1 Formulação variacional

Para considerando a equação diferencial:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0 \tag{1}$$

A formulação variacional pode-se ser obtida multiplicado e integrando a eq. (1) em todo o domínio L.

$$\int_0^L \left(\frac{d^2u}{dx^2} + f(x)\right) w(x)dx = 0 \tag{2}$$

Usando a regra da soma de integrais temos,

$$\int_0^L \frac{d^2u}{dx^2} w(x)dx + \int_0^L f(x)w(x)dx = 0 \tag{3}$$

Focando apenas no primeiro termo,

$$\int_0^L \frac{d^2u}{dx^2} w(x)dx = \frac{du}{dx} w(x) \mid_0^L - \int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx}dx \tag{4}$$

O que leva à,

$$\frac{du}{dx} w \mid_0^L - \int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx}dx + \int_0^L f(x)w(x)dx = 0 \tag{5}$$

1.1 Integral por partes

Para chegar na eq. (4) considere primeiro a regra do produto parada derivas para duas funções genéricas $a(x)$ e $b(x)$:

$$\frac{d(ab)}{dx} = \frac{da}{dx}b + \frac{db}{dx}a \tag{6}$$

Integrando em ambos os lados,

$$\int_0^L \frac{d(ab)}{dx}dx = \int_0^L \frac{da}{dx}bdx + \int_0^L \frac{db}{dx}adx \tag{7}$$

A integral e a deriva se cancelam no primeiro termo,

$$ab|_0^L = \int_0^L \frac{da}{dx}bdx + \int_0^L \frac{db}{dx}adx \tag{8}$$

Considerando agora que $a(x) = \frac{du}{dx}$ e $b(x) = w(x)$, portanto

$$\frac{du}{dx}w|_0^L = \int_0^L \frac{d^2u}{dx^2}wdx + \int_0^L \frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx \tag{9}$$

levando assim a eq (4).

1.2 Resíduos ponderados

A aproximando $u(x)$ por $\hat{u}(x)$ eq. (1) não e mais resolvida de maneira exata sobrenado um resíduo $R(x)$,

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + f(x) = R(x) \tag{10}$$

A ideia é reduzir este resíduo usando uma aproximação da função peso $\hat{w}(x)$.

$$\int_0^L R(x)\hat{w}(x)dx = \int_0^L \left(\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + f(x)\right)\hat{w}(x)dx = 0 \tag{11}$$

Os métodos do Elementos Finitos, Diferença Finita e Volume Finitos são gerados pelas diferentes escolhas das funções w. Usando a formulação variacional eq. 9 temos,

$$\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d\hat{w}}{dx}dx = \frac{d\hat{u}}{dx}\hat{w}\mid_0^L + \int_0^L f(x)\hat{w}(x)dx \tag{12}$$

1.3 Aproximações

As aproximações de $\hat{u}(x)$ e $\hat{w}(x)$ são dada por,

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x)u_j \tag{13}$$

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i \tag{14}$$

onde n é o número de pontos na malha. Substituindo $\hat{w}(x)$ na eq. (12)

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)dx &= \frac{d\hat{u}}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)\mid_0^L \\ &+ \int_0^L f(x)\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)dx\end{aligned} \tag{15}$$

Para o primeiro termo temos,

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)dx &= \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{d}{dx}\left(N_1w_1 + ... + N_nw_n\right)dx \\ &= \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\left(\frac{dN_1}{dx}w_1 + ... + \frac{dN_n}{dx}w_n\right)dx \\ &= \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_1}{dx}w_1dx + ... + \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_n}{dx}w_ndx \\ &= w_1\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx + ... + w_n\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx\end{aligned} \tag{16}$$

Para o segundo termo temos,

$$\frac{d\hat{u}}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right) |_0^L = w_1\frac{d\hat{u}}{dx}N_1(x) |_0^L + ... + w_n\frac{d\hat{u}}{dx}N_n(x) |_0^L \tag{17}$$

Para o terceiro termo temos,

$$\begin{aligned}\int_0^L f(x)\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)w_i\right)dx &= \int_0^L f(x)\left(N_1(x)u_1 + ... + N_n(x)w_n\right)dx \\ &= w_1\int_0^L f(x)N_1(x)dx + ... + w_n\int_0^L f(x)N_n(x)dx\end{aligned} \tag{18}$$

Juntando as eqs. (16), (17) e (18) temos,

$$\begin{aligned} w_1\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx + ... + w_n\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx = \\ w_1\frac{d\hat{u}}{dx}N_1(x) |_0^L + ... + w_n\frac{d\hat{u}}{dx}N_n(x) |_0^L \\ + w_1\int_0^L f(x)N_1(x)dx + ... + w_n\int_0^L f(x)N_n(x)dx \end{aligned} \tag{19}$$

Isolando agora os w_i,

$$\begin{aligned} & w_1\left(\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_1(x) |_0^L - \int_0^L f(x)N_1(x)dx\right) \\ & + ... + \\ & w_n\left(\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_n(x) |_0^L - \int_0^L f(x)N_n(x)dx\right) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Para que a eq (20) seja sempre verdade ou os w_i são todos nulos ou as expressões são nulas. Fazer todos w_i nulos não tem utilidade, logo a melhor opção é fazer todas as expressões dentro dos parenteses nulas. Assim nos temos um conjunto n equações,

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_1(x) |_0^L - \int_0^L f(x)N_1(x)dx = 0 \\ & ... \\ & \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_n(x) |_0^L - \int_0^L f(x)N_n(x)dx = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Ainda falta substituir o $\hat{u}$, para a primeira integral,

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dN_i}{dx}dx &= \int_0^L \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} N_j(x)u_j\right)\frac{dN_i}{dx}dx \\
&= \int_0^L \frac{d}{dx}\left(N_1(x)u_1 + ...N_n(x)u_n\right)\frac{dN_i}{dx}dx \\
= \int_0^L \frac{d}{dx}\left(N_1(x)u_1\right)\frac{dN_i}{dx}dx + ... + \int_0^L \frac{d}{dx}\left(N_n(x)u_n\right)\frac{dN_i}{dx}dx \\
&= u_1\int_0^L \frac{N_1}{dx}\frac{dN_i}{dx}dx + ... + u_n\int_0^L \frac{dN_n}{dx}\frac{dN_i}{dx}dx
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Substituindo nas eqs. (21) chegamos ao sistema final de equações.

$$u_1\int_0^L \frac{N_1}{dx}\frac{dN_i}{dx}dx + ... + u_n\int_0^L \frac{dN_n}{dx}\frac{dN_i}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_1(x)\mid_0^L - \int_0^L f(x)N_1(x)dx = 0$$

...

$$u_1\int_0^L \frac{N_1}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx + ... + u_n\int_0^L \frac{dN_n}{dx}\frac{dN_n}{dx}dx - \frac{d\hat{u}}{dx}N_n(x)\mid_0^L - \int_0^L f(x)N_n(x)dx = 0$$

Definido os k_{ij} e f_i,

$$
\begin{aligned}
k_{ij} &= \int_0^L \frac{N_j}{dx}\frac{dN_i}{dx} \\
f_i &= \int_0^L f(x)N_i(x)dx + \frac{d\hat{u}}{dx}N_i(x)\mid_0^L
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Pode-se escrever os sistema de equações final como,

$$
\begin{aligned}
&u_1k_{11} + ... + u_nk_{1n} - f_i = 0 \\
&... \\
&u_1k_{n1} + ... + u_nk_{nn} - f_n = 0
\end{aligned}
\tag{24}
$$

2 Equação do Equilíbrio estático

Equação de equilíbrio é dado por,

$$\nabla \bullet \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{25}$$

$$\nabla \bullet \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Portanto temos duas equações,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

As incógnitas são σ_x, σ_y e τ_{xy} porém só temos 2 equações. Para solução do problema precisamos que o número de equações seja igual ao número de incógnitas. Para tal existe o método dos deslocamento,neste método as equações de equilíbrio são escritas em termos do deslocamentos. Para tal vamos relacionar as tensões com as deformações e depois as deformações com os deslocamentos. Equação constitutiva

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Multiplicando

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a\epsilon_x + b\epsilon_y \\ \sigma_y &= b\epsilon_x + a\epsilon_y \\ \tau_{xy} &= c\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{30}$$

Relação da deformação com os deslocamentos,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{31}$$

Agora as tensões podem ser escritas em função do deslocamentos

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y &= b\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= c\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

Calculando as derivadas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)
\end{aligned} \tag{33}
$$

Substituindo na equação (28)

$$
\begin{aligned}
a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + b_x = 0 \\
c\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_y = 0
\end{aligned} \tag{34}
$$

Rearranjo do as equações,

$$
\begin{aligned}
a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (b+c)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + b_x = 0 \\
c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (b+c)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_y = 0
\end{aligned} \tag{35}
$$

Agora temos 2 equações e 2 incógnitas (u, v) , problema esta matematicamente fechado.

2.1 Condição de contorno natural

Condição de contorno natural é quando prescrevemos força no contorno.

$$
\begin{bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \tag{36}
$$

Multiplicando

$$
\begin{bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{bmatrix} \tag{37}
$$

Escrevendo em forma de equações

$$
\begin{aligned}
\bar{t}_x &= \left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y}\right) n_x + c\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_y \\
\bar{t}_y &= c\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_x + \left(b\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y}\right) n_y
\end{aligned} \tag{38}
$$

2.2 Matriz de coeficientes

Calculo de $\mathbf{B_i}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B_i} &= \pounds \mathbf{N_i} \\
\mathbf{B_i} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \\
\mathbf{B_i} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{39}
$$

Calculo de $\mathbf{B_i D B_j}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B_i D B_j} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B_i D B_j} &= \begin{bmatrix} a\frac{\partial N_i}{\partial x} & b\frac{\partial N_i}{\partial x} & c\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ b\frac{\partial N_i}{\partial y} & a\frac{\partial N_i}{\partial y} & c\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B_i D B_j} &= \begin{bmatrix} a\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + c\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} & b\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial y} + c\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \\ b\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x} + c\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y} & a\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} + c\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{40}
$$

3 Cap 6 - Elementos isoparamétricos

3.1 Exercícios

3.1.1 Determinar as funções de interpolação dos elementos

- a)

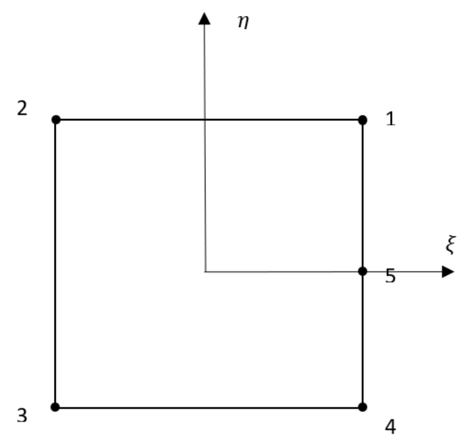

Figure 1: Questão a)

As funções de interpolação serão definidas através das funções bilineares. Considerando a Figura 2,

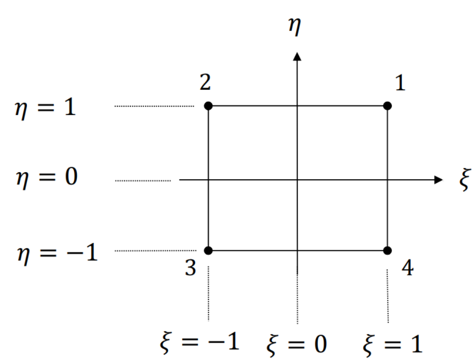

Figure 2: Parametrização de um elementos quadrilátero bilinear (4 nós)

as funções de interpolações bilineares são,

$$
\begin{aligned}
N_1^b(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_2^b(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
N_3^b(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_4^b(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)
\end{aligned} \tag{41}
$$

A função de interpolação no ponto 5 é definida como a variação quadrática na direção η e linear na direção ξ (Pag. 53). A variação quadrática é obtida pelo polinômio de Lagrange quadrático. Na figura 3 temos o elemento que gera a variação quadrática.

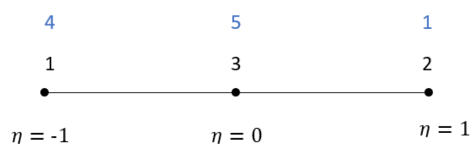

Figure 3: Função de interpolação quadrática

Na figura 3 o ponto 5 equivale ao 3, portanto a variação quadrática é (pag. 49),

$$
l_3^2(\eta) = (1-\eta)(1+\eta) \tag{42}
$$

Na variação linear na direção ξ o ponto 5 equivale ao 2 (pag. 49),

$$
l_2^1(1+\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{43}
$$

Assim, o função de interpolação N_5 é dada por,

$$
N_5(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta)(1+\eta) \tag{44}
$$

Usando a lógica das funções de interpolação do elemento de Serendipity (pag. 53). As funções de interpolação N_1 e N_4 são as funções de de interpolação bilineares menos 1/2 da função de interpolação no intermediário, no caso o nó 5. Assim temos,

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= N_1^b(\xi,\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi,\eta) \\
N_4(\xi,\eta) &= N_4^b(\xi,\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi,\eta)
\end{aligned} \tag{45}
$$

As aresta do nós 2 e 3 não possuem nós intermediários, portanto as função são as função bilineares.
Resposta:

$$\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= N_1^b(\xi,\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi,\eta)\\
N_2(\xi,\eta) &= N_2^b(\xi,\eta)\\
N_3(\xi,\eta) &= N_3^b(\xi,\eta)\\
N_4(\xi,\eta) &= N_4^b(\xi,\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi,\eta)\\
N_5(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta)(1+\eta)
\end{aligned} \tag{46}$$

3.1.2 Calcular o operador Jacobiano dos seguintes elementos

O Jacobiano 2D é definido por:

$$J(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{47}$$

Todos os elementos são quadriláteros de 4 nós, assim a interpolação geométrica é dada por

$$\begin{aligned}
x(\xi,\eta) &= x_1N_1(\xi,\eta) + x_2N_2(\xi,\eta) + x_3N_3(\xi,\eta) + x_4N_4(\xi,\eta)\\
y(\xi,\eta) &= y_1N_1(\xi,\eta) + y_2N_2(\xi,\eta) + y_3N_3(\xi,\eta) + y_4N_4(\xi,\eta)
\end{aligned} \tag{48}$$

Considerando a Figura 4,

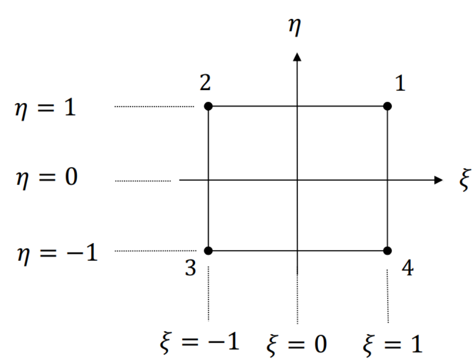

Figure 4: Parametrização de um elementos quadrilátero bilinear (4 nós)

as funções de interpolações bilineares são,

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
N_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)
\end{aligned}
\tag{49}
$$

A as derivadas em relação a ξ são,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta) \\
\frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta) \\
\frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta) \\
\frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta)
\end{aligned}
\tag{50}
$$

e as derivadas em relação a η são,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi) \\
\frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi) \\
\frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi) \\
\frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)
\end{aligned}
\tag{51}
$$

A deriva de x em relação a ξ são,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_1\frac{\partial N_1}{\partial \xi} + x_2\frac{\partial N_2}{\partial \xi} + x_3\frac{\partial N_3}{\partial \xi} + x_4\frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{x_1}{4}(1+\eta) - \frac{x_2}{4}(1+\eta) - \frac{x_1}{4}(1-\eta) + \frac{x_4}{4}(1-\eta) \\
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[(x_1-x_2)(1+\eta) + (x_4-x_3)(1-\eta)\right]
\end{aligned}
\tag{52}
$$

A deriva de y em relação a ξ são,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= y_1\frac{\partial N_1}{\partial \xi} + y_2\frac{\partial N_2}{\partial \xi} + y_3\frac{\partial N_3}{\partial \xi} + y_4\frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[(y_1-y_2)(1+\eta) + (y_4-y_3)(1-\eta)\right]
\end{aligned}
\tag{53}
$$

A deriva de x em relação a η são,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_1\frac{\partial N_1}{\partial \eta} + x_2\frac{\partial N_2}{\partial \eta} + x_3\frac{\partial N_3}{\partial \eta} + x_4\frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[(x_1 - x_4)(1+\xi) + (x_2 - x_3)(1-\xi)\right]\end{aligned} \tag{54}$$

A deriva de y em relação a η são,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \eta} &= y_1\frac{\partial N_1}{\partial \eta} + y_2\frac{\partial N_2}{\partial \eta} + y_3\frac{\partial N_3}{\partial \eta} + y_4\frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[(y_1 - y_4)(1+\xi) + (y_2 - y_3)(1-\xi)\right]\end{aligned} \tag{55}$$

Assim o operador jacobiano fica definido como,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[(x_1 - x_2)(1+\eta) + (x_4 - x_3)(1-\eta)\right] \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[(y_1 - y_2)(1+\eta) + (y_4 - y_3)(1-\eta)\right] \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[(x_1 - x_4)(1+\xi) + (x_2 - x_3)(1-\xi)\right] \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[(y_1 - y_4)(1+\xi) + (y_2 - y_3)(1-\xi)\right]\end{aligned} \tag{56}$$

Resolvendo agora as questões:

- a) Considerando o ponto P_3 como referencia, temos as seguintes coordenadas para os pontos,

  $$\begin{aligned}P_1 &= (x_3 + 6, y_3 + 4) \\ P_2 &= (x_3, y_3 + 4) \\ P_3 &= (x_3, y_3) \\ P_4 &= (x_3 + 6, y_3)\end{aligned} \tag{57}$$

  Nos temos agora que para os xs,

  $$\begin{aligned}(x_1 - x_2) &= x_3 + 6 - x_3 = 6 \\ (x_4 - x_3) &= x_3 + 6 - x_3 = 6 \\ (x_1 - x_4) &= x_3 + 6 - (x_3 + 6) = 0 \\ (x_2 - x_3) &= x_3 - x_3 = 0\end{aligned} \tag{58}$$

  e para os ys,

  $$\begin{aligned}(y_1 - y_2) &= y_3 + 4 - (y_3 + 4) = 0 \\ (y_4 - y_3) &= y_3 - y_3 = 0 \\ (y_1 - y_4) &= y_3 + 4 - y_3 = 4 \\ (y_2 - y_3) &= y_3 + 4 - y_3 = 4\end{aligned} \tag{59}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[6(1+\eta)+6(1-\eta)\right] = 3\\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[0(1+\eta)+0(1-\eta)\right] = 0\\
\frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[0(1+\xi)+0(1-\xi)\right] = 0\\
\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[4(1+\xi)+4(1-\xi)\right] = 2
\end{aligned} \tag{60}
$$

Portando o operador Jacobiano é dado por,

Resposta:

$$
J(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{61}
$$

Pode-se checar o resultado através do calculo da área do elemento,

$$
\begin{aligned}
&A = b*h = \int_A dA = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} detJ d\xi d\eta\\
&4*6 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (3*2)\, d\xi d\eta\\
&4*6 = 6*2*2\\
&24 = 24
\end{aligned} \tag{62}
$$

3.1.3 Calcular as forças nodais equivalentes para os elementos de elasticidades plana abaixo, considerando uma distribuição uniforme de forças de volume na direção y

A integral de forças de volume é(pag. 22),

$$
\mathbf{f}_i = \int_\Omega \mathbf{N}_i \mathbf{b} d\Omega \tag{63}
$$

em notação matricial temos,

$$
\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \int_\Omega \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} d\Omega = \int_\Omega \begin{bmatrix} N_i b_x \\ N_i b_y \end{bmatrix} d\Omega = \begin{bmatrix} \int_\Omega N_i b_x d\Omega \\ \int_\Omega N_i b_y d\Omega \end{bmatrix} \tag{64}
$$

Como b_x é igual 0, temos,

$$
\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_\Omega N_i b_y d\Omega \end{bmatrix} \tag{65}
$$

É necessário calcular a integral em relação a N_i, lembrando que a integral é em relação ao sistema de coordenadas x-y,

$$
\int_\Omega N_i(x,y) d\Omega \tag{66}
$$

A integral usando as coordenadas locais no elemento triangular é,

$$\int_{\Omega} N_i(x,y)d\Omega = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_i(\xi_1,\xi_2) detJ d\xi_1 d\xi_2 \tag{67}$$

Considerando uma interpolação linear para geometria o determinante do jacobiano é constante e igual a duas vezes a área do triangulo, portando,

$$\int_{\Omega} N_i(x,y)d\Omega = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_i(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 2A f_i \tag{68}$$

Para resolver o problema precisamos apenas calcular essas integrais.

- a) Para o triangulo linear temos as seguintes funções de interpolação

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1 \\ N_2 &= \xi_2 \\ N_3 &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \end{aligned} \tag{69}$$

A integrais ficam

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_1 d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \xi_1 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6} \\ f_2 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_2 d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \xi_2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6} \\ f_3 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_3 d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} 1 - \xi_1 - \xi_2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6} \end{aligned} \tag{70}$$

Portanto

$$\begin{aligned} f_1^y &= (b_y)(2A)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{b_y A}{3} \\ f_2^y &= (b_y)(2A)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{b_y A}{3} \\ f_3^y &= (b_y)(2A)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{b_y A}{3} \end{aligned} \tag{71}$$

Assim os vetores de força equivalentes é dados por,

Resposta:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3 = \frac{b_y A}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{72}$$

- b) Para o triangulo quadrático temos as seguintes funções de interpolação

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) \\
N_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1) \\
N_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1) \\
N_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\
N_5 &= 4\xi_2\xi_3 \\
N_6 &= 4\xi_3\xi_1
\end{aligned} \tag{73}
$$

A integrais ficam

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_1 d\xi_1 d\xi_2 = 0 \\
f_2 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_2 d\xi_1 d\xi_2 = 0 \\
f_3 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_3 d\xi_1 d\xi_2 = 0 \\
f_4 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_1 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6} \\
f_5 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6} \\
f_6 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_3 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{6}
\end{aligned} \tag{74}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
f_1^y &= 0 \\
f_2^y &= 0 \\
f_3^y &= 0 \\
f_4^y &= \frac{b_y A}{3} \\
f_5^y &= \frac{b_y A}{3} \\
f_6^y &= \frac{b_y A}{3}
\end{aligned} \tag{75}
$$

Assim os vetores de força equivalentes é dados por,

Resposta:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_4 = \mathbf{f}_5 = \mathbf{f}_6 &= \frac{b_y A}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{76}
$$

3.1.4 Calcular as forças nodais equivalentes para os elementos quadriláteros quadrático de elasticidade plana

A integral de forças de volume é(pag. 22),

$$\mathbf{f}_i = \int_\Gamma \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{77}$$

em notação matricial temos,

$$\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} d\Gamma = \int_\Gamma \begin{bmatrix} N_i t_x \\ N_i t_y \end{bmatrix} d\Gamma = \begin{bmatrix} \int_\Gamma N_i t_x d\Gamma \\ \int_\Gamma N_i t_y d\Gamma \end{bmatrix} \tag{78}$$

Como a força são uniformes nos bordos,

$$\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \int_\Gamma N_i d\Gamma \\ t_y \int_\Gamma N_i d\Gamma \end{bmatrix} \tag{79}$$

Portanto temos,

$$\begin{aligned}
&f_2^x = t_x \int_\Gamma N_2 d\Gamma \quad f_2^y = 0 \\
&f_6^x = t_x \int_\Gamma N_6 d\Gamma \quad f_6^y = 0 \\
&f_3^x = t_x \int_\Gamma N_3 d\Gamma \quad f_3^y = t_y \int_\Gamma N_3 d\Gamma \\
&f_7^x = 0 \quad f_7^y = t_y \int_\Gamma N_7 d\Gamma \\
&f_4^x = 0 \quad f_4^y = t_y \int_\Gamma N_4 d\Gamma
\end{aligned} \tag{80}$$

Como a integral é apenas nos bordos, na aresta 2-3 temos, as seguintes funções de interpolações

$$\begin{aligned}
N_2 &= \frac{1}{2}\eta(1+\eta) \\
N_6 &= \eta(1-\eta)(1+\eta) \\
N_3 &= -\frac{1}{2}\eta(1-\eta)
\end{aligned} \tag{81}$$

As integrais são,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma N_2 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_2 det J d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_2 d\eta = \frac{L}{6} \\
\int_\Gamma N_6 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_6 det J d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_6 d\eta = \frac{2L}{3} \\
\int_\Gamma N_3 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_3 det J d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_3 d\eta = \frac{L}{6}
\end{aligned} \tag{82}$$

Como a integral é apenas nos bordos, na aresta 3-4 temos, as seguintes funções de interpolações

$$
\begin{aligned}
N_3 &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\
N_7 &= \xi(1-\xi)(1+\xi) \\
N_4 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi)
\end{aligned} \tag{83}
$$

As integrais são,

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma N_3 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_3 detJ d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_3 d\eta = \frac{L}{6} \\
\int_\Gamma N_7 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_7 detJ d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_7 d\eta = \frac{2L}{3} \\
\int_\Gamma N_4 d\Gamma &= \int_{-1}^{1} N_4 detJ d\eta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} N_4 d\eta = \frac{L}{6}
\end{aligned} \tag{84}
$$

Portanto temos,

$$
\begin{aligned}
f_2^x &= \frac{t_x L}{6} \quad f_2^y = 0 \\
f_6^x &= \frac{2t_x L}{3} \quad f_6^y = 0 \\
f_3^x &= \frac{t_x L}{6} \quad f_3^y = \frac{t_y L}{6} \\
f_7^x &= 0 \quad f_7^y = \frac{2t_y L}{3} \\
f_4^x &= 0 \quad f_4^y = \frac{t_y L}{6}
\end{aligned} \tag{85}
$$

Resposta:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{t_x L}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_3 &= \begin{bmatrix} \frac{t_x L}{6} \\ \frac{t_y L}{6} \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{t_y L}{6} \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_6 &= \begin{bmatrix} \frac{2t_x L}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_7 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2t_y L}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{86}
$$

4 Operadores Diferencias

4.1 Gradiente

O operado diferencial gradiente é definido por,

$$grad() = \bar{\nabla}() = \frac{\partial()}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial()}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial()}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial x} & \frac{\partial()}{\partial y} & \frac{\partial()}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{87}$$

O gradiente de um escalar é um vetor, por exemplo, o gradiente de u é um vetor dados por,

$$\bar{\nabla}(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{88}$$

Uma aplicação prática do gradiente é fluxo de calor que é dado pelo gradiente da Temperatura:

$$\bar{q} = -k\bar{\nabla}(T) = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial T}{\partial T}\hat{\boldsymbol{z}}\right) \tag{89}$$

Outra forma de escrever o gradiente é usando notação indicial

$$\bar{\nabla}(u) = \frac{\partial u}{\partial x_1}\hat{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{1}} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\hat{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{2}} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\hat{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{3}} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_j}\hat{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{j}} = \frac{\partial u}{\partial x_j}\hat{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{j}} = u_{,j}\hat{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{j}} \tag{90}$$

4.2 Divergente

O operado diferencial divergente é definido por,

$$div() = \bar{\nabla} \bullet () = \frac{\partial()}{\partial x} + \frac{\partial()}{\partial y} + \frac{\partial()}{\partial z} \tag{91}$$

Por exemplo, considere o vetor velocidade $\bar{\boldsymbol{v}}$ dado por,

$$\bar{\boldsymbol{v}} = u\hat{\boldsymbol{i}} + v\hat{\boldsymbol{j}} + w\hat{\boldsymbol{z}} \tag{92}$$

O divergente é dado,

$$\bar{\nabla} \bullet \bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{93}$$

Em notação indicial a velocidade fica,

$$\bar{\boldsymbol{v}} = u_1\hat{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{1}} + u_2\hat{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{2}} + u_3\hat{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{3}} \tag{94}$$

E o divergente

$$\bar{\nabla} \bullet \bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = u_{j,j} \tag{95}$$

4.3 Operado laplaciano

O operado laplaciano é o divergente do gradiente,

$$div(grad()) = \bar{\nabla} \bullet \bar{\nabla}() = \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2()}{\partial y^2} + \frac{\partial^2()}{\partial z^2} = \nabla^2() \tag{96}$$

5 Equação de transferência de calor

A equação de calor é dada por,

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} = \bar{\nabla} \bullet (k\bar{\nabla}T) + Q(x,y,z,t) \tag{97}$$

onde ρ é massa especifica, c_p é o calor especifico, k é coeficiente de condutividade térmica e $Q(x,y,z,t)$ é um termo fonte de geração de calor. Considerando o regime permanente temos,

$$\bar{\nabla} \bullet (k\bar{\nabla}T) + Q(x,y,z) = 0 \tag{98}$$

Agora considerando que o k é constante,

$$\begin{aligned} k\left(\bar{\nabla} \bullet \bar{\nabla}T\right) + Q(x,y,z) &= 0 \\ k\nabla^2 T + Q(x,y,z) &= 0 \end{aligned} \tag{99}$$

Dividindo k

$$\begin{aligned} \nabla^2 T = -Q(x,y,z)/k &= 0 \\ \nabla^2 T &= Q^*(x,y,z) \end{aligned} \tag{100}$$

A equação abaixo é conhecida com Equação de Poisson

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q^*(x,y,z) \tag{101}$$

A equação de Laplace é a equação de Poisson com termo fonte nulo,

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{102}$$

Para um problema 1D a equações de Poisson fica,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = Q^*(x) \tag{103}$$

6 Equação de transporte de calor

A equação de transporte de calor é dada por,

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \bar{\nabla} \bullet (\rho c_p \bar{\boldsymbol{v}} T) = \bar{\nabla} \bullet (k\bar{\nabla}T) + Q(x,y,z,t) \tag{104}$$