forma Normal de Chomsky

39

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Eliminar regras unitárias

$$P \rightarrow 0A1 \mid 01$$
$$A \rightarrow AB \mid B$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Forma Normal de Chomsky

40

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Eliminar regras unitárias

$$P \rightarrow 0A1 \mid 01$$
$$A \rightarrow AB \mid B$$
$$B \rightarrow 2 \mid 0A1 \mid 01$$

Forma Normal de Chomsky

41

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Eliminar regras unitárias

$$P \rightarrow 0A1 \mid 01$$
$$A \rightarrow AB \mid B$$
$$B \rightarrow 2 \mid 0A1 \mid 01$$

Forma Normal de Chomsky

42

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Eliminar regras unitárias

$$P \rightarrow 0A1 \mid 01$$
$$A \rightarrow AB \mid 2 \mid 0A1 \mid 01$$
$$B \rightarrow 2 \mid 0A1 \mid 01$$

Forma Normal de Chomsky

43

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Criar regras para terminais, caso não existam

$$P \rightarrow 0A1 \mid 01$$
$$A \rightarrow AB \mid 2 \mid 0A1 \mid 01$$
$$B \rightarrow 2 \mid 0A1 \mid 01$$

Forma Normal de Chomsky

44

Exemplo

$P \rightarrow 0A1$

$A \rightarrow AB \mid \lambda$

$B \rightarrow 2 \mid P$

Criar regras para terminais, caso não existam

$P \rightarrow 0A1 \mid 01$

$A \rightarrow AB \mid 2 \mid 0A1 \mid 01$

$B \rightarrow 2 \mid 0A1 \mid 01$

$Z \rightarrow 0$

$U \rightarrow 1$

Forma Normal de Chomsky

45

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Substituir terminais

$$P \rightarrow 0A1 \mid 01$$
$$A \rightarrow AB \mid 2 \mid 0A1 \mid 01$$
$$B \rightarrow 2 \mid 0A1 \mid 01$$
$$Z \rightarrow 0$$
$$U \rightarrow 1$$

Forma Normal de Chomsky

46

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

Substituir terminais

$$P \rightarrow \textcolor{red}{Z}\textcolor{blue}{A}\textcolor{blue}{U} \mid \textcolor{red}{Z}\textcolor{blue}{U}$$
$$A \rightarrow AB \mid 2 \mid \textcolor{red}{Z}\textcolor{blue}{A}\textcolor{blue}{U} \mid \textcolor{red}{Z}\textcolor{blue}{U}$$
$$B \rightarrow 2 \mid \textcolor{red}{Z}\textcolor{blue}{A}\textcolor{blue}{U} \mid \textcolor{red}{Z}\textcolor{blue}{U}$$
$$\textcolor{red}{Z} \rightarrow 0$$
$$\textcolor{blue}{U} \rightarrow 1$$

Forma Normal de Chomsky

47

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

“Fracionar” regras com mais de duas variáveis e substituí-las

$$P \rightarrow \textcolor{red}{ZAU} \mid ZU$$
$$A \rightarrow AB \mid 2 \mid \textcolor{red}{ZAU} \mid ZU$$
$$B \rightarrow 2 \mid \textcolor{red}{ZAU} \mid ZU$$
$$Z \rightarrow 0$$
$$U \rightarrow 1$$

Forma Normal de Chomsky

48

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

“Fracionar” regras com mais de duas variáveis e substituí-las

$$P \rightarrow ZAU \mid ZU$$
$$A \rightarrow AB \mid 2 \mid ZAU \mid ZU$$
$$B \rightarrow 2 \mid ZAU \mid ZU$$
$$X \rightarrow AU$$
$$Z \rightarrow 0$$
$$U \rightarrow 1$$

Forma Normal de Chomsky

49

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

“Fracionar” regras com mais de duas variáveis e substituí-las

$$P \rightarrow Z\textcolor{red}{X} \mid ZU$$
$$A \rightarrow AB \mid 2 \mid Z\textcolor{red}{X} \mid ZU$$
$$B \rightarrow 2 \mid Z\textcolor{red}{X} \mid ZU$$
$$\textcolor{red}{X} \rightarrow \textcolor{red}{A}U$$
$$Z \rightarrow 0$$
$$U \rightarrow 1$$

Forma Normal de Chomsky

50

Exemplo

$$P \rightarrow 0A1$$
$$A \rightarrow AB \mid \lambda$$
$$B \rightarrow 2 \mid P$$

“Fracionar” regras com mais de duas variáveis e substituí-las

$$P \rightarrow ZX \mid ZU$$
$$A \rightarrow AB \mid 2 \mid ZX \mid ZU$$
$$B \rightarrow 2 \mid ZX \mid ZU$$
$$X \rightarrow AU$$
$$Z \rightarrow 0$$
$$U \rightarrow 1$$

Gramática na Forma Normal de Chomsky

Forma Normal de Greibach

51

- Uma GLC $G = (V, \Sigma, R, P)$ é dita estar na **forma normal de Greibach (FNG)** se todas as suas regras estão nas formas
 - $P \rightarrow \lambda$, se λ pertence à $L(G)$
 - $X \rightarrow ay$ para a pertencente a Σ e y pertencente a V^*
- Para toda GLC G , existem uma GLC na FNG equivalente à G

Forma Normal de Greibach

52

- Transformando uma GLC FNC em FNG
- Exemplo

$$P \rightarrow AC \mid BB$$
$$B \rightarrow b \mid PB$$
$$A \rightarrow b$$
$$C \rightarrow a$$

FNC

$$P = A_1$$
$$A = A_2$$
$$C = A_3$$
$$B = A_4$$

Novos rótulos

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$
$$A_4 \rightarrow b \mid A_1 A_4$$
$$A_2 \rightarrow b$$
$$A_3 \rightarrow a$$

FNC atualizada

Forma Normal de Greibach

53

$$A_1 \rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 1: $A_i \rightarrow A_jX_k$ $i > j$, X_k pertence a V^*

Forma Normal de Greibach

54

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 1: $A_i \rightarrow A_j X_k \quad i > j, X_k \text{ pertence a } V^*$

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

55

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 1: $A_i \rightarrow A_j X_k \quad i > j, X_k \text{ pertence a } V^*$

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_2 A_3 A_4 \mid A_4 A_4 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

56

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 1: $A_i \rightarrow A_j X_k \quad i > j, X_k \text{ pertence a } V^*$

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_2 A_3 A_4 \mid A_4 A_4 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

57

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 1: $A_i \rightarrow A_j X_k \quad i > j, X_k \text{ pertence a } V^*$

$$A_1 \rightarrow b A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow b A_3 A_4 \mid A_4 A_4 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

58

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 2: Eliminar recursões à esquerda

$$A_4 \rightarrow A_4 A_4 A_4$$

$$A_1 \rightarrow b A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow b A_3 A_4 \mid A_4 A_4 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

59

$$A_1 \rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 2: Eliminar recursões à esquerda

$$A_4 \rightarrow A_4A_4A_4$$

$$A_1 \rightarrow bA_3 \mid A_4A_4$$

$$A_4 \rightarrow bA_3A_4 \mid A_4Z \mid b$$

$$Z \rightarrow A_4A_4 \mid A_4A_4Z$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

60

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 2: Eliminar recursões à esquerda

$$A_4 \rightarrow A_4 A_4 A_4$$

$$A_1 \rightarrow b A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow b A_3 A_4 \mid A_4 Z \mid b$$

$$Z \rightarrow A_4 A_4 \mid A_4 A_4 Z$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

61

$$A_1 \rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 2: Eliminar recursões à esquerda

$$A_1 \rightarrow bA_3 \mid A_4A_4$$

$$A_4 \rightarrow bA_3A_4 \mid bA_3A_4Z \mid bZ \mid b$$

$$Z \rightarrow A_4A_4 \mid A_4A_4Z$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

62

$$A_1 \rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 2: Eliminar recursões à esquerda

$$A_4 \rightarrow A_4A_4$$

$$A_1 \rightarrow bA_3 \mid A_4A_4$$

$$A_4 \rightarrow bA_3A_4 \mid bA_3A_4Z \mid bZ \mid b$$

$$Z \rightarrow A_4A_4 \mid A_4A_4Z$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

63

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 2: Eliminar recursões à esquerda

$$A_4 \rightarrow A_4 A_4$$

$$A_1 \rightarrow bA_3 \mid bA_3 A_4 A_4 \mid bA_3 A_4 Z A_4 \mid bZ A_4 \mid bA_4$$

$$A_4 \rightarrow bA_3 A_4 \mid bA_3 A_4 Z \mid bZ \mid b$$

$$Z \rightarrow A_4 A_4 \mid A_4 A_4 Z$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

64

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 2: Eliminar recursões à esquerda

$$Z \rightarrow A_4 A_4$$

$$A_1 \rightarrow b A_3 \mid b A_3 A_4 A_4 \mid b A_3 A_4 Z A_4 \mid b Z A_4 \mid b A_4$$

$$A_4 \rightarrow b A_3 A_4 \mid b A_3 A_4 Z \mid b Z \mid b$$

$$Z \rightarrow A_4 A_4 \mid A_4 A_4 Z$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

65

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 2: Eliminar recursões à esquerda

$$Z \rightarrow A_4 A_4$$

$$A_1 \rightarrow bA_3 \mid bA_3A_4A_4 \mid bA_3A_4ZA_4 \mid bZA_4 \mid bA_4$$

$$A_4 \rightarrow bA_3A_4 \mid bA_3A_4Z \mid bZ \mid b$$

$$Z \rightarrow bA_3A_4A_4 \mid bA_3A_4ZA_4 \mid bZA_4 \mid bA_4 \mid A_4A_4Z$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

66

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 2: Eliminar recursões à esquerda

$$Z \rightarrow A_4 A_4 Z$$

$$A_1 \rightarrow b A_3 \mid b A_3 A_4 A_4 \mid b A_3 A_4 Z A_4 \mid b Z A_4 \mid b A_4$$

$$A_4 \rightarrow b A_3 A_4 \mid b A_3 A_4 Z \mid b Z \mid b$$

$$Z \rightarrow b A_3 A_4 A_4 \mid b A_3 A_4 Z A_4 \mid b Z A_4 \mid b A_4 \mid A_4 A_4 Z$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

67

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3 \mid A_4 A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1 A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Passo 2: Eliminar recursões à esquerda

$$Z \rightarrow A_4 A_4 Z$$

$$A_1 \rightarrow bA_3 \mid bA_3A_4A_4 \mid bA_3A_4ZA_4 \mid bZA_4 \mid bA_4$$

$$A_4 \rightarrow bA_3A_4 \mid bA_3A_4Z \mid bZ \mid b$$

$$Z \rightarrow bA_3A_4A_4 \mid bA_3A_4ZA_4 \mid bZA_4 \mid bA_4 \mid bA_3A_4A_4Z \mid bA_3A_4ZA_4Z \mid bZA_4Z \mid bA_4Z$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

68

$$A_1 \rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4$$

$$A_4 \rightarrow A_1A_4 \mid b$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

Gramática na Forma Normal de Greibach

$$A_1 \rightarrow bA_3 \mid bA_3A_4A_4 \mid bA_3A_4ZA_4 \mid bZA_4 \mid bA_4$$

$$A_4 \rightarrow bA_3A_4 \mid bA_3A_4Z \mid bZ \mid b$$

$$Z \rightarrow bA_3A_4A_4 \mid bA_3A_4ZA_4 \mid bZA_4 \mid bA_4 \mid bA_3A_4A_4Z \mid bA_3A_4ZA_4Z \mid bZA_4Z \mid bA_4Z$$

$$A_2 \rightarrow b$$

$$A_3 \rightarrow a$$

GLCs e APs

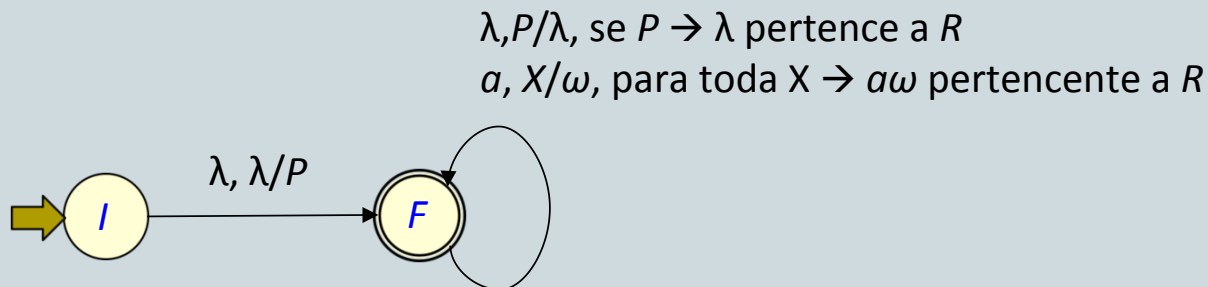
69

- Para qualquer GLC G , existe um AP que reconhece $L(G)$
- Para qualquer AP M , existe uma GLC que gera $L(M)$

Transformando uma GLC em um AP

70

- Para qualquer GLC G , existe um AP que reconhece $L(G)$
- Algoritmo GLC \rightarrow AP
 - Dada uma GLC $G = (V, \Sigma, R, P)$, na **forma normal de Greibach**, um AP que reconhece a linguagem $L(G)$ é dado por



Transformando uma GLC em um AP

71

- Exemplo

$P \rightarrow 0P1P \mid 1P0P \mid \lambda$

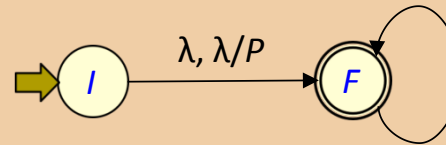
FNG

$P \rightarrow 0PUP \mid 1PZP \mid \lambda$

$U \rightarrow 1$

$Z \rightarrow 0$

$\lambda, P/\lambda$, se $P \rightarrow \lambda$ pertence a R
 $\alpha, X/\omega$, para toda $X \rightarrow \alpha\omega$ pertencente a R



Transformando uma GLC em um AP

72

- Exemplo

$P \rightarrow 0P1P \mid 1P0P \mid \lambda$

FNG

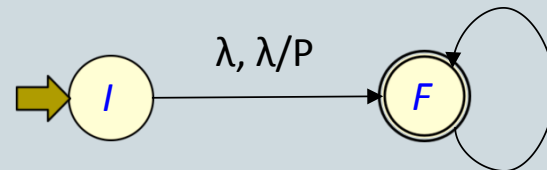
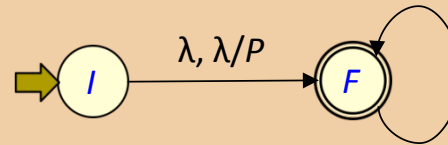
$P \rightarrow 0PUP \mid 1PZP \mid \lambda$

$U \rightarrow 1$

$Z \rightarrow 0$

FNG
AP

$\lambda, P/\lambda$, se $P \rightarrow \lambda$ pertence a R
 $\alpha, X/\omega$, para toda $X \rightarrow \alpha\omega$ pertencente a R



$\lambda, P/\lambda$

Transformando uma GLC em um AP

73

- Exemplo

$P \rightarrow 0P1P \mid 1P0P \mid \lambda$

FNG

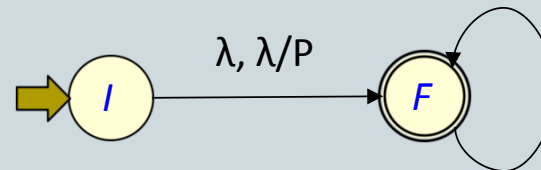
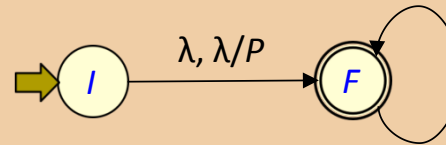
$P \rightarrow 0PUP \mid 1PZP \mid \lambda$

$U \rightarrow 1$

$Z \rightarrow 0$

FNG
AP

$\lambda, P/\lambda$, se $P \rightarrow \lambda$ pertence a R
 $\alpha, X/\omega$, para toda $X \rightarrow \alpha\omega$ pertencente a R



$\lambda, P/\lambda$
 $0, P/PUP$

Transformando uma GLC em um AP

74

- Exemplo

$P \rightarrow 0P1P \mid 1P0P \mid \lambda$

FNG

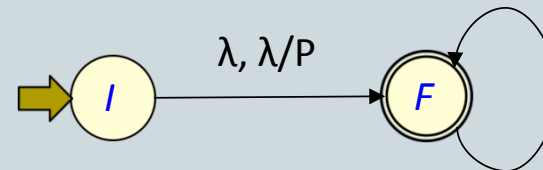
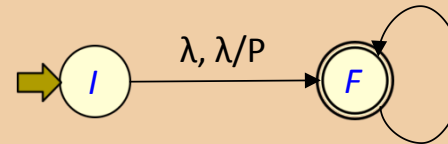
$P \rightarrow 0PUP \mid 1PZP \mid \lambda$

$U \rightarrow 1$

$Z \rightarrow 0$

FNG
AP

$\lambda, P/\lambda$, se $P \rightarrow \lambda$ pertence a R
 $\alpha, X/\omega$, para toda $X \rightarrow \alpha\omega$ pertencente a R



$\lambda, P/\lambda$
 $0, P/PUP$
 $1, P/PZP$

Transformando uma GLC em um AP

75

Exemplo

$P \rightarrow 0P1P \mid 1P0P \mid \lambda$

FNG

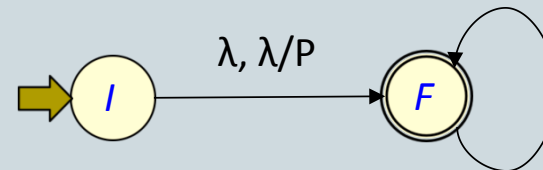
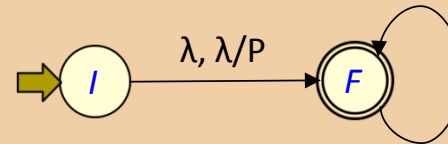
$P \rightarrow 0PUP \mid 1PZP \mid \lambda$

$U \rightarrow 1$

$Z \rightarrow 0$

FNG
AP

$\lambda, P/\lambda$, se $P \rightarrow \lambda$ pertence a R
 $a, X/\omega$, para toda $X \rightarrow a\omega$ pertencente a R



$\lambda, P/\lambda$
 $0, P/PUP$
 $1, P/PZP$
 $1, U/\lambda$

Transformando uma GLC em um AP

76

Exemplo

$P \rightarrow 0P1P \mid 1P0P \mid \lambda$

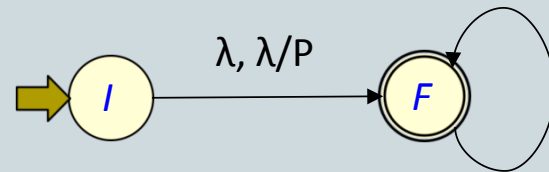
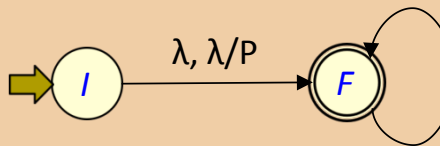
FNG

$P \rightarrow 0PUP \mid 1PZP \mid \lambda$

$U \rightarrow 1$

$Z \rightarrow 0$

FNG
AP



$\lambda, P/\lambda$
 $0, P/PUP$
 $1, P/PZP$
 $1, U/\lambda$
 $0, Z/\lambda$

Transformando uma GLC em um AP

77

- Exemplo

$P \rightarrow 0P1P \mid 1P0P \mid \lambda$

FNG

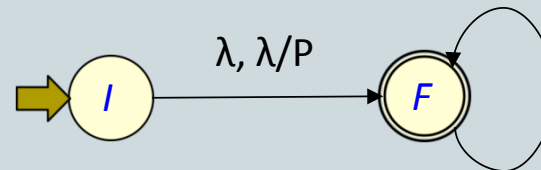
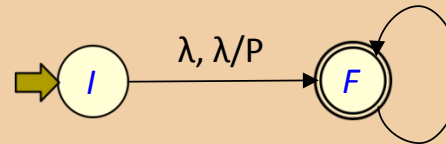
$P \rightarrow 0PUP \mid 1PZP \mid \lambda$

$U \rightarrow 1$

$Z \rightarrow 0$

FNG
AP

$\lambda, P/\lambda$, se $P \rightarrow \lambda$ pertence a R
 $\alpha, X/\omega$, para toda $X \rightarrow \alpha\omega$ pertencente a R



$\lambda, P/\lambda$
 $0, P/PUP$
 $1, P/PZP$
 $1, U/\lambda$
 $0, Z/\lambda$

Exercícios

78

Considere as duas gramáticas abaixo

$$P \rightarrow BPA \mid A$$
$$A \rightarrow aA \mid \lambda$$
$$B \rightarrow Bba \mid \lambda$$

(a)

$$P \rightarrow AB$$
$$A \rightarrow aAb \mid c$$
$$B \rightarrow bBc \mid a$$

(b)

1. Encontre a FNC para (a) e (b)
2. Encontre a FNG para (a) e (b)
3. Converta as gramáticas (a) e (b) em APs

Número de Pilhas e o Poder Computacional

79

- Modelo de **autômatos com pilha**:
 - Adequado para estudos aplicados e formais
 - ✦ Pilha é adequada para implementação em computadores
 - ✦ Poucas modificações na definição determinam significativas alterações no poder computacional
 - Principais estudos de linguagens e computabilidade podem ser desenvolvidos usando-se exclusivamente AP
 - Variando o número de pilhas
 - Com ou sem não-determinismo

Número de Pilhas e o Poder Computacional

80

- Autômato com Pilha, sem usar a estrutura de pilha:
 - Estados: única forma de memorizar informações passadas
 - Muito semelhante ao autômato finito
 - APs, sem usar a pilha, com ou sem não-determinismo
 - ✦ Reconhecem a Classe das Linguagens Regulares

Número de Pilhas e o Poder Computacional

81

- **Autômato com Pilha determinístico**
 - Aceita a Classe das Linguagens Livres do Contexto Determinísticas
 - ✦ importante subconjunto próprio da Classe das LLC
 - ✦ facilita o desenvolvimento de analisadores sintáticos

Número de Pilhas e o Poder Computacional

82

- **Autômato com (uma) Pilha Não-Determinístico**
 - Aceita exatamente a Classe das LLC
- **Autômato com Duas Pilhas**
 - Mesmo poder computacional da Máquina de Turing
 - ✦ considerada o dispositivo mais geral de computação
 - Se existe um algoritmo para resolver um problema
 - ✦ pode ser expresso como um autômato com duas pilhas
 - Não-determinismo não aumenta o poder computacional

Número de Pilhas e o Poder Computacional

83

- **Autômato com Múltiplas Pilhas**
 - Poder computacional de um autômato com mais de duas pilhas
 - ✦ equivalente ao do autômato com duas pilhas
 - Se um problema é solucionado por um autômato com múltiplas pilhas
 - ✦ pode ser solucionado por um autômato com duas pilhas

Exercícios

84

1. Coloque a seguinte gramática na Forma Normal de Chomsky
 $G = (\{L, S, E\}, \{a, (,)\}, P, L)$ e P é composta pelas seguintes regras
 - $L \rightarrow (S)$
 - $S \rightarrow SE \mid \lambda$
 - $E \rightarrow a \mid L$

2. Coloque a seguinte gramática na Forma Normal de Greibach
 G é composta pelas seguintes regras e converta G para um AP
 - $S \rightarrow ABb \mid a$
 - $A \rightarrow aaA \mid B$
 - $B \rightarrow bAb$