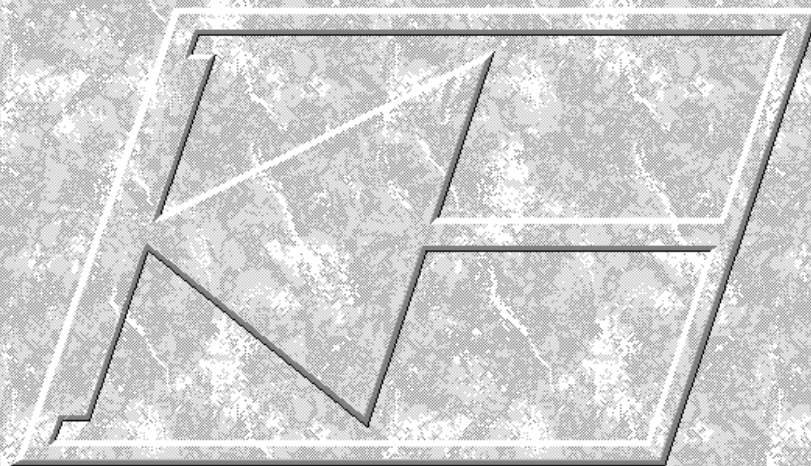




INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Florianópolis
Departamento Acadêmico de Eletrônica



Métodos de Análise de Circuitos em Corrente Alternada

Prof. Fernando Luiz Rosa Mussoi

Edição Primeira

Florianópolis – Junho, 2014.

Métodos de Análise de Circuitos em Corrente Alternada

Prof. Fernando Luiz Rosa Mussoi

Versão 1.0: atualizada em 08 de julho de 2016.

NOTA DO AUTOR

Este trabalho é um material de apoio didático utilizado pelo autor nas suas aulas das disciplinas ministradas no Departamento Acadêmico de Eletrônica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina – Campus Florianópolis (IFSC).

O autor não tem a pretensão de esgotar, tampouco inovar o tratamento do assunto por ele abordado. Tem por objetivo facilitar a dinâmica de aula, com expressivos ganhos de tempo, além de dar uma primeira orientação e compreensão aos alunos sobre o assunto abordado. O trabalho foi construído com base nas referências bibliográficas, citadas ao longo do texto, nas notas de aula e na experiência do autor na abordagem do assunto com os seus alunos.

Em se tratando de um material didático elaborado por um professor de uma Instituição Pública de Ensino, são permitidos o uso e a reprodução do texto, desde que a fonte seja devidamente citada.

O aluno deve desenvolver o hábito de consultar, estudar e, se possível, adquirir a Bibliografia Referenciada original, para melhores resultados no processo de aprendizagem.

Quaisquer contribuições, correções e críticas construtivas a este trabalho serão bem-vindas pelo autor.

Agradeço àqueles que fizeram bom uso deste material e, especialmente, aos meus alunos, razão do meu trabalho.

Prof. Fernando Luiz Rosa Mussoi

mussoi@ifsc.edu.br

Referência Bibliográfica:

MUSSOI, Fernando L. R. (2014). **Métodos de análise de circuitos em corrente alternada**. 1. Ed. Florianópolis: Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC).

- *Edição Primeira: Junho de 2014;*
- *Edição Segunda:*

ÍNDICE

NOTA DO AUTOR.....	2
ÍNDICE	3
1. FONTES DE TENSÃO E DE CORRENTE	4
1.1. PROBLEMAS PROPOSTOS	5
2. MÉTODO DA ANÁLISE DAS MALHAS.....	7
2.1. PROCEDIMENTO BÁSICO.....	7
2.2. EXERCÍCIOS PROPOSTOS.....	12
3. MÉTODO DA ANÁLISE DOS NÓS.....	16
3.1. PROCEDIMENTO BÁSICO.....	16
3.2. PROBLEMAS PROPOSTOS.....	21
4. TEOREMA DE THÈVENIN	26
4.1. PROCEDIMENTO BÁSICO.....	27
4.2. PROBLEMAS PROPOSTOS:	31
5. TEOREMA DE NORTON	34
5.1. PROCEDIMENTO BÁSICO.....	35
5.2. TRANSFORMAÇÃO DOS EQUIVALENTES.....	35
5.3. PROBLEMAS PROPOSTOS	39
6. TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS.....	44
6.1. PROCEDIMENTO BÁSICO	45
6.2. PROBLEMAS PROPOSTOS	51
7. TEOREMA DA MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE POTÊNCIA.....	58
7.1. MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE POTÊNCIA EM CORRENTE ALTERNADA	61
7.2. PROBLEMAS PROPOSTOS	64
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
9. INFORMAÇÕES RELEVANTES.....	68

1. FONTES DE TENSÃO E DE CORRENTE

Uma **Fonte Independente** de Tensão (ou de Corrente) é aquela cuja magnitude da tensão (ou da corrente) interna não depende de algum parâmetro do circuito ao qual ela é aplicada. A **Fonte Ideal** de Tensão (ou de Corrente) é aquela que não possui uma impedância interna e a tensão (ou corrente) fornecida não depende da corrente exigida pelo circuito ao qual está conectada. Os símbolos das Fontes Ideais de Tensão e de corrente (contínuas e alternadas) são apresentados na Figura 1.

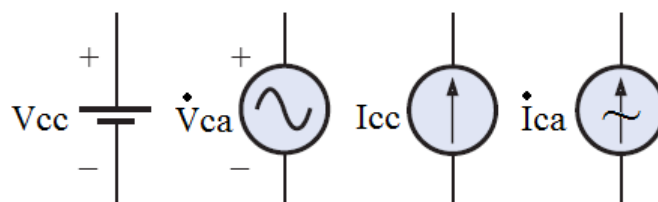


Figura 1. Símbolos das Fontes Ideais de tensão e de corrente contínua e alternada (Adaptado de Boylestad, 2002).

Uma **Fonte Real de Tensão Alternada Senoidal** possui uma **impedância interna em série** (Z_{int}) e a tensão de saída (\dot{V}_s) depende da corrente exigida pela impedância do circuito ao qual está conectada (\dot{I}_s), como ilustra a Figura 2. A impedância interna age como um divisor de tensão com a impedância externa da carga (Z_{ext}). Quanto maior a corrente exigida pela carga, maior a queda de tensão na impedância interna e, conseqüentemente, menor a tensão na saída:

$$\dot{V}_s = \dot{V}_f - Z_{int} \cdot \dot{I}_s$$

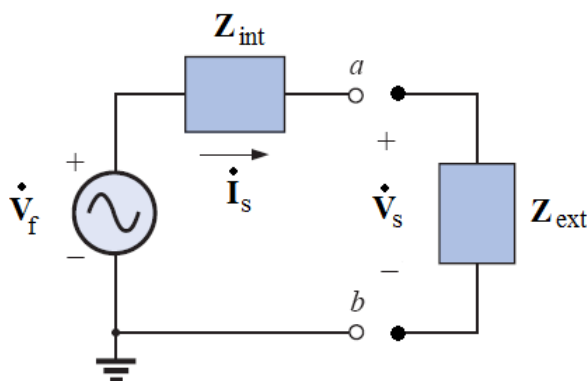


Figura 2. Fonte Real de Tensão Alternada Senoidal.

Uma **Fonte Real de Corrente Alternada Senoidal** possui uma **impedância interna em paralelo**, como ilustra a Figura 3.

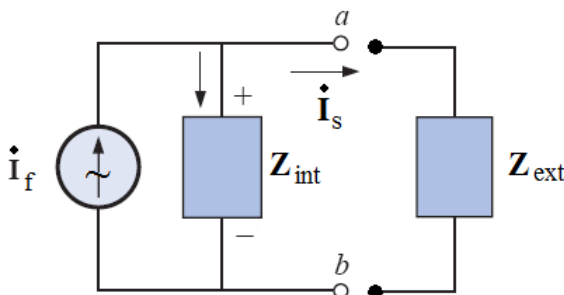


Figura 3. Fonte Real de Corrente Alternada Senoidal.

Uma Fonte Real de Tensão pode ser convertida em uma Fonte Real de Corrente equivalente, e vice-versa, como ilustra a Figura 4. Na conversão das fontes, a impedância interna permanece a mesma e a tensão ou corrente equivalente é obtida pela Lei de Ohm.

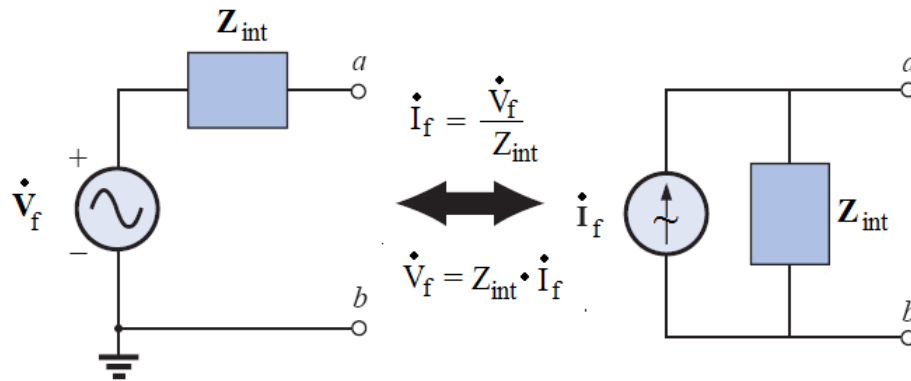


Figura 4. Conversão de Fontes Reais.

Uma **Fonte Dependente (ou Controlada)** de Tensão (ou de Corrente) é aquela cuja magnitude da tensão (ou da corrente) é controlada ou determinada por uma tensão ou corrente em alguma parte do circuito ao qual é aplicada. A Figura 5 apresenta os símbolos para os diferentes tipos de Fontes Dependentes, as quais podem ser controladas por uma tensão ou corrente sobre uma impedância de outra parte do circuito, multiplicada por um fator α (ganho ou atenuação).

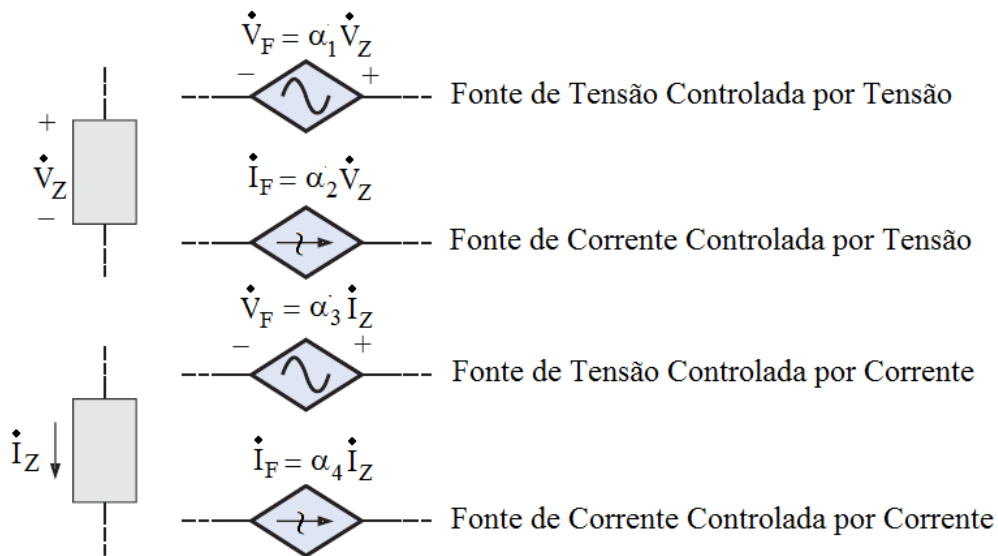
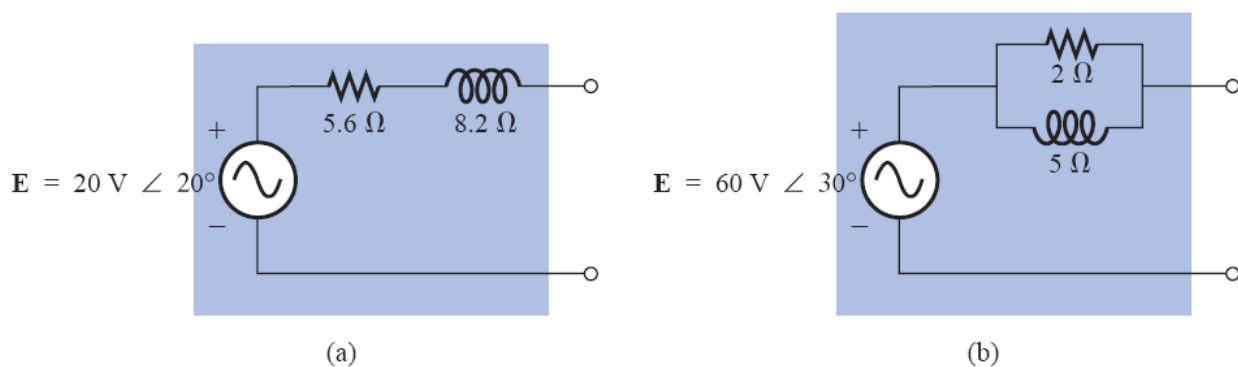


Figura 5. Símbolos das Fontes Dependentes de Tensão e de Corrente (Adaptado de Boylestad, 2002).

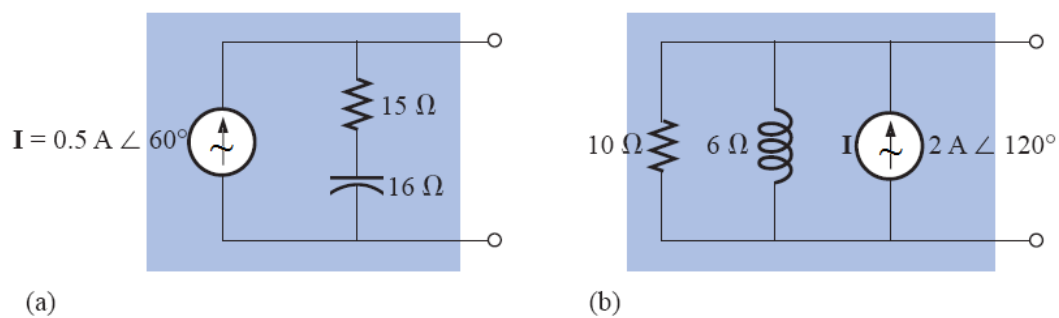
1.1. PROBLEMAS PROPOSTOS

- 1) Converta as fontes de tensão em fontes de corrente:



Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – problema P2.

2) Converta as fontes de corrente em fontes de tensão:



Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – problema P3.

2. MÉTODO DA ANÁLISE DAS MALHAS

Um **ramo** é um trecho de circuito elétrico composto por, pelo menos, um elemento passivo ou ativo. Um **laço** de um circuito elétrico é o conjunto de ramos interligados que formam um percurso fechado para a circulação da corrente. Uma **malha** de um circuito elétrico é todo o percurso fechado (laço) que não contenha ramos no seu interior. O Método da Análise das Malhas faz uso da Lei das Tensões de Kirchhoff para obtenção de um sistema de equações lineares em função das correntes nas malhas de um circuito.

2.1. PROCEDIMENTO BÁSICO

- i. **Malhas do circuito:** determinar o número de malhas do circuito;
- ii. **Sentido das correntes nas malhas:** arbitrar um sentido para a corrente fictícia de cada malha independente;
- iii. **Polaridade das impedâncias:** atribuir as polaridades das tensões nas impedâncias em função do sentido da corrente fictícia de cada malha. As polaridades das fontes de tensão devem permanecer as mesmas. Nas impedâncias, a corrente entra no positivo e sai no negativo;
- iv. **Lei das Tensões de Kirchhoff:** aplicar a Lei das Tensões de Kirchhoff a cada malha do circuito elétrico em função das correntes nas malhas. Se uma impedância estiver compartilhando malhas, a corrente resultante nessa impedância deverá ser a soma algébrica (considerando os sinais) em função do sentido das correntes das malhas compartilhadas. A corrente da malha em análise é sempre positiva. Se o sentido da corrente na malha compartilhada for o mesmo, essa corrente é somada, caso contrário, deve ser subtraída da corrente da malha em análise. As polaridades das fontes de tensão na malha em análise devem ser respeitadas;
- v. **Sistema de equações:** determinar o sistema de equações lineares composto pelas equações das tensões das malhas. O sistema de equações deve, preferencialmente, ser expresso na forma matricial;
- vi. **Resolução:** resolver o sistema de equações lineares para determinar o valor das correntes fictícias nas malhas. Há diversos métodos para resolução dos sistemas de equações lineares;
- vii. **Correntes nas impedâncias:** determinar as correntes nas impedâncias desejadas, em função dos valores e dos sentidos (sinal) das correntes nas malhas às quais pertence;
- viii. **Tensões nas impedâncias:** utilizar a Lei de Ohm para calcular as tensões nas impedâncias desejadas.

Observação: o procedimento apresentado também pode ser aplicado aos circuitos com fontes dependentes, desde que a variável de controle da fonte dependente NÃO esteja na malha em análise. Caso contrário, outros procedimentos devem ser aplicados.

Exemplo: Dado o circuito da Figura 6, utilize o Método da Análise das Malhas para determinar a corrente no resistor.

Dados: $\dot{V}_1 = 10\angle 0^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_2 = 25\angle 30^\circ \text{ V}$; $R = 5 \, \Omega$; $X_L = j4 \, \Omega$; $X_C = -j10 \, \Omega$.

Solução: De acordo com o procedimento básico apresentado, os sentidos das correntes fictícias das malhas do circuito devem ser arbitrados, como exemplifica a Figura 7. Em seguida, as

polaridades das impedâncias devem ser determinadas em função dos sentidos das correntes fictícias nas malhas.

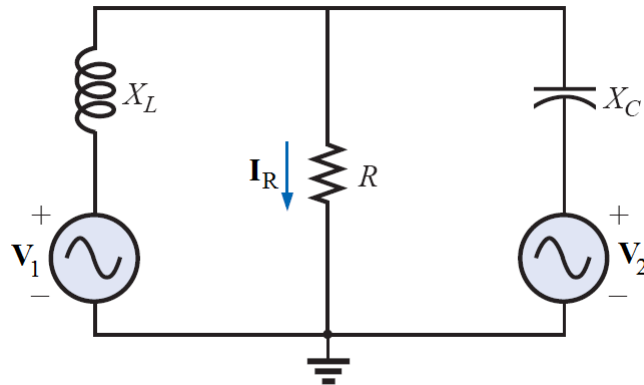


Figura 6. Circuito para o exemplo do Método da Análise das Malhas (Adaptado de Boylestad, 2002).

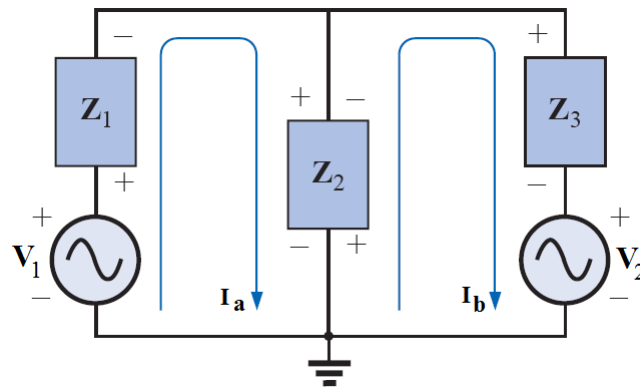


Figura 7. Sentido das correntes fictícias nas malhas e polaridade das impedâncias (Adaptado de Boylestad, 2002).

O passo seguinte é a aplicação da Lei das Tensões de Kirchhoff para determinação das equações das malhas. Assim:

$$\begin{cases} +\dot{V}_1 - \dot{V}_{Z1} - \dot{V}_{Z2} = 0 \\ -\dot{V}_{Z2} - \dot{V}_{Z3} - \dot{V}_2 = 0 \end{cases}$$

Usando a Lei de Ohm para expressar as tensões nas impedâncias em função das correntes:

$$\begin{cases} +\dot{V}_1 - Z_1 \cdot \dot{I}_a - Z_2 \cdot (\dot{I}_a - \dot{I}_b) = 0 \\ -Z_2 \cdot (\dot{I}_b - \dot{I}_a) - Z_3 \cdot \dot{I}_b - \dot{V}_2 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando os termos:

$$\begin{cases} +\dot{V}_1 - Z_1 \cdot \dot{I}_a - Z_2 \cdot \dot{I}_a + Z_2 \cdot \dot{I}_b = 0 \\ -Z_2 \cdot \dot{I}_b + Z_2 \cdot \dot{I}_a - Z_3 \cdot \dot{I}_b - \dot{V}_2 = 0 \end{cases}$$

Ordenando os termos:

$$\begin{cases} +Z_1 \cdot \dot{I}_a + Z_2 \cdot \dot{I}_a - Z_2 \cdot \dot{I}_b = +\dot{V}_1 \\ -Z_2 \cdot \dot{I}_a + Z_2 \cdot \dot{I}_b + Z_3 \cdot \dot{I}_b = -\dot{V}_2 \end{cases}$$

Colocando as correntes em evidência, tem-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2) \cdot \dot{I}_a - Z_2 \cdot \dot{I}_b = +\dot{V}_1 \\ -Z_2 \cdot \dot{I}_a + (Z_2 + Z_3) \cdot \dot{I}_b = -\dot{V}_2 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (Z_1 + Z_2) & -Z_2 \\ -Z_2 & (Z_2 + Z_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\dot{V}_1 \\ -\dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

Pode-se observar que o sistema de equações representa a Lei de Ohm na forma matricial:

$$[Z] \cdot [I] = [\dot{V}]$$

Onde $[Z]$ é a Matriz de Impedâncias do circuito (quadrada), $[\dot{V}]$ é a Matriz de Tensões do circuito (ou Vetor Coluna de Tensões) e $[I]$ é a Matriz de Correntes nas Malhas do circuito (ou Vetor Coluna de Correntes). Esse sistema de equações deve ser resolvido para obterem-se os valores das correntes das malhas. Há vários métodos disponíveis para resolução, previamente estudados. O sistema de equações também pode ser resolvido pela Lei de Ohm, ou seja, pelo produto da Matriz Inversa das Impedâncias multiplicada pelo Vetor Coluna de Tensões:

$$[I] = [Z]^{-1} \cdot [\dot{V}]$$

Como o inverso de uma Impedância é uma Admitância, tem-se:

$$[I] = [Y] \cdot [\dot{V}]$$

Para resolução computacional do sistema de equações, basta atribuir a Matriz de Impedâncias e o Vetor Coluna de Tensões a duas variáveis matriciais e definir a equação para cálculo do Vetor Coluna de Correntes.

Substituindo os valores:

$$\begin{bmatrix} (5 + j4) & -5 \\ -5 & (5 - j10) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ -(25\angle 30^\circ) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5 + j4) & -5 \\ -5 & (5 - j10) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ -(25\angle 30^\circ) \end{bmatrix}$$

Invertendo a Matriz de Impedâncias $[Z]$ obtém-se a Matriz de Admitâncias $[Y]$:

$$\begin{bmatrix} (5 + j4) & -5 \\ -5 & (5 - j10) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 - j0,1 & 0,08 + j0,06 \\ 0,08 + j0,06 & 0,032 + j0,124 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 - j0,1 & 0,08 + j0,06 \\ 0,08 + j0,06 & 0,032 + j0,124 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ -(25\angle 30^\circ) \end{bmatrix}$$

Assim, o Vetor Coluna das Correntes nas malhas $[I]$ é determinado pelo produto matricial $[Y] \cdot [\dot{V}]$:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,018 - j3,3 \\ 1,657 - j2,485 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,45\angle 72,86^\circ \\ 2,99\angle 56,30^\circ \end{bmatrix} A$$

Finalmente, a corrente no Resistor é determinada pela diferença entre as correntes das malhas, pois estão em sentidos contrários:

$$I_R = I_a - I_b = (3,45\angle 72,86^\circ) - (2,99\angle 56,30^\circ)$$

Assim:

$$I_R = 1,035\angle -128,13^\circ A$$

Exemplo: Utilize o Método da Análise das Malhas para determinar a tensão na Fonte Dependente de Tensão do circuito da Figura 8.

Dados: $\dot{V}_1 = 10\angle 0^\circ V$; $\alpha = 2$; $R_1 = 5 \Omega$; $R_2 = 10 \Omega$; $R_3 = 15 \Omega$.

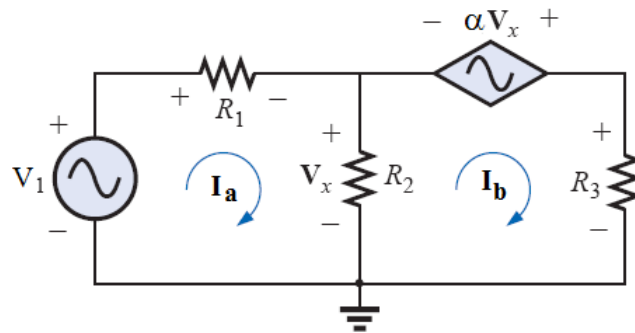


Figura 8. Circuito com Fonte Dependente de Tensão para o exemplo (Adaptado de Boylestad, 2002).

Solução: Considerando os sentidos arbitrados para as correntes nas malhas e aplicando a Lei das Tensões de Kirchhoff tem-se:

$$\begin{cases} +\dot{V}_1 - \dot{V}_{R1} - \dot{V}_{R2} = 0 \\ -\dot{V}_{R2} + \alpha \dot{V}_x - \dot{V}_{R3} = 0 \end{cases}$$

Usando a Lei de Ohm para expressar as tensões nas impedâncias em função das correntes:

$$\begin{cases} +\dot{V}_1 - R_1 \cdot \dot{I}_a - R_2 \cdot (\dot{I}_a - \dot{I}_b) = 0 \\ -R_2 \cdot (\dot{I}_b - \dot{I}_a) + \alpha \dot{V}_x - R_3 \cdot \dot{I}_b = 0 \end{cases}$$

Multiplicando os termos:

$$\begin{cases} +\dot{V}_1 - R_1 \cdot \dot{I}_a - R_2 \cdot \dot{I}_a + R_2 \cdot \dot{I}_b = 0 \\ -R_2 \cdot \dot{I}_b + R_2 \cdot \dot{I}_a + \alpha \dot{V}_x - R_3 \cdot \dot{I}_b = 0 \end{cases}$$

A tensão \dot{V}_x é a tensão no resistor R_2 e pode ser determinada por:

$$\dot{V}_x = R_2 \cdot (\dot{I}_a - \dot{I}_b)$$

Substituindo no sistema de equações:

$$\begin{cases} +\dot{V}_1 - R_1 \cdot \dot{I}_a - R_2 \cdot \dot{I}_a + R_2 \cdot \dot{I}_b = 0 \\ -R_2 \cdot \dot{I}_b + R_2 \cdot \dot{I}_a + \alpha \cdot R_2 \cdot (\dot{I}_a - \dot{I}_b) - R_3 \cdot \dot{I}_b = 0 \end{cases}$$

Colocando as correntes em evidência, tem-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) \cdot \dot{I}_a - R_2 \cdot \dot{I}_b = +\dot{V}_1 \\ (R_2 + \alpha \cdot R_2) \cdot \dot{I}_a - (R_2 + \alpha \cdot R_2 + R_3) \cdot \dot{I}_b = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ (R_2 + \alpha \cdot R_2) & -(R_2 + \alpha \cdot R_2 + R_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\dot{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores:

$$\begin{bmatrix} (5 + 10) & -10 \\ (10 + 2 \cdot 10) & -(10 + 2 \cdot 10 + 15) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 30 & -45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo pelo Método do Determinante:

$$\dot{I}_a = \frac{\det \begin{bmatrix} 10 \angle 0^\circ & -10 \\ 0 & -45 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 30 & -45 \end{bmatrix}} = \frac{10 \cdot (-45) - (-10) \cdot 0}{15 \cdot (-45) - (-10) \cdot 30} = \frac{-450}{-375} = 1,2 \text{ A}$$

$$i_b = \frac{\det \begin{bmatrix} 15 & 10\angle 0^\circ \\ 30 & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 30 & -45 \end{bmatrix}} = \frac{15 \cdot (0) - 10 \cdot 30}{15 \cdot (-45) - (-10) \cdot 30} = \frac{-300}{-375} = 0,8 \text{ A}$$

Finalmente, a tensão na Fonte Dependente é determinada por:

$$\propto \dot{V}_x = \alpha \cdot R_2 \cdot (\dot{I}_a - \dot{I}_b) = 2 \cdot 10 \cdot (1,2 - 0,8) = 8$$

$$\propto \dot{V}_x = 8 \text{ V}$$

Exemplo: Obtenha o sistema de equações para as correntes das malhas do circuito da Figura 9 e determine o valor da corrente na Fonte Dependente.

Dados: $\dot{V}_1 = 10\angle 0^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_2 = 25\angle 30^\circ \text{ V}$; $\alpha = 4$; $Z_1 = (5 + j4) \Omega$; $Z_2 = (4 - j3) \Omega$.

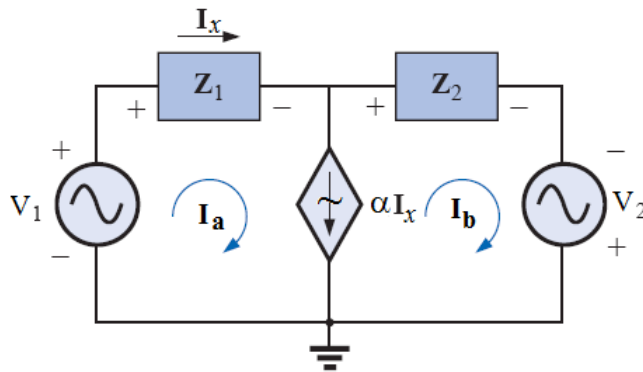


Figura 9. Circuito com Fonte Dependente e supermalha (Adaptado de Boylestad, 2002).

Solução: Como esse circuito tem uma Fonte de Corrente no ramo compartilhado pelas duas malhas, deve-se analisar a **supermalha** externa. Assim, considerando os sentidos arbitrados para as correntes nas malhas e aplicando a Lei das Tensões de Kirchhoff na supermalha, e a Lei das Correntes de Kirchhoff no nó, tem-se:

$$\begin{cases} +\dot{V}_1 - Z_1 \cdot \dot{I}_a - Z_2 \cdot \dot{I}_b + \dot{V}_2 = 0 \\ \alpha \cdot \dot{I}_x = \dot{I}_a - \dot{I}_b \end{cases}$$

Como $\dot{I}_x = \dot{I}_a$, então:

$$\begin{cases} +\dot{V}_1 - Z_1 \cdot \dot{I}_a - Z_2 \cdot \dot{I}_b + \dot{V}_2 = 0 \\ \alpha \cdot \dot{I}_a = \dot{I}_a - \dot{I}_b \end{cases}$$

Portanto, o sistema possui duas equações e duas incógnitas e pode ser resolvido pelos métodos conhecidos.

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ (1-\alpha) & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores:

$$\begin{bmatrix} (5 + j4) & (4 - j3) \\ (1 - 4) & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ + 25\angle 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (5 + j4) & (4 - j3) \\ (-3) & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,65 + j12,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2709 - j2,2888 \\ 0,8126 + j6,8663 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,3 \angle -96,75^\circ \\ 6,91 \angle 83,25^\circ \end{bmatrix} A$$

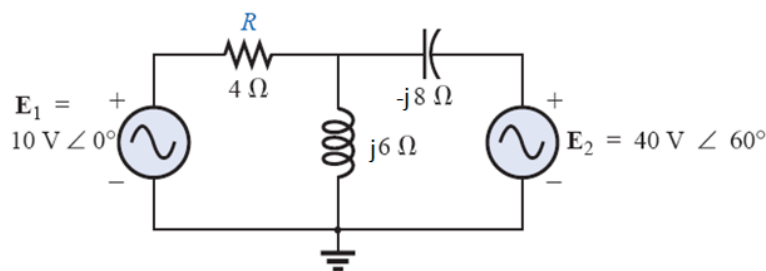
A corrente na Fonte Dependente é determinada por:

$$\alpha \cdot \dot{I}_x = \alpha \cdot \dot{I}_a = 4 \cdot (2,3 \angle -96,75^\circ)$$

$$\alpha \cdot \dot{I}_x = 9,2 \angle -96,75^\circ A$$

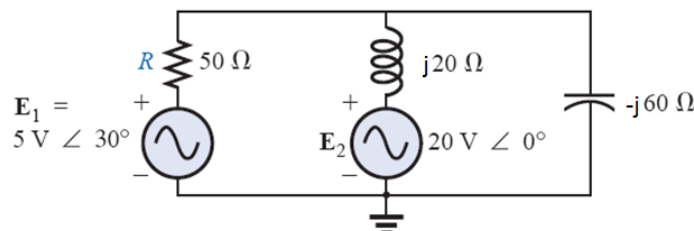
2.2. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1) Obtenha o sistema de equações das correntes nas malhas na forma matricial e determine a corrente sobre o resistor do circuito abaixo:



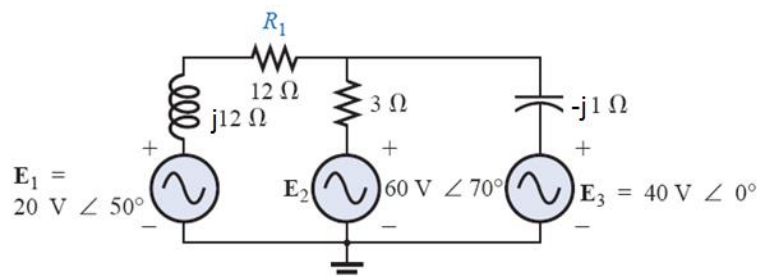
Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – Problemas P5.

- 2) Obtenha o sistema de equações das correntes nas malhas na forma matricial e determine a corrente sobre o indutor do circuito abaixo:



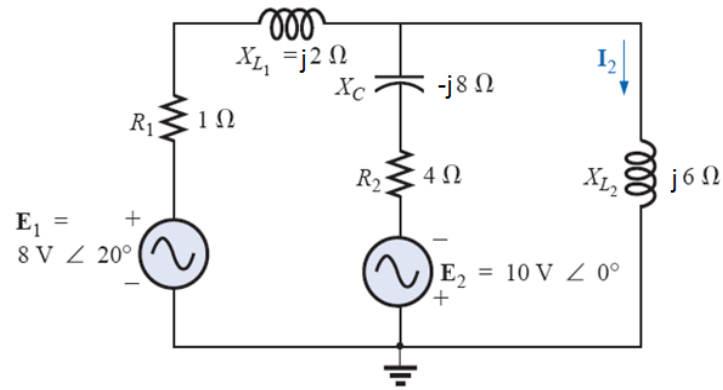
Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – Problemas P5.

- 3) Obtenha o sistema de equações das correntes nas malhas na forma matricial e determine a tensão sobre o capacitor do circuito abaixo:



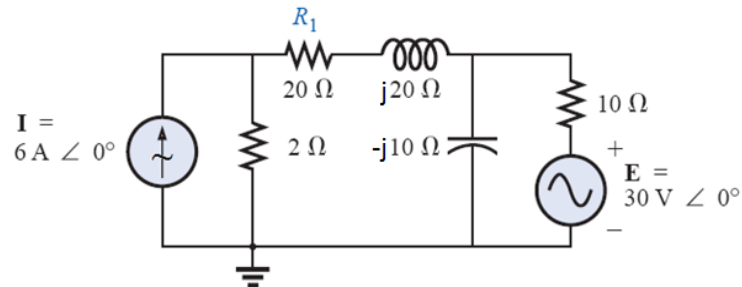
Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – Problemas P6.

- 4) Obtenha o sistema de equações das correntes nas malhas na forma matricial e determine a tensão sobre o resistor R_2 no circuito abaixo:



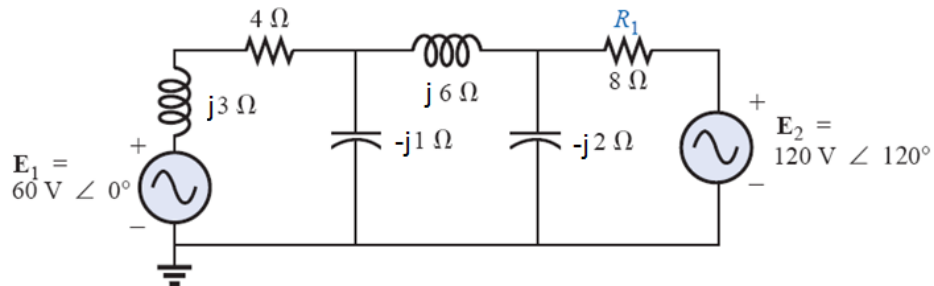
Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – exemplo 17.9.

- 5) Obtenha o sistema de equações das correntes nas malhas na forma matricial e determine a corrente sobre o resistor do circuito abaixo:



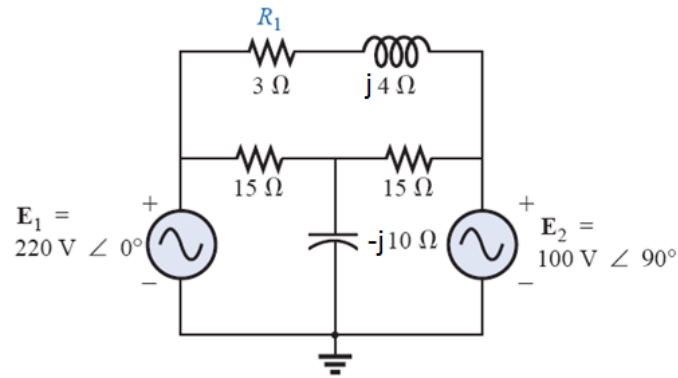
Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – Problemas P6.

- 6) Obtenha o sistema de equações das correntes nas malhas na forma matricial e determine a corrente sobre o indutor do circuito abaixo:



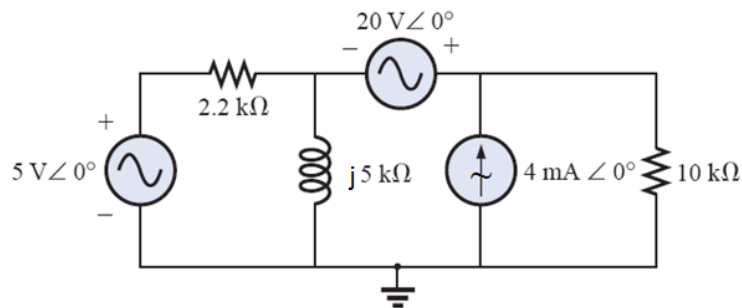
Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – Problemas P7.

- 7) Obtenha as equações das correntes nas malhas na forma matricial e determine a corrente sobre o resistor R1 do circuito abaixo:



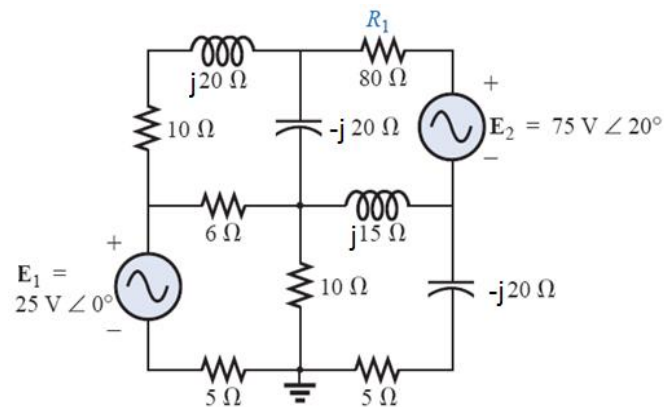
Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – problema P7.

- 8) Obtenha as equações das correntes nas malhas na forma matricial e determine a corrente sobre o resistor de 10 kΩ dos circuitos abaixo:



Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – problema P12.

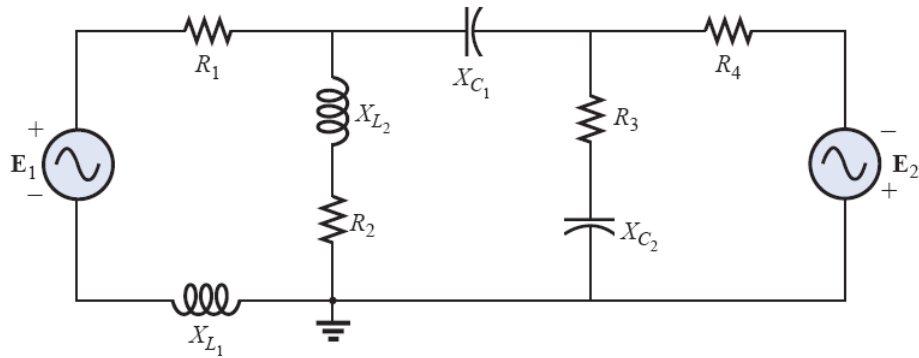
- 9) Escreva as equações das correntes de malha na forma matricial do circuito abaixo:



Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – problema 17.12.

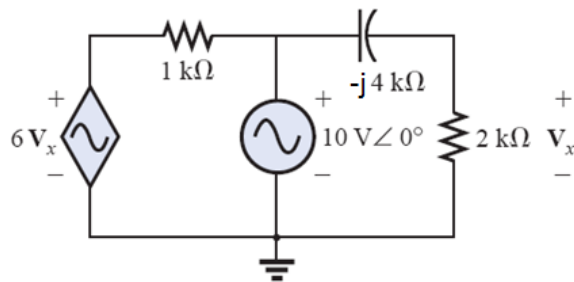
- 10) Obtenha o sistema de equações das correntes nas malhas na forma matricial. Utilize um programa computacional para determinar o valor das correntes nas malhas e determine as tensões sobre os resistores.

Dados: $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$; $X_{L1} = X_{L2} = j2 \Omega$; $X_{C1} = X_{C2} = -j5 \Omega$.



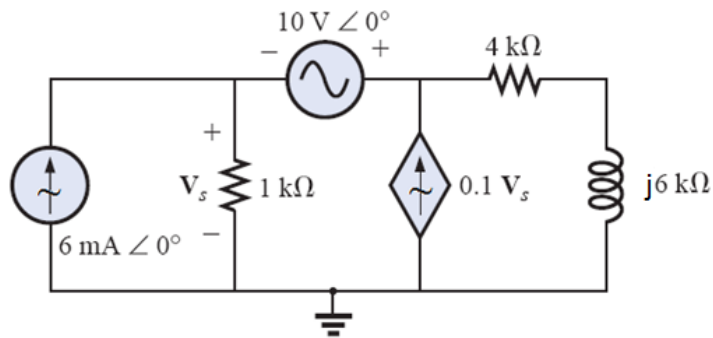
Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – exemplo 17.10.

- 11) Utilize o Método da Análise das Malhas para determinar a tensão da fonte dependente do circuito abaixo:



Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – problema 17.11.

- 12) Utilize o Método da Análise das Malhas para determinar a corrente da fonte dependente do circuito abaixo:



Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – problema 17. 13.

3. MÉTODO DA ANÁLISE DOS NÓS

Um nó é definido como a junção de três ou mais ramos de um circuito. Se um dos nós de um circuito for definido como referência de terra (potencial elétrico nulo – 0 V), os demais nós do circuito terão um potencial elétrico relativo à referência. Portanto, um circuito com n nós terá $(n - 1)$ nós com um potencial relativo ao nó tomado como referência. Assim, a Lei das Correntes de Kirchhoff pode ser usada para relacionar as tensões nodais (tensões nos nós). Para resolução do circuito, as tensões nodais podem ser determinadas por um sistema de equações lineares, de forma similar àquela empregada no Método de Análise das Malhas.

3.1. PROCEDIMENTO BÁSICO

- i. **Número de nós:** determinar o número de nós do circuito elétrico;
- ii. **Referência:** especificar o nó de referência do circuito e nomear os nós restantes;
- iii. **Sentido das correntes:** estabelecer o sentido das correntes nos ramos conectados a cada nó do circuito elétrico;
- iv. **Lei das Correntes de Kirchhoff:** aplicar a Lei das Correntes de Kirchhoff a cada nó do circuito elétrico em função das tensões nodais, exceto para nó de referência;
- v. **Sistema de equações:** determinar o sistema de equações lineares composto pelas equações das correntes nos nós. O sistema deve, preferencialmente, ser expresso na forma matricial;
- vi. **Resolução:** resolver o sistema de equações lineares para determinar o valor das tensões nodais. Há diversos métodos para resolução dos sistemas de equações lineares;
- vii. **Tensões nas impedâncias:** determinar as tensões nas impedâncias desejadas, em função dos valores e da polaridade das tensões nodais;
- viii. **Correntes nas impedâncias:** utilizar a Lei de Ohm para calcular as correntes nas impedâncias desejadas.

Observação: o procedimento apresentado também pode ser aplicado aos circuitos com fontes de corrente dependentes.

Quando houver uma **fonte de tensão independente** entre os nós do circuito a ser analisado, o conceito de **supernó** deve ser utilizado. Para tanto, cada fonte entre nós deve ser tratada com um **curto-circuito** e a Lei dos Nós de Kirchhoff é equacionada para o supernó resultante. Em seguida a tensão de cada fonte é equacionada em termos das tensões nos nós aos quais está conectada. O procedimento restante é o mesmo. Quando houver uma **fonte de tensão dependente** entre os nós do circuito deve-se aplicar o mesmo procedimento usado para o supernó. Entretanto, a tensão da fonte de tensão dependente deve ser equacionada em termos das tensões nos nós aos quais está conectada e em termos da tensão de controle da fonte.

Exemplo: Dado o circuito da Figura 10, obtenha a tensão sobre o resistor R_2 e a corrente no capacitor.

Solução: O circuito da Figura 10 possui três nós, onde o nó inferior é tomado como referência. De acordo com o procedimento básico apresentado, as tensões nodais são identificadas e os sentidos das correntes nos ramos conectados aos nós do circuito são arbitrados conforme ilustra a Figura 11.

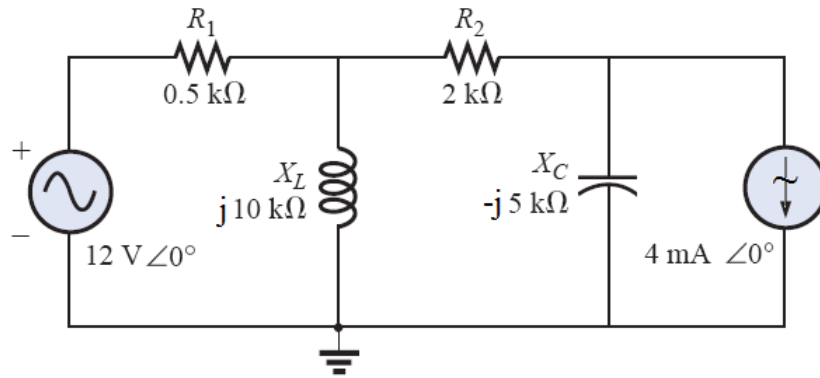


Figura 10. Circuito para o exemplo do Método de Análise dos Nós (Adaptado de Boylestad, 2002).

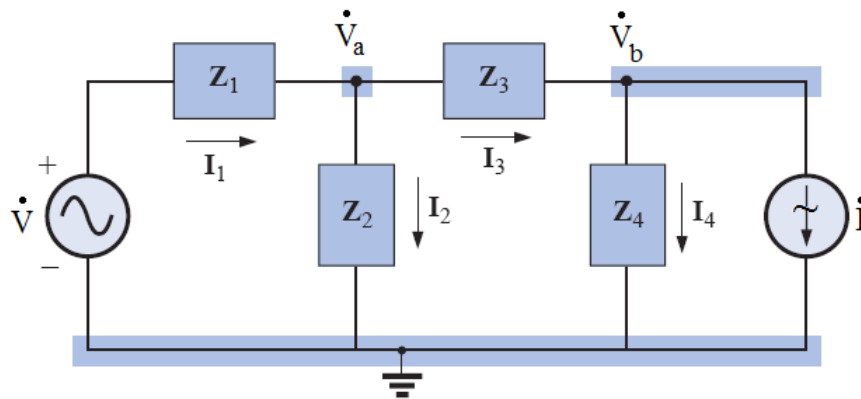


Figura 11. Tensões nodais e sentido das correntes nas impedâncias (Adaptado de Boylestad, 2002).

O passo seguinte é a aplicação da Lei das Correntes de Kirchhoff para determinação das equações dos nós do circuito. Assim:

$$\begin{cases} +I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ +I_3 - I_4 - I_F = 0 \end{cases}$$

Usando a Lei de Ohm para expressar as correntes em função das tensões:

$$\begin{cases} +\frac{\dot{V}_1}{Z_1} - \frac{\dot{V}_2}{Z_2} - \frac{\dot{V}_3}{Z_3} = 0 \\ +\frac{\dot{V}_3}{Z_3} - \frac{\dot{V}_4}{Z_4} - I_F = 0 \end{cases}$$

Expressando as tensões sobre as impedâncias:

$$\begin{cases} +\left(\frac{\dot{V}_F - \dot{V}_a}{Z_1}\right) - \left(\frac{\dot{V}_a - 0}{Z_2}\right) - \left(\frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z_3}\right) = 0 \\ +\left(\frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z_3}\right) - \left(\frac{\dot{V}_b - 0}{Z_4}\right) - I_F = 0 \end{cases}$$

Ordenando os termos:

$$\begin{cases} -\frac{\dot{V}_a}{Z_1} - \frac{\dot{V}_a}{Z_2} - \frac{\dot{V}_a}{Z_3} + \frac{\dot{V}_b}{Z_3} = -\frac{\dot{V}_F}{Z_1} \\ +\frac{\dot{V}_a}{Z_3} - \frac{\dot{V}_b}{Z_3} - \frac{\dot{V}_b}{Z_4} = +I_F \end{cases}$$

Colocando as tensões em evidência, tem-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} +\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right) \cdot \dot{V}_a - \left(\frac{1}{Z_3}\right) \cdot \dot{V}_b = +\left(\frac{1}{Z_1}\right) \cdot \dot{V}_F \\ -\left(\frac{1}{Z_3}\right) \cdot \dot{V}_a + \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}\right) \cdot \dot{V}_b = -\dot{I}_F \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right) & -\frac{1}{Z_3} \\ -\frac{1}{Z_3} & \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{V}_F}{Z_1} \\ -\dot{I}_F \end{bmatrix}$$

Pode-se observar que o sistema de equações representa a Lei de Ohm na forma matricial:

$$[Y] \cdot [\dot{V}] = [\dot{I}]$$

Onde $[Y]$ é a Matriz de Admitâncias do circuito, $[\dot{V}]$ é a Matriz de Tensões Nodais (ou Vetor Coluna de Tensões Nodais) e $[\dot{I}]$ é a Matriz das Correntes nos nós (ou Vetor Coluna de Correntes). Esse sistema de equações deve ser resolvido para obterem-se os valores das tensões nodais. Há vários métodos disponíveis para resolução, previamente estudados. O sistema de equações também pode ser resolvido pelo produto da Matriz Inversa das Admitâncias, que é a Matriz de Impedâncias $[Z]$, multiplicada pelo Vetor Coluna das Correntes:

$$[\dot{V}] = [Y]^{-1} \cdot [\dot{I}] = [Z] \cdot [\dot{I}]$$

Assim, substituindo os valores no sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{0,5k} + \frac{1}{j10k} + \frac{1}{2k}\right) & -\frac{1}{2k} \\ -\frac{1}{2k} & \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{-j5k}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12\angle 0^\circ}{0,5k} \\ -0,004\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (0,0025 - j0,0001) & -0,0005 \\ -0,0005 & (0,0005 + j0,0002) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,024\angle 0^\circ \\ -0,004\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

Invertendo a Matriz de Admitâncias $[Y]$ obtém-se a Matriz de Impedâncias $[Z]$:

$$\begin{bmatrix} (0,0025 - j0,0001) & -0,0005 \\ -0,0005 & (0,0005 + j0,0002) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (482,7 - j16,9) & (410,3 - j181) \\ (410,3 - j181) & (2015,4 - j0,9872) \end{bmatrix}$$

O Vetor Coluna das Tensões Nodais $[\dot{V}]$ é determinado pelo produto matricial $[Z] \cdot [\dot{I}]$:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (482,7 - j16,9) & (410,3 - j181) \\ (410,3 - j181) & (2015,4 - j0,9872) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,024\angle 0^\circ \\ -0,004\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,9445 + j0,3186 \\ 1,7861 - j0,3958 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,95\angle 1,84^\circ \\ 1,83\angle -12,5^\circ \end{bmatrix}$$

Assim, a tensão sobre o resistor R_2 é dada por:

$$\dot{V}_{R_2} = \dot{V}_a - \dot{V}_b = (9,9445 + j0,3186) - (1,7861 - j0,3958)$$

$$\dot{V}_{R_2} = 8,1584 + j0,7144 = 8,19\angle 5,0^\circ \text{ V}$$

Finalmente, a corrente no capacitor é determinada por:

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_C}{X_C} = \frac{\dot{V}_b - 0}{Z_4} = \frac{1,83\angle -12,5^\circ}{5k\angle -90^\circ}$$

$$\dot{I}_C = 0,37\angle 77,5^\circ \text{ mA}$$

Exemplo: Utilize o Método da Análise dos Nós para determinar o sistema de equações em função das tensões nodais para o circuito com **Fonte Dependente**, ilustrado na Figura 12.

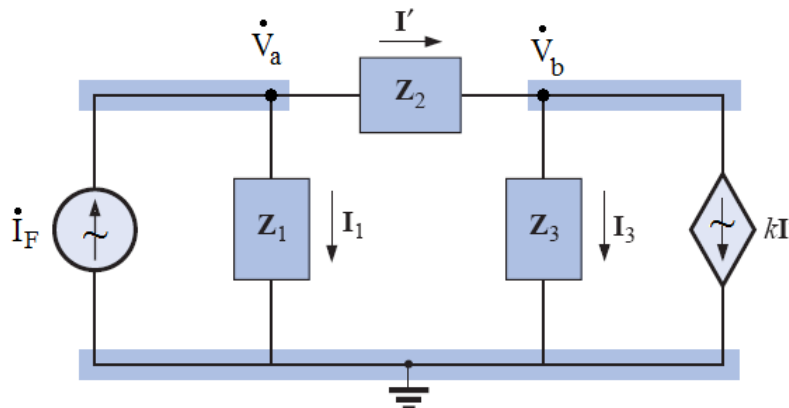


Figura 12. Exemplo de Análise dos Nós em circuito com Fonte Dependente (Adaptado de Boylestad, 2002).

Solução: O procedimento do Método da Análise dos Nós também pode ser aplicado aos circuitos com Fontes de Corrente Dependentes, porém os parâmetros das fontes dependentes devem ser equacionados. Assim, aplicando a Lei das Correntes de Kirchhoff ao circuito da Figura 12:

$$\begin{cases} +I_F - I_1 - I' = 0 \\ +I' - I_3 - kI' = 0 \end{cases}$$

Usando a Lei de Ohm:

$$\begin{cases} +I_F - \frac{\dot{V}_a}{Z_1} - \left(\frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z_2} \right) = 0 \\ \left(\frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z_2} \right) - \frac{\dot{V}_b}{Z_3} - k \left(\frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z_2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}_a}{Z_1} + \frac{\dot{V}_a}{Z_2} - \frac{\dot{V}_b}{Z_2} = I_F \\ \frac{\dot{V}_a}{Z_2} - \frac{\dot{V}_b}{Z_2} - \frac{\dot{V}_b}{Z_3} - \frac{k\dot{V}_a}{Z_2} + \frac{k\dot{V}_b}{Z_2} = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) & -\frac{1}{Z_2} \\ \left(\frac{1-k}{Z_2} \right) & -\left(\frac{1-k}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para determinação das tensões nodais do circuito, basta substituir os valores e resolver o sistema de equações.

Exemplo: Utilize o Método da Análise dos Nós para determinar o sistema de equações para o circuito com uma fonte de tensão entre nós, conforme ilustrado na Figura 13.

Solução: Como o circuito possui uma fonte de tensão independente entre os nós a e b , esse ramo forma o chamado **supernó**. Para análise do supernó, considera-se a fonte de tensão como um curto-circuito e, em seguida, as correntes são equacionadas usando-se a Lei das Correntes de Kirchhoff:

$$\dot{I}_{F1} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_{F2} = 0$$

Expressando em termos das tensões nodais:

$$\dot{I}_{F1} - \frac{\dot{V}_a}{Z_1} - \frac{\dot{V}_b}{Z_2} - \dot{I}_{F2} = 0$$

Ordenando os termos:

$$\left(\frac{1}{Z_1}\right) \cdot \dot{V}_a + \left(\frac{1}{Z_2}\right) \dot{V}_b = \dot{I}_{F1} - \dot{I}_{F2}$$

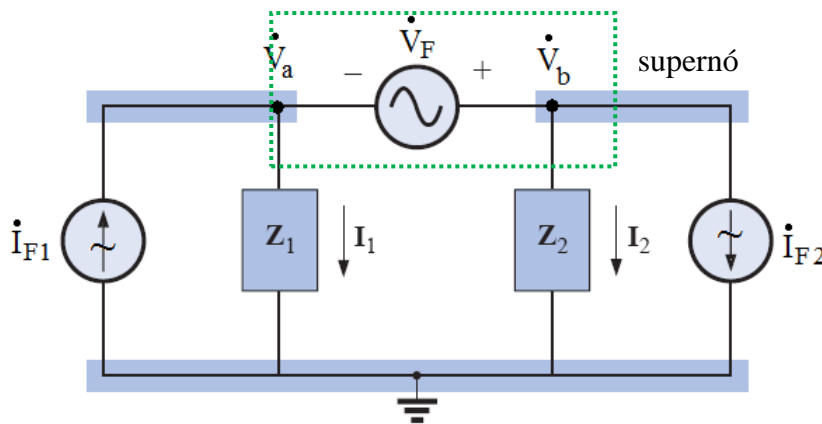


Figura 13. Exemplo de Análise dos Nós em circuito com fonte de tensão entre nós (Adaptado de Boylestad, 2002).

Assim, tem-se uma equação e duas incógnitas. A segunda equação é obtida usando-se a Lei das Tensões de Kirchhoff para expressar a tensão da fonte independente em termos das tensões nodais:

$$\dot{V}_F = \dot{V}_b - \dot{V}_a$$

Portanto, o sistema de equações é dado por:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{Z_1}\right) \cdot \dot{V}_a + \left(\frac{1}{Z_2}\right) \dot{V}_b = \dot{I}_{F1} - \dot{I}_{F2} \\ \dot{V}_F = \dot{V}_b - \dot{V}_a \end{cases}$$

Esse sistema com duas equações e duas incógnitas pode ser facilmente resolvido.

Exemplo: Utilize o Método da Análise dos Nós para determinar o sistema de equações para o circuito com uma fonte dependente de tensão entre nós, conforme ilustrado na Figura 14.

Solução: Como o circuito possui uma fonte de tensão dependente entre os nós *a* e referência, esse ramo compõe o chamado **supernó**. Para análise do supernó, considera-se a fonte de tensão como um curto-circuito e, conseqüentemente, a impedância Z_3 é desconsiderada. Em seguida, as correntes são equacionadas usando-se a Lei das Correntes de Kirchhoff:

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_{F1} - \dot{I}_2 = 0$$

Expressando em termos das tensões nodais:

$$-\frac{\dot{V}_a}{Z_1} + \dot{I}_{F1} - \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z_2} = 0$$

Ordenando os termos:

$$+\frac{\dot{V}_a}{Z_1} + \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z_2} = \dot{I}_{F1}$$

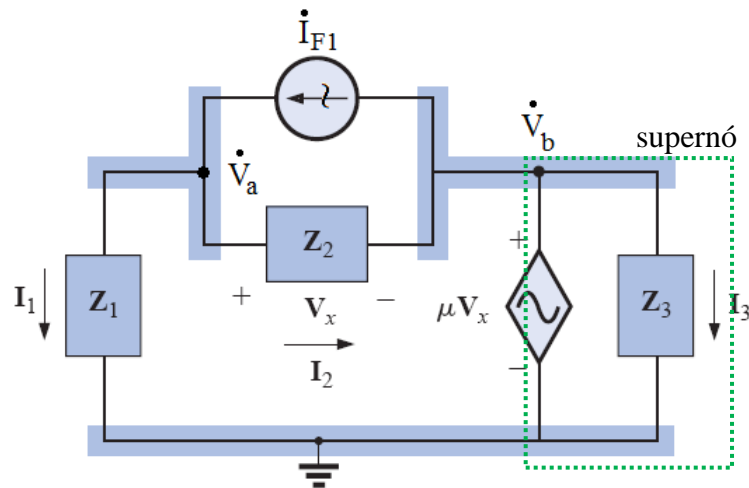


Figura 14. Exemplo de Análise dos Nós em circuito com fonte dependente entre nós (Adaptado de Boylestad, 2002).

Assim, tem-se uma equação e duas incógnitas. A segunda equação é obtida usando-se a Lei das Tensões de Kirchhoff para expressar a tensão da fonte dependente em termos das tensões nodais e da variável de controle:

$$\dot{V}_b = \mu \dot{V}_x = \mu(\dot{V}_a - \dot{V}_b)$$

Assim:

$$\mu \dot{V}_a - \mu \dot{V}_b - \dot{V}_b = 0$$

$$\mu \dot{V}_a - (\mu + 1) \dot{V}_b = 0$$

Portanto, o sistema de equações é dado por:

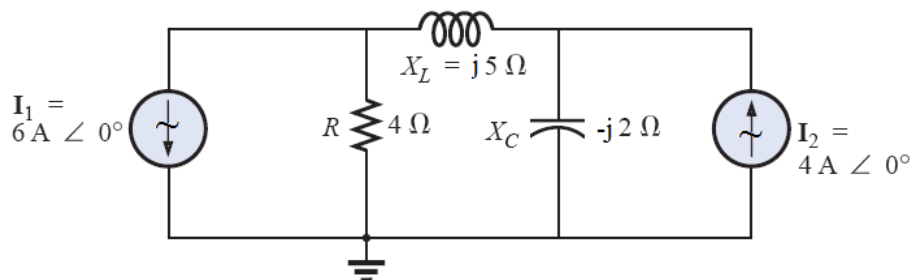
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \cdot \dot{V}_a - \left(\frac{1}{Z_2} \right) \dot{V}_b = \dot{I}_{F1} \\ \mu \dot{V}_a - (\mu + 1) \dot{V}_b = 0 \end{cases}$$

Esse sistema com duas equações e duas incógnitas pode ser facilmente resolvido.

3.2. PROBLEMAS PROPOSTOS

- 1) Utilize o Método da Análise dos Nós para determinar a tensão sobre o indutor e a corrente no resistor do circuito abaixo.

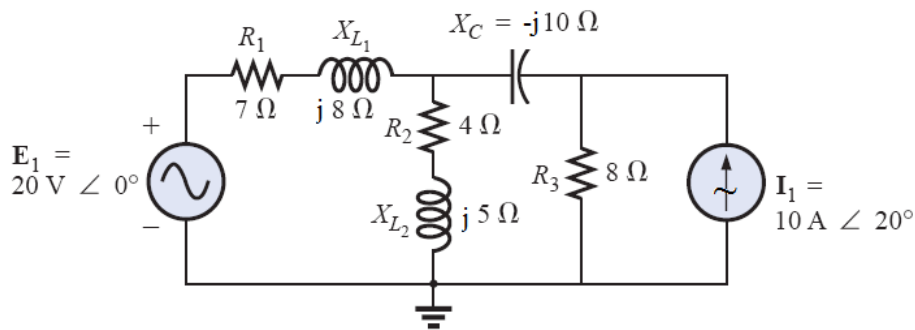
Resp.: $\dot{V}_L = 25,3 \angle -145,2^\circ \text{ V}$; $\dot{I}_L = 5,2 \angle -166,87,2^\circ \text{ A}$



Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – exemplo 17.16.

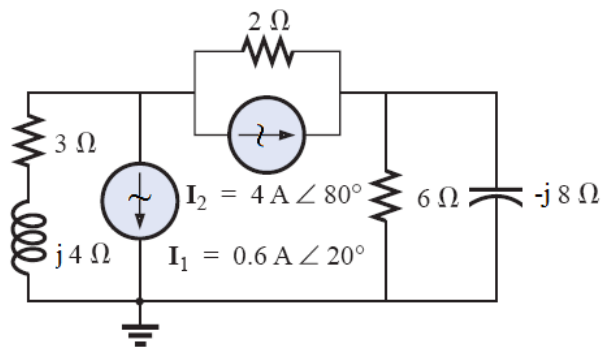
- 2) Utilize o Método da Análise dos Nós para determinar a tensão sobre o capacitor do circuito abaixo.

Resp.: $\dot{V}_C = 57,78 \angle 145,3^\circ \text{ V}$



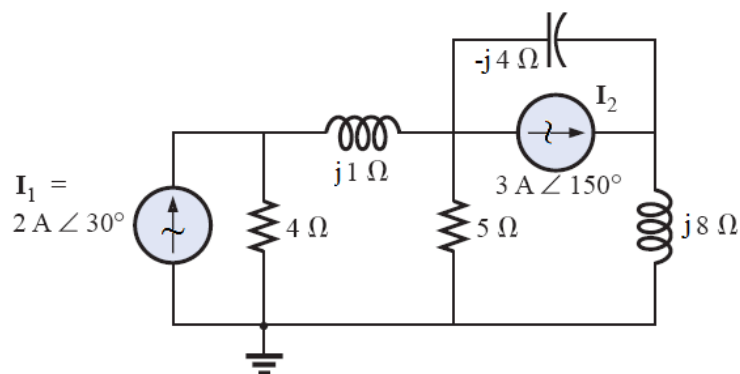
Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17 – exemplo 17.17.

- 3) Determine as tensões nodais do circuito abaixo usando o Método da Análise dos Nós.



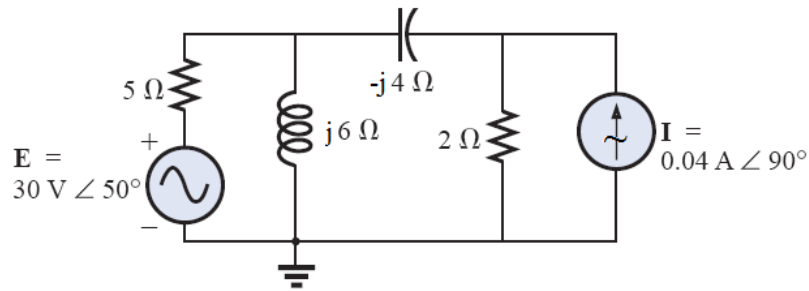
Fonte: Boylestad 10ed, problema 17.14.

- 4) Determine as tensões nodais do circuito abaixo usando o Método da Análise dos Nós.



Fonte: Boylestad 10ed, problema 17.20.

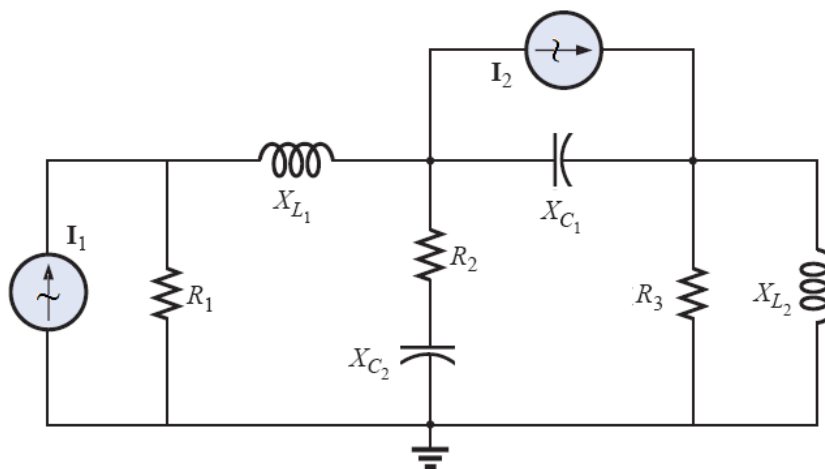
- 5) Determine a tensão no capacitor do circuito abaixo usando o Método da Análise dos Nós.



Fonte: Boylestad 10ed, problema 17.15.

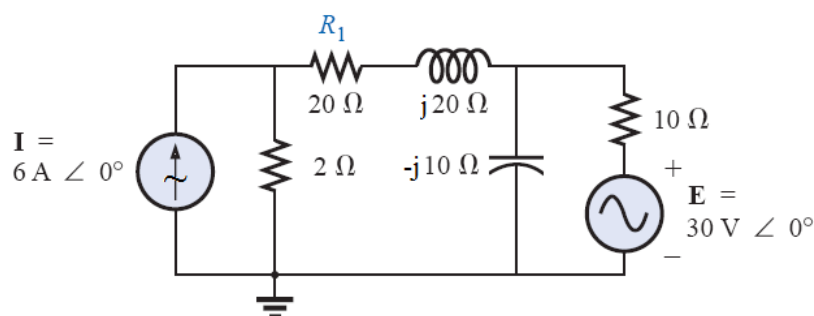
6) Determine as tensões nodais do circuito abaixo usando o Método da Análise dos Nós.

Dados: $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = 10 \text{ A}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 150 \Omega$; $X_{L1} = X_{L2} = j100 \Omega$; $X_{C1} = X_{C2} = -j50 \Omega$



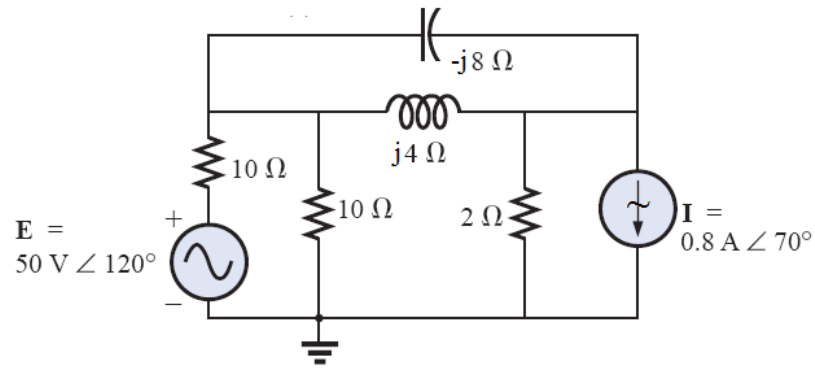
Fonte: Adaptado de Boylestad, 2002.

7) Escreva as equações das tensões de malha e as equações das tensões nodais para os circuitos abaixo:



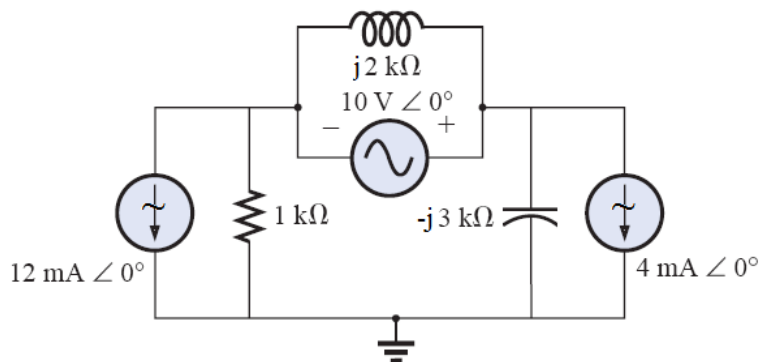
Fonte: Boylestad 10ed, capítulo 17.

8) Determine no indutor do circuito abaixo usando o Método da Análise dos Nós.



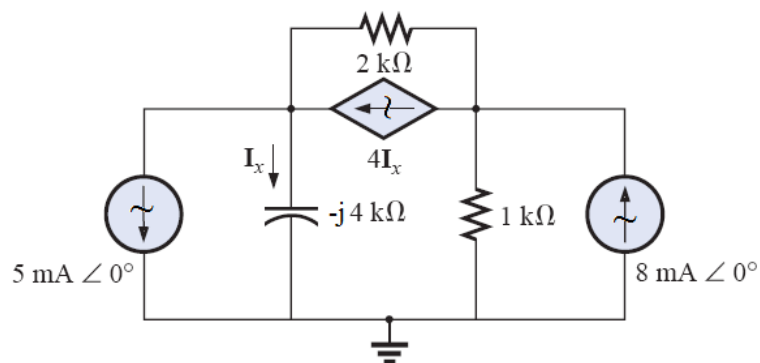
Fonte: Boylestad 10ed, problema 17.15.

9) Determine as tensões nodais do circuito abaixo usando o Método da Análise dos Nós.



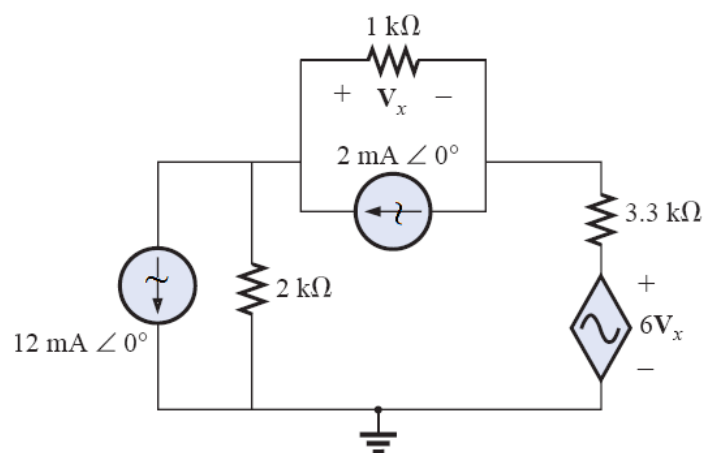
Fonte: Boylestad 10ed, problema 17.22.

10) Determine as tensões nodais e a corrente da fonte dependente do circuito abaixo usando o Método da Análise dos Nós.



Fonte: Boylestad 10ed, problema 17.21.

11) Determine as tensões nodais e a tensão da fonte dependente do circuito abaixo usando o Método da Análise dos Nós.



Fonte: Boylestad 10ed, problema 17.23.

4. TEOREMA DE THÈVENIN

O método baseado no Teorema de Thèvenin é usado para determinar os parâmetros elétricos (tensão, corrente e potência) fornecidos por um circuito (ou parte de um circuito) conectado por meio de dois terminais a outro circuito (ou parte de um circuito). O Teorema de Thèvenin é enunciado da seguinte forma:

Qualquer circuito linear de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente composto por uma fonte de tensão em série com uma impedância.

Essa fonte de tensão em série com uma impedância é chamada de **Equivalente de Thèvenin**, como apresenta a Figura 15.

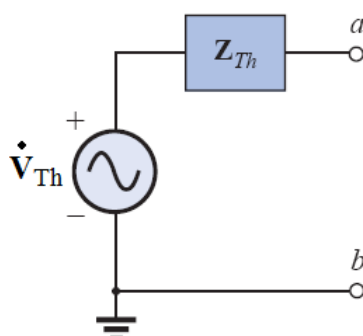


Figura 15. Equivalente de Thèvenin (Adaptado de Boylestad, 2002).

Observação: Um circuito linear é aquele composto apenas por elementos que apresentem um comportamento linear, ou seja, nos quais a corrente é diretamente proporcional à tensão aplicada.

O Equivalente de Thèvenin é especialmente útil quando um circuito de dois terminais é conectado a uma impedância externa variável, ou a outro circuito externo no qual os parâmetros podem variar, como ilustra a Figura 16(a). Com o uso do Equivalente de Thèvenin, não há necessidade de proceder a análise do circuito completo a cada vez que houver alteração na impedância externa ou nos parâmetros. Basta analisar o efeito do Equivalente de Thèvenin na impedância externa ou na parte do circuito externo no qual os parâmetros variaram, como ilustra a Figura 16(b).

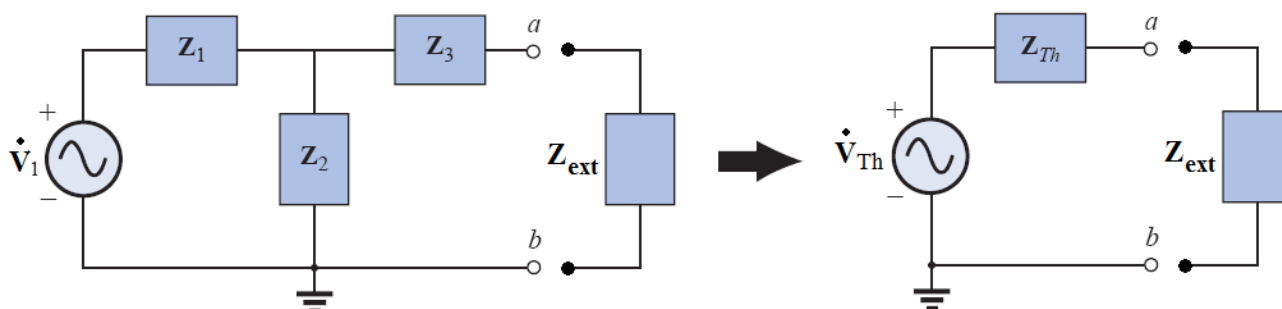


Figura 16. (a) Circuito de dois terminais conectado a uma impedância externa; (b) Equivalente de Thèvenin conectado a uma impedância externa (Adaptado de Boylestad, 2002).

Observação: O Equivalente de Thèvenin proporciona uma equivalência nos dois terminais analisados, porém a construção interna e as características do circuito original são diferentes (BOYLESTAD, 2002).

Como outros métodos de análise de circuitos, o Teorema de Thèvenin também permite determinar a tensão ou a corrente em qualquer ponto de um circuito linear com uma ou mais fontes. A grande vantagem é que ele permite analisar uma parte específica de um circuito substituindo a parte remanescente pelo Equivalente de Thèvenin.

4.1. PROCEDIMENTO BÁSICO

Para aplicação do Teorema de Thèvenin, o seguinte procedimento básico deve ser executado:

- i. Identificar os terminais a e b do circuito e remover os elementos externos que não farão parte do Equivalente de Thèvenin. **Os terminais a e b deverão estar em aberto;**
- ii. Determinar a *Tensão de Thèvenin*:

A Tensão de Thèvenin é a tensão disponível entre os terminais a e b em **circuito aberto.**

- iii. Determinar a *Impedância de Thèvenin*:

A Impedância de Thèvenin é a impedância total vista entre os terminais a e b em **aberto com todas as **fontes anuladas** (fontes de tensão em curto e fontes de corrente abertas).**

Atenção: A Impedância de Thèvenin **NÃO** é a impedância equivalente do circuito!

- iv. Desenhar o Equivalente de Thèvenin e conectar os elementos externos;
- v. Calcular os parâmetros desejados nos elementos externos.

Observação: Caso o circuito contenha fontes reais, as impedâncias internas dessas fontes deverão ser consideradas no cálculo da Impedância de Thèvenin.

O procedimento básico apresentado também pode ser usado em circuitos contendo apenas fontes contínuas. O mesmo procedimento também pode ser aplicado aos circuitos contendo **Fontes Dependentes**, desde que a variável de controle da fonte **NÃO** esteja na parte do circuito onde será obtido o Equivalente de Thèvenin. Caso a variável de controle da Fonte Dependente esteja na parte do circuito onde será aplicado o Teorema de Thèvenin, como apresentado na Figura 17, outros procedimentos deverão ser empregados. Esses procedimentos alternativos são descritos em Boylestad (2002).

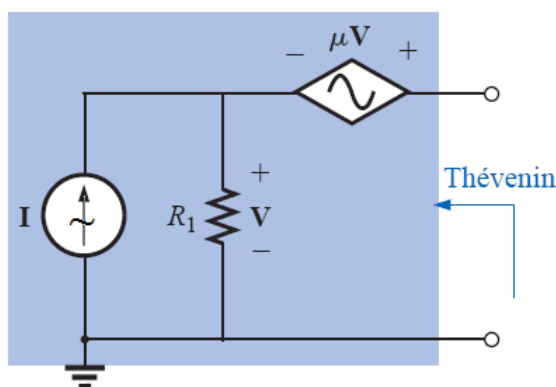


Figura 17. Fonte Dependente e variável de controle na parte do Equivalente de Thèvenin (Boylestad, 2002).

Como o valor das impedâncias depende da frequência, quando houver fontes de diferentes frequências no mesmo circuito, o Teorema de Thèvenin deve ser aplicado em conjunto com o

Método da Superposição de Efeitos para **determinação de um Equivalente de Thèvenin para cada frequência.**

Exemplo: Utilize o Teorema de Thèvenin para determinar a corrente máxima e mínima no resistor de carga R_L do circuito ilustrado na Figura 18.

Dados: $\dot{V}_1 = 20\angle 0^\circ \text{ V}$; $R_1 = 4 \Omega$; $R_2 = 6 \Omega$; $R_3 = 5 \Omega$; $X_L = j10 \Omega$; $X_C = -j4 \Omega$; $R_L = 0 \text{ a } 10 \Omega$

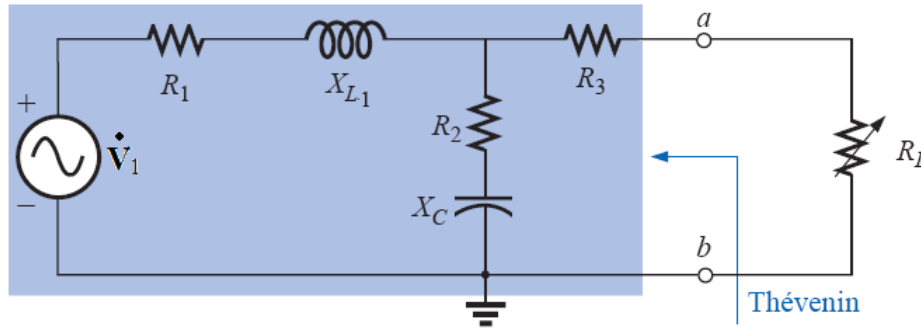


Figura 18. Circuito para determinação do Equivalente de Thèvenin (Adaptado de Boylestad, 2002).

Solução: Inicialmente, a parte externa do circuito deve ser removida e os terminais a e b devem estar abertos, conforme ilustra o circuito da Figura 19.

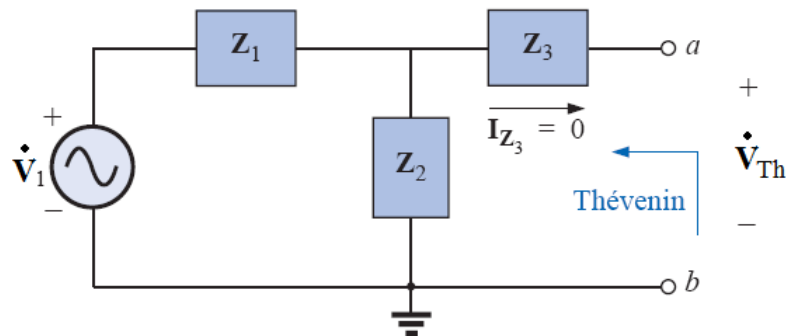


Figura 19. Circuito com os terminais abertos para obtenção da Tensão de Thèvenin (Adaptado de Boylestad, 2002).

Em seguida, deve-se proceder a determinação da **Tensão de Thèvenin**, que é a tensão entre os terminais a e b . Como os terminais a e b estão em circuito aberto, não há tensão sobre a impedância Z_3 e, portanto, a Tensão de Thèvenin é a tensão sobre a impedância Z_2 . A tensão da fonte é dividida entre a impedância Z_1 e Z_2 . Usando a equação do **Divisor de Tensão**:

$$\dot{V}_{Z2} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \dot{V}_F$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V}_{Th} = \dot{V}_{Z2} &= \frac{R_2 + X_C}{(R_1 + X_L) + (R_2 + X_C)} \cdot \dot{V}_F \\ \dot{V}_{Th} &= \frac{6 - j4}{(4 + j10) + (6 - j4)} \cdot 20\angle 0^\circ = \frac{7,21\angle -33,69^\circ}{11,66\angle 30,96^\circ} \cdot 20\angle 0^\circ \end{aligned}$$

$$\dot{V}_{Th} = 12,37\angle -64,65^\circ \text{ V}$$

Para obtenção da **Impedância de Thèvenin** as fontes do circuito devem ser anuladas. Portanto, a fonte de tensão do circuito deve ser substituída por um curto-circuito, como ilustra a Figura 20.

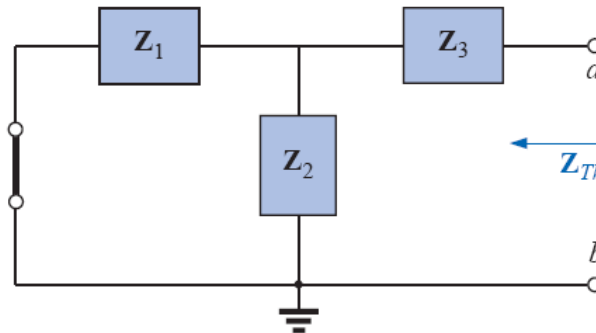


Figura 20. Circuito com a fonte anulada para obtenção da Impedância de Thèvenin (Adaptado de Boylestad, 2002).

A Impedância de Thèvenin é a impedância total entre os terminais a e b em aberto e com a fonte em curto-circuito. Assim, no circuito da Figura 20 a impedância Z_1 está associada em paralelo com a impedância Z_2 e ambas estão em série com a impedância Z_3 :

$$Z_{Th} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3$$

Substituindo os valores:

$$Z_{Th} = \frac{(4 + j10) \cdot (6 - j4)}{(4 + j10) + (6 - j4)} + 5 = \frac{(10,77 \angle 68,20^\circ) \cdot (7,21 \angle -33,69^\circ)}{10 + j6} + 5$$

$$Z_{Th} = \frac{77,65 \angle 34,51^\circ}{11,66 \angle 30,96^\circ} + 5 = 6,66 \angle 3,55^\circ + 5 = 6,65 + j0,41 + 5$$

$$Z_{Th} = 11,65 + j0,41 \, \Omega$$

A Figura 21 apresenta o circuito com o Equivalente Thèvenin conectado à resistência de carga variável. Para determinar a corrente máxima e mínima na carga, o valor da resistência da carga deve estar no valor mínimo e máximo, respectivamente.

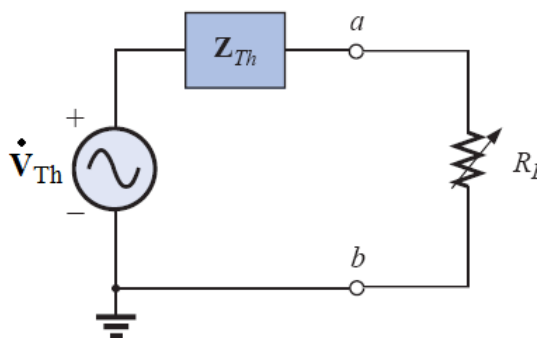


Figura 21. Equivalente Thèvenin conectado à carga variável (Adaptado de Boylestad, 2002).

Considerando a resistência da carga $0 \, \Omega$, a corrente máxima será calculada por:

$$i_{m\acute{a}x} = \frac{\dot{V}_{Th}}{Z_{Th} + R_{min}} = \frac{12,37 \angle -64,65^\circ}{(11,65 + j0,41) + 0} = \frac{12,37 \angle -64,65^\circ}{11,66 \angle 2,02^\circ}$$

$$i_{m\acute{a}x} = 1,06 \angle -66,67^\circ \, A$$

Considerando a resistência de carga $10 \, \Omega$, a corrente mínima será:

$$\dot{I}_{min} = \frac{\dot{V}_{Th}}{Z_{Th} + R_{max}} = \frac{12,37 \angle -64,65^\circ}{(11,65 + j0,41) + 10} = \frac{12,37 \angle -64,65^\circ}{21,65 \angle 1,08^\circ}$$

$$\dot{I}_{min} = 0,57 \angle -65,73^\circ \text{ A}$$

Pode-se perceber que o uso do Equivalente de Thèvenin permite facilmente determinar os parâmetros em uma carga variável sem a necessidade de refazer os cálculos para todo o circuito.

Exemplo: Determine o Equivalente Thèvenin para o circuito da Figura 22 contendo uma Fonte Dependente.

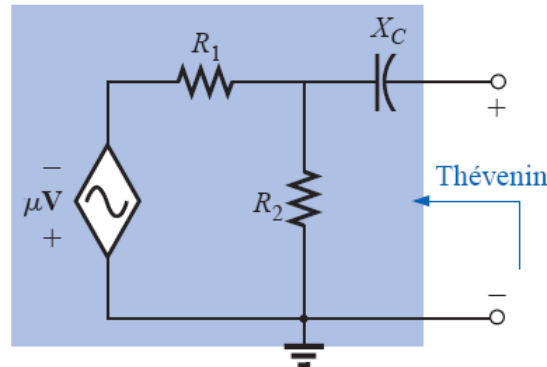


Figura 22. Obtenção do Equivalente Thèvenin em circuito com fonte dependente (Boylestad, 2002).

Solução: O procedimento básico pode ser aplicado, pois o circuito da Figura 22 contém uma Fonte Dependente e a variável de controle não está na parte em que será obtido o Equivalente Thèvenin. Nesse circuito, a Tensão de Thèvenin é a tensão sobre o resistor R_2 , pois os terminais estão abertos e não há queda de tensão sobre o capacitor. Assim, a Tensão de Thèvenin é obtida pelo divisor de tensão entre R_1 e R_2 :

$$\dot{V}_{Th} = \dot{V}_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot (-\mu V)$$

$$\dot{V}_{Th} = -\frac{R_2 \cdot \mu V}{R_1 + R_2}$$

Para determinação da Impedância de Thèvenin, a fonte de tensão deve ser anulada com um curto-circuito, como ilustra a Figura 23.

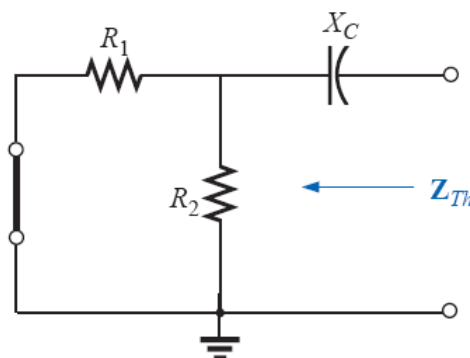


Figura 23. Fonte de tensão anulada para obtenção da Impedância de Thèvenin (Boylestad, 2002).

A Impedância de Thèvenin é obtida pela associação paralela de R_1 e R_2 em série com X_C :

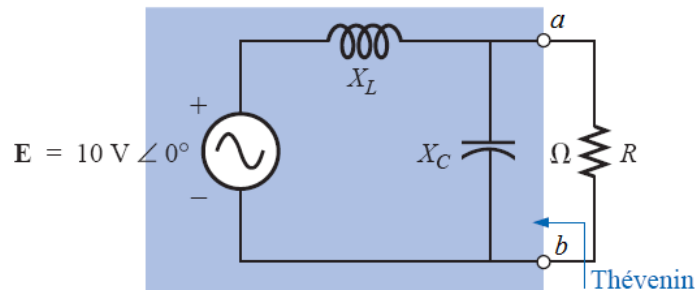
$$Z_{Th} = \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) + X_C$$

4.2. PROBLEMAS PROPOSTOS:

- 1) Utilize o Equivalente Thèvenin para determinar a potência no resistor externo cuja resistência assume os valores de 5 e 20 Ω :

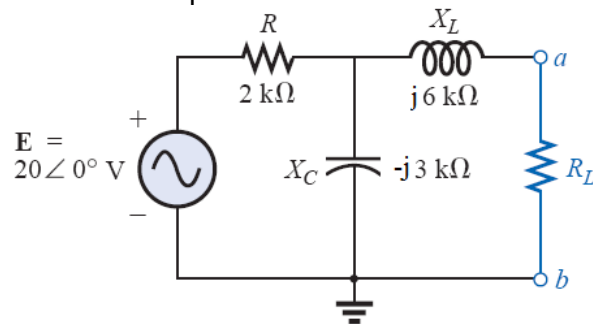
Dados: $\vec{E} = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$; $X_L = j8 \Omega$; $X_C = -j2 \Omega$

Resp: $P_R = 0,54 \sim 1,72 \text{ W}$



Boylestad, 2002 – Exemplo 18.7.

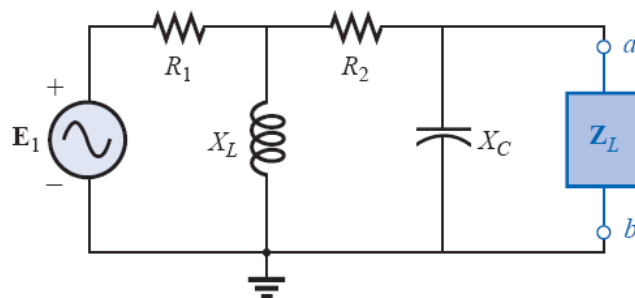
- 2) Determine o Equivalente Thèvenin para o circuito abaixo:



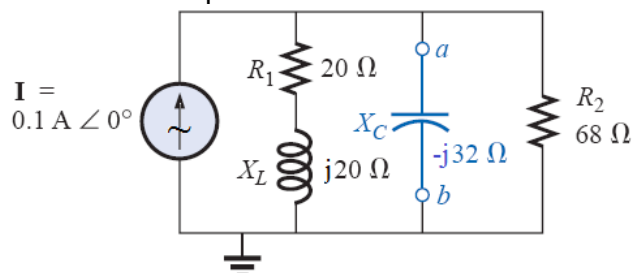
Boylestad, 2002 – Problema 18.12.

- 3) Determine o Equivalente Thèvenin do circuito abaixo e calcule a corrente na carga;

Dados: $\vec{E}_1 = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$; $R_1 = 100 \Omega$; $R_2 = 500 \Omega$; $X_L = j500 \Omega$; $X_C = -j100 \Omega$; $Z_L = (100 + j50) \Omega$;



- 4) Determine o Equivalente Thèvenin para o circuito abaixo:

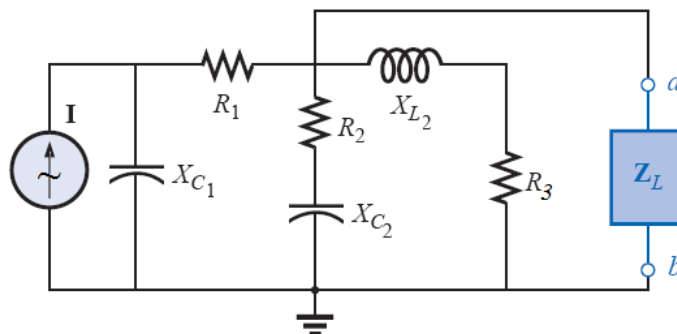


Boylestad, 2002 – Problema 18.13.

5) Determine o Equivalente Thèvenin para o circuito abaixo:

Dados: $\hat{I}_F = 50\angle 0^\circ \text{ A}$; $R_1 = R_3 = 50 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $X_{C1} = -j30 \Omega$; $X_{C2} = -j20 \Omega$; $X_L = j50 \Omega$.

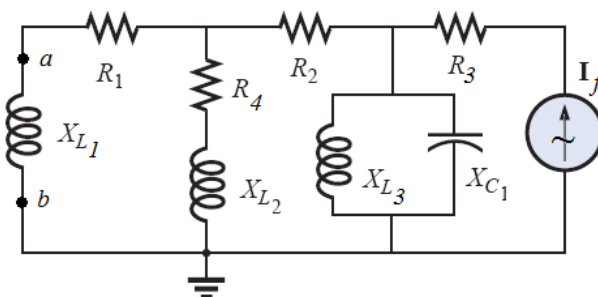
Resp: $Z_{th} = 18,12\angle -25,63^\circ \Omega$; $V_{th} = 466,12\angle -84,16^\circ \text{ V}$



6) Determine o Equivalente Thèvenin para o circuito abaixo:

Dados: $\hat{I}_f = 5\angle 0^\circ \text{ A}$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $R_3 = 50 \Omega$; $R_4 = 10 \Omega$; $X_{L1} = j35 \Omega$; $X_{L2} = j20 \Omega$; $X_{L3} = j50 \Omega$; $X_{C1} = -j100 \Omega$

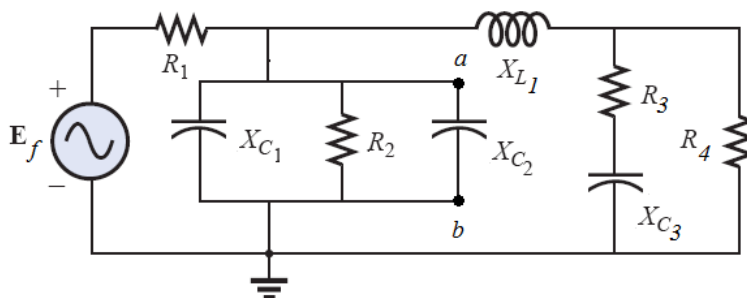
Resp: $Z_{th} = 17,45 + j16,86 \Omega$; $V_{th} = 90,39\angle 77,47^\circ \text{ V}$



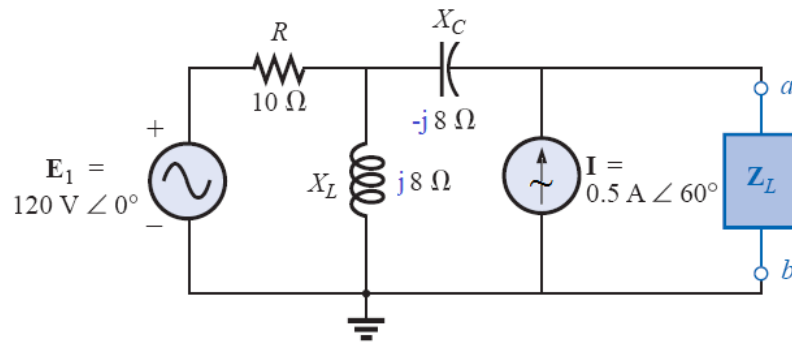
7) Determine o Equivalente Thèvenin para o circuito abaixo:

Dados: $\hat{E}_f = 30\angle 0^\circ \text{ V}$; $R_1 = 15 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $R_3 = 25 \Omega$; $R_4 = 15 \Omega$; $X_{L1} = j10 \Omega$; $X_{C1} = -j25 \Omega$; $X_{C2} = -j50 \Omega$; $X_{C3} = -j20 \Omega$

Resp: $Z_{th} = 5,59\angle 1,92^\circ \Omega$; $V_{th} = 13,29\angle -38,93^\circ \text{ V}$

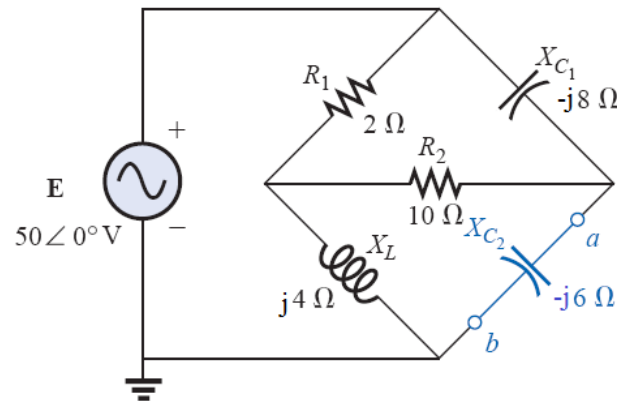


8) Determine o Equivalente Thèvenin para o circuito abaixo:



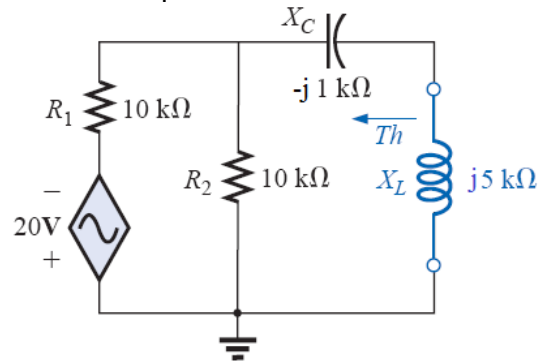
Boylestad, 2002 – Problema 18.14.

9) Determine o Equivalente Thèvenin para o circuito abaixo:

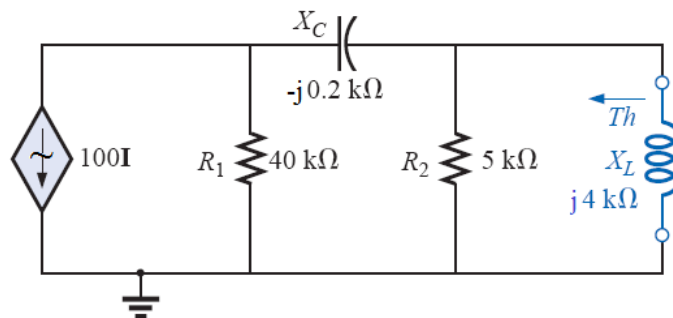


Boylestad, 2002 – Problema 18.13.

10) Determine o Equivalente Thèvenin para os circuitos abaixo com fontes dependentes:



Boylestad, 2002 – Problema 18.18.



Boylestad, 2002 – Problema 18.18.

5. TEOREMA DE NORTON

O método baseado no Teorema de Norton é usado para determinar os parâmetros elétricos (tensão, corrente e potência) fornecidos por um circuito (ou parte de um circuito) conectado por meio de dois terminais a outro circuito (ou parte de um circuito). O Teorema de Norton é enunciado da seguinte forma:

Qualquer circuito linear de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente composto por uma fonte de corrente em paralelo com uma impedância.

Essa fonte de corrente em paralelo com uma impedância é chamada de **Equivalente de Norton**, como apresenta a Figura 24.

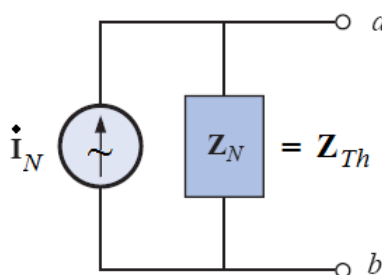


Figura 24. Equivalente de Norton (Adaptado de Boylestad, 2002)

Observação: Um circuito linear é aquele composto apenas por elementos que apresentem um comportamento linear, ou seja, nos quais a corrente é diretamente proporcional à tensão aplicada.

Assim como o Equivalente de Thèvenin, o Equivalente de Norton também é especialmente útil quando um circuito de dois terminais está conectado a uma impedância externa variável, ou a outro circuito externo no qual os parâmetros podem variar, como ilustra a Figura 25(a). Com o uso do Equivalente de Norton, não há necessidade de analisar o circuito completo cada vez que houver alteração na impedância externa. Basta determinar o efeito do Equivalente de Norton na impedância externa, como ilustra a Figura 25(b).

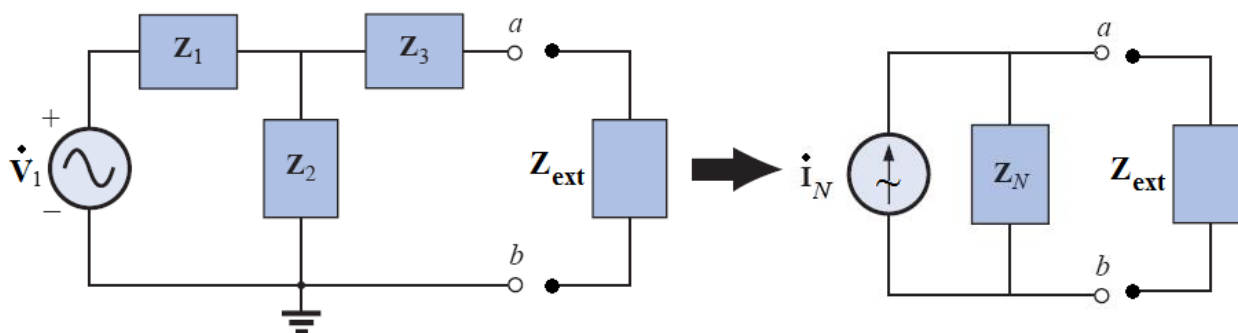


Figura 25. (a) Circuito de dois terminais conectado a uma impedância externa; (b) Equivalente de Norton conectado a uma impedância externa (Adaptado de Boylestad, 2002).

Observação: O Equivalente de Norton proporciona uma equivalência nos dois terminais analisados, porém a construção interna e as características do circuito original são diferentes (BOYLESTAD, 2002).

Como outros métodos de análise de circuitos, o Teorema de Norton também permite determinar a tensão ou a corrente em qualquer ponto de um circuito linear com uma ou

mais fontes. A grande vantagem é que ele permite analisar uma parte específica de um circuito substituindo a parte remanescente pelo Equivalente de Norton.

5.1. PROCEDIMENTO BÁSICO

Para aplicação do Teorema de Norton, o seguinte procedimento básico deve ser executado:

- i. Identificar os terminais a e b do circuito e remover os elementos externos que não farão do Equivalente de Norton;
- ii. Determinar a *Corrente de Norton*:

A **Corrente de Norton** é a corrente que circula entre os terminais a e b em **curto-circuito**.

- iii. Determinar a *Impedância de Norton*:

A **Impedância de Norton** é a impedância total vista entre os terminais a e b em **aberto** com todas as **fontes anuladas** (fontes de tensão em curto e fontes de corrente abertas).

Importante: A *Impedância de Norton* é **IDÊNTICA** à *Impedância de Thévenin*

- iv. Desenhar o Equivalente de Norton e conectar os elementos externos;
- v. Calcular os parâmetros desejados nos elementos externos.

Observação: Caso o circuito contenha fontes reais, as impedâncias internas dessas fontes deverão ser consideradas no cálculo da Impedância de Norton.

O procedimento básico apresentado também pode ser usado em circuitos contendo apenas fontes contínuas. O mesmo procedimento também pode ser aplicado aos circuitos contendo **Fontes Dependentes**, desde que a variável de controle da fonte **NÃO** esteja na parte do circuito onde será obtido o Equivalente de Norton. Caso a variável de controle da Fonte Dependente esteja na parte do circuito onde será aplicado o Teorema de Norton, como apresentado na Figura 17, outros procedimentos deverão ser empregados. Esses procedimentos alternativos são descritos em Boylestad (2002).

Como o valor das impedâncias depende da frequência, quando houver fontes de diferentes frequências no mesmo circuito, o Teorema de Norton deve ser aplicado em conjunto com o Método da Superposição de Efeitos para **determinação de um Equivalente de Norton para cada frequência**.

5.2. TRANSFORMAÇÃO DOS EQUIVALENTES

O **Princípio da Dualidade** afirma que toda fonte de tensão em série com uma impedância interna é equivalente a uma fonte de corrente com a mesma impedância em paralelo. Como o Equivalente de Thévenin é uma fonte de tensão em série com uma impedância, é possível transformá-lo no Equivalente de Norton, e vice-versa, como ilustra a Figura 26, pois a Impedância de Thévenin é idêntica à Impedância de Norton:

$$Z_{Th} \equiv Z_N$$

Portanto, a Lei de Ohm pode ser usada para transformação dos equivalentes:

$$I_N = \frac{\dot{V}_{Th}}{Z_{Th}} \quad e \quad \dot{V}_{Th} = Z_N \cdot I_N$$

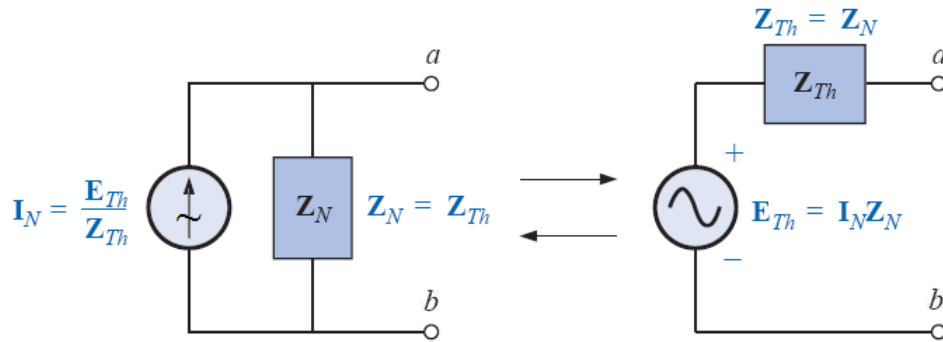


Figura 26. Transformação dos Equivalentes Thévenin e Norton (Boylestad, 2002).

Exemplo: Determine o Equivalente de Norton nos terminais a e b do circuito da Figura 27 e o transforme em Equivalente Thévenin.

Dados: $V_f = 15\angle 0^\circ$; $R_1 = 4\ \Omega$; $X_L = j3\ \Omega$; $X_C = -j4\ \Omega$; $R_L = 20\ \Omega$.

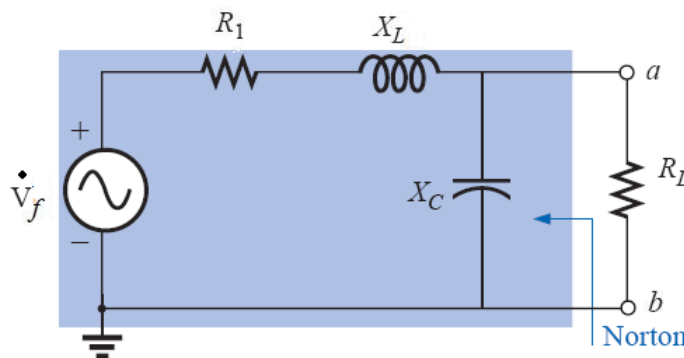


Figura 27. Circuito para obtenção do Equivalente de Norton (Adaptado de Boylestad, 2002).

Solução: Inicialmente a parte externa do circuito deve ser removida. Para determinação da Corrente de Norton os terminais a e b devem ser curto-circuitados, conforme a Figura 28.

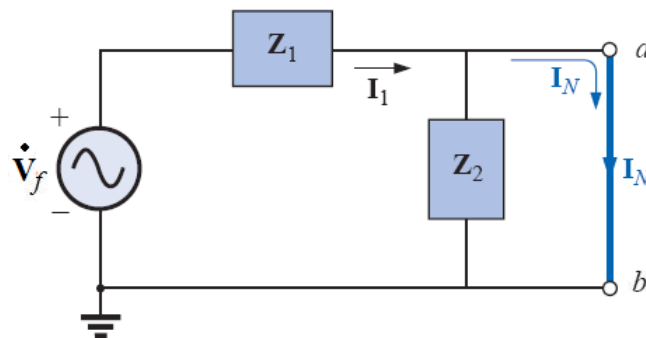


Figura 28. Terminais em curto para determinação da Corrente de Norton (Adaptado de Boylestad, 2002).

A impedância Z_2 é anulada devido ao curto-circuito entre os terminais a e b . Portanto, a Corrente de Norton é a corrente na impedância Z_1 . Assim:

$$I_N = \frac{\dot{V}_f}{Z_1}$$

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{V}_f}{(R_1 + X_L)} = \frac{15\angle 0^\circ}{(4 + j3)} = \frac{15\angle 0^\circ}{5\angle 36,87^\circ}$$

$$\dot{I}_N = 3\angle -36,87^\circ \text{ A}$$

Para determinação da Impedância de Norton os terminais a e b deve estar abertos e a fonte de tensão deve ser anulada com um curto-circuito, com ilustra a Figura 29. Assim, a Impedância de Norton é calculada pelo paralelo entre as impedâncias Z_1 e Z_2 :

$$Z_N = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z_N = \frac{(R_1 + X_L) \cdot X_C}{(R_1 + X_L) + X_C} = \frac{(4 + j3) \cdot (-j4)}{(4 + j3) - j4} = \frac{5\angle 36,87^\circ \cdot 4\angle -90^\circ}{4,12\angle -14,04^\circ} = \frac{20\angle -53,13}{4,12\angle -14,04^\circ} = 4,85\angle -39,1^\circ$$

$$Z_N = 3,76 - j3,06 \Omega$$

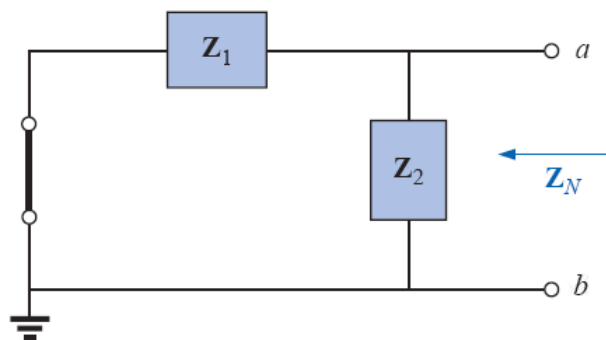


Figura 29. Circuito para determinação da Impedância de Norton (Adaptado de Boylestad, 2002).

A Figura 30 apresenta o Equivalente de Norton resultante, cuja Impedância de Thèvenin (Norton) é composta por uma resistência de $3,76 \Omega$ em série com uma reatância capacitiva de $3,06 \Omega$.

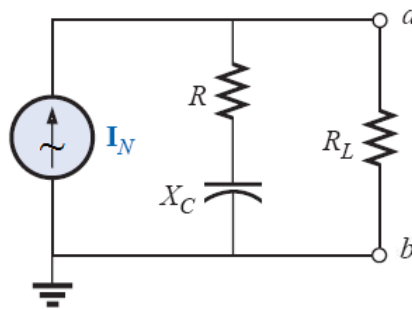


Figura 30. Equivalente de Norton para o circuito da Figura 27 (Adaptado de Boylestad, 2002).

O Equivalente Thèvenin é obtido a partir do Equivalente Norton pelas equações:

$$Z_{Th} \equiv Z_N$$

$$\dot{V}_{Th} = Z_N \cdot \dot{I}_N$$

Portanto:

$$Z_{Th} \equiv Z_N = 3,76 - j3,06 \Omega$$

$$\dot{V}_{Th} = Z_N \cdot \dot{I}_N = (3,76 - j3,06) \cdot (3\angle -36,87^\circ) = (4,85\angle -39,1^\circ) \cdot (3\angle -36,87^\circ)$$

$$\dot{V}_{Th} = 14,55\angle -75,97^\circ \text{ V}$$

Exemplo: Determine o Equivalente de Norton para o circuito com Fonte Dependente, apresentado na Figura 31.

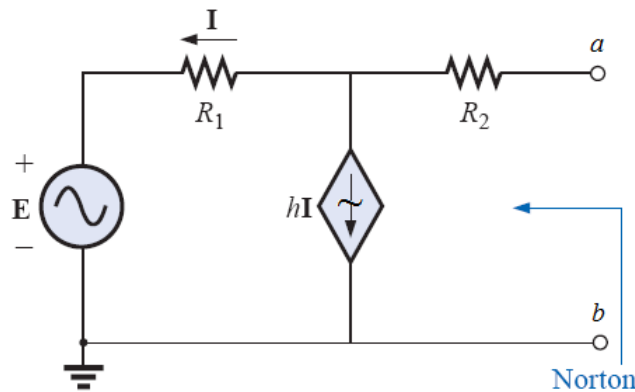


Figura 31. Circuito com Fonte Dependente para obtenção do Equivalente de Norton (Boylestad, 2002).

Solução: A Corrente de Norton é determinada pela corrente que circula entre os terminais a e b em curto-circuito, como ilustra a Figura 32. Pela Lei das Correntes de Kirchhoff:

$$-I - hI - I_N = 0$$

$$I_N = -(1 + h)I$$

Aplicando a Lei das Tensões de Kirchhoff na supermalha:

$$E + R_1 I - R_2 I_N = 0$$

$$I = \frac{R_2 I_N - E}{R_1}$$

Substituindo e resolvendo:

$$I_N = -(1 + h)I = -(1 + h) \cdot \left(\frac{R_2 I_N - E}{R_1} \right)$$

$$R_1 I_N = -(1 + h)R_2 I_N + (1 + h)E$$

$$I_N [R_1 + (1 + h)R_2] = (1 + h)E$$

$$I_N = \frac{(1 + h)E}{R_1 + (1 + h)R_2}$$

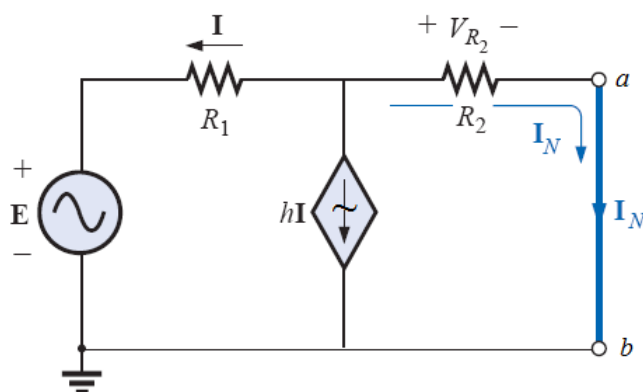


Figura 32. Terminais em curto-circuito para determinação da Corrente de Norton (Boylestad, 2002).

Como há uma Fonte Dependente no circuito onde será determinado o Equivalente de Norton, o procedimento básico não pode ser empregado, e um método alternativo deve ser utilizado para determinar a Impedância de Norton.

Método Alternativo: Para determinação da Impedância de Norton devem-se considerar os terminais abertos e, portanto, não há corrente em R_2 , como ilustra a Figura 33. Então pela Lei das Correntes de Kirchhoff:

$$-I - hI = 0$$

$$I(h + 1) = 0$$

Considerando que $h > 0$, para que essa igualdade seja verdadeira é necessário que $I = 0$. Portanto:

$$E_{ab} = E$$

Então:

$$Z_N = \frac{E_{ab}}{I_N} = \frac{E}{\frac{(1+h)E}{R_1 + (1+h)R_2}} = \frac{R_1 + (1+h)R_2}{(1+h)}$$

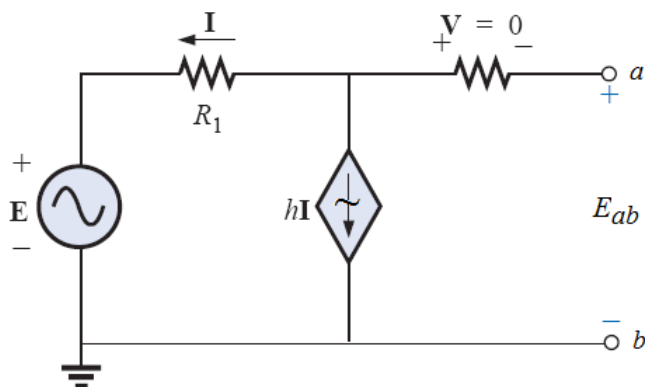
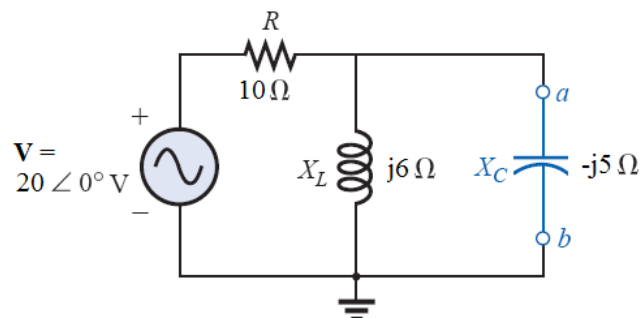


Figura 33. Terminais abertos para determinação da Impedância de Norton (Boylestad, 2002).

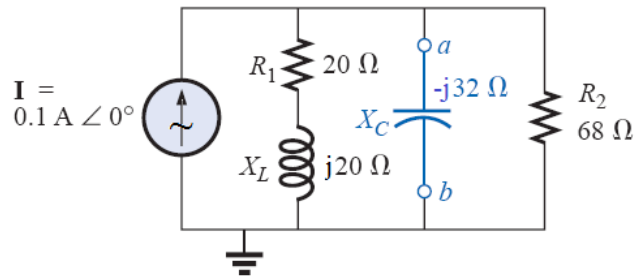
5.3. PROBLEMAS PROPOSTOS

- 1) Utilize o Teorema de Norton para determinar a corrente no capacitor do circuito abaixo:
 Resp.: $\dot{I}_C = 3,79 \angle 71,56^\circ \text{ A}$



Adaptado de Boylestad, 2002.

- 2) Determine o Equivalente de Norton entre os terminais a e b do circuito abaixo:

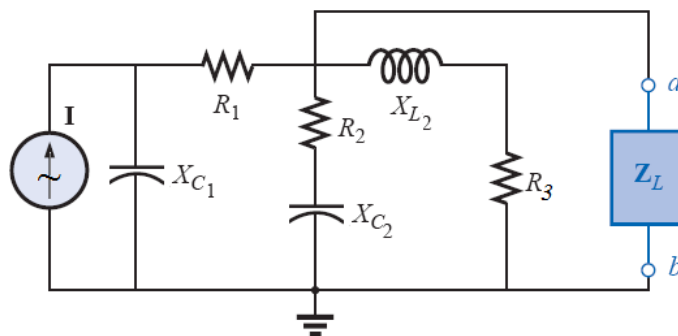


Boylestad, 2002 – problema 18.27

3) Determine o Equivalente de Norton entre os terminais a e b do circuito abaixo:

Dados: $\dot{I}_F = 50 \angle 0^\circ \text{ A}$; $R_1 = R_3 = 50 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $X_{C1} = -j30 \Omega$; $X_{C2} = -j20 \Omega$; $X_L = j50 \Omega$.

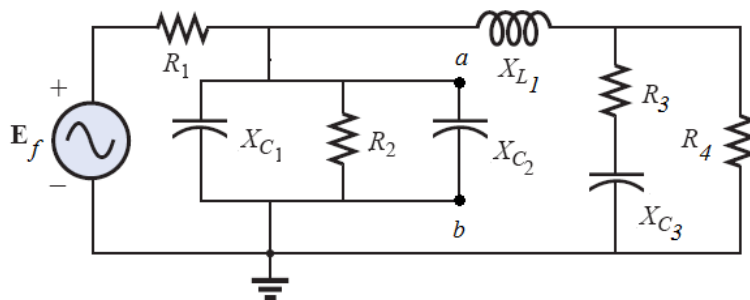
Resp: $Z_{th} = 18,12 \angle -25,63^\circ \Omega$; $I_N = 25,72 \angle -58,53^\circ \text{ V}$



4) Determine o Equivalente de Norton entre os terminais a e b do circuito abaixo:

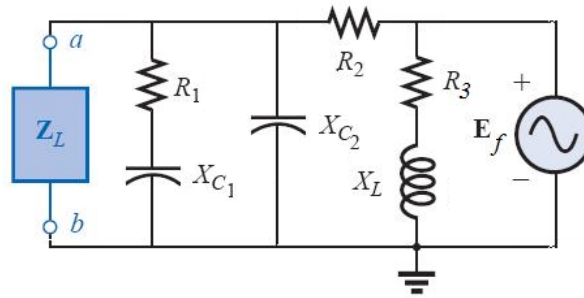
Dados: $\dot{E}_f = 30 \angle 0^\circ \text{ V}$; $R_1 = 15 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $R_3 = 25 \Omega$; $R_4 = 15 \Omega$; $X_{L1} = j10 \Omega$; $X_{C1} = -j25 \Omega$; $X_{C2} = -j50 \Omega$; $X_{C3} = -j20 \Omega$

Resp: $Z_{th} = 5,59 \angle 1,92^\circ \Omega$; $I_N = 2,38 \angle -40,85^\circ \text{ V}$

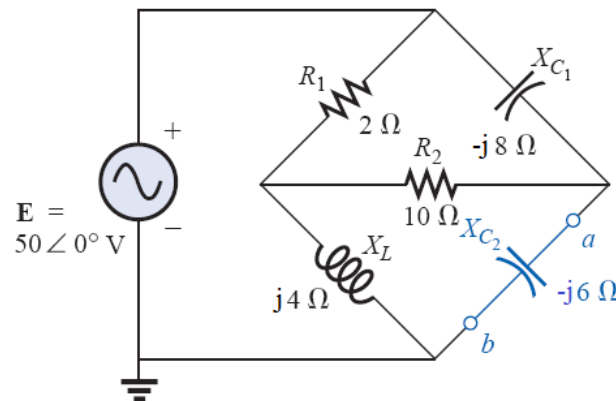


5) Determine o Equivalente de Norton para o circuito abaixo:

Dados: $\dot{E}_f = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 5 \Omega$; $X_L = j6 \Omega$; $X_{C1} = -j10 \Omega$; $X_{C2} = -j5 \Omega$.

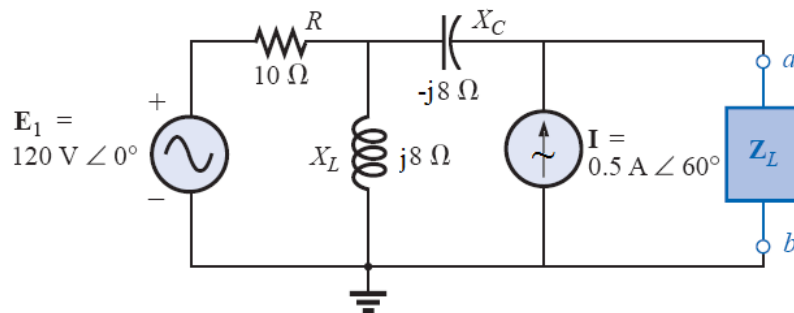


6) Determine o Equivalente de Norton entre os terminais a e b do circuito abaixo:



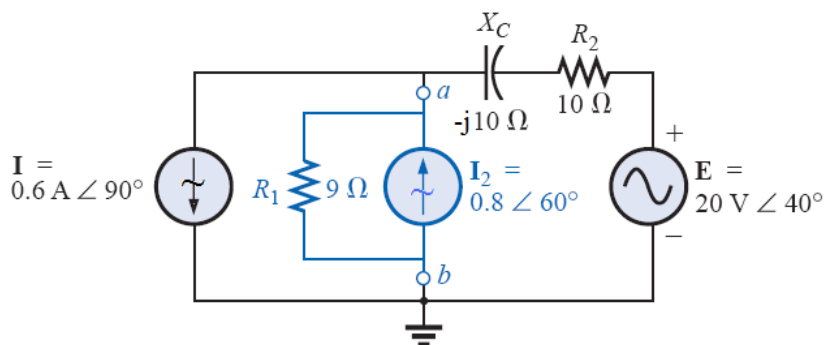
Boylestad, 2002 – problema 18.27

7) Determine o Equivalente de Norton entre os terminais a e b do circuito abaixo:



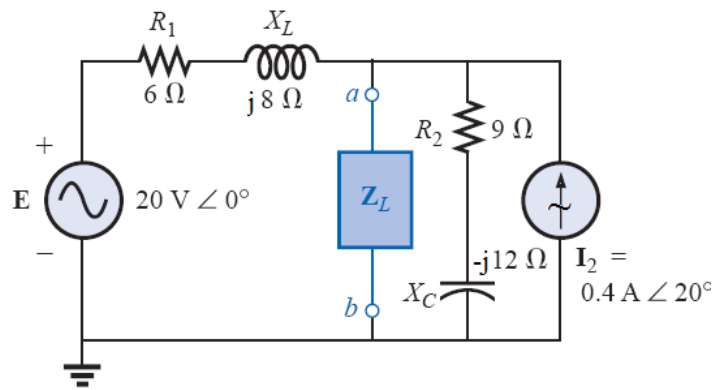
Boylestad, 2002 – problema 18.28

8) Determine o Equivalente de Norton entre os terminais a e b do circuito abaixo:



Boylestad, 2002 – problema 18.28

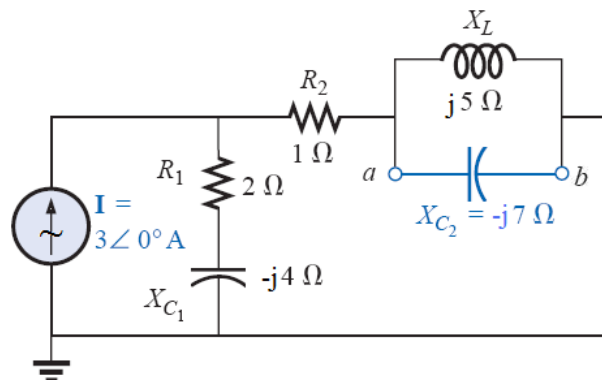
9) Determine o Equivalente de Norton entre os terminais a e b do circuito abaixo:



Boylestad, 2002 – problema 18.29

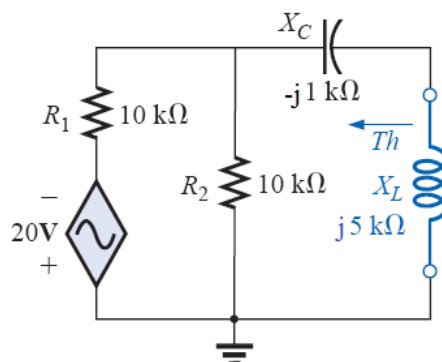
10) Determine o Equivalente de Norton para o circuito abaixo e o transforme em Equivalente de Thèvenin:

Resp: $Z_N = Z_{Th} = 7,5 + j2,5 \Omega$; $V_{Th} = 21,2 \angle 8,14^\circ V$

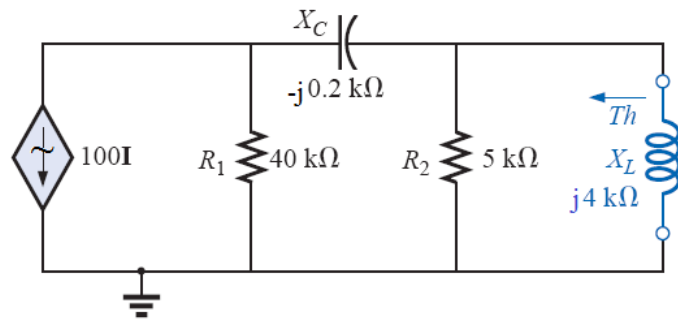


Boylestad, 2002 – Exemplo 18.15.

11) Determine o Equivalente de Norton entre os terminais *a* e *b* dos circuitos abaixo contendo fontes dependentes onde a variável de controle é externa ao equivalente:

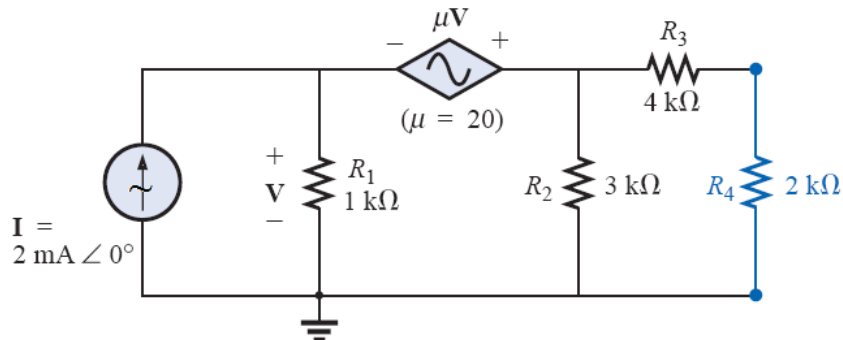


Boylestad, 2002 – problema 18.33.



Boylestad, 2002 – problema 18.34.

- 12) **Desafio!** Determine o Equivalente de Norton entre os terminais *a* e *b* do circuito abaixo contendo fonte dependente onde a variável de controle está na área do equivalente:



Boylestad, 2002 – problema 18.37.

6. TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

O Teorema da Superposição é usado para análise de circuitos contendo mais de uma fonte, onde cada fonte é tratada separadamente e a resposta de tensão ou corrente em um ponto do circuito é dada pela soma algébrica das respostas individuais de cada fonte. A grande vantagem desse método é não requerer o uso de técnicas matemáticas mais complexas, como o uso de determinantes, para determinação das tensões e correntes no circuito. O Teorema da Superposição de Efeitos é enunciado da seguinte forma:

A resposta de tensão e/ou corrente em qualquer ramo de um circuito linear com mais de uma fonte pode ser obtida pela **soma algébrica** das respostas de tensão e/ou corrente produzidas nesses ramos pela ação independente de cada uma das fontes, com as demais anuladas.

As fontes de tensão são anuladas por um curto-circuito e as fontes de corrente são anuladas por um circuito aberto. As impedâncias internas das fontes devem permanecer no circuito, como ilustra a Figura 34.

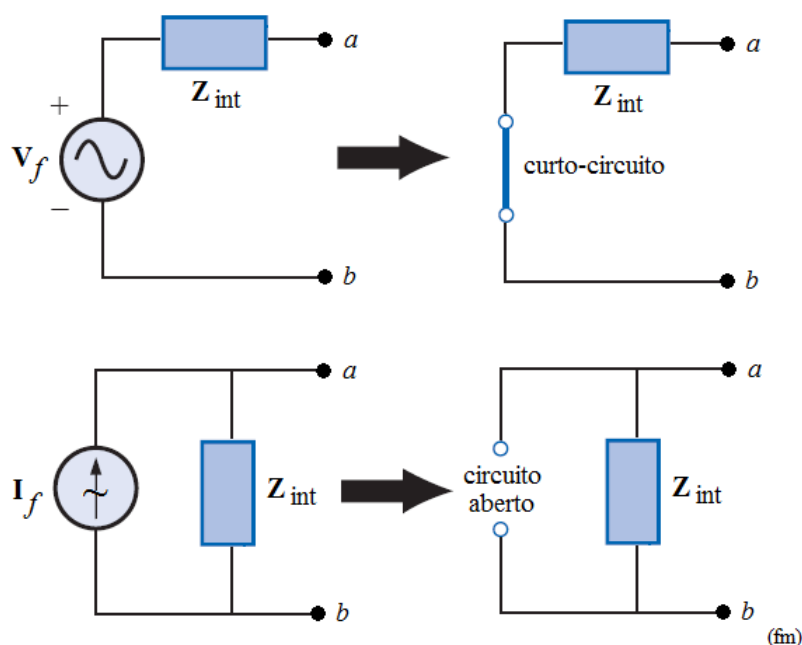


Figura 34. Forma de anular fontes de tensão e de corrente com impedância interna.

A **corrente total** em um ramo de um circuito é dada pela **soma algébrica** das correntes produzidas por cada fonte atuando de forma independente. Portanto, as correntes de **sentidos opostos** em um ramo devem ser **subtraídas**, cujo sentido resultante é aquele da corrente de maior magnitude. Da mesma forma, a **tensão total** em um ramo é dada pela **soma algébrica** das tensões nesse ramo. Assim, as tensões de **polaridades opostas** em um ramo devem ser **subtraídas**, cuja polaridade resultante é aquela da tensão de maior magnitude.

O Teorema da Superposição de Efeitos não pode ser aplicado aos efeitos da potência elétrica, pois a potência em uma impedância é diretamente proporcional ao quadrado da tensão ou da corrente, o que viola o princípio da linearidade. Portanto:

A potência total em uma impedância deve ser determinada a partir da tensão total superposta ou da corrente total superposta nessa impedância, e não pela soma algébrica das potências estabelecidas individualmente por cada fonte.

O Teorema da Superposição de Efeitos pode ser aplicado aos circuitos que contenham **fontes contínuas e/ou alternadas de frequências diferentes**. Entretanto, a superposição final dos efeitos só pode ser feita no **domínio temporal** (e não no domínio fasorial), pois a resposta é um **sinal composto não senoidal**.

Uma das aplicações mais frequentes do Teorema da Superposição é a análise de circuitos eletrônicos, onde a resposta CC e CA são tratadas separadamente e a solução total é a soma algébrica de ambas. Essa análise por meio do Teorema da Superposição é importante, pois a resposta dos elementos reativos é alterada significativamente em CC e CA. Além disso, a análise CC de um circuito eletrônico frequentemente define parâmetros importantes para a análise CA (BOYLESTAD, 2002).

6.1. PROCEDIMENTO BÁSICO

Para aplicação do Teorema da Superposição de Efeitos o seguinte procedimento básico deve ser executado:

- Selecionar uma fonte para análise e anular as fontes restantes (fontes de tensão com curto-circuito e fontes de corrente com circuito aberto);
- Determinar os valores das impedâncias do circuito para a frequência da fonte selecionada;
- Obter a resposta de tensão ou corrente no ramo desejado em função dos parâmetros da fonte selecionada, utilizando os métodos de análise de circuito disponíveis;
- Identificar o sentido da corrente e a polaridade da tensão no ramo desejado para a fonte selecionada;
- Repetir os passos anteriores para as fontes restantes;
- Fazer a superposição dos efeitos, somando algebricamente as tensões ou correntes instantâneas (domínio do tempo) produzidas por cada fonte no ramo desejado. As polaridades das tensões e os sentidos das correntes devem ser levados em consideração. A superposição dos efeitos NÃO pode ser feita pela soma dos fasores de tensão ou de corrente caso as fontes sejam de frequências diferentes, pois a resposta é um sinal composto não senoidal.

Atenção: A superposição dos efeitos em circuitos com fontes de frequências diferentes deve ser feita no **domínio do tempo** usando-se as **funções instantâneas** das tensões ou correntes.

Exemplo: Para o circuito da Figura 35 com duas fontes de tensão operando com frequências diferentes, determine a corrente no capacitor.

Dados: $v_1(t) = 50\sqrt{2}\sin(2000t)V$; $v_2(t) = 20\sqrt{2}\sin(4000t)V$; $R_1 = 20\ \Omega$; $R_2 = 50\ \Omega$; $C = 5\ \mu F$

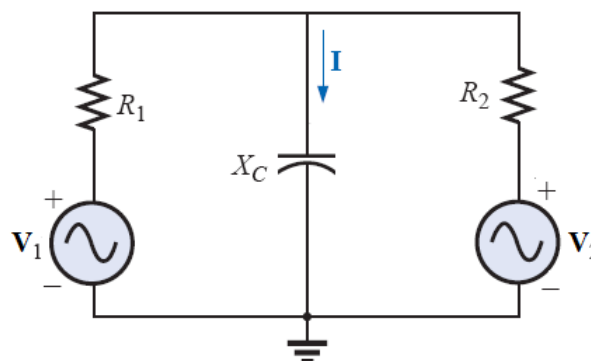


Figura 35. Circuito com duas fontes de tensão de frequências diferentes (Adaptado de Boylestad, 2002).

Solução: Inicialmente é selecionada a fonte V_1 para análise e a fonte V_2 é anulada com um curto-circuito, como ilustra a Figura 36.

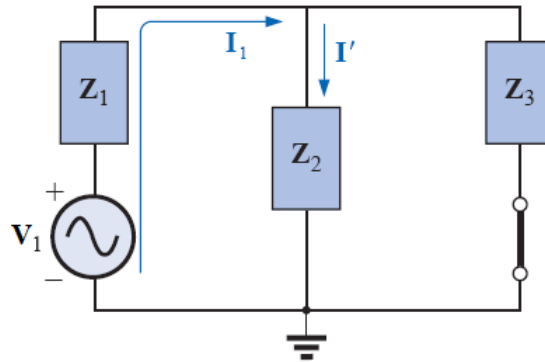


Figura 36. Fonte V_1 ativa e fonte V_2 anulada com um curto-circuito (Adaptado de Boylestad, 2002).

Em seguida são calculados os valores das impedâncias para a frequência da fonte V_1 :

$$\begin{aligned} Z'_1 &= R_1 = 20 \, \Omega \\ Z'_2 &= X'_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 2000 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = -j100 \, \Omega \\ Z_3 &= R_3 = 50 \, \Omega \end{aligned}$$

A impedância Z_2 está em paralelo com a impedância Z_3 , cujo valor é dado por:

$$\begin{aligned} Z'_{2\parallel 3} &= \frac{Z'_2 \cdot Z'_3}{Z'_2 + Z'_3} = \frac{-j100 \cdot 50}{-j100 + 50} = \frac{5000 \angle -90^\circ}{111,80 \angle -63,43^\circ} = 44,7 \angle -26,57^\circ \\ Z'_{2\parallel 3} &= (40 - j20) \, \Omega \end{aligned}$$

A corrente total fornecida pela fonte V_1 é dada por:

$$I_1 = \frac{\dot{V}_1}{Z'_1 + Z'_{2\parallel 3}} = \frac{50 \angle 0^\circ}{20 + (40 - j20)} = \frac{50 \angle 0^\circ}{63,24 \angle -18,4^\circ} = 0,79 \angle 18,4^\circ \, A$$

A contribuição da fonte V_1 para a corrente na impedância Z_2 é obtida pelo divisor de corrente:

$$\begin{aligned} I' &= \frac{Z'_3 \cdot I_1}{Z'_2 + Z'_3} = \frac{50 \cdot 0,79 \angle 18,4^\circ}{-j100 + 50} = \frac{39,5 \angle 18,4^\circ}{111,80 \angle -63,43^\circ} \\ I' &= 0,35 \angle 81,83^\circ \, A \end{aligned}$$

No domínio do tempo:

$$i'(t) = 0,35\sqrt{2}\text{sen}(2000t + 81,83^\circ) \, A$$

Posteriormente a fonte V_2 é selecionada e a fonte V_1 é anulada com um curto-circuito, como ilustra a Figura 37. Em seguida são calculados os valores das impedâncias para a frequência da fonte V_2 :

$$\begin{aligned} Z''_1 &= R_1 = 20 \, \Omega \\ Z''_2 &= X''_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 4000 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = -j50 \, \Omega \\ Z''_3 &= R_3 = 50 \, \Omega \end{aligned}$$

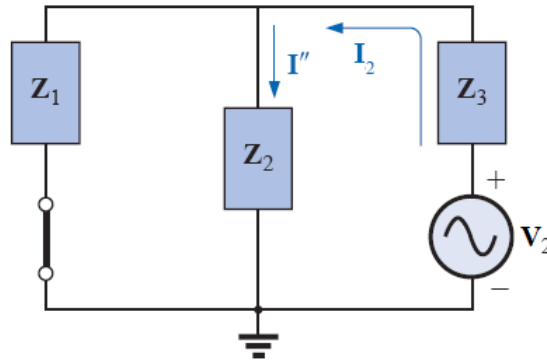


Figura 37. Fonte V_2 ativa e fonte V_1 anulada com um curto-circuito (Adaptado de Boylestad, 2002).

A impedância Z_1 está em paralelo com a impedância Z_2 , cujo valor é dado por:

$$Z''_{1\parallel 2} = \frac{Z''_1 \cdot Z''_2}{Z''_1 + Z''_2} = \frac{20 \cdot -j50}{20 - j50} = \frac{1000 \angle -90^\circ}{53,85 \angle -68,20^\circ} = 18,57 \angle -21,80^\circ$$

$$Z'_{1\parallel 2} = (17,24 - j6,9) \Omega$$

A corrente total fornecida pela fonte V_2 é dada por:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{Z''_3 + Z''_{1\parallel 2}} = \frac{20 \angle 0^\circ}{50 + (17,24 - j6,9)} = \frac{20 \angle 0^\circ}{67,59 \angle -5,86^\circ} = 0,296 \angle 5,86^\circ \text{ A}$$

A contribuição da fonte V_2 para a corrente na impedância Z_2 é obtida pelo divisor de corrente:

$$i'' = \frac{Z''_1 \cdot \dot{I}_2}{Z''_1 + Z''_2} = \frac{20 \cdot 0,296 \angle 5,86^\circ}{20 - j50} = \frac{5,82 \angle 5,86^\circ}{53,85 \angle -68,20^\circ}$$

$$i'' = 0,11 \angle 74,06^\circ \text{ A}$$

No domínio do tempo:

$$i''(t) = 0,11\sqrt{2}\text{sen}(4000t + 74,06^\circ) \text{ A}$$

A superposição dos efeitos é dada pela soma das correntes $i'(t)$ e $i''(t)$, pois têm o mesmo sentido:

$$i_{z2}(t) = i'(t) + i''(t)$$

$$i_{z2}(t) = 0,35\sqrt{2}\text{sen}(2000t + 84,80^\circ) + 0,11\sqrt{2}\text{sen}(4000t + 74,06^\circ) \text{ A}$$

Portanto:

$$i_{z2}(t) = 0,5\text{sen}(2000t + 84,80^\circ) + 0,15\text{sen}(4000t + 74,06^\circ) \text{ A}$$

A Figura 38 apresenta o sinal composto não senoidal resultante da superposição das contribuições de corrente $i'(t)$ e $i''(t)$ das fontes de tensão V_1 e V_2 , sobre o capacitor.

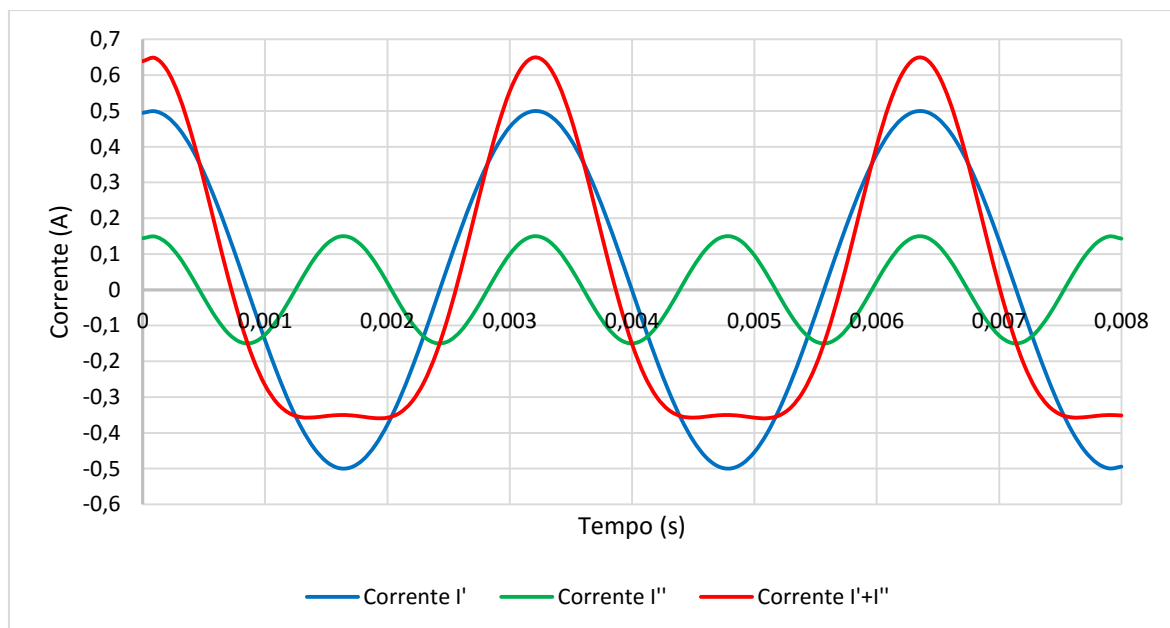


Figura 38. Sinal composto não senoidal resultante da superposição.

Exemplo: Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a corrente no indutor do circuito ilustrado na Figura 39, composto por uma fonte de tensão alternada de 400 Hz e uma fonte de tensão contínua. Obtenha graficamente a forma de onda da corrente no indutor.

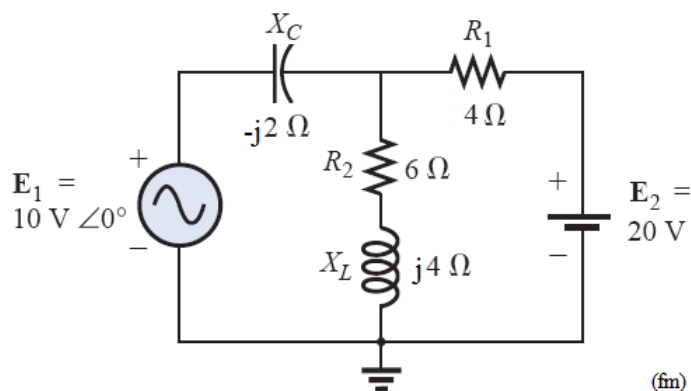


Figura 39. Circuito com fonte de tensão alternada e contínua.

Solução:

Inicialmente, a fonte de tensão E_1 é seleccionada para análise, enquanto a fonte de tensão E_2 é anulada com um curto-circuito, como ilustra a Figura 40.

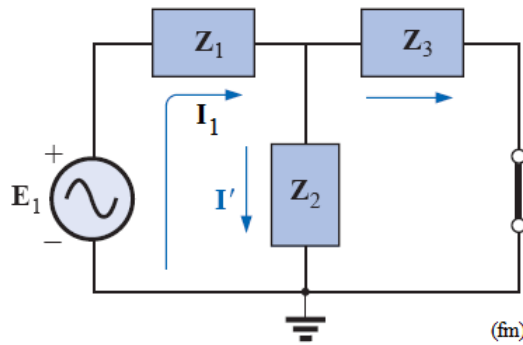


Figura 40. Análise da fonte E_1 com a fonte E_2 anulada.

Como as impedâncias Z_2 e Z_3 estão em paralelo:

$$Z_{2\parallel 3} = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(6 + j4) \cdot 4}{(6 + j4) + 4} = \frac{24 + j16}{10 + j4} = \frac{28,84 \angle 33,69^\circ}{10,77 \angle 21,80^\circ} = 2,68 \angle 11,89^\circ = 2,62 + j0,55 \, \Omega$$

Assim, a corrente total fornecida pela fonte E_1 é:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + Z_{2\parallel 3}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{-j2 + (2,62 + j0,55)} = \frac{10 \angle 0^\circ}{2,62 - j1,45} = \frac{10 \angle 0^\circ}{2,99 \angle -28,96^\circ} = 3,34 \angle 28,96^\circ \, A$$

A contribuição de corrente da fonte E_1 para o indutor pode ser determinada pelo divisor de corrente:

$$\dot{I}' = \frac{Z_3 \cdot \dot{I}_1}{Z_2 + Z_3} = \frac{4 \cdot (3,34 \angle 28,96^\circ)}{(6 + j4) + 4} = \frac{13,36 \angle 28,96^\circ}{10 + j4} = \frac{13,36 \angle 28,96^\circ}{10,77 \angle 21,80^\circ} = 1,24 \angle 7,16^\circ \, A$$

No domínio do tempo a contribuição de corrente da fonte E_1 para o indutor é:

$$i'(t) = 1,24\sqrt{2}\sin(2\pi 400t + 7,16^\circ) \, A$$

$$i'(t) = 1,75\sin(2513,27t + 7,16^\circ) \, A$$

Em seguida deve ser analisada a contribuição da fonte E_2 , com a fonte E_1 anulada com um curto-circuito. Como E_2 é uma fonte de tensão contínua, o indutor se comporta como um curto-circuito e o capacitor como um circuito aberto. O circuito resultante para análise é apresentado na Figura 41.

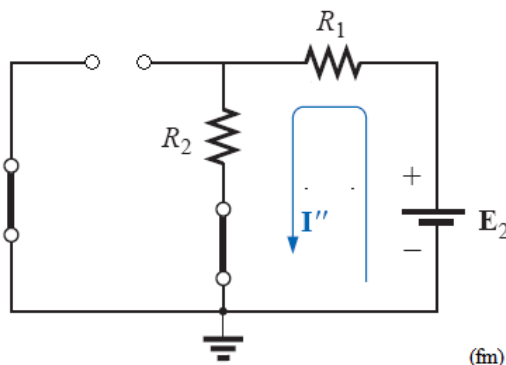


Figura 41. Análise da fonte E_2 com a fonte E_1 anulada.

Assim, a contribuição de corrente da fonte E_2 é dada por:

$$I'' = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = \frac{20}{4 + 6} = \frac{20}{10}$$

$$I'' = 2 \text{ A}$$

Como as contribuições de corrente de ambas as fontes são no mesmo sentido, a corrente total resultante no indutor é determinada pela soma das contribuições de cada fonte no domínio do tempo:

$$i_L(t) = i'(t) + i''(t)$$

$$i_L(t) = 1,75\text{sen}(2513,27t + 7,16^\circ) + 2 \text{ A}$$

As formas de onda das contribuições de corrente de cada fonte e a forma de onda da corrente superposta resultante no indutor é apresentada na Figura 42.

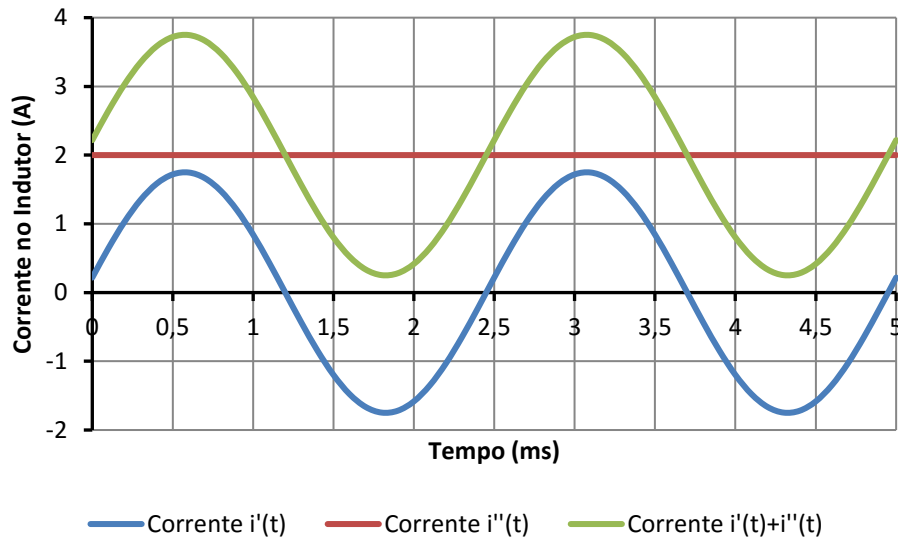


Figura 42. Contribuições de corrente e forma de onda superposta resultante.

Exemplo: Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a corrente sobre o resistor R_2 do circuito ilustrado na Figura 43, cujas fontes dependentes são controladas externamente. Considere $\mu = 4$; $\dot{V} = 20\angle 0^\circ$; $h = 10$; $\dot{I} = 0,5\angle 30^\circ \text{ A}$

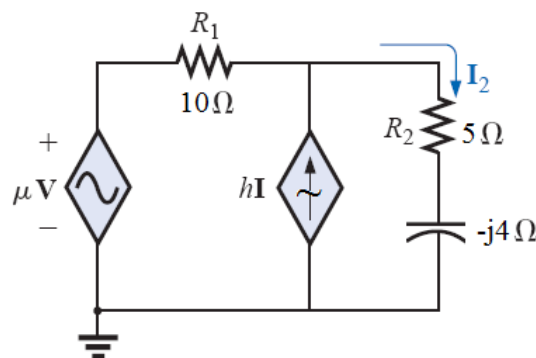


Figura 43. Superposição de Efeitos em circuito com fontes dependentes (Adaptado de Boylestad, 2002).

Solução: Para analisar a fonte de tensão, a fonte de corrente deve ser anulada com um circuito aberto, como ilustra a Figura 44. Assim, a contribuição de corrente da fonte de tensão na impedância Z_2 é dada por:

$$\dot{I}'_2 = \frac{\mu \dot{V}}{Z_1 + Z_2} = \frac{\mu \dot{V}}{10 + (5 - j4)} = \frac{\mu \dot{V}}{15,52\angle -14,93^\circ} = (0,064\angle 14,93^\circ)\mu \dot{V} \text{ A}$$

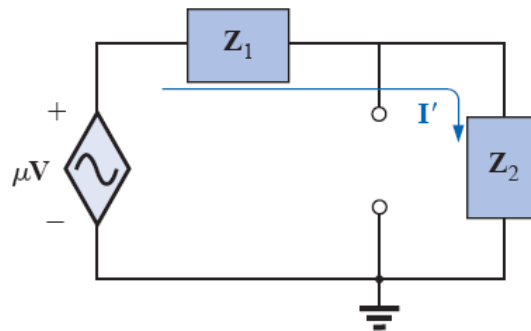


Figura 44. Análise do efeito da fonte de tensão com a fonte de corrente anulada (Boylestad, 2002).

Para analisar a fonte de corrente, a fonte de tensão deve ser anulada com um curto-circuito, como ilustra a Figura 45. Assim, a contribuição da fonte para a corrente na impedância Z_2 é dada pelo divisor de corrente:

$$\dot{I}''_2 = \frac{Z_1 \cdot h\dot{I}}{Z_1 + Z_2} = \frac{10 \cdot h\dot{I}}{10 + (5 - j4)} = \frac{10 \cdot h\dot{I}}{15,52 \angle -14,93^\circ} = (0,644 \angle 14,93^\circ) h\dot{I}$$

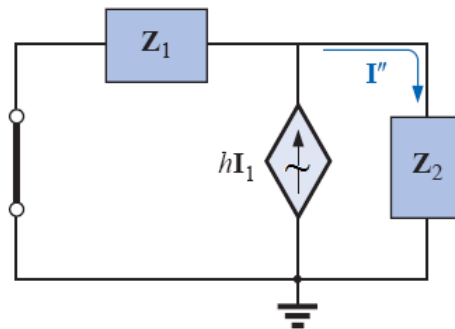


Figura 45. Análise do efeito da fonte de corrente com a fonte de tensão anulada (Boylestad, 2002).

Como as duas contribuições de correntes têm o mesmo sentido, a superposição dos efeitos é dada pela soma:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2 = (0,064 \angle 14,93^\circ) \mu\dot{V} + (0,644 \angle 14,93^\circ) h\dot{I}$$

Como as duas fontes possuem a mesma frequência, as contribuições de corrente podem ser somadas no domínio fasorial. Substituindo os valores:

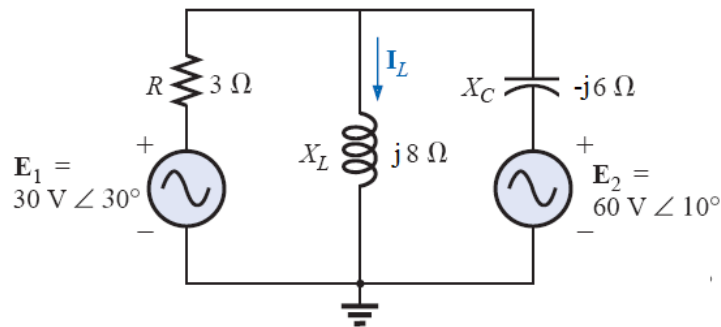
$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2 = (0,064 \angle 14,93^\circ) \cdot 4 \cdot 20 \angle 0^\circ + (0,644 \angle 14,93^\circ) \cdot 10 \cdot 0,5 \angle 30^\circ \\ \dot{I}_2 &= 5,12 \angle 14,93^\circ + 3,22 \angle 44,93^\circ = 4,95 + j1,31 + 2,28 + j2,27 = 7,23 + j3,58 \end{aligned}$$

$$\dot{I}_2 = 8,07 \angle 26,34^\circ \text{ A}$$

Observação: Para fontes dependentes nas quais a variável de controle é determinada na parte do circuito onde o Teorema da Superposição deve ser aplicado, a fonte dependente não pode ser anulada, a menos que a variável de controle também seja nula (BOYLESTAD, 2002).

6.2. PROBLEMAS PROPOSTOS

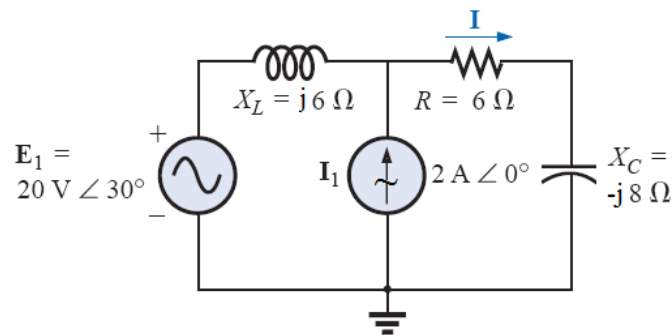
- 1) Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a corrente sobre o indutor do circuito abaixo:



Boylestad, 2002 – Problema 18.1.

- 2) Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a corrente sobre o resistor do circuito abaixo:

Resp: $4,42 \angle 70,2^\circ \text{ A}$

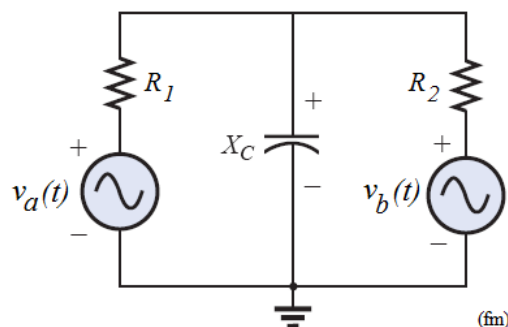


Boylestad, 2002 – Exemplo 18.2

- 3) Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a tensão sobre o capacitor do circuito abaixo:

Dados: $v_a(t) = 100 \text{ sen}(1000t) \text{ V}$; $v_b(t) = 40 \text{ sen}(2000t + 30^\circ) \text{ V}$; $R_1 = 500 \Omega$; $R_2 = 100 \Omega$; $C = 5 \mu\text{F}$.

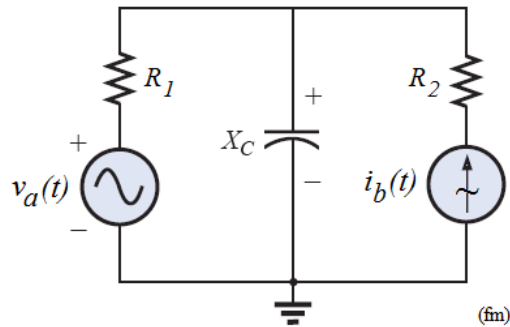
Resp: $v_c(t) = 15,38 \text{ sen}(1000t - 22,63^\circ) + 25,6 \text{ sen}(2000t - 9,80^\circ) \text{ V}$



- 4) Para o circuito com duas fontes, determine a tensão no capacitor usando o Teorema da Superposição de Efeitos:

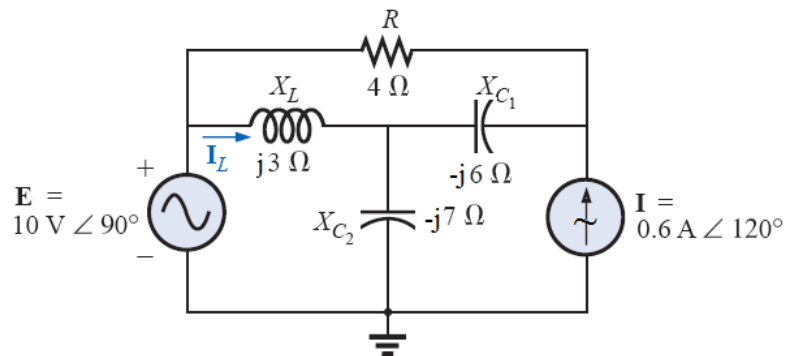
Dados: $v_a(t) = 58,3 \text{ sen}(1000t) \text{ V}$; $i_b(t) = 224 \text{ sen}(2000t + 18,4^\circ) \text{ mA}$; $R_1 = 200 \Omega$; $R_2 = 300 \Omega$; $C = 5 \mu\text{F}$.

Resp: $v_c(t) = 41,22 \text{ sen}(1000t + 45^\circ) + 20,04 \text{ sen}(2000t - 45,03^\circ) \text{ V}$



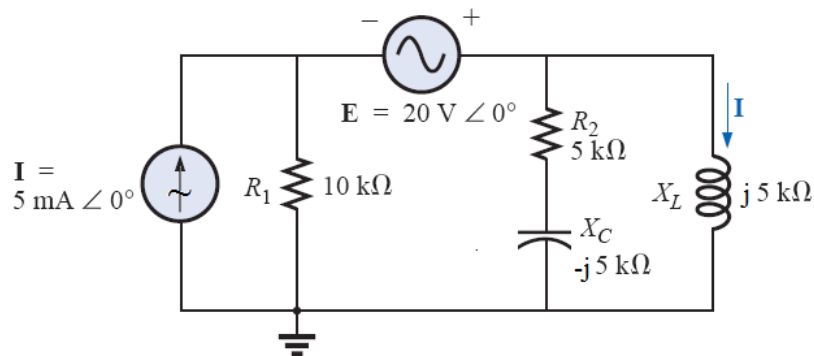
- 5) Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a resposta de corrente sobre o indutor:

Resp.: $\dot{I}_L = 3,4 \angle 135,4^\circ \text{ A}$



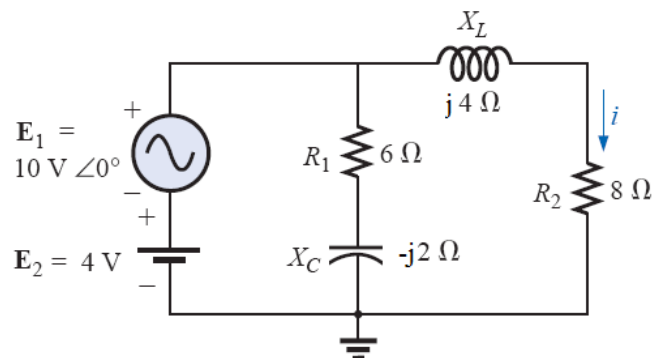
Boylestad, 2002 – Problema 18.2.

- 6) Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a corrente sobre o indutor:



Boylestad, 2002 – Problema 18.5.

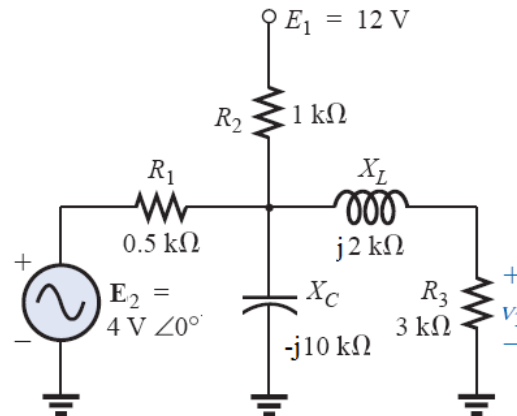
- 7) Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a corrente sobre o resistor R_2 :



Boylestad, 2002 – Problema 18.3.

- 8) Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a resposta de tensão sobre o resistor R_3 e utilize um computador para traçar a forma de onda resultante.

Resp: $v_3(t) = 3.6 + 2,91\text{sen}(wt - 32,74^\circ)V$

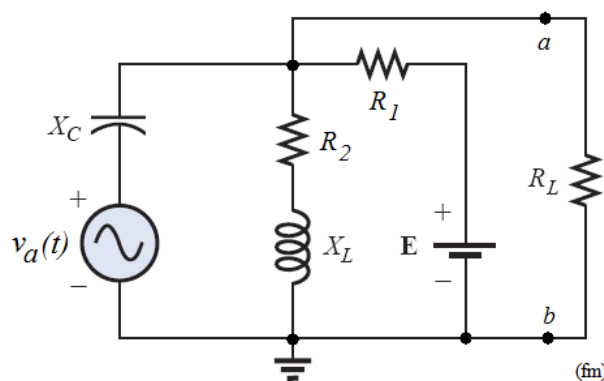


Boylestad, 2002 – Exemplo 18.2.

- 9) Para o circuito com fontes de tensão CA e CC, utilize os métodos da Superposição de Efeitos e do Equivalente de Thèvenin para determinar a potência máxima e mínima na resistência de carga:

Dados: $v_a(t) = 10\text{sen}(1000t)V$; $E = 20V$; $R_1 = R_2 = 5\Omega$; $C = 500\mu F$; $L = 2,5mH$; $R_L = 5 \text{ a } 10\Omega$.

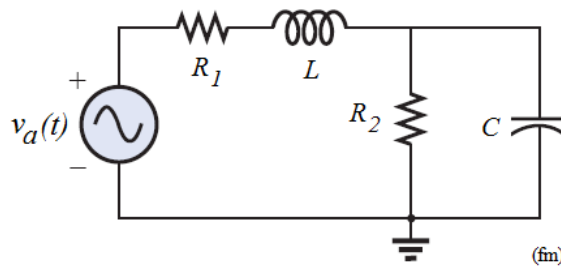
Resp: $v_{Th}(t) = 9,06\text{sen}(1000t + 40,64^\circ)V$; $V_{Th} = 10V$; $Z_{Th} = 1,81\angle 30^\circ\Omega$; $R_{Th} = 2,5\Omega$; $P_L = 9,45 \sim 13,5W$



- 10) Para a fonte de tensão composta da figura abaixo, determine a tensão no capacitor utilizando o Método da Superposição de Efeitos e simule no computador para obter a forma de onda resultante:

Dados: $v_a(t) = 5 + 10\text{sen}(1000t) + 5\text{sen}(5000t + 30^\circ)V$; $R_1 = 40\Omega$; $R_2 = 50\Omega$; $C = 10\mu F$; $L = 20mH$.

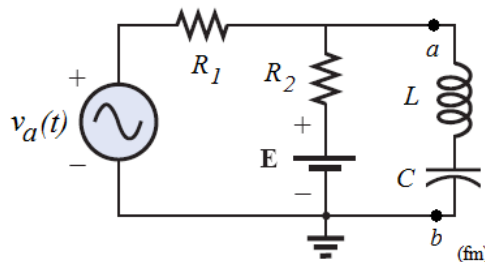
Resp: $v_C(t) = 2,78 + 5,59\text{sen}(1000t - 26,57^\circ) + 0,98\text{sen}(5000t - 98,66^\circ)V$



11) Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a tensão entre os terminais do circuito. Simule no computador e obtenha a forma de onda resultante.

Dados: $v_a(t) = 2\text{sen}(200t) + 1\text{sen}(400t)\text{V}$; $E = 10\text{ V}$; $R_1 = 30\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $C = 500\ \mu\text{F}$; $L = 0,1\text{ H}$.

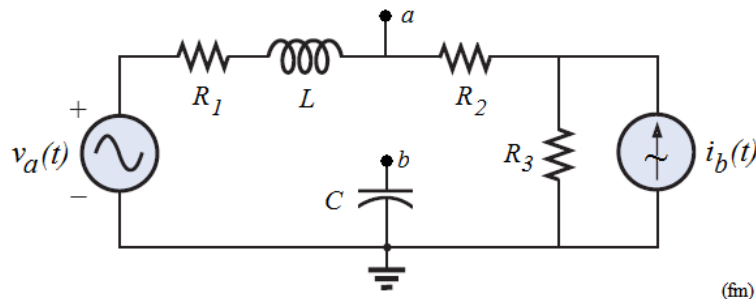
Resp: $v_{ab}(t) = 6 + 0,51\text{sen}(200t + 50,2^\circ) + 0,38\text{sen}(400t + 18,92^\circ)\text{V}$



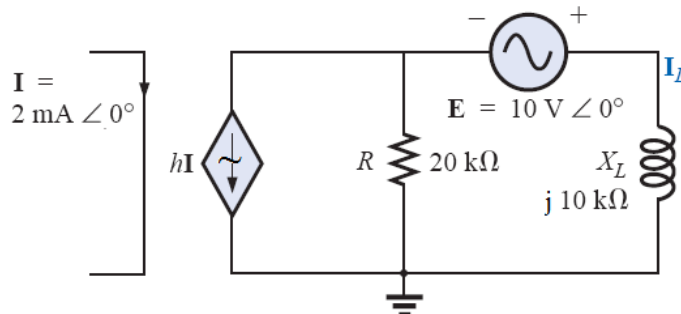
12) Utilize o Método da Superposição para determinar o Equivalente Norton do circuito:

Dados: $v_a(t) = 50\text{sen}(1000t)\text{V}$; $i_b(t) = 50\text{sen}(1000t - 60^\circ)\text{mA}$; $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 5\ \Omega$; $C = 20\ \mu\text{F}$; $L = 20\text{ mH}$.

Resp: $i_N(t) = 371,5\text{sen}(1000t + 36,05^\circ)\text{mA}$

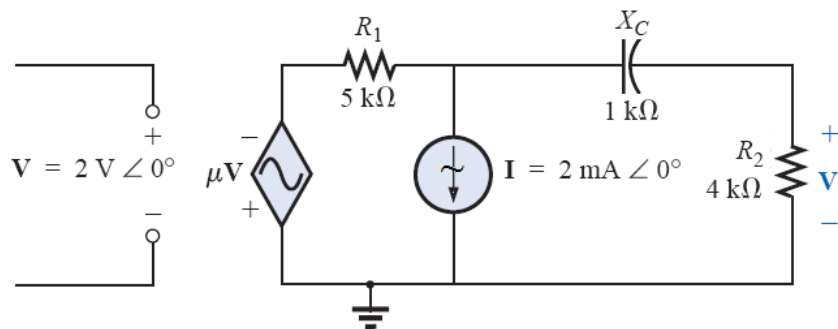


13) Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a corrente no indutor, considerando a fonte de corrente dependente, onde $h = 100$.



Boylestad, 2002 – Problema 18.6.

14) Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a tensão no resistor R_2 , considerando a fonte de tensão dependente, onde $\mu = 20$.

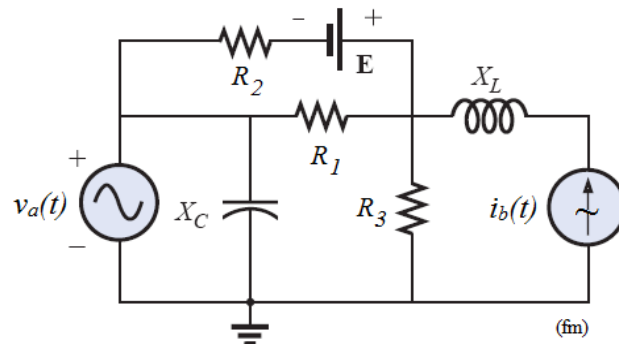


Boylestad, 2002 – Problema 18.7.

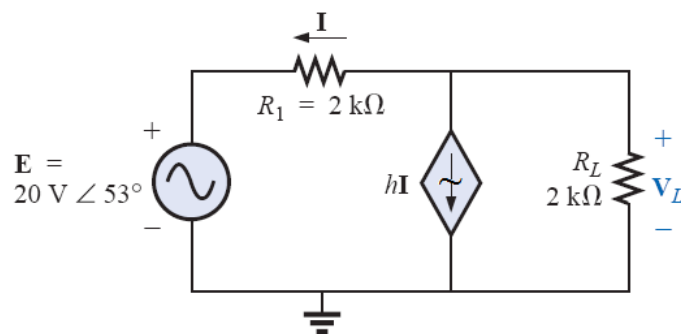
- 15) Calcule a tensão sobre o resistor R_1 no circuito abaixo. Simule o circuito e obtenha a forma de onda de tensão resultantes sobre os resistores.

Dados: $v_a(t) = 20\text{sen}(2000t) \text{ V}$; $i_b(t) = 8\text{sen}(1000t + 45^\circ) \text{ A}$; $E = 48 \text{ V}$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 10 \Omega$; $R_3 = 15 \Omega$; $L = 5 \text{ mH}$; $C = 25 \mu\text{F}$

Resp.: $v_1(t) = -18 + 5\text{sen}(2000t) - 30\text{sen}(1000t + 45^\circ) \text{ V}$

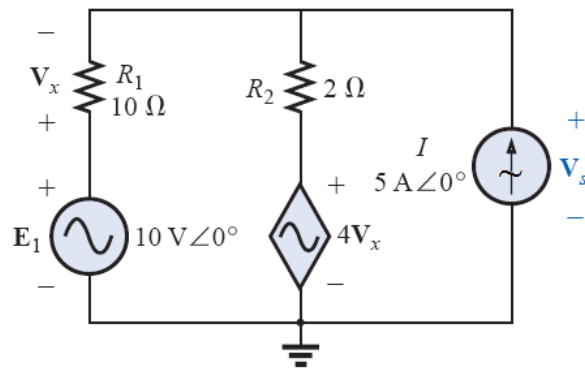


- 16) **Desafio!** Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a tensão V_L , considerando a fonte de corrente dependente. Simule o circuito no computador e obtenha a forma de onda.



Boylestad, 2002 – Problema 18.9.

- 17) **Desafio!** Utilize o Método da Superposição de Efeitos para determinar a tensão V_S , considerando a fonte de corrente dependente. Simule o circuito no computador e obtenha a forma de onda.



Boylestad, 2002 – Problema 18.11.

7. TEOREMA DA MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE POTÊNCIA

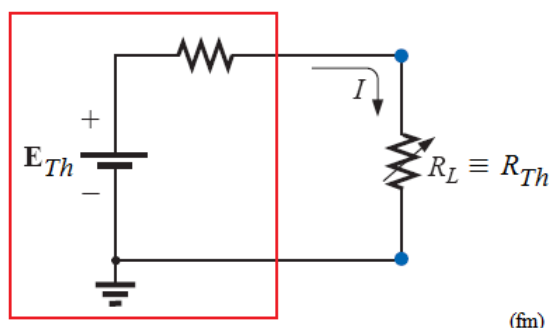
A potência fornecida por uma fonte real depende da tensão e da resistência interna da fonte e do valor da resistência da carga a ser acionada. Para os circuitos de corrente contínua, o Teorema da Máxima Transferência de Potência é enunciado da seguinte forma:

Uma **fonte CC** transfere sua máxima potência para uma carga quando a resistência interna equivalente da fonte for exatamente a mesma resistência equivalente da carga:

Analogamente, o Equivalente Thèvenin de um circuito de dois terminais, que é representado por uma fonte de tensão real, fornece a máxima potência quando a resistência da carga conectada for idêntica à Resistência de Thèvenin:

$$R_L \equiv R_{Th}$$

A Figura 46 ilustra a condição de máxima transferência de potência de um Equivalente de Thèvenin para uma carga em corrente contínua.

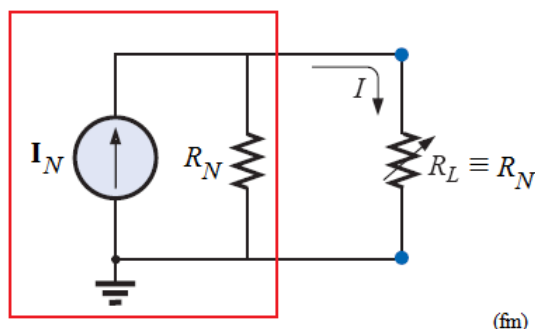


(fm)

Figura 46. Condição de Máxima Transferência de Potência no Equivalente de Thèvenin em CC.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao Equivalente de Norton, como ilustra a Figura 47, ou seja, a resistência da carga deve ser idêntica à Resistência de Norton (Thèvenin):

$$R_L \equiv R_N$$



(fm)

Figura 47. Condição de Máxima Transferência de Potência no Equivalente de Norton.

A potência transferida para a carga pode ser calculada por:

$$P_L = R_L \cdot I^2$$

Pelo Equivalente de Thèvenin:

$$P_L = R_L \cdot \left(\frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2$$

Na condição de Máxima Transferência de Potência $R_L \equiv R_{Th}$, assim:

$$P_L = R_{Th} \cdot \left(\frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_{Th}} \right)^2 = R_{Th} \cdot \left(\frac{E_{Th}}{2R_{Th}} \right)^2 = \frac{R_{Th} \cdot E_{Th}^2}{4 \cdot R_{Th}^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{E_{Th}^2}{R_{Th}} = 0,25 \cdot P_{Th}$$

Portanto, nessa condição a fonte entrega à carga apenas 25% da sua capacidade de potência interna.

O rendimento percentual de uma fonte é determinado pela relação entre a potência fornecida à carga e a potência total da fonte:

$$\eta\% = \frac{P_L}{P_F} \cdot 100$$

$$\eta\% = \frac{R_L \cdot I^2}{(R_{Th} + R_L) \cdot I^2} \cdot 100$$

$$\eta\% = \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)} \cdot 100$$

Na condição de Máxima Transferência de Potência $R_L \equiv R_{Th}$, assim:

$$\eta\% = \frac{R_{Th}}{(R_{Th} + R_{Th})} \cdot 100 = \frac{R_{Th}}{2R_{Th}} \cdot 100 = \frac{100}{2}$$

$$\eta\% = 50\%$$

Portanto, quando a fonte fornece a máxima potência, o seu rendimento é de apenas 50%.

Quando a resistência de carga for muito elevada $R_L \gg R_{Th}$:

$$(R_{Th} + R_L) \cong R_L$$

Assim:

$$\eta\% = \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)} \cdot 100 \cong \frac{R_L}{R_L} \cdot 100 \approx 100\%$$

Por outro lado, quando a resistência de carga for muito baixa $R_L \ll R_{Th}$:

$$(R_{Th} + R_L) \cong R_{Th}$$

Assim:

$$\eta\% = \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)} \cdot 100 \cong \frac{R_L}{R_{Th}} \cdot 100 \approx 0\%$$

Esse comportamento do rendimento está associado à perda de energia provocada pela resistência interna da fonte.

Exemplo: Faça uma análise da transferência de potência para a carga variável do circuito apresentado na Figura 48.

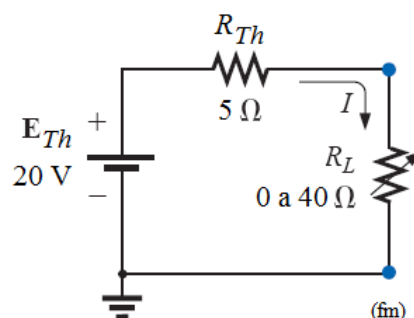


Figura 48. Circuito para análise da transferência de potência.

Solução: A Máxima Transferência de Potência ocorre quando $R_L = R_{Th} = 5 \Omega$. Assim, a potência na carga é calculada por:

$$P_L = R_L \cdot \left(\frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{20}{5 + 5} \right)^2 = 20 \text{ W}$$

Usando essa mesma equação para calcular outros valores de potência fornecida pela fonte em função da variação da resistência da carga, obtém-se o gráfico da Figura 49, onde se observa que a potência máxima (20 W) ocorre quando a resistência da carga é igual à resistência interna da fonte. Inicialmente a potência fornecida aumenta rapidamente com o aumento da carga até o valor da resistência interna. A partir desse valor, a potência fornecida decai lentamente até zero (quando a resistência da carga tende a infinito).

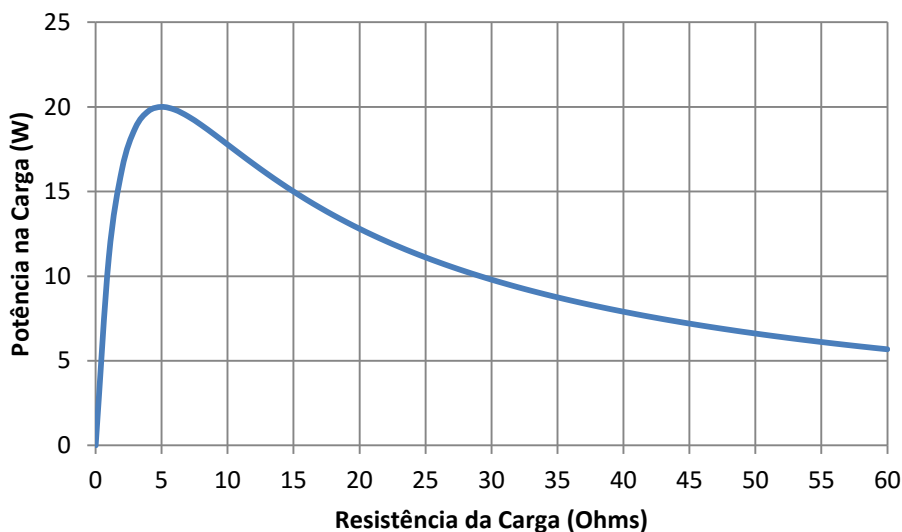


Figura 49. Potência na carga em função da variação da resistência da carga.

A corrente na carga é dada por:

$$I_L = \frac{E_{Th}}{(R_{Th} + R_L)}$$

Na condição de Máxima Transferência de Potência:

$$I_L = \frac{E_{Th}}{(R_{Th} + R_L)} = \frac{20}{(5 + 5)} = 2 \text{ A}$$

A tensão na carga é dada por:

$$V_L = R_L \cdot I_L = R_L \cdot \frac{E_{Th}}{(R_{Th} + R_L)}$$

Na condição de Máxima Transferência de Potência:

$$V_L = R_L \cdot \frac{E_{Th}}{(R_{Th} + R_L)} = 5 \cdot \frac{20}{(5 + 5)} = 10 \text{ V}$$

Essas equações são usadas para traçar o gráfico da tensão e da corrente na carga em função da variação da resistência da carga, apresentado na Figura 50.

O rendimento é calculado pela equação:

$$\eta\% = \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)} \cdot 100$$

Na condição de Máxima Transferência de Potência:

$$\eta\% = \frac{5}{(5 + 5)} \cdot 100 = \frac{5}{10} \cdot 100 = 50 \%$$

Essa equação é usada para traçar o gráfico do rendimento da fonte em função da resistência da carga, apresentado na Figura 51. Observa-se que o rendimento da fonte é de 50 % quando a resistência da carga é igual à resistência interna da fonte. O rendimento é nulo para uma resistência de carga zero e aumenta a medida que a resistência da carga aumenta.

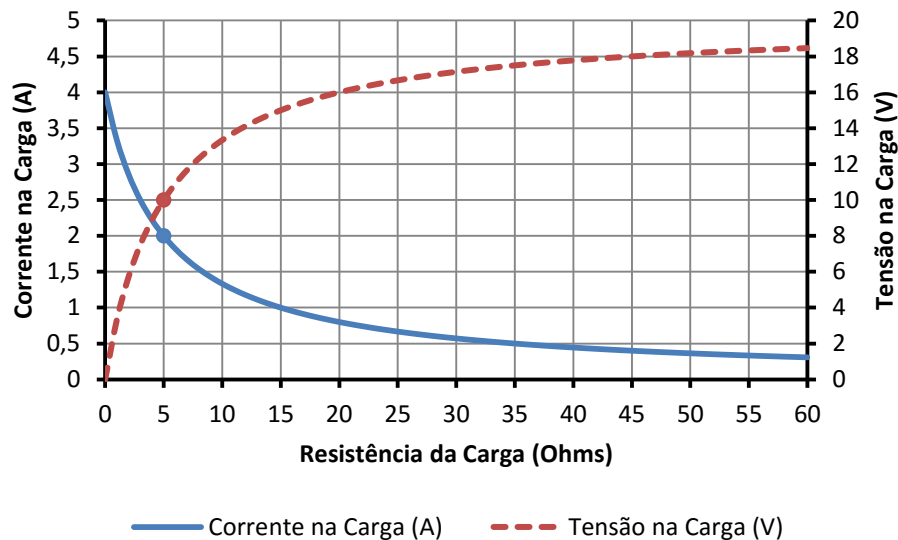


Figura 50. Corrente e tensão na carga em função da resistência da carga.

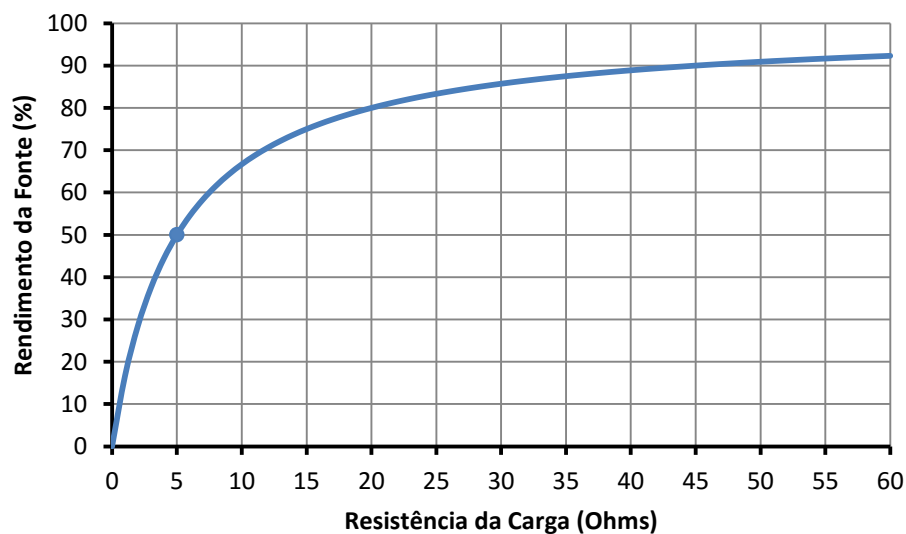


Figura 51. Rendimento da fonte em função da resistência da carga.

7.1. MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE POTÊNCIA EM CORRENTE ALTERNADA

Uma fonte real de tensão alternada é composta por uma impedância em série, enquanto uma fonte real de corrente possui uma impedância em paralelo. Em circuitos de corrente alternada o Teorema da Máxima Transferência de Potência é enunciado da seguinte forma:

Uma **fonte alternada (CA)** transfere sua máxima **potência ativa** para uma carga quando a impedância equivalente da carga for o **conjugado complexo** da impedância interna da fonte.

Analogamente, o Equivalente de Thèvenin de um circuito de dois terminais, que é representado por uma fonte de tensão alternada real, fornece a máxima potência ativa quando a impedância da carga conectada for o **conjugado complexo** da Impedância de Thèvenin:

$$Z_L = Z_{Th}^*$$

Importante: O conjugado complexo é o número complexo na forma polar com o sinal do ângulo trocado, ou na forma retangular com o sinal trocado na parte imaginária.

$$\text{Forma Polar: } |Z_L| \angle \theta_L = |Z_{Th}| \angle -\theta_{Th}$$

$$\text{Forma Retangular: } R_L \pm jX_L = R_{Th} \mp jX_{Th}$$

Portanto, a condição de Máxima Transferência de Potência em CA exige que:

$$R_L = R_{Th}$$

$$X_L = -X_{Th}$$

A Figura 52 ilustra a condição de máxima transferência de potência de um Equivalente de Thèvenin para uma carga em corrente alternada.

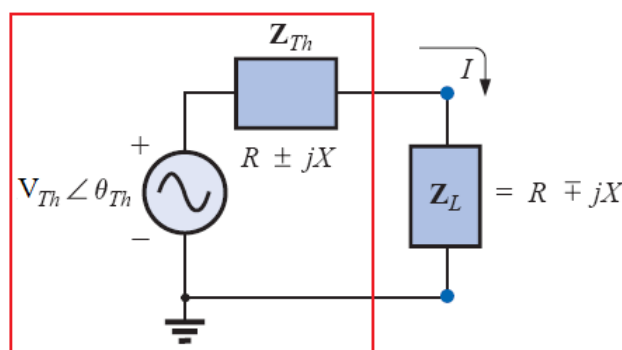


Figura 52. Condição de Máxima Transferência de Potência no Equivalente de Thèvenin em CA.

Como a impedância equivalente da carga deve ser o conjugado complexo da impedância do Equivalente de Thèvenin, então a impedância total resultante do circuito é:

$$Z_T = Z_{Th} + Z_L = (R \pm jX)_{Th} + (R \mp jX)_L = 2R$$

A condição de Máxima Transferência de Potência em corrente alternada exige que a resistência interna da fonte seja igual à resistência equivalente da carga e que as reatâncias sejam anuladas (valores iguais, mas com sinais contrários). Essa condição é chamada de **Casamento de Impedâncias**, pois torna o circuito **puramente resistivo** e a fonte transfere apenas **potência ativa** para a carga. Portanto, as considerações feitas para a Máxima Transferência de Potência em circuitos de corrente contínua também são válidas para os circuitos de corrente alternada.

Exemplo: Especifique o valor da impedância carga para que a fonte do circuito da Figura 53 transfira a máxima potência possível. Determine a potência ativa transferida para a carga e o rendimento da fonte nessa condição.

Solução: Para haver a condição de Máxima Transferência de Potência em CA, a impedância da carga deve ser o conjugado complexo da impedância interna da fonte:

$$Z_L = Z_{Th}^*$$

Como a impedância interna da fonte é $Z_{Th} = (10 - j5) \Omega$, a impedância da carga deve ser:

$$Z_L = (10 + j5) \Omega$$

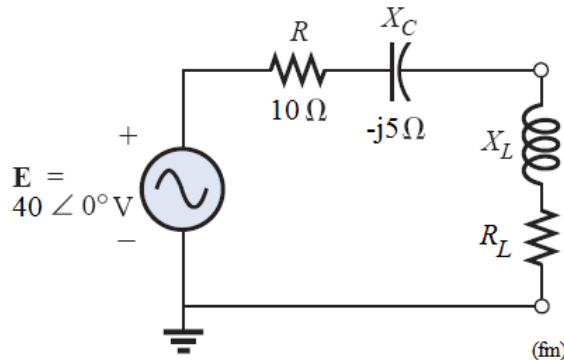


Figura 53. Circuito para máxima transferência de potência.

O circuito equivalente para a condição de Máxima Transferência de Potência é apresentado na Figura 54.

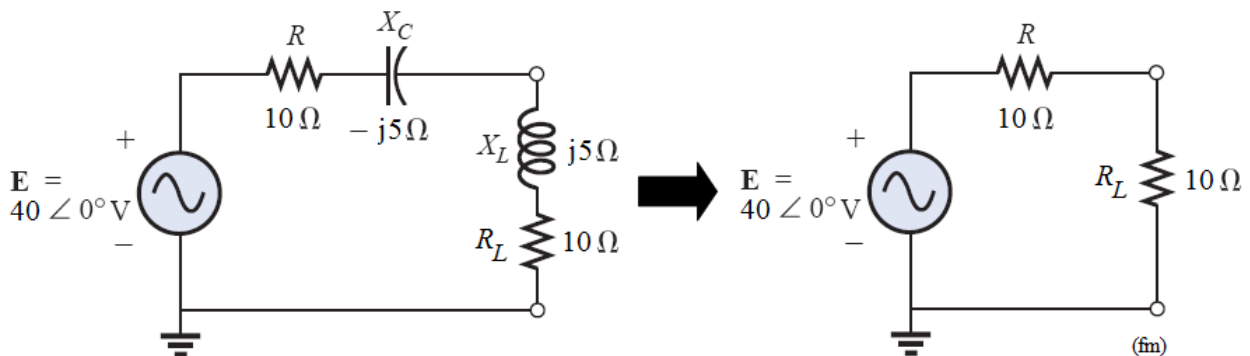


Figura 54. Circuito equivalente para a condição de Máxima Transferência de Potência.

A corrente na carga é dada por:

$$i_L = \frac{\dot{E}_{Th}}{Z_{Th} + Z_L} = \frac{40 \angle 0^\circ}{(10 - j5) + (10 + j5)} = \frac{40 \angle 0^\circ}{20} = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Assim, a potência ativa transferida para a carga é a potência na resistência da carga:

$$P_L = R_L \cdot i_L^2 = 10 \cdot 2^2 = 10 \cdot 4$$

$$P_L = 40 \text{ W}$$

O rendimento da fonte é calculado por:

$$\eta\% = \frac{P_L}{P_F} \cdot 100$$

$$\eta\% = \frac{R_L \cdot i^2}{(R_{Th} + R_L) \cdot i^2} \cdot 100$$

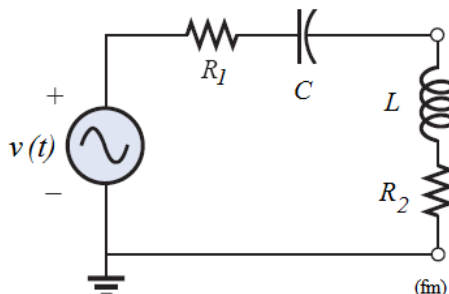
$$\eta\% = \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)} \cdot 100 = \frac{10}{(10 + 10)} \cdot 100$$

$$\eta\% = 50 \%$$

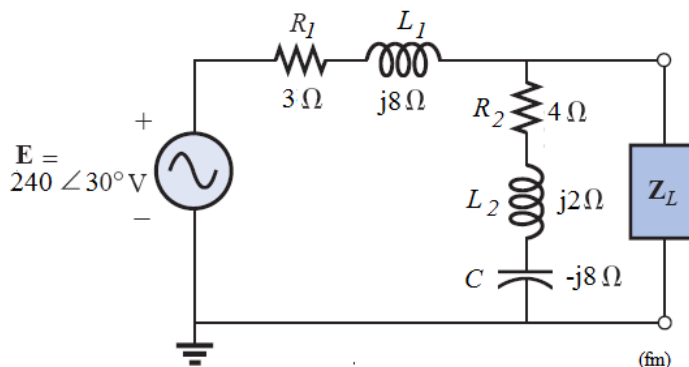
7.2. PROBLEMAS PROPOSTOS

- 1) Determine o valor do capacitor para que a fonte transfira a máxima potência para a carga RL e calcule a potência.

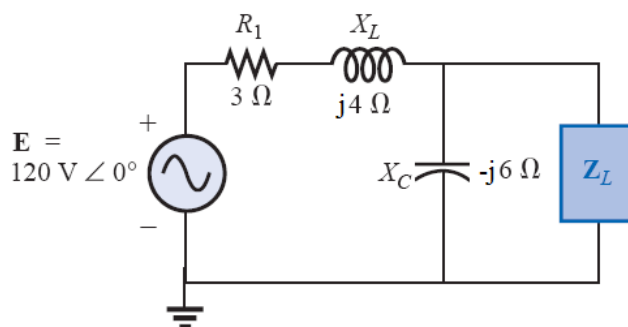
Dados: $v(t) = 50\text{sen}(100t)\text{V}$; $R_1 = R_2 = 20\ \Omega$; $L = 5\text{ mH}$



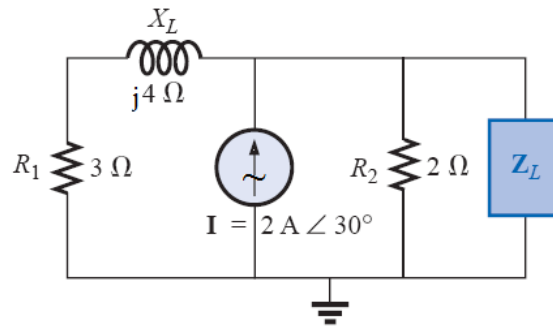
- 2) Determine o valor da impedância da carga do circuito abaixo capaz de absorver a máxima potência da fonte e calcule o valor dessa potência:



- 3) Um gerador de sinais opera em 5 MHz e possui uma impedância interna de $Z_{in} = 80\angle 20^\circ\ \Omega$. Considerando que esse gerador alimenta uma carga formada por um resistor e um capacitor em paralelo, determine o valor desses elementos de modo que a potência transferida seja máxima.
- 4) Determine o valor da impedância da carga para a condição de máxima transferência de potência e calcule o valor dessa potência para os circuitos abaixo:

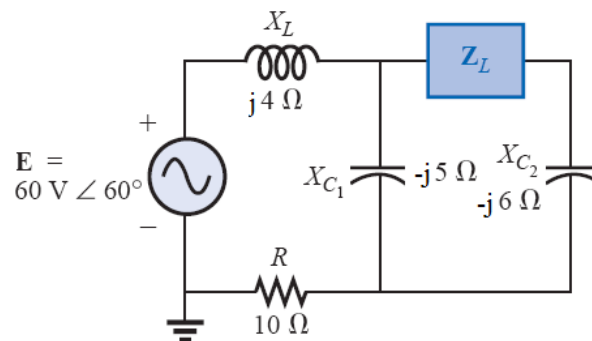


Boylestad, 2002 – Problema 18.39.

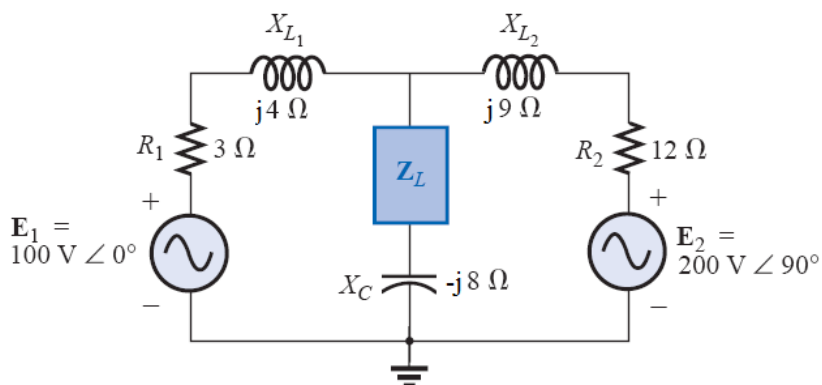


Boylestad, 2002 – Problema 18.39.

- 5) Determine o valor da impedância da carga para a condição de máxima transferência de potência e calcule o valor dessa potência para os circuitos abaixo:

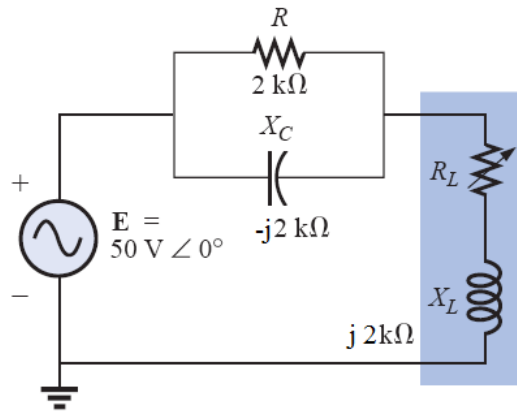


Boylestad, 2002 – Problema 18.40.



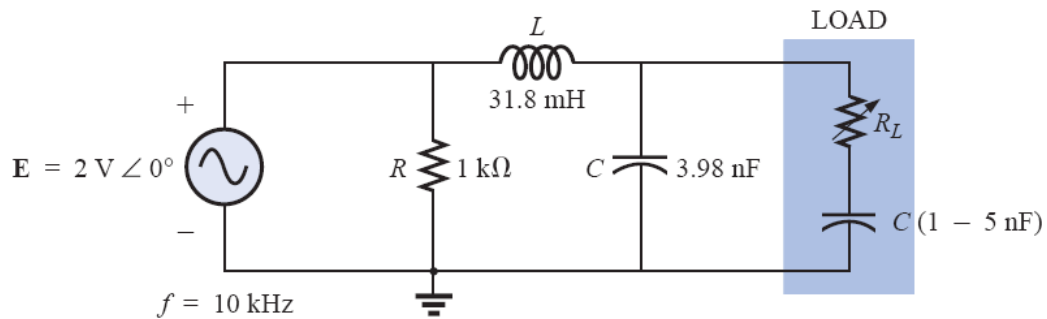
Boylestad, 2002 – Problema 18.40.

- 6) Determine o valor da resistência da carga para a condição de máxima transferência de potência e calcule o valor dessa potência para o circuito abaixo:



Boylestad, 2002 – Problema 18.45.

- 7) Determine o valor da capacitância entre 1 e 5 nF e o valor da resistência da carga para a condição de máxima transferência de potência e calcule o valor da potência para o circuito:



Boylestad, 2002 – Problema 18.46.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYLESTAD, R. L. (2002) **Introductory circuit analysis**. 10 ed. New Jersey: Prentice Hall.

ALBUQUERQUE, R. O. (1997). **Circuitos em Corrente Alternada**. São Paulo: Érica.

9. INFORMAÇÕES RELEVANTES

Alfabeto Grego:

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rô	P	ρ
Beta	B	β	Capa	K	κ	Sigma	Σ	σ ς
Gama	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mi	M	μ	Ípsilon	Y	υ
Epsílon	E	ε	Ni	N	ν	Fi	Φ	ϕ φ
Dzeta	Z	ζ	Csi	Ξ	ξ	Qui	X	χ
Eta	H	η	Ômicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Teta	Θ	θ	Pi	Π	π	Ômega	Ω	ω

Constantes e Valores Importantes

Quantidade	Símbolo	Valor mais preciso	Valor Usual ¹
Velocidade da Luz no Vácuo	c	$2,99792458 \times 10^8$ m/s	$3,00 \times 10^8$ m/s
Aceleração Gravitacional	g	$9,80665$ m/s ²	$9,8$ m/s ²
Constante Gravitacional	G		$6,67 \times 10^{-11}$ Nm ² /kg ²
Carga do Elétron	e	$1,60217733 \times 10^{-19}$ C	$1,60 \times 10^{-19}$ C
Permeabilidade do Vácuo	μ_0		$4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A (Wb/Am)
Permissividade do Vácuo	$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \cdot \mu_0}$	$8,854187817 \times 10^{-12}$ C ² /Nm ²	$8,85 \times 10^{-12}$ C ² /Nm ²
Massa do elétron	m_e		$9,11 \times 10^{-31}$ kg
Massa do próton	m_p		$1,6726 \times 10^{-27}$ kg
Massa do nêutron	m_n		$1,6749 \times 10^{-27}$ kg
Massa atômica			$1,6605 \times 10^{-27}$ kg
Caloria	cal		4,186 J
Zero Absoluto	0K		-273,15 °C
Radiano	rad		57,2957795 °
Pi	π		3,1415927
Neperiano	e		2,7182818

¹ Os valores usuais são aproximações dos valores mais precisos obtidos atualmente e que estão disponíveis na referência bibliográfica [Giancoli].

Múltiplos Métricos:

Prefixo	Símbolo	Valor
Yotta	Y	10^{24}
Zetta	Z	10^{21}
Exa	E	10^{18}
Peta	P	10^{15}
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
Hecto	h	10^2
Deca	da	10^1
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Mili	m	10^{-3}
Micro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}
Zepto	Z	10^{-21}
Yocto	Y	10^{-24}

Origem do nome dos prefixos:

- **Exa:** deriva da palavra grega 'hexa' que significa 'seis'.
- **Penta:** deriva da palavra grega 'pente' que significa 'cinco'.
- **Tera:** do grego 'téras' que significa 'monstro'.
- **Giga:** do grego 'gígas' que significa 'gigante'.
- **Mega:** do grego 'mégas' que significa 'grande'.
- **Hecto:** do grego 'hekatón' que significa 'cem'.
- **Deca:** do grego 'déka' que significa 'dez'.
- **Deci:** do latim 'decimu' que significa 'décimo'.
- **Mili:** do latim 'millesimu' que significa 'milésimo'.
- **Micro:** do grego 'mikrós' que significa 'pequeno'.
- **Nano:** do grego 'nánnos' que significa 'anão'.
- **Pico:** do italiano 'piccolo' que significa 'pequeno'.
- **Femto:** do dinamarquês 'femten' que significa 'quinze'.
- **Atto:** do dinamarquês 'atten' que significa 'dezoito'.
- **Zepto e Zetta:** derivam do latim 'septem' que significa 'sete'.
- **Yocto e Yotta:** derivam do latim 'octo' que significa 'oito'.

Símbolos Matemáticos:

\propto	é proporcional a
$=$	é igual a
\approx	é aproximadamente igual a
\neq	não é igual a (diferente de)
$>$	é maior que
\gg	é muito maior que
$<$	é menor que
\ll	é muito menor que
\geq	é maior ou igual a
\leq	é menor ou igual a
Σ	soma de (somatória)
\bar{x}	valor médio de x
Δx	variação em x
$\Delta x \rightarrow 0$	Δx tende a zero
\perp	é perpendicular a

Conversões e Equivalências de Unidades:

Matemáticas:

$$\sqrt{2} = 1,4142136$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508$$

$$1 \text{ rad} = 57,2957795^\circ$$

$$1^\circ = 0,01745 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rpm} = 0,1047 \text{ rad/s}$$

Ângulo:

$$1 \text{ rad} = 57,30^\circ = 180^\circ/\pi$$

$$1^\circ = 0,01745 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rpm} = 0,1047 \text{ rad/s}$$

Comprimento:

$$1 \text{ polegada (in)} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ pé (ft)} = 30,48 \text{ cm}$$

$$1 \text{ milha (mi)} = 1,61 \text{ km}$$

$$1 \text{ milha marítima} = 1,852 \text{ km}$$

$$1 \text{ jarda} = 0,9144 \text{ m}$$

$$1 \text{ ângstron (Å)} = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ ano-luz} = 9,46 \times 10^{15} \text{ m}$$

Área:

$$1 \text{ in}^2 = 6,452 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ ft}^2 = 0,0929 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ hectare (ha)} = 10.000 \text{ m}^2$$

Volume:

$$1 \text{ litro (L)} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ galão americano} = 3,79 \text{ L}$$

$$1 \text{ pé cúbico (ft}^3\text{)} = 0,0283 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ pé cúbico (ft}^3\text{)} = 28,32 \text{ L}$$

Tempo:

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$

$$1 \text{ dia} = 86400 \text{ s}$$

$$1 \text{ ano} = 365,24 \text{ dias}$$

Massa:

$$1 \text{ libra (lb)} = 0,4536 \text{ kg}$$

Velocidade:

$$1 \text{ km/h} = 0,278 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ mi/h} = 1,609 \text{ km/h}$$

$$1 \text{ m/s} = 3,60 \text{ km/h}$$

$$\text{ft/s} = 0,3048 \text{ m/s}$$

Força:

$$1 \text{ libra força (lbf)} = 4,45 \text{ N}$$

$$1 \text{ dina (din)} = 10^{-5} \text{ N}$$

Energia:

$$1 \text{ J} = 0,239 \text{ cal}$$

$$1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$$

$$1 \text{ kcal} = 4,18 \times 10^3 \text{ J} = 3,97 \text{ BTU}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J} = 860 \text{ kcal}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ BTU} = 1055 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Potência:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 3,42 \text{ BTU/h}$$

$$1 \text{ BTU/h} = 0,293 \text{ W}$$

$$1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$$

$$1 \text{ CV} = 736 \text{ W}$$

Pressão:

$$1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ lb/m}^2 = 6,9 \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

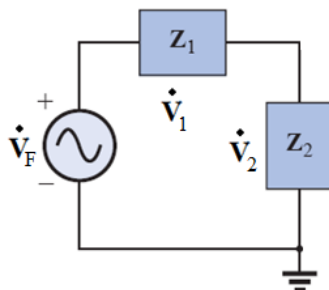
$$1 \text{ lb/ft}^2 = 47,88 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ lb/in}^2 = 6895 \text{ Pa}$$

Divisor de Tensão:

$$\dot{V}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot \dot{V}_F$$

$$\dot{V}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \dot{V}_F$$



Divisor de Corrente

$$\dot{I}_2 = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \cdot \dot{I}_1$$

$$\dot{I}_3 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \cdot \dot{I}_1$$

