Relatório Trabalho 1 Otmização

Henrique de Oliveira Biehl

Abril 2024

1 Introdução

Este relatório têm como objetivo detalhar a modelagem do problema de "Transporte de carga em rotas com uso de recursos e pacotes".

2 Descrição do Problema

O problema do Transporte de Carga em rotas com uso de recursos e pacotes pode ser descrito como um amálgama do problema das redes com o problema da dieta.

Em síntese, haverá, nesse problema, n cidades distintas e m rotas distintas que ligam essas cidades. Cada rota possui uma capacidade máxima de transporte e, para cada unidade de carga transportada nessa rota, é necessário o gasto de recursos. No total, existem k recursos com valores distintos.

Os recursos são vendidos em pacotes de preços distintos, sendo no total q pacotes que possuem distintas quantidades de cada um dos k recursos - incluindo a possibilidade de não possuir determinado recurso.

O problema então consiste em maximizar o lucro ao transportar um recurso de valor p nessa rede de cidades. A função que descreve essa maximização é:

$$pW - C \tag{1}$$

Onde W é máximo que se pode transportar na rede e C é o custo de transporte.

3 Modelagem

A modelagem será exemplificada por meio do seguinte problema descrito no enunciado do trabalho:

Recursos	Rotas					Pacotes	
	1,2	1,3	2,3	2,4	3,4	1	2
1	1	2	1	2	3	4	5
2	1	2	2	1	4	2	2
3	5	0	0	0	6	0	1
	5	2	5	2	5	10	20
	Capacidades					Preço	

3.1 Modelando o Transporte Máximo

A modelagem do problema inicia ao analizar o máximo que pode ser transportado entre as cidades. Para modelar essa relação, é utilizada a modelagem do "Problema das Redes", onde devemos garantir que o que transportado de uma cidade para outra seja equivalente ao que as outras rotas podem "receber".

Ou seja, devemos garantir uma relação em que tudo que "entra" em uma cidade deve ser igual a tudo que "sai" dela. Porém, devemos aplicar isso apenas nas cidades do meio, desconsiderando a cidade inicial - cidade "1", no caso - e a cidade final "n". A partir do exemplo acima, observamos que as rotas ligadas a cidade "2" possuem a seguinte equação:

$$x_{1,2} = x_{2,3} + x_{2,4} \tag{2}$$

A partir desse ponto, basta aplicar essa lógica para toda cidade até a cidade n-1. Para representar fluxos contrários será utilizado números negativos. No exemplo, a cidade "2" possui uma capacidade máxima de transporte de carga igual a 5, então o intervalo fica:

$$-5 \leq x_{1,2} \leq 5 \tag{3}$$

A partir desse ponto, basta organizar a função W, que será maximizada no problema. Seguindo o modelo do "Problema das Redes", W será todas as rotas que saem do ponto de partida: a cidade "1". Ou seja, no problema acima, pW será:

$$W = px_{1,2} + px_{1,3} \tag{4}$$

3.2 Modelando os Custos

Para modelar a função C, que representa os custos, será necessário saber o quanto de pacotes q_1 e q_2 serão necessários. Para isso, será usado 3 equações de restrição, uma para cada recurso, igualadas a soma de q_1 e q_2 - se serão multiplicadas pela quantidade de recurso da linha i que há em cada pacote respectivamente.

Já no lado esquerdo da inequação, o cálculo será a soma do módulo da capacidade rota $x_{i,j}$ multiplicado pela quantidade de recurso do tipo i que é "consumido" naquela rota. Assim, para o recurso 1:

$$1|x_{1,2}| + 2|x_{1,3}| + 1|x_{2,3}| + 2|x_{2,4}| + 3|x_{3,4}| \leq 4q_1 + 5q_2 \tag{5}$$

3.3 Resolvendo Módulos

Existe um problema: a equação possui módulo, o que a deixa não linear. Para eliminar o módulo, será adicionado 2 váriaveis $y_{i,j}$ e $z_{i,j}$ que serão sempre positivas na fórmula. Então, será criado 3 restrições a mais, onde a primeira é uma igualdade entre $y_{i,j} - z_{i,j}$ e o valor de transporte de $x_{1,2}$. Dessa forma, para a rota 1,2:

$$y_{1,2} - z_{1,2} = x_{1,2} \tag{6}$$

$$0 \leq y_{1,2} \tag{7}$$

$$0 \leq z_{1,2} \tag{8}$$

Se $x_{1,2}$ for positivo, $y_{1,2}$ representará esse valor. Caso contrário, $z_{1,2}$ será responsável por esse valor negativo, porém ainda será positivo. Já na restrição do cálculo de recursos e pacotes, deve-se subsituir o módulo de $|x_{1,2}|$ por $y_{1,2} + z_{1,2}$. Por fim, basta aplicar essa lógica para toda rota $x_{i,j}$ no problema.

3.4 Finalizando a Modelagem

Por fim, para finalizar o custo, basta que seja a soma dos pacotes q_i multiplicados com seus respectivos preços v_i. Assim, para esse exemplo:

$$C = 10q_1 + 20q_2 \tag{9}$$

E, concluindo, a equação final a ser maximizada nesse exemplo fica:

$$100x_{1,2} + 100x_{1,3} - 10q_1 + 20q_2 \tag{10}$$

4 Implementação da Modelagem em C

O código fonte esta localizado na pasta src, contendo main.c, cityNetwork.c e cityNetwork.h - bibliotecas que ajudam na manipulação e visualização do fluxo de das cidades.

Para o uso do programa, basta digitar "make" e rodar o executável "transporte", onde todas as entradas e saídas são feitas pelo STDIN e STDOUT respectivamente.

A implementação da modelagem "geral" em C foi feita utilizando de estruturas de dados que auxiliam a abstrair os pacotes (package_t), rotas (routes_t) e as conexões entre as cidades (cityConnections_t). A última em especial é muito útil para criação das equações de rotas, pois ajuda a compreender que rotas entram e saem de uma determinada cidade i.

5 Exemplos de Problemas

5.1 Exemplo do Enunciado

Ao aplicar os dados do enunciado, usado na exemplificação da modelagem, no programa em C e a modelagem gerada pelo mesmo no lp_solve, o resultado do problema indica um ganho máximo de 150, onde são transportados 2 unidades de carga. O gasto no transporte é de 5 pacotes do tipo 1 e a carga passa pelas rotas 1-3, 2-3 e por fim 2-4.

5.2 Exemplo Adicional

Um outro exemplo de problema que pode ser aplicado nesse estudo, é dado por:

Recursos	Rotas								Pacotes		
	1,2	1,4	2,3	4,3	4,5	3,5	3,6	5,6	1	2	3
1	1	1	2	1	3	2	2	5	2	4	3
2	1	2	0	1	1	0	2	0	1	3	3
3	0	1	1	2	0	0	1	0	3	0	3
4	2	1	1	4	1	2	0	1	1	1	3
	3	5	2	4	3	3	3	5	30	40	50
	Capacidades								Preço		

Ao aplicar o problema modelado no lp_solve, o resultado indica um ganho máximo de 762.22, onde são transportados 7 unidades de carga, 2 pela rota 1-2 e 5 pela rota 1-4. São necessários 7.33 pacotes do tipo 2, 6.89 do tipo 3 e nenhum do tipo 1. Haverá 2 unidades da caga transportadas na rota 2-3, 2 em 4-3, 3 em 4-5, 1 em 3-5, 3 em 3-6 e 4 em 5-6.

6 Referências

1. GÄERTNER, Bernd. MATOUSEK, Jirí. Understanding and Using Linear Programming.Berlin: Spring, 2007. 226 p.
2. GUEDES, André L.P. Primeiro Trabalho Prático. 2024. Disponível em: https://www.inf.ufpr.br/andre/Disciplinas/CI1238-2024-1/trabalho1.pdf . Acesso em: 07/04/2024.
3. Desconhecido. Converting absolute value program into linear program. Mathmatics Stack Exchange, desconhecido, 29 de Mar. de 2019. Disponível em: https://math.stackexchange.com/questions/432003/converting-absolute-value-program-into-linear-program . Acesso em: 07/04/2024.