Índices

1 Formulação variacional

Para considerando a equação diferencial:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0 \tag{1}$$

A formulação variacional pode-se ser obtida multiplicado e integrando a eq. (1) em todo o domínio L.

$$\int_0^L \left(\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) \right) w(x)dx = 0 \tag{2}$$

Usando a regra da soma de integrais temos,

$$\int_0^L \frac{d^2u}{dx^2} w(x)dx + \int_0^L f(x)w(x)dx = 0 \tag{3}$$

Focando apenas no primeiro termo,

$$\int_0^L \frac{d^2u}{dx^2} w(x)dx = \frac{du}{dx} w(x) \mid_0^L - \int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx}dx \tag{4}$$

O que leva à,

$$\frac{du}{dx} w \mid_0^L - \int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx}dx + \int_0^L f(x)w(x)dx = 0 \tag{5}$$

1.1 Integral por partes

Para chegar na eq. (4) considere primeiro a regra do produto parada derivas para duas funções genéricas $a(x)$ e $b(x)$:

$$\frac{d(ab)}{dx} = \frac{da}{dx}b + \frac{db}{dx}a \tag{6}$$

Integrando em ambos os lados,

$$\int_0^L \frac{d(ab)}{dx}dx = \int_0^L \frac{da}{dx}bdx + \int_0^L \frac{db}{dx}adx \tag{7}$$

A integral e a deriva se cancelam no primeiro termo,

$$ab|_0^L = \int_0^L \frac{da}{dx}bdx + \int_0^L \frac{db}{dx}adx \tag{8}$$

Considerando agora que $a(x) = \frac{du}{dx}$ e $b(x) = w(x)$, portanto

$$\frac{du}{dx}w|_0^L = \int_0^L \frac{d^2u}{dx^2}wdx + \int_0^L \frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx \tag{9}$$

levando assim a eq (4).

1.2 Resíduos ponderados

A aproximando $u(x)$ por $\hat{u}(x)$ eq. (1) não e mais resolvida de maneira exata sobrenado um resíduo $R(x)$,

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + f(x) = R(x) \tag{10}$$

A ideia é reduzir este resíduo usando uma aproximação da função peso $\hat{w}(x)$.

$$\int_0^L R(x)\hat{w}(x)dx = \int_0^L \left(\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + f(x)\right)\hat{w}(x)dx = 0 \tag{11}$$

Os métodos do Elementos Finitos, Diferença Finita e Volume Finitos são gerados pelas diferentes escolhas das funções w. Usando a formulação variacional eq. 9 temos,

$$\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d\hat{w}}{dx}dx = \frac{d\hat{u}}{dx}\hat{w}\mid_0^L + \int_0^L f(x)\hat{w}(x)dx \tag{12}$$

1.3 Aproximações

As aproximações de $\hat{u}(x)$ e $\hat{w}(x)$ são dada por,

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x)u_j \tag{13}$$

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i \tag{14}$$

onde n é o número de pontos na malha. Substituindo $\hat{w}(x)$ na eq. (12)

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)dx = \frac{d\hat{u}}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)\mid_0^L \\ + \int_0^L f(x)\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)dx\end{aligned} \tag{15}$$

Para o primeiro termo temos,

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)dx &= \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d}{dx}\left(N_1w_1 + ... + N_nw_n\right)dx \\ &= \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\left(\frac{dN_1}{dx}w_1 + ... + \frac{dN_n}{dx}w_n\right)dx \\ &= \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_1}{dx}w_1dx + ... + \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_n}{dx}w_ndx \\ &= w_1\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx + ... + w_n\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx\end{aligned} \tag{16}$$

Para o segundo termo temos,

$$\frac{d\hat{u}}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)|_0^L = w_1\frac{d\hat{u}}{dx}N_1(x)|_0^L + ... + w_n\frac{d\hat{u}}{dx}N_n(x)|_0^L \tag{17}$$

Para o terceiro termo temos,

$$\begin{aligned}\int_0^L f(x)\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)dx &= \int_0^L f(x)\left(N_1(x)u_1 + ... + N_n(x)w_n\right)dx \\ &= w_1\int_0^L f(x)N_1(x)dx + ... + w_n\int_0^L f(x)N_n(x)dx\end{aligned} \tag{18}$$

Juntando as eqs. (16), (17) e (18) temos,

$$\begin{aligned}w_1\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx + ... + w_n\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx = \\ w_1\frac{d\hat{u}}{dx}N_1(x)|_0^L + ... + w_n\frac{d\hat{u}}{dx}N_n(x)|_0^L \\ +w_1\int_0^L f(x)N_1(x)dx + ... + w_n\int_0^L f(x)N_n(x)dx\end{aligned} \tag{19}$$

Isolando agora os w_i,

$$\begin{aligned}&w_1\left(\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_1(x)|_0^L - \int_0^L f(x)N_1(x)dx\right) \\ &+ ...+ \\ &w_n\left(\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_n(x)|_0^L - \int_0^L f(x)N_n(x)dx\right) = 0\end{aligned} \tag{20}$$

Para que a eq (20) seja sempre verdade ou os w_i são todos nulos ou as expressões são nulas. Fazer todos w_i nulos não tem utilidade, logo a melhor opção é fazer todas as expressões dentro dos parenteses nulas. Assim nos temos um conjunto n equações,

$$\begin{aligned}&\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_1(x)|_0^L - \int_0^L f(x)N_1(x)dx = 0 \\ &... \\ &\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_n(x)|_0^L - \int_0^L f(x)N_n(x)dx = 0\end{aligned} \tag{21}$$

Ainda falta substituir o $\hat{u}$, para a primeira integral,

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_i}{dx}dx &= \int_0^L \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} N_j(x)u_j\right)\frac{dN_i}{dx}dx \\
&= \int_0^L \frac{d}{dx}\left(N_1(x)u_1 + ...N_n(x)u_n\right)\frac{dN_i}{dx}dx \\
= \int_0^L \frac{d}{dx}\left(N_1(x)u_1\right)\frac{dN_i}{dx}dx + ... + &\int_0^L \frac{d}{dx}\left(N_n(x)u_n\right)\frac{dN_i}{dx}dx \\
&= u_1\int_0^L \frac{N_1}{dx}\frac{dN_i}{dx}dx + ... + u_n\int_0^L \frac{dN_n}{dx}\frac{dN_i}{dx}dx
\end{aligned} \tag{22}$$

Substituindo nas eqs. (21) chegamos ao sistema final de equações.

$$u_1\int_0^L \frac{N_1}{dx}\frac{dN_i}{dx}dx + ... + u_n\int_0^L \frac{dN_n}{dx}\frac{dN_i}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_1(x)\mid_0^L - \int_0^L f(x)N_1(x)dx = 0$$

...

$$u_1\int_0^L \frac{N_1}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx + ... + u_n\int_0^L \frac{dN_n}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_n(x)\mid_0^L - \int_0^L f(x)N_n(x)dx = 0$$

Definido os k_{ij} e f_i,

$$\begin{aligned}
k_{ij} &= \int_0^L \frac{N_j}{dx}\frac{dN_i}{dx} \\
f_i &= \int_0^L f(x)N_i(x)dx + \frac{d\hat{u}}{dx}N_i(x)\mid_0^L
\end{aligned} \tag{23}$$

Pode-se escrever os sistema de equações final como,

$$\begin{aligned}
&u_1k_{11} + ... + u_nk_{1n} - f_i = 0 \\
&... \\
&u_1k_{n1} + ... + u_nk_{nn} - f_n = 0
\end{aligned} \tag{24}$$

2 Equação do Equilíbrio estático

Equação de equilíbrio é dado por,

$$\nabla \bullet \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{25}$$

$$\nabla \bullet \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Portanto temos duas equações,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

As incógnitas são σ_x, σ_y e τ_{xy} porém só temos 2 equações. Para solução do problema precisamos que o número de equações seja igual ao número de incógnitas. Para tal existe o método dos deslocamento,neste método as equações de equilíbrio são escritas em termos do deslocamentos. Para tal vamos relacionar as tensões com as deformações e depois as deformações com os deslocamentos. Equação constitutiva

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Multiplicando

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a\epsilon_x + b\epsilon_y \\ \sigma_y &= b\epsilon_x + a\epsilon_y \\ \tau_{xy} &= c\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{30}$$

Relação da deformação com os deslocamentos,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{31}$$

Agora as tensões podem ser escritas em função do deslocamentos

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y &= b\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= c\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

Calculando as derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)
\end{aligned} \tag{33}$$

Substituindo na equação (28)

$$\begin{aligned}
a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + b_x = 0 \\
c\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_y = 0
\end{aligned} \tag{34}$$

Rearranjo do as equações,

$$\begin{aligned}
a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (b+c)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + b_x = 0 \\
c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (b+c)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_y = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

Agora temos 2 equações e 2 incógnitas $(u,\, v)$, problema esta matematicamente fechado.

2.1 Condição de contorno natural

Condição de contorno natural é quando prescrevemos força no contorno.

$$\begin{bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \tag{36}$$

Multiplicando

$$\begin{bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{bmatrix} \tag{37}$$

Escrevendo em forma de equações

$$\begin{aligned}
\bar{t}_x &= \left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y}\right) n_x + c\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_y \\
\bar{t}_y &= c\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_x + \left(b\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y}\right) n_y
\end{aligned} \tag{38}$$

2.2 Matriz de coeficientes

Calculo de $\mathbf{B_i}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B_i} &= \pounds \mathbf{N_i} \\
\mathbf{B_i} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \\
\mathbf{B_i} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Calculo de $\mathbf{B_i D B_j}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B_i D B_j} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B_i D B_j} &= \begin{bmatrix} a\frac{\partial N_i}{\partial x} & b\frac{\partial N_i}{\partial x} & c\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ b\frac{\partial N_i}{\partial y} & a\frac{\partial N_i}{\partial y} & c\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B_i D B_j} &= \begin{bmatrix} a\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + c\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} & b\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial y} + c\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \\ b\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x} + c\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y} & a\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} + c\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

3 Cap 6 - Elementos isoparamétricos

3.1 Polinômio de Lagrange

Formula do polinômio de Lagrange de grau P é

$$l_i^p(\xi) = \prod_{k=1,k\neq i}^{p+1} \frac{\xi - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \tag{41}$$

Elementos lineares:

$$l_1^1(\xi) = \prod_{k=1,k\neq 1}^{2} \frac{\xi - \xi_k}{\xi_1 - \xi_k} = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} = \frac{1 - \xi}{2} \tag{42}$$

$$l_2^1(\xi) = \prod_{k=1,k\neq 2}^{2} \frac{\xi - \xi_k}{\xi_2 - \xi_k} = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi + 1}{1 + 1} = \frac{1 + \xi}{2} \tag{43}$$

Elementos quadráticos:

$$l_1^2(\xi) = \prod_{k=1,k\neq 1}^{3} \frac{\xi - \xi_k}{\xi_1 - \xi_k} = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}\frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} = \frac{(\xi - 1)\xi}{2} \tag{44}$$

$$l_2^2(\xi) = \prod_{k=1,k\neq 2}^{3} \frac{\xi - \xi_k}{\xi_2 - \xi_k} = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} = \frac{(\xi + 1)\xi}{2} \tag{45}$$

$$l_3^2(\xi) = \prod_{k=1,k\neq 3}^{3} \frac{\xi - \xi_k}{\xi_3 - \xi_k} = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1}\frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} = (\xi + 1)(1 - \xi) \tag{46}$$

3.2 Exercícios

3.2.1 1) Determinar as funções de interpolação dos elementos

- a)

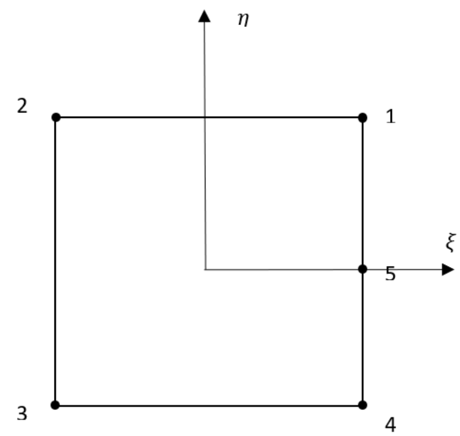

Figure 1: Questão a)

As funções de interpolação serão definidas através das funções bilineares. Considerando a Figura 2,

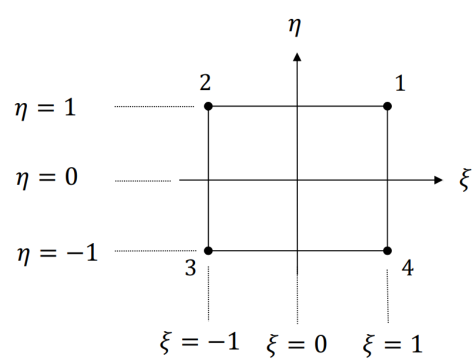

Figure 2: Parametrização de um elementos quadrilátero bilinear (4 nós)

as funções de interpolações bilineares são,

$$
\begin{aligned}
N_1^b(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_2^b(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
N_3^b(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_4^b(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)
\end{aligned} \tag{47}
$$

A função de interpolação no ponto 5 é definida como a variação quadrática na direção η e linear na direção ξ (Pag. 53). A variação quadrática é obtida pelo polinômio de Lagrange quadrático. Na figura 3 temos o elemento que gera a variação quadrática.

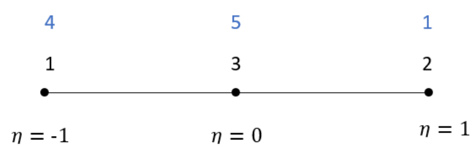

Figure 3: Função de interpolação quadrática

Na figura 3 o ponto 5 equivale ao 3, portanto a variação quadrática é (pag. 49),

$$l_3^2(\eta) = (1-\eta)(1+\eta) \tag{48}$$

Na variação linear na direção ξ o ponto 5 equivale ao 2 (pag. 49),

$$l_2^1(1+\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{49}$$

Assim, o função de interpolação N_5 é dada por,

$$N_5(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta)(1+\eta) \tag{50}$$

Usando a lógica das funções de interpolação do elemento de Serendipity (pag. 53). As funções de interpolação N_1 e N_4 são as funções de de interpolação bilineares menos 1/2 da função de interpolação no intermediário, no caso o nó 5. Assim temos,

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= N_1^b(\xi,\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi,\eta) \\
N_4(\xi,\eta) &= N_4^b(\xi,\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi,\eta)
\end{aligned} \tag{51}
$$

As aresta do nós 2 e 3 não possuem nós intermediários, portanto as função são as função bilineares.
Resposta:

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= N_1^b(\xi,\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi,\eta) \\
N_2(\xi,\eta) &= N_2^b(\xi,\eta) \\
N_3(\xi,\eta) &= N_3^b(\xi,\eta) \\
N_4(\xi,\eta) &= N_4^b(\xi,\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi,\eta) \\
N_5(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta)(1+\eta)
\end{aligned}
\tag{52}
$$

3.2.2 2) Calcular o operador Jacobiano dos seguintes elementos

O Jacobiano 2D é definido por:

$$
J(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{53}
$$

Todos os elementos são quadriláteros de 4 nós, assim a interpolação geométrica é dada por

$$
\begin{aligned}
x(\xi,\eta) &= x_1N_1(\xi,\eta) + x_2N_2(\xi,\eta) + x_3N_3(\xi,\eta) + x_4N_4(\xi,\eta) \\
y(\xi,\eta) &= y_1N_1(\xi,\eta) + y_2N_2(\xi,\eta) + y_3N_3(\xi,\eta) + y_4N_4(\xi,\eta)
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Considerando a Figura 4,

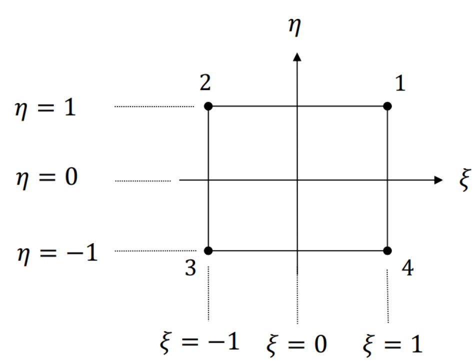

Figure 4: Parametrização de um elementos quadrilátero bilinear (4 nós)

as funções de interpolações bilineares são,

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
N_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)
\end{aligned}
\tag{55}
$$

A as derivadas em relação a ξ são,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta) \\
\frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta) \\
\frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta) \\
\frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

e as derivadas em relação a η são,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi) \\
\frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi) \\
\frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi) \\
\frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)
\end{aligned}
\tag{57}
$$

A deriva de x em relação a ξ são,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_1\frac{\partial N_1}{\partial \xi} + x_2\frac{\partial N_2}{\partial \xi} + x_3\frac{\partial N_3}{\partial \xi} + x_4\frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{x_1}{4}(1+\eta) - \frac{x_2}{4}(1+\eta) - \frac{x_1}{4}(1-\eta) + \frac{x_4}{4}(1-\eta) \\
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[(x_1-x_2)(1+\eta) + (x_4-x_3)(1-\eta)\right]
\end{aligned}
\tag{58}
$$

A deriva de y em relação a ξ são,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= y_1\frac{\partial N_1}{\partial \xi} + y_2\frac{\partial N_2}{\partial \xi} + y_3\frac{\partial N_3}{\partial \xi} + y_4\frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[(y_1-y_2)(1+\eta) + (y_4-y_3)(1-\eta)\right]
\end{aligned}
\tag{59}
$$

A deriva de x em relação a η são,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_1\frac{\partial N_1}{\partial \eta} + x_2\frac{\partial N_2}{\partial \eta} + x_3\frac{\partial N_3}{\partial \eta} + x_4\frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[(x_1 - x_4)(1+\xi) + (x_2 - x_3)(1-\xi)\right]\end{aligned} \tag{60}$$

A deriva de y em relação a η são,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \eta} &= y_1\frac{\partial N_1}{\partial \eta} + y_2\frac{\partial N_2}{\partial \eta} + y_3\frac{\partial N_3}{\partial \eta} + y_4\frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[(y_1 - y_4)(1+\xi) + (y_2 - y_3)(1-\xi)\right]\end{aligned} \tag{61}$$

Assim o operador jacobiano fica definido como,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[(x_1 - x_2)(1+\eta) + (x_4 - x_3)(1-\eta)\right] \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[(y_1 - y_2)(1+\eta) + (y_4 - y_3)(1-\eta)\right] \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[(x_1 - x_4)(1+\xi) + (x_2 - x_3)(1-\xi)\right] \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[(y_1 - y_4)(1+\xi) + (y_2 - y_3)(1-\xi)\right]\end{aligned} \tag{62}$$

Resolvendo agora as questões:

- a) Considerando o ponto P_3 como referencia, temos as seguintes coordenadas para os pontos,

  $$\begin{aligned}P_1 &= (x_3 + 6, y_3 + 4) \\ P_2 &= (x_3, y_3 + 4) \\ P_3 &= (x_3, y_3) \\ P_4 &= (x_3 + 6, y_3)\end{aligned} \tag{63}$$

  Nos temos agora que para os xs,

  $$\begin{aligned}(x_1 - x_2) &= x_3 + 6 - x_3 = 6 \\ (x_4 - x_3) &= x_3 + 6 - x_3 = 6 \\ (x_1 - x_4) &= x_3 + 6 - (x_3 + 6) = 0 \\ (x_2 - x_3) &= x_3 - x_3 = 0\end{aligned} \tag{64}$$

  e para os ys,

  $$\begin{aligned}(y_1 - y_2) &= y_3 + 4 - (y_3 + 4) = 0 \\ (y_4 - y_3) &= y_3 - y_3 = 0 \\ (y_1 - y_4) &= y_3 + 4 - y_3 = 4 \\ (y_2 - y_3) &= y_3 + 4 - y_3 = 4\end{aligned} \tag{65}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[6(1+\eta)+6(1-\eta)\right] = 3\\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[0(1+\eta)+0(1-\eta)\right] = 0\\
\frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[0(1+\xi)+0(1-\xi)\right] = 0\\
\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[4(1+\xi)+4(1-\xi)\right] = 2
\end{aligned} \tag{66}
$$

Portando o operador Jacobiano é dado por,

Resposta:

$$J(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{67}$$

Pode-se checar o resultado através do calculo da área do elemento,

$$
\begin{aligned}
&A = b*h = \int_A dA = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} detJ d\xi d\eta\\
&4*6 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (3*2)\, d\xi d\eta\\
&4*6 = 6*2*2\\
&24 = 24
\end{aligned} \tag{68}
$$

- b) Considerando o ponto P_3 como referencia, temos as seguintes coordenadas para os pontos,

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (x_3+7, y_3+2)\\
P_2 &= (x_3+1, y_3+2)\\
P_3 &= (x_3, y_3)\\
P_4 &= (x_3+6, y_3)
\end{aligned} \tag{69}
$$

Nos temos agora que para os xs,

$$
\begin{aligned}
(x_1-x_2) &= x_3+7-(x_3+1) = 6\\
(x_4-x_3) &= x_3+6-x_3 = 6\\
(x_1-x_4) &= x_3+7-(x_3+6) = 1\\
(x_2-x_3) &= x_3+1-x_3 = 1
\end{aligned} \tag{70}
$$

e para os ys,

$$
\begin{aligned}
(y_1-y_2) &= y_3+2-(y_3+2) = 0\\
(y_4-y_3) &= y_3-y_3 = 0\\
(y_1-y_4) &= y_3+2-y_3 = 2\\
(y_2-y_3) &= y_3+2-y_3 = 2
\end{aligned} \tag{71}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[6(1+\eta)+6(1-\eta)\right] = 3 \\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[0(1+\eta)+0(1-\eta)\right] = 0 \\
\frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[1(1+\xi)+1(1-\xi)\right] = \frac{1}{2} \\
\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[2(1+\xi)+2(1-\xi)\right] = 1
\end{aligned} \tag{72}
$$

Portando o operador Jacobiano é dado por,

Resposta:

$$
J(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{73}
$$

Pode-se checar o resultado através do calculo da área do elemento,

$$
\begin{aligned}
&A = b*h = \int_A dA = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} detJ d\xi d\eta \\
&2*6 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (3*1)\, d\xi d\eta \\
&2*6 = 3*2*2 \\
&12 = 12
\end{aligned} \tag{74}
$$

- c) Considerando o ponto P_3 como referencia, temos as seguintes coordenadas para os pontos,

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (x_3+2, y_3+2) \\
P_2 &= (x_3, y_3+1) \\
P_3 &= (x_3, y_3) \\
P_4 &= (x_3+2, y_3)
\end{aligned} \tag{75}
$$

Nos temos agora que para os xs,

$$
\begin{aligned}
(x_1 - x_2) &= x_3 + 2 - x_3 = 2 \\
(x_4 - x_3) &= x_3 + 2 - x_3 = 2 \\
(x_1 - x_4) &= x_3 + 2 - (x_3 + 2) = 0 \\
(x_2 - x_3) &= x_3 - x_3 = 0
\end{aligned} \tag{76}
$$

e para os ys,

$$
\begin{aligned}
(y_1 - y_2) &= y_3 + 2 - (y_3 + 1) = 1 \\
(y_4 - y_3) &= y_3 - y_3 = 0 \\
(y_1 - y_4) &= y_3 + 2 - y_3 = 2 \\
(y_2 - y_3) &= y_3 + 1 - y_3 = 1
\end{aligned} \tag{77}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[2(1+\eta)+2(1-\eta)\right] = 1 \\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[1(1+\eta)+2(1-\eta)\right] = \frac{3-\eta}{4} \\
\frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[0(1+\xi)+0(1-\xi)\right] = 0 \\
\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[2(1+\xi)+1(1-\xi)\right] = \frac{3+\xi}{4}
\end{aligned} \tag{78}$$

Portando o operador Jacobiano é dado por,

Resposta:

$$J(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3-\eta}{4} \\ 0 & \frac{3+\xi}{4} \end{bmatrix} \tag{79}$$

Pode-se checar o resultado através do calculo da área do elemento,

$$\begin{aligned}
&A = \frac{(b+B)*h}{2} = \int_A dA = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} detJ d\xi d\eta \\
&\frac{(1+2)*2}{2} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{3+\xi}{4}\right) d\xi d\eta \\
&\frac{3*2}{2} = \frac{1}{4}*2*6 \\
&3 = 3
\end{aligned} \tag{80}$$

3.2.3 4) Determine as funções de interpolação de um hexaedro quadrático

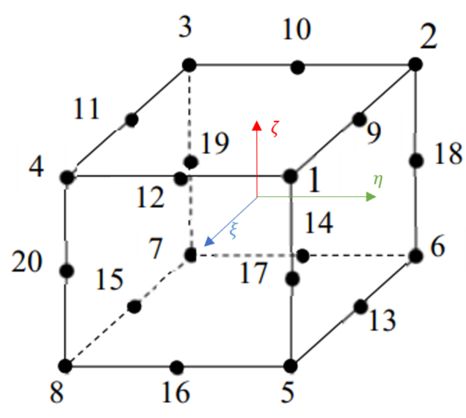

Figure 5: Hexaedros 20 nós

Pontos (ξ, η, ζ),

$$\begin{array}{ccc} P_1 = (1,1,1) & P_5 = (1,1,-1) & P_{17} = (1,1,0) \\ P_2 = (-1,1,1) & P_6 = (-1,1,-1) & P_{18} = (-1,1,0) \\ P_3 = (-1,-1,1) & P_7 = (-1,-1,-1) & P_{19} = (-1,-1,0) \\ P_4 = (1,-1,1) & P_8 = (1,-1,-1) & P_{20} = (1,-1,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} P_9 = (0,1,1) & P_{13} = (0,1,-1) \\ P_{10} = (-1,0,1) & P_{14} = (-1,0,-1) \\ P_{11} = (0,-1,1) & P_{15} = (0,-1,-1) \\ P_{12} = (1,0,1) & P_{16} = (1,0,-1) \end{array}$$

Funções de interpolações:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(\xi+\eta+\zeta-2) \\
N_2 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta-2) \\
N_3 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-\xi-\eta+\zeta-2) \\
N_4 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta-2) \\
N_5 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta-\zeta-2) \\
N_6 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-\xi+\eta-\zeta-2) \\
N_7 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2) \\
N_8 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi+\eta-\zeta-2) \\
N_9 &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta) \\
N_{11} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta) \\
N_{13} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta) \\
N_{15} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) \\
N_{10} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\zeta) \\
N_{12} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1+\zeta) \\
N_{14} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1-\zeta) \\
N_{16} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\zeta) \\
N_{17} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)(1+\eta) \\
N_{18} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)(1+\eta) \\
N_{19} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)(1-\eta) \\
N_{20} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)(1-\eta)
\end{aligned} \tag{81}
$$

3.2.4 5) Calcular as forças nodais equivalentes para os elementos de elasticidades plana abaixo, considerando uma distribuição uniforme de forças de volume na direção y

A integral de forças de volume é(pag. 22),

$$\mathbf{f}_i = \int_\Omega \mathbf{N}_i \mathbf{b} d\Omega \tag{82}$$

em notação matricial temos,

$$\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \int_\Omega \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} d\Omega = \int_\Omega \begin{bmatrix} N_i b_x \\ N_i b_y \end{bmatrix} d\Omega = \begin{bmatrix} \int_\Omega N_i b_x d\Omega \\ \int_\Omega N_i b_y d\Omega \end{bmatrix} \tag{83}$$

Como b_x é igual 0, temos,

$$\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_\Omega N_i b_y d\Omega \end{bmatrix} \tag{84}$$

É necessário calcular a integral em relação a N_i, lembrando que a integral é em relação ao sistema de coordenadas x-y,

$$\int_\Omega N_i(x, y) d\Omega \tag{85}$$

A integral usando as coordenadas locais no elemento triangular é,

$$\int_\Omega N_i(x, y) d\Omega = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_i(\xi_1, \xi_2) det J d\xi_1 d\xi_2 \tag{86}$$

Considerando uma interpolação linear para geometria o determinante do jacobiano é constante e igual a duas vezes a área do triangulo, portando,

$$\int_\Omega N_i(x, y) d\Omega = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_i(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 2A f_i \tag{87}$$

Para resolver o problema precisamos apenas calcular essas integrais.

- a) Para o triangulo linear temos as seguintes funções de interpolação

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1 \\ N_2 &= \xi_2 \\ N_3 &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \end{aligned} \tag{88}$$

A integrais ficam

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_1 d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \xi_1 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6} \\ f_2 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_2 d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \xi_2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6} \\ f_3 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_3 d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} 1 - \xi_1 - \xi_2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6} \end{aligned} \tag{89}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
f_1^y &= (b_y)(2A)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{b_y A}{3} \\
f_2^y &= (b_y)(2A)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{b_y A}{3} \\
f_3^y &= (b_y)(2A)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{b_y A}{3}
\end{aligned} \tag{90}$$

Assim os vetores de força equivalentes é dados por,

Resposta:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3 = \frac{b_y A}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{91}$$

- b) Para o triangulo quadrático temos as seguintes funções de interpolação

$$\begin{aligned}
N_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) \\
N_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1) \\
N_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1) \\
N_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\
N_5 &= 4\xi_2\xi_3 \\
N_6 &= 4\xi_3\xi_1
\end{aligned} \tag{92}$$

A integrais ficam

$$\begin{aligned}
f_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_1 d\xi_1 d\xi_2 = 0 \\
f_2 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_2 d\xi_1 d\xi_2 = 0 \\
f_3 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_3 d\xi_1 d\xi_2 = 0 \\
f_4 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_1 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6} \\
f_5 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6} \\
f_6 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_3 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6}
\end{aligned} \tag{93}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
f_1^y &= 0 \\
f_2^y &= 0 \\
f_3^y &= 0 \\
f_4^y &= \frac{b_y A}{3} \\
f_5^y &= \frac{b_y A}{3} \\
f_6^y &= \frac{b_y A}{3}
\end{aligned}
\tag{94}
$$

Assim os vetores de força equivalentes é dados por,

Resposta:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_4 = \mathbf{f}_5 = \mathbf{f}_6 &= \frac{b_y A}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{95}
$$

3.2.5 6) Calcular as forças nodais equivalentes para os elementos quadriláteros quadrático de elasticidade plana

A integral de forças no contorno é(pag. 22),

$$
\mathbf{f}_i = \int_\Gamma \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{96}
$$

em notação matricial temos,

$$
\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} d\Gamma = \int_\Gamma \begin{bmatrix} N_i q_x \\ N_i q_y \end{bmatrix} d\Gamma = \begin{bmatrix} \int_\Gamma N_i q_x d\Gamma \\ \int_\Gamma N_i q_y d\Gamma \end{bmatrix} \tag{97}
$$

Como a força são uniformes nos bordos,

$$
\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x \int_\Gamma N_i d\Gamma \\ q_y \int_\Gamma N_i d\Gamma \end{bmatrix} \tag{98}
$$

Portanto temos,

$$
\begin{aligned}
&f_2^x = q_x \int_\Gamma N_2 d\Gamma \quad f_2^y = 0 \\
&f_6^x = q_x \int_\Gamma N_6 d\Gamma \quad f_6^y = 0 \\
&f_3^x = q_x \int_\Gamma N_3 d\Gamma \quad f_3^y = q_y \int_\Gamma N_3 d\Gamma \\
&f_7^x = 0 \quad f_7^y = q_y \int_\Gamma N_7 d\Gamma \\
&f_4^x = 0 \quad f_4^y = q_y \int_\Gamma N_4 d\Gamma
\end{aligned}
\tag{99}
$$

Como a integral é apenas nos bordos, na aresta 2-3 temos, as seguintes funções de interpolações

$$
\begin{aligned}
N_2 &= \frac{1}{2}\eta(1+\eta) \\
N_6 &= (1+\eta)(1-\eta) \\
N_3 &= \frac{1}{2}\eta(\eta-1)
\end{aligned}
\tag{100}
$$

As integrais são,

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma N_2 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_2 detJ d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_2 d\eta = \frac{L}{6} \\
\int_\Gamma N_6 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_6 detJ d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_6 d\eta = \frac{2L}{3} \\
\int_\Gamma N_3 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_3 detJ d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_3 d\eta = \frac{L}{6}
\end{aligned}
\tag{101}
$$

Como a integral é apenas nos bordos, na aresta 3-4 temos, as seguintes funções de interpolações

$$
\begin{aligned}
N_3 &= \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\
N_7 &= (1+\xi)(1-\xi) \\
N_4 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi)
\end{aligned}
\tag{102}
$$

As integrais são,

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma N_3 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_3 detJ d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_3 d\eta = \frac{L}{6} \\
\int_\Gamma N_7 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_7 detJ d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_7 d\eta = \frac{2L}{3} \\
\int_\Gamma N_4 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_4 detJ d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_4 d\eta = \frac{L}{6}
\end{aligned}
\tag{103}
$$

Portanto temos,

$$
\begin{aligned}
&f_2^x = \frac{q_x L}{6} \quad f_2^y = 0 \\
&f_6^x = \frac{2q_x L}{3} \quad f_6^y = 0 \\
&f_3^x = \frac{q_x L}{6} \quad f_3^y = \frac{q_y L}{6} \\
&f_7^x = 0 \quad f_7^y = \frac{2q_y L}{3} \\
&f_4^x = 0 \quad f_4^y = \frac{q_y L}{6}
\end{aligned}
\tag{104}
$$

Resposta:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{q_x L}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_3 &= \begin{bmatrix} \frac{q_x L}{6} \\ \frac{q_y L}{6} \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q_y L}{6} \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_6 &= \begin{bmatrix} \frac{2q_x L}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_7 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2q_y L}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{105}
$$

4 Cap 13 - Problemas de potencial

Primeira forma de se escrever o divergente do gradiente,

$$\begin{aligned}
\nabla \bullet (k\nabla\phi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} k\frac{\partial\phi}{\partial x} & k\frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix} \\
\nabla \bullet (k\nabla\phi) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{106}$$

Segunda forma de se escrever o divergente do gradiente,

$$\begin{aligned}
\nabla \bullet (k\nabla\phi) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} \\
\nabla \bullet (k\nabla\phi) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{107}$$

5 Operadores Diferencias

5.1 Gradiente

O operado diferencial gradiente é definido por,

$$grad() = \bar{\nabla}() = \frac{\partial()}{\partial x}\boldsymbol{\hat{i}} + \frac{\partial()}{\partial y}\boldsymbol{\hat{j}} + \frac{\partial()}{\partial z}\boldsymbol{\hat{z}} = \left[\frac{\partial()}{\partial x}\ \frac{\partial()}{\partial y}\ \frac{\partial()}{\partial z}\right] \tag{108}$$

O gradiente de um escalar é um vetor, por exemplo, o gradiente de u é um vetor dados por,

$$\bar{\nabla}(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{\hat{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{\hat{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{\hat{z}} \tag{109}$$

Uma aplicação prática do gradiente é fluxo de calor que é dado pelo gradiente da Temperatura:

$$\bar{q} = -k\bar{\nabla}(T) = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{\hat{i}} + \frac{\partial T}{\partial y}\boldsymbol{\hat{j}} + \frac{\partial T}{\partial T}\boldsymbol{\hat{z}}\right) \tag{110}$$

Outra forma de escrever o gradiente é usando notação indicial

$$\bar{\nabla}(u) = \frac{\partial u}{\partial x_1}\boldsymbol{\hat{i}_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\boldsymbol{\hat{i}_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\boldsymbol{\hat{i}_3} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_j}\boldsymbol{\hat{i}_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}\boldsymbol{\hat{i}_j} = u_{,j}\boldsymbol{\hat{i}_j} \tag{111}$$

5.2 Divergente

O operado diferencial divergente é definido por,

$$div() = \bar{\nabla} \bullet () = \frac{\partial()}{\partial x} + \frac{\partial()}{\partial y} + \frac{\partial()}{\partial z} \tag{112}$$

Por exemplo, considere o vetor velocidade $\boldsymbol{\bar{v}}$ dado por,

$$\boldsymbol{\bar{v}} = u\boldsymbol{\hat{i}} + v\boldsymbol{\hat{j}} + w\boldsymbol{\hat{z}} \tag{113}$$

O divergente é dado,

$$\bar{\nabla} \bullet \boldsymbol{\bar{v}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{114}$$

Em notação indicial a velocidade fica,

$$\boldsymbol{\bar{v}} = u_1\boldsymbol{\hat{i}_1} + u_2\boldsymbol{\hat{i}_2} + u_3\boldsymbol{\hat{i}_3} \tag{115}$$

E o divergente

$$\bar{\nabla} \bullet \boldsymbol{\bar{v}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = u_{j,j} \tag{116}$$

5.3 Operado laplaciano

O operado laplaciano é o divergente do gradiente,

$$div(grad()) = \bar{\nabla} \bullet \bar{\nabla}() = \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2()}{\partial y^2} + \frac{\partial^2()}{\partial z^2} = \nabla^2() \tag{117}$$

6 Teorema do divergente

A teorema do divergente é dado por:

$$\int_{\Omega} \nabla \bullet \bar{\boldsymbol{F}} d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{\boldsymbol{F}} \bullet \bar{\boldsymbol{n}} d\Gamma \tag{118}$$

O vetor $\bar{\boldsymbol{F}}$ e $\bar{\boldsymbol{n}}$ podem ser escritos como,

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{F}} &= (F_x, F_y, F_z) \\ \bar{\boldsymbol{n}} &= (n_x, n_y, n_z) \end{aligned} \tag{119}$$

Assim da para escrever o teorema do divergente como,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z)\, d\Gamma \tag{120}$$

Pode-se provar ainda que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial F_x}{\partial x} d\Omega &= \int_{\Gamma} F_x n_x d\Gamma \\ \int_{\Omega} \frac{\partial F_y}{\partial y} d\Omega &= \int_{\Gamma} F_y n_y d\Gamma \\ \int_{\Omega} \frac{\partial F_z}{\partial z} d\Omega &= \int_{\Gamma} F_z n_z d\Gamma \end{aligned} \tag{121}$$

Considerando que $F_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} w$, $F_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} w$ e $F_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} w$ nos temos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} w \right) d\Omega &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x} w\, n_x d\Gamma \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} w \right) d\Omega &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial y} w\, n_y d\Gamma \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} w \right) d\Omega &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial z} w\, n_z d\Gamma \end{aligned} \tag{122}$$

7 Equação de transferência de calor

A equação de calor é dada por,

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} = \bar{\nabla} \bullet (k\bar{\nabla}T) + Q(x,y,z,t) \tag{123}$$

onde ρ é massa especifica, c_p é o calor especifico, k é coeficiente de condutividade térmica e $Q(x,y,z,t)$ é um termo fonte de geração de calor. Considerando o regime permanente temos,

$$\bar{\nabla} \bullet (k\bar{\nabla}T) + Q(x,y,z) = 0 \tag{124}$$

Agora considerando que o k é constante,

$$\begin{aligned} k\left(\bar{\nabla} \bullet \bar{\nabla}T\right) + Q(x,y,z) = 0 \\ k\nabla^2 T + Q(x,y,z) = 0 \end{aligned} \tag{125}$$

Dividindo k

$$\begin{aligned} \nabla^2 T = -Q(x,y,z)/k = 0 \\ \nabla^2 T = Q^*(x,y,z) \end{aligned} \tag{126}$$

A equação abaixo é conhecida com Equação de Poisson

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q^*(x,y,z) \tag{127}$$

A equação de Laplace é a equação de Poisson com termo fonte nulo,

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{128}$$

Para um problema 1D a equações de Poisson fica,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = Q^*(x) \tag{129}$$

8 Equação de transporte de calor

A equação de transporte de calor é dada por,

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \bar{\nabla} \bullet (\rho c_p \bar{\boldsymbol{v}} T) = \bar{\nabla} \bullet (k\bar{\nabla}T) + Q(x,y,z,t) \tag{130}$$

9 Exercícios extras

9.1 Q2 - prova - 2010

- a)

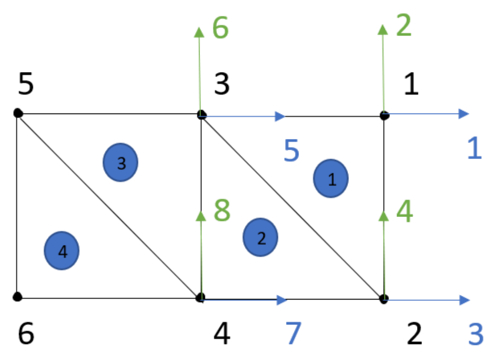

Figure 6: Numeração das equações.

- b)

A integral de forças no contorno é(pag. 22),

$$\mathbf{f}_i = \int_\Gamma \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{131}$$

em notação matricial temos,

$$\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} d\Gamma = \int_\Gamma \begin{bmatrix} N_i q_x \\ N_i q_y \end{bmatrix} d\Gamma = \begin{bmatrix} \int_\Gamma N_i q_x d\Gamma \\ \int_\Gamma N_i q_y d\Gamma \end{bmatrix} \tag{132}$$

Como a força são uniformes nos bordos,

$$\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_\Gamma N_i q_x d\Gamma \\ \int_\Gamma N_i q_y d\Gamma \end{bmatrix} \tag{133}$$

No problema $q_y = -q$ e $q_x = 0$, assim temos,

$$\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q \int_\Gamma N_i d\Gamma \end{bmatrix} \tag{134}$$

Funções de interpolação na aresta do triangulo,

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1 \\ N_2 &= \xi_2 = (1 - \xi_1) \end{aligned} \tag{135}$$

As integrais são,

$$\begin{aligned} f_1^y &= -q\int_\Gamma N_1 d\Gamma = -q\int_0^1 N_1 detJ d\xi_1 = -qL\int_0^1 \xi_1 d\xi_1 = -\frac{qL}{2} \\ f_2^y &= -q\int_\Gamma N_2 d\Gamma = -q\int_0^1 N_2 detJ d\xi_1 = -qL\int_0^1 (1-\xi_1) d\xi_1 = -\frac{qL}{2} \end{aligned} \tag{136}$$

Como $L = 1/2$, nos temos,

$$\begin{aligned} f_1^y &= -\frac{q}{4} \\ f_2^y &= -\frac{q}{4} \end{aligned} \tag{137}$$

A equação 2 só tem a contribuição do elemento 1 já a equações 6 tem a contribuição dos elementos 1 e 3. A força nodal equivalente é assim:
Reposta:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{q}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{q}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{138}$$

- c)

k11	k12	k13	k14	k15	k16	0	0
k21	k22	k23	k24	k25	k26	0	0
k31	k32	k33	k34	k35	k36	k37	k38
k41	k42	k43	k44	k45	k46	k47	k48
k51	k52	k53	k54	k55	k56	k57	k58
k61	k62	k63	k64	k65	k66	k67	k68
0	0	k73	k74	k75	k76	k77	k78
0	0	k83	k84	k85	k86	k87	k88

	au
1	k12
2	k13
3	k23
4	k14
5	k24
6	k34
7	k15
8	k25
9	k35
10	k45
11	k16
12	k26
13	k36
14	k46
15	k56
16	k37
17	k47
18	k57
19	k67
20	k38
21	k48
22	k58
23	k68
24	k78

ip(i)	h(i)
0	0
1	1
3	2
6	3
10	4
15	5
19	4
24	5

Figure 7: Perfil da matriz.

9.2 Q3 - prova - 2010

A matriz **B** é dada por,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \tag{139}$$

onde as matrizes $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ e $\mathbf{B}_3$ são dadas por,

$$\mathbf{B_1} = \pounds\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{140}$$

$$\mathbf{B_2} = \pounds\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{141}$$

$$\mathbf{B_3} = \pounds\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{142}$$

Agora temos que calcular as derivadas das funções de interpolação. A relação entre as derivas em relação a x e y com as coordenadas locais ξ_1 e ξ_2 é dada pela inversa da matriz Jacobiana.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \tag{143}$$

Para calcular a matriz inversa precisamos calcular A matriz Jacobina, para um de um triangulo linear temos,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} \tag{144}$$

Considerando a figura temos,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ y_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ y_2 &= 1 \\ x_3 &= 0 \\ y_3 &= 0 \end{aligned} \tag{145}$$

Portanto a matriz Jacobiana é dada por,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{146}$$

A matriz inversa de uma matriz identidade é a própria matriz, ou seja,

$$J^{-1} = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{147}$$

Considerando agora a eq. (143) temos a relação entre as derivas da função N_1,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \tag{148}$$

Sendo assim temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} &= \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} \end{aligned} \tag{149}$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado as funções N_2 e N_3, o que leva à,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{\partial N_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} &= \frac{\partial N_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{\partial N_3}{\partial \xi_2} \end{aligned} \tag{150}$$

Para o triangulo linear temos as seguintes funções de interpolação

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1 \\ N_2 &= \xi_2 \\ N_3 &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \end{aligned} \tag{151}$$

Assim as derivas são,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} &= -1 \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} &= -1 \end{aligned} \tag{152}$$

A matriz $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ e $\mathbf{B}_3$ ficam definidas como,

$$\mathbf{B_1} = \pounds \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{153}$$

$$\mathbf{B_2} = \pounds\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{154}$$

$$\mathbf{B_3} = \pounds\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{155}$$

Portanto a **B** é,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{156}$$

O Calculo da deformação é dado por,

$$\epsilon(x,y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{157}$$

Portanto,

$$\epsilon(x,y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_3 \\ v_2 - v_3 \\ v_1 + u_2 - u_3 - v_3 \end{bmatrix} \tag{158}$$

Reposta:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{159}$$

$$\epsilon(x,y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_3 \\ v_2 - v_3 \\ v_1 + u_2 - u_3 - v_3 \end{bmatrix} \tag{160}$$

Solução alternativa:
As funções de interpolação do triangulo linear são sempre planos. Usando a figura podemos ver que os planos são fáceis de se obter, eles são:

$$\begin{aligned} N_1 &= x \\ N_2 &= y \\ N_3 &= 1 - x - y \end{aligned} \tag{161}$$

Assim as derivas são,

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial x} &= 1\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 1\\ \frac{\partial N_3}{\partial x} &= -1\\ \frac{\partial N_3}{\partial y} &= -1\end{aligned} \tag{162}$$

Agora todo o procedimento é igual ao anterior.
Como chegar na relação Bu

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{163}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x}u_1+\frac{\partial N_2}{\partial x}u_2+\frac{\partial N_3}{\partial x}u_3\\ \frac{\partial N_1}{\partial y}v_1+\frac{\partial N_2}{\partial y}v_2+\frac{\partial N_3}{\partial y}v_3\\ \frac{\partial N_1}{\partial y}u_1+\frac{\partial N_2}{\partial y}u_2+\frac{\partial N_3}{\partial y}u_3+\frac{\partial N_1}{\partial x}v_1+\frac{\partial N_2}{\partial x}v_2+\frac{\partial N_3}{\partial x}v_3\end{bmatrix} \tag{164}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{bmatrix} \tag{165}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{bmatrix} \tag{166}$$

9.3 Q1 - prova - 2012

A integral de forças no contorno é(pag. 22),

$$\mathbf{f}_i = \int_\Gamma \mathbf{N}_i\bar{\mathbf{t}}d\Gamma \tag{167}$$

em notação matricial temos,

$$\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} d\Gamma = \int_\Gamma \begin{bmatrix} N_i q_x \\ N_i q_y \end{bmatrix} d\Gamma = \begin{bmatrix} \int_\Gamma N_i q_x d\Gamma \\ \int_\Gamma N_i q_y d\Gamma \end{bmatrix} \tag{168}$$

No problema $q_y = 0$ e q_x é uma função linear, assim temos,

$$\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_\Gamma N_i q_x d\Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \tag{169}$$

- Usando as funções de interpolação da barra

A função na aresta do elemento podem ser baseadas na Fig. 8. Funções quadraticas para N e linear para q_x.

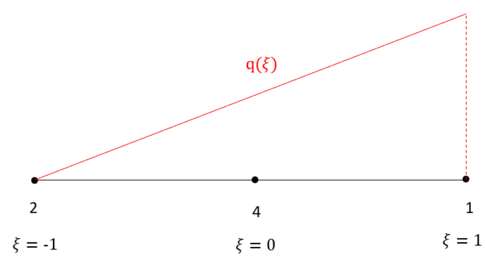

Figure 8: Sistema de coordenadas da barra

Sendo assim,

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ N_4 &= (1+\xi)(1-\xi) \\ N_1 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\ q_x &= \frac{q}{2}(1+\xi) \end{aligned} \tag{170}$$

As integrais são,

$$\begin{aligned} f_2^x &= \int_\Gamma N_2 q_x d\Gamma = \int_{-1}^{1} N_2 q_x detJ d\xi = \frac{qL}{8}\int_{-1}^{1} \xi(\xi-1)(1+\xi)d\xi = 0 \\ f_4^x &= \int_\Gamma N_4 q_x d\Gamma = \int_{-1}^{1} N_4 q_x detJ d\xi = \frac{qL}{4}\int_{-1}^{1} (1+\xi)^2(1-\xi)d\xi = \frac{qL}{3} \\ f_1^x &= \int_\Gamma N_1 q_x d\Gamma = \int_{-1}^{1} N_1 q_x detJ d\xi = \frac{qL}{8}\int_{-1}^{1} \xi(1+\xi)(1+\xi)d\xi = \frac{qL}{6} \end{aligned} \tag{171}$$

- Usando as funções de interpolação do triangulo

Na Figura 9 temos as áreas utilizadas no sistema de coordenadas locais do triangulo.

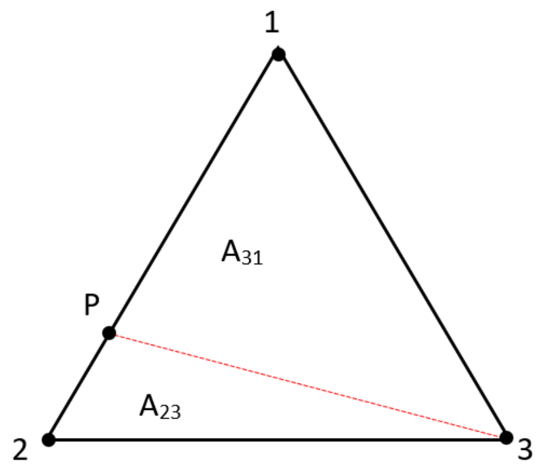

Figure 9: Coordenadas de área do triângulo.

Se o ponto P só pode estar na aresta 1-2. Nos temos que

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{A_{31}}{A} = \frac{A_{31}}{A} \\
\xi_2 &= \frac{A_{23}}{A} = \frac{A - A_{31}}{A} = 1 - \frac{A_{31}}{A} = 1 - \xi_1 \\
\xi_3 &= \frac{A_{12}}{A} = 0
\end{aligned} \tag{172}$$

A funções de interpolação são

$$\begin{aligned}
&N_1 = \xi_1(2\xi_1 - 1) \\
&N_4 = 4\xi_1\xi_2 = 4\xi_1(1 - \xi_1) \\
&N_2 = \xi_2(2\xi_2 - 1) = (1 - \xi_1)(1 - 2\xi_1) \\
&q_x = q\xi_1
\end{aligned} \tag{173}$$

As integrais são,

$$\begin{aligned}
f_2^x &= \int_\Gamma N_2 q_x d\Gamma = \int_0^1 N_2 q_x detJ d\xi = qL\int_0^1 (1 - \xi_1)(1 - 2\xi_1)\xi_1 d\xi = 0 \\
f_4^x &= \int_\Gamma N_4 q_x d\Gamma = \int_0^1 N_4 q_x detJ d\xi = 4qL\int_0^1 \xi_1(1 - \xi_1)\xi_1 d\xi = \frac{qL}{3} \\
f_1^x &= \int_\Gamma N_1 q_x d\Gamma = \int_0^1 N_1 q_x detJ d\xi = qL\int_0^1 \xi_1(2\xi_1 - 1)\xi_1 d\xi = \frac{qL}{6}
\end{aligned} \tag{174}$$

Reposta:

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} \frac{qL}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{175}$$
$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \frac{qL}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

A força resultante da aresta é $\frac{qL}{2}$. Para verificar a resposta vamos somar f_1^x, f_2^x e f_4^x para calcular a força resultante na aresta através das forças equivalentes nodai,

$$f_r^x = f_1^x + f_2^x + f_4^x = \frac{qL}{6} + \frac{qL}{3} + 0 = \frac{qL}{2} \tag{176}$$

9.4 Q2 - prova - 2012

Utilizando o meto do resíduos ponderados temos,

$$\int_\Omega \left[k\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \right) + Q \right] w d\Omega = 0 \tag{177}$$

Expandindo as integral temos,

$$\int_\Omega k\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} w d\Omega + \int_\Omega k\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} w d\Omega + \int_\Omega Q w d\Omega = 0 \tag{178}$$

O objetivo agora é diminuir a ordem da deriva de ϕ, nós queremos apenas derivadas primeira em ϕ. Pelo teorema do divergente temos,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x} w \right) d\Omega &= \int_\Gamma \left(k\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) w n_x d\Gamma \\ \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y} w \right) d\Omega &= \int_\Gamma \left(k\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) w n_y d\Gamma \end{aligned} \tag{179}$$

Pela integra por partes temos,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x} w \right) d\Omega &= \int_\Omega k\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} w d\Omega + \int_\Omega k\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} d\Omega \\ \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y} w \right) d\Omega &= \int_\Omega k\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} w d\Omega + \int_\Omega k\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} d\Omega \end{aligned} \tag{180}$$

Juntando a eq. (179) e eq. (180),

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \left(k\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) w n_x d\Gamma &= \int_\Omega k\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} w d\Omega + \int_\Omega k\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} d\Omega \\ \int_\Gamma \left(k\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) w n_y d\Gamma &= \int_\Omega k\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} w d\Omega + \int_\Omega k\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} d\Omega \end{aligned} \tag{181}$$

Rearranjando os termos,

$$\begin{aligned}\int_\Omega k\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}wd\Omega &= \int_\Gamma \left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)wn_x d\Gamma - \int_\Omega k\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}d\Omega \\ \int_\Omega k\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}wd\Omega &= \int_\Gamma \left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)wn_y d\Gamma - \int_\Omega k\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}d\Omega\end{aligned} \tag{182}$$

Agora com a eq. (182) podemos voltar para a eq. (178)

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma \left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)wn_x d\Gamma + \int_\Gamma \left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)wn_y d\Gamma - \int_\Omega k\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}d\Omega \\ &- \int_\Omega k\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}d\Omega + \int_\Omega Qwd\Omega = 0\end{aligned} \tag{183}$$

Rearranjando os termos,

$$\int_\Omega k\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)d\Omega = \int_\Gamma k\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}n_y\right)wd\Gamma + \int_\Omega Qwd\Omega \tag{184}$$

Considerando agora a condição de contorno natural,

$$q = k\frac{\partial\phi}{\partial n} = k\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}n_y\right) \tag{185}$$

A formulação variacional final é (pag. 168),
Reposta a):

$$\int_\Omega k\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)d\Omega = \int_{\Gamma_2} qwd\Gamma + \int_\Omega Qwd\Omega \tag{186}$$

- Questão b)

Definindo as aproximações para ϕ e w,

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{j=0}^{n} N_j\phi_j \\ w &= \sum_{i=0}^{n} N_i w_i\end{aligned} \tag{187}$$

Substituindo na resposta a) chega-se à:
Reposta b):

$$\begin{aligned}k_{ij} &= \int_\Omega k\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)d\Omega \\ f_i &= \int_{\Gamma_2} qN_i d\Gamma + \int_\Omega QN_i d\Omega\end{aligned} \tag{188}$$

- Questão c)

Como as derivada que aparecem na integral de omega são de primeira ordem temos que as funções aproximação precisam ser da classe C^0 pela condição de compatibilidade. Isso implica que as aproximação que ser no mínimo linear. A outra condição é de completidade, as aproximações tem que ser um polinômio completo. Ou seja tem que ser da forma:

$$A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + A_{p-2} x^{p-2} ... + A_1 x + A_0 x^0 \tag{189}$$

9.5 Q3 - prova - 2012

A área do retângulo pode ser escrita na forma de uma integral. Além disso o determinante da jacobiano de uma paralelogramo é constante, assim temos,

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} detJ d\eta d\xi \\ A &= detJ \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} d\eta d\xi \\ A &= detJ 4 \end{aligned} \tag{190}$$

Reposta:

$$detJ = \frac{A}{4} \tag{191}$$

10 Integral nos elementos

$$k_{45} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_5}{\partial x}\frac{\partial N_4}{\partial x} + \frac{\partial N_5}{\partial y}\frac{\partial N_4}{\partial y} d\Omega \tag{192}$$

Para coordenadas locais do triangulo temos:

$$k_{45} = k_{12}^e = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \left(\frac{\partial N_2}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial N_1}{\partial y} \right) |J| d\xi_1 d\xi_2 \tag{193}$$

A matriz jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} \Delta x_{46} & \Delta y_{46} \\ \Delta x_{56} & \Delta y_{56} \end{bmatrix} \tag{194}$$

O determinante do jacobiano é:

$$|J| = 2A \tag{195}$$

As derivadão são calcular pela a inversa do jacobiano,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \Delta y_{56} & -\Delta y_{46} \\ -\Delta x_{56} & \Delta x_{46} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \tag{196}$$

As derivadas são,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{\Delta y_{56}}{|J|} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} &= -\frac{\Delta x_{56}}{|J|} = \frac{\Delta x_{65}}{|J|} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= -\frac{\Delta y_{46}}{|J|} = \frac{\Delta y_{64}}{|J|} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{\Delta x_{46}}{|J|} \end{aligned} \tag{197}$$

Substituindo na integral,

$$\begin{aligned} k_{12}^e &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \left(\frac{\Delta y_{64}}{|J|}\frac{\Delta y_{56}}{|J|} + \frac{\Delta x_{46}}{|J|}\frac{\Delta x_{65}}{|J|} \right) |J| d\xi_1 d\xi_2 \\ k_{12}^e &= \left(\frac{\Delta y_{64}}{|J|}\frac{\Delta y_{56}}{|J|} + \frac{\Delta x_{46}}{|J|}\frac{\Delta x_{65}}{|J|} \right) |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_1 d\xi_2 \\ k_{12}^e &= \frac{\Delta y_{64}\Delta y_{56} + \Delta x_{46}\Delta x_{65}}{4A} \end{aligned} \tag{198}$$