1 Objetivo

O objetivo final deste texto é chegar a um modelo de uma equação de um problema elástico não-linear unidimensional. Para isso a equação de equilíbrio estático será discretizado via elementos finitos. A malha será constituída de apenas um elemento linear. O problema considerado será semi-estático devido ao passo de carregamento. O tempo sera considerado de maneira discreta através de $t_n = n$ e $t_{n+1} = n + 1$

1.1 Equação de elasticidade 1D

A equação de elasticidade 1D sem forças de corpo é dada por,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

onde σ é a tensão uniaxial.

1.2 Discretização via elementos finitos

Aplicando o método dos resíduos ponderados na (eq.1) tem-se,

$$\int_0^L \frac{\partial \sigma}{\partial x} w dL = 0 \tag{2}$$

Considerando a regra do produto para derivadas temos,

$$\frac{\partial(\sigma w)}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} w + \frac{\partial w}{\partial x} \sigma \tag{3}$$

E considerando que que,

$$\int_0^L \frac{\partial(\sigma w)}{\partial x} dL = \sigma w|_0^L \tag{4}$$

Logo pode-se escrever a (eq.2) como,

$$\int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} \sigma dL = \sigma w|_0^L \tag{5}$$

Considerando apenas um elementos a função de ponderação é dada por,

$$w(x) = N_1(x) w_1 + N_2(x) w_2 \tag{6}$$

Substituindo a função w na equação (eq.5),

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} w_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} w_2\right) \sigma dL = \\
&(N_1(L)w_1 + N_2(L)w_2)\, \sigma\,(L) - (N_1(0)w_1 + N_2(0)w_2)\, \sigma\,(0)
\end{aligned} \tag{7}
$$

Rearranjando os termos temos,

$$
\begin{aligned}
w_1 \left(\int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \sigma dL - N_1(L)\sigma\,(L) + N_1(0)\sigma\,(0)\right) + \\
w_2 \left(\int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \sigma dL - N_2(L)\sigma\,(L) + N_2(0)\sigma\,(0)\right) = 0
\end{aligned} \tag{8}
$$

Considerando que $N_1(0) = N_2(L) = 1$ e $N_1(L) = N_2(0) = 0$,

$$
w_1 \left(\int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \sigma dL + \sigma\,(0)\right) + w_2 \left(\int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \sigma dL - \sigma\,(L)\right) = 0 \tag{9}
$$

Como w_1 e w_2 são constantes arbitrarias é preciso que,

$$
\int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \sigma dL + \sigma\,(0) = 0 \tag{10}
$$

$$
\int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \sigma dL - \sigma\,(L) = 0 \tag{11}
$$

Definindo $B_i = \frac{\partial N_i}{\partial x}$, tem-se

$$
\int_0^L B_1 \sigma dL = -\sigma\,(0) \tag{12}
$$

$$
\int_0^L B_2 \sigma dL = +\sigma\,(L) \tag{13}
$$

1.3 Relação tensão deformação não incremental

Usando a relação constitutiva

$$
\sigma = E\,(t, u)\, \varepsilon \tag{14}
$$

onde $E\,(t, u)$ é o módulo de elasticidade com variação tanto em t quanto x.

A relação deslocamento deformação é dada por,

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{15}$$

Portanto σ é dado por,

$$\sigma = E\left(t,u\right)\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}u_2\right) = E\left(t,u\right)\left(B_1 u_1 + B_2 u_2\right) \tag{16}$$

Substituindo a relação tensão-deformação (eq.14) nas (eq.12) e (eq.13),

$$\int_0^L B_1 E\left(t,u\right)\varepsilon dL = -\sigma\left(0\right) \tag{17}$$

$$\int_0^L B_2 E\left(t,u\right)\varepsilon dL = \sigma\left(L\right) \tag{18}$$

Substituindo agora (eq.16),

$$u_1 \int_0^L B_1 E\left(t,u\right) B_1 dL + u_2 \int_0^L B_1 E\left(t,u\right) B_2 dL = -\sigma\left(0\right) \tag{19}$$

$$u_1 \int_0^L B_2 E\left(t,u\right) B_1 dL + u_2 \int_0^L B_2 E\left(t,u\right) B_2 dL = \sigma\left(L\right) \tag{20}$$

Definido k_{ij} e f_i como

$$k_{ij} = \int_0^L B_i E\left(t,u\right) B_j dL \tag{21}$$

$$f_1 = -\sigma\left(0\right) \tag{22}$$

$$f_2 = \sigma\left(L\right) \tag{23}$$

Pode-se escrever,

$$\mathbf{K}(t,u)\mathbf{u} = \mathbf{F} \tag{24}$$

onde $\mathbf{K}(t,u)$ indica que a matriz de coeficiente depende explicitamente de t e u. Considerando varios passo de carga tem-se,

$$\mathbf{K}_{n+1}(u_{n+1})\mathbf{u}_{u+1} = \mathbf{F}_{n+1} \tag{25}$$

1.4 Relação tensão deformação incremental

Usando a relação constitutiva

$$\dot{\sigma} = E\left(t, u\right) \dot{\varepsilon} \tag{26}$$

onde $E\left(t, u\right)$ é o módulo de elasticidade com variação tanto em t quanto x.

A σ neste caso precisa ser obtido por integração temporal,

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\sigma} dt = \int_{t_0}^{t_1} E\left(t, u\right) \dot{\varepsilon} dt \tag{27}$$

onde t_1 e t_0 são dois intervalos de tempo. Matematicamente, de maneira exata, temos,

$$\sigma\left(t_1\right) - \sigma\left(t_0\right) = \int_{t_0}^{t_1} d\sigma = \int_{t_0}^{t_1} E\left(t, u\right) d\varepsilon \tag{28}$$

Usando o teorema do valor médio podemos escrever,

$$E\left(t^*, u\right)\left(\varepsilon(t_1) - \varepsilon(t_0)\right) = \int_{t_0}^{t_1} E\left(t, u\right) d\varepsilon \tag{29}$$

onde $E\left(t^*, u\right)$. Para o teorema ser valido $E(t_0, u)$ tem que ser continua no intervalo fechado $[t_0 - t_1]$. Considerando $t^* = t_1$, tem-se,

$$\sigma\left(t_1\right) = \sigma\left(t_0\right) + E\left(t_1, u\right)\left(\varepsilon(t_1) - \varepsilon(t_0)\right) \tag{30}$$

Definindo,

$$\varepsilon(t_1) - \varepsilon(t_0) = \Delta\varepsilon(t_1) \tag{31}$$

e considerando $t_0 - n$ e $t_1 - n + 1$ pode se escrever a tensão discretizada temporalmente como,

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + E_{n+1}\left(u\right) \Delta\varepsilon_{n+1} \tag{32}$$

A relação entre o incremento de deformação e o incremento de deslocamento é,

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = B_1 u_1^{n+1} + B_2 u_2^{n+1} - B_1 u_1^n + B_2 u_2^n \tag{33}$$

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = B_1(u_1^{n+1} - u_1^n) + B_2(u_2^{n+1} - u_2^n) \tag{34}$$

$$\Delta\varepsilon_{n+1} = B_1 \Delta u_1^{n+1} + B_2 \Delta u_2^{n+1} \tag{35}$$

Substituindo a relação tensão-deformação (eq.14) nas (eq.12) e (eq.13),

$$\int_0^L B_1 E_{n+1}(u)\,\Delta\varepsilon_{n+1} dL = -\int_0^L B_1 \sigma_n dL - \sigma(0) \tag{36}$$

$$\int_0^L B_2 E_{n+1}(u)\,\Delta\varepsilon_{n+1} = -\int_0^L B_1 \sigma_n dL + \sigma(L) \tag{37}$$

Substituindo agora (eq.16),

$$\begin{aligned} &\Delta u_1^{n+1}\int_0^L B_1 E_{n+1}(u)\,B_1 dL + \Delta u_2^{n+1}\int_0^L B_1 E_{n+1}(u)\,B_2 dL = \\ &-\int_0^L B_1 \sigma_n dL - \sigma(0) \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} &\Delta u_1^{n+1}\int_0^L B_2 E_{n+1}(u)\,B_1 dL + \Delta u_2^{n+1}\int_0^L B_2 E_{n+1}(u)\,B_2 dL = \\ &-\int_0^L B_2 \sigma_n dL + \sigma(L) \end{aligned} \tag{39}$$

Definido k_{ij} e f_i como

$$k_{ij} = \int_0^L B_i E_{n+1}(u)\,B_j dL \tag{40}$$

$$f_1 = -\sigma(0) \tag{41}$$

$$f_2 = \sigma(L) \tag{42}$$

$$f_i^s = \int_0^L B_i \sigma_n dL \tag{43}$$

Pode-se escrever,

$$\mathbf{K}(n+1, u_{n+1})\Delta\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_n^s = \Delta\mathbf{F}_{n+1} \tag{44}$$

onde u é avaliado no tempo $n+1$.