1 Objetivo

O objetivo final deste texto é chegar a um modelo de uma equação de um problema elástico não-linear unidimensional. Para isso a equação de equilíbrio estático será discretizado via elementos finitos. A malha será constituída de apenas um elemento linear. O problema considerado será semi-estático devido ao passo de carregamento. O tempo sera considerado de maneira discreta através de $t_n = n$ e $t_{n+1} = n + 1$

A Figura 1 apresenta o problema resolvido. A barra esta engastada de parede à esquerda e um força é aplicada a direita. A geometria da barra é definida pelo comprimento L e área transversal "A". Para simplifica será considerada uma área unitária.

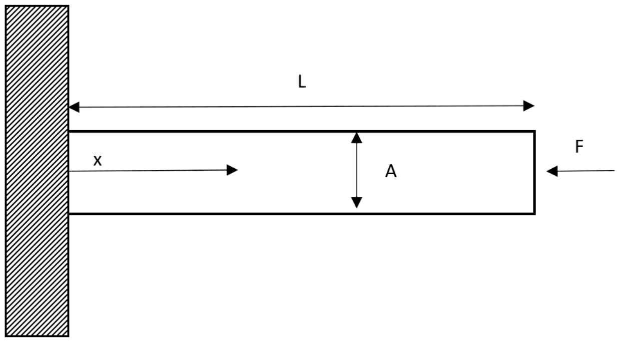

Figure 1: Problema um 1D de elasticidade.

1.1 Equação de elasticidade 1D

A equação de elasticidade 1D sem forças de corpo é dada por,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

onde σ é a tensão uniaxial.

1.2 Discretização via elementos finitos

Aplicando o método dos resíduos ponderados na (eq.1) tem-se,

$$\int_0^L \frac{\partial \sigma}{\partial x} w dL = 0 \tag{2}$$

Considerando a regra do produto para derivadas temos,

$$\frac{\partial(\sigma w)}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} w + \frac{\partial w}{\partial x} \sigma \tag{3}$$

E considerando que que,

$$\int_0^L \frac{\partial(\sigma w)}{\partial x} dL = \sigma w|_0^L \tag{4}$$

Logo pode-se escrever a (eq.2) como,

$$\int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} \sigma dL = \sigma w|_0^L \tag{5}$$

Considerando apenas um elementos a função de ponderação é dada por,

$$w(x) = N_1(x) w_1 + N_2(x) w_2 \tag{6}$$

Substituindo a função w na equação (eq.5),

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} w_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} w_2 \right) \sigma dL = \\ &\left(N_1(L) w_1 + N_2(L) w_2 \right) \sigma \left(L, t \right) - \left(N_1(0) w_1 + N_2(0) w_2 \right) \sigma \left(0, t \right) \end{aligned} \tag{7}$$

Rearranjando os termos temos,

$$\begin{aligned} &w_1 \left(\int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \sigma dL - N_1(L) \sigma \left(L, t \right) + N_1(0) \sigma \left(0, t \right) \right) + \\ &w_2 \left(\int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \sigma dL - N_2(L) \sigma \left(L, t \right) + N_2(0) \sigma \left(0, t \right) \right) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Considerando que $N_1(0) = N_2(L) = 1$ e $N_1(L) = N_2(0) = 0$,

$$w_1 \left(\int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \sigma dL + \sigma \left(0, t \right) \right) + w_2 \left(\int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \sigma dL - \sigma \left(L, t \right) \right) = 0 \tag{9}$$

Como w_1 e w_2 são constantes arbitrarias é preciso que,

$$\int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \sigma dL + \sigma \left(0, t \right) = 0 \tag{10}$$

$$\int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \sigma dL - \sigma \left(L, t \right) = 0 \tag{11}$$

Definindo $B_i = \frac{\partial N_i}{\partial x}$, tem-se

$$\int_0^L B_1 \sigma dL = -\sigma(0,t) \tag{12}$$

$$\int_0^L B_2 \sigma dL = +\sigma(L,t) \tag{13}$$

Agora considerando $\mathbf{B}^T = [\frac{\partial N_1}{\partial x} \; \frac{\partial N_2}{\partial x}]$ e $\mathbf{F}_{ext}^T = [-\sigma(0,t) \; \sigma(L,t)]$ pode-se escrever,

$$\int_0^L \mathbf{B} \sigma dL = \mathbf{F}_{ext} \tag{14}$$

1.3 Relação tensão deformação não incremental

Usando a relação constitutiva

$$\sigma = D(t,u)\,\varepsilon \tag{15}$$

onde $D(t,u)$ é o módulo de elasticidade com variação tanto em t quanto x.

A relação deslocamento deformação é dada por,

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{16}$$

Portanto σ é dado por,

$$\sigma = D(t,u)\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}u_2\right) = D(t,u)\,(B_1 u_1 + B_2 u_2) \tag{17}$$

O que pode ser escrito como,

$$\sigma = D(t,u)\,\mathbf{B}^T \mathbf{u} \tag{18}$$

onde

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \; u_2] \tag{19}$$

Substituindo a relação tensão-deformação (eq.15) nas (eq.12) e (eq.13),

$$\int_0^L B_1 D(t,u)\,\varepsilon dL = -\sigma(0,t) \tag{20}$$

$$\int_0^L B_2 D(t,u)\,\varepsilon dL = \sigma(L,t) \tag{21}$$

Substituindo agora (eq.17),

$$u_1 \int_0^L B_1 D\,(t,u)\, B_1 dL + u_2 \int_0^L B_1 D\,(t,u)\, B_2 dL = -\sigma\,(0,t) \tag{22}$$

$$u_1 \int_0^L B_2 D\,(t,u)\, B_1 dL + u_2 \int_0^L B_2 D\,(t,u)\, B_2 dL = \sigma\,(L,t) \tag{23}$$

Definido k_{ij} e f_i como

$$k_{ij} = \int_0^L B_i D\,(t,u)\, B_j dL \tag{24}$$

Pode-se escrever,

$$\mathbf{K}(t,u)\mathbf{u} = \mathbf{F}_{ext} \tag{25}$$

onde $\mathbf{K}(t,u)$ indica que a matriz de coeficiente depende explicitamente de t e u. Considerando varios passo de carga tem-se,

$$\mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1})\mathbf{u}_{u+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} \tag{26}$$

1.4 Relação tensão deformação incremental

Usando a relação constitutiva

$$\dot{\sigma} = Dt\,(t,u)\,\dot{\varepsilon} \tag{27}$$

onde $Dt\,(t,u)$ é a matriz constitutiva tangente com variação tanto em t quanto x.

A σ neste caso precisa ser obtido por integração temporal,

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\sigma} dt = \int_{t_0}^{t_1} Dt\,(t,u)\,\dot{\varepsilon} dt \tag{28}$$

onde t_1 e t_0 são dois intervalos de tempo. Matematicamente, de maneira exata, temos,

$$\sigma\,(t_1) - \sigma\,(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} d\sigma = \int_{t_0}^{t_1} Dt\,(t,u)\, d\varepsilon \tag{29}$$

Usando o teorema do valor médio podemos escrever,

$$Dt\,(t^*,u)\,(\varepsilon(t_1) - \varepsilon(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} Dt\,(t,u)\, d\varepsilon \tag{30}$$

onde $D\left(t^{*},u\right)$. Para o teorema ser valido $E(t_0,u)$ tem que ser continua no intervalo fechado $[t_0 - t_1]$. Considerando $t^{*} = t_1$, tem-se,

$$\sigma\left(t_1\right) = \sigma\left(t_0\right) + Dt\left(t_1,u\right)\left(\varepsilon(t_1) - \varepsilon(t_0)\right) \tag{31}$$

Definindo,

$$\varepsilon(t_1) - \varepsilon(t_0) = \Delta\varepsilon(t_1) \tag{32}$$

e considerando $t_0 \rightarrow n$ e $t_1 \rightarrow n+1$ pode se escrever a tensão discretizada temporalmente como,

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + Dt_{n+1}\left(u_{n+1}\right)\Delta\varepsilon_{n+1} \tag{33}$$

A relação entre o incremento de deformação e o incremento de deslocamento é,

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = B_1 u_1^{n+1} + B_2 u_2^{n+1} - B_1 u_1^{n} + B_2 u_2^{n} \tag{34}$$

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = B_1(u_1^{n+1} - u_1^{n}) + B_2(u_2^{n+1} - u_2^{n}) \tag{35}$$

$$\Delta\varepsilon_{n+1} = B_1\Delta u_1^{n+1} + B_2\Delta u_2^{n+1} = \mathbf{B}^T\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{n+1} \tag{36}$$

com

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{n+1}^T = [\Delta u_1^{n+1}\ \Delta u_2^{n+1}] \tag{37}$$

Logo o incremento de tensão é dado por,

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = Dt_{n+1}\left(u_{n+1}\right)\mathbf{B}^T\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{n+1} \tag{38}$$

Substituindo a relação tensão-deformação (eq.15) nas (eq.12) e (eq.13),

$$\int_0^L B_1 Dt_{n+1}\left(u\right)\Delta\varepsilon_{n+1} dL = -\int_0^L B_1\sigma_n dL - \sigma\left(0,t\right) \tag{39}$$

$$\int_0^L B_2 Dt_{n+1}\left(u\right)\Delta\varepsilon_{n+1} = -\int_0^L B_2\sigma_n dL + \sigma\left(L,t\right) \tag{40}$$

Usando (eq.17),

$$\begin{aligned}&\Delta u_1^{n+1}\int_0^L B_1 Dt_{n+1}\left(u\right)B_1 dL + \Delta u_2^{n+1}\int_0^L B_1 Dt_{n+1}\left(u\right)B_2 dL = \\ &-\int_0^L B_1\sigma_n dL - \sigma\left(0,t\right)\end{aligned} \tag{41}$$

$$\Delta u_1^{n+1}\int_0^L B_2 D t_{n+1}\left(u\right) B_1 dL + \Delta u_2^{n+1}\int_0^L B_2 D t_{n+1}\left(u\right) B_2 dL = \\ -\int_0^L B_2 \sigma_n dL + \sigma\left(L,t\right) \tag{42}$$

Com

$$\left(\int_0^L \mathbf{B}^T D t_{n+1}\left(u\right)\mathbf{B} dL\right)\ \mathbf{\Delta u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}_n^s \tag{43}$$

onde o vetor $\mathbf{F}_n^s$ é,

$$\mathbf{F}_n^s = \int_0^L \mathbf{B}\sigma_n dL \tag{44}$$

Definido k_{ij} como

$$k_{ij} = \int_0^L B_i D t_{n+1}\left(u_{n+1}\right) B_j dL \tag{45}$$

Pode-se escrever,

$$\mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1})\Delta\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}_n^s \tag{46}$$

onde $\mathbf{u}$ é avaliado no tempo $n+1$.

Considerando a aplicação dos passos de 0, 1, 2, ... n, temos,

$n = 0$
$\mathbf{K}_1(\mathbf{u}_1)\Delta\mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_1^{ext} - \mathbf{F}_0^s = \mathbf{F}_1^{ext}$
$\mathbf{F}_0^s = \int_0^L \mathbf{B}\sigma_0 dL = 0$
$\sigma_1 = \sigma_0 + Dt_1\left(u_1\right)\mathbf{B}^T\mathbf{\Delta u}_1 = Dt_1\left(u_1\right)\mathbf{B}^T\mathbf{\Delta u}_1$

$n = 1$
$\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_2)\Delta\mathbf{u}_2 = \mathbf{F}_2^{ext} - \mathbf{F}_1^s$
$\mathbf{F}_1^s = \int_0^L \mathbf{B}\sigma_1 dL = \int_0^L \mathbf{B}Dt_1\left(u_1\right)\mathbf{B}^T\mathbf{\Delta u}_1 dL = \mathbf{F}_1^{ext}$
$\sigma_2 = \sigma_1 + Dt_2\left(u_2\right)\mathbf{B}^T\mathbf{\Delta u}_2 = \sigma_1 + Dt_2\left(u_2\right)\mathbf{B}^T\mathbf{\Delta u}_2$

$n = 2$
$\mathbf{K}_3(\mathbf{u}_3)\Delta\mathbf{u}_3 = \mathbf{F}_3^{ext} - \mathbf{F}_2^s$
$\mathbf{F}_2^s = \int_0^L \mathbf{B}\sigma_2 dL = \int_0^L \mathbf{B}Dt_2\left(u_2\right)\mathbf{B}^T\mathbf{\Delta u}_2 dL + \int_0^L \mathbf{B}\sigma_1 dL = \mathbf{F}_2^{ext}$
$\sigma_3 = \sigma_2 + Dt_3\left(u_3\right)\mathbf{B}^T\mathbf{\Delta u}_3 = \sigma_2 + Dt_3\left(u_3\right)\mathbf{B}^T\mathbf{\Delta u}_3$

Por indução matemática pode-se concluir que o sistema 46 é equivalente à,

$$\mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1})\Delta\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}_n^{ext} = \Delta\mathbf{F}_{n+1}^{ext} \tag{47}$$

Um possibilidade alternativa de se obter a equação 47 considere a equação de equilíbrio 14 nps tempos n e $n+1$,

$$\int_0^L \mathbf{B}\sigma_n dL = \mathbf{F}_n^{ext} \tag{48}$$

$$\int_0^L \mathbf{B}\sigma_{n+1} dL = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} \tag{49}$$

Subtraindo as equações 48 e 49 chega-se à:

$$\int_0^L \mathbf{B}\Delta\sigma_{n+1} dL = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}_n^{ext} = \Delta\mathbf{F}_{n+1}^{ext} \tag{50}$$

Utilizando o incremento de tensão 38 tem-se,

$$\left(\int_0^L \mathbf{B}^T D t_{n+1}(u)\,\mathbf{B} dL\right)\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{n+1} = \Delta\mathbf{F}_{n+1}^{ext} \tag{51}$$

O que leva novamente à,

$$\mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1})\Delta\mathbf{u}_{n+1} = \Delta\mathbf{F}_{n+1}^{ext} \tag{52}$$

1.5 Matriz jacobina

A matriz Jacobina do vetor $\mathbf{F}$ em relação ao vetor $\mathbf{x}$ é dado por,

$$\mathbf{J}(\mathbf{F},\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{53}$$

Considerando o vetor resíduo dado por,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_1^{ext} - (k_{11}u_1 + k_{12}u_2) \\ \\ F_2^{ext} - (k_{21}u_1 + k_{22}u_2) \end{bmatrix} \tag{54}$$

onde os k_{ij} são funções de u.

A matriz jacobiana é dada por,

$$\mathbf{J}(\mathbf{R},\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial u_1} & \frac{\partial R_1}{\partial u_2} \\ \\ \frac{\partial R_2}{\partial u_1} & \frac{\partial R_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \tag{55}$$

É fácil verificar que a matriz jacobinada não é simétrica.

As derivadas são,

$$\frac{\partial R_1}{\partial u_1} = \frac{\partial(F_1^{ext} - k_{11}u_1 - k_{12}u_2)}{\partial u_1} \tag{56}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial u_2} = \frac{\partial(F_1^{ext} - k_{11}u_1 - k_{12}u_2)}{\partial u_2} \tag{57}$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial u_1} = \frac{\partial(F_2^{ext} - k_{21}u_1 - k_{22}u_2)}{\partial u_1} \tag{58}$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial u_2} = \frac{\partial(F_2^{ext} - k_{21}u_1 - k_{22}u_2)}{\partial u_2} \tag{59}$$

Considerando que F é independe de u

$$\frac{\partial R_1}{\partial u_1} = -\frac{\partial(k_{11}u_1 + k_{12}u_2)}{\partial u_1} \tag{60}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial(k_{11}u_1 + k_{12}u_2)}{\partial u_2} \tag{61}$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial(k_{21}u_1 + k_{22}u_2)}{\partial u_1} \tag{62}$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial u_2} = -\frac{\partial(k_{21}u_1 + k_{22}u_2)}{\partial u_2} \tag{63}$$

Considerando que F é independe de u

$$\frac{\partial R_1}{\partial u_1} = -\left(\frac{\partial k_{11}}{\partial u_1}u_1 + k_{11} + \frac{\partial k_{12}}{\partial u_1}u_2\right) \tag{64}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial u_2} = -\left(\frac{\partial k_{11}}{\partial u_2}u_1 + k_{12} + \frac{\partial k_{12}}{\partial u_2}u_2\right) \tag{65}$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial u_1} = -\left(\frac{\partial k_{21}}{\partial u_1}u_1 + k_{21} + \frac{\partial k_{22}}{\partial u_1}u_2\right) \tag{66}$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial u_2} = -\left(\frac{\partial k_{21}}{\partial u_2}u_1 + k_{22} + \frac{\partial k_{22}}{\partial u_2}u_2\right) \tag{67}$$

Matricialmente pode ser escrito como

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}, \mathbf{u}) = \mathbf{dK} + \mathbf{K} \tag{68}$$

Onde a matriz $\mathbf{dK}$ é dada por

$$\mathbf{dK} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial u_1}u_1 + \frac{\partial k_{12}}{\partial u_1}u_2 & \frac{\partial k_{11}}{\partial u_2}u_1 + \frac{\partial k_{12}}{\partial u_2}u_2 \\ \\ \frac{\partial k_{21}}{\partial u_1}u_1 + \frac{\partial k_{22}}{\partial u_1}u_2 & \frac{\partial k_{21}}{\partial u_2}u_1 + \frac{\partial k_{22}}{\partial u_2} \end{bmatrix} \tag{69}$$

É fácil perceber que a matriz não é simétrica.

1.6 Malha de um elemento

Para a malha de um elemento as condições de contorno o sistema de duas equações se reduzir à,

$$k_{22}^{n+1}(u_2^{n+1})u_2^{n+1} = (F_2^{ext})^{n+1} \tag{70}$$

Considerando um elemento linear

$$k_{22}^{n+1}(u^{n+1}) = \int_0^L B_2 D_{n+1}\left(u_{n+1}\right) B_2 dL = \frac{1}{L} D_{n+1}\left(u_{n+1}\right) \tag{71}$$

1.7 Variação da matriz constitutiva

A variação da matriz constitutiva será defina por,

$$D(t,u) = g(t)h(u) \tag{72}$$

A variação de g(t) é definida por,

$$g(t) = 3 * log(10 * (t+1)) \tag{73}$$

Já a variação de h(t) é definida por,

$$h(u) = 3.1760x^4 - 8.3625x^3 + 7.9152x^2 - 3.2258x + 0.9994 \tag{74}$$

1.8 Relação da matriz constitutiva tangente e a matriz constitutiva

A definição da matriz constitutiva tangente é,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = Dt \tag{75}$$

Considerando que tensão é dada em função da deformação $\sigma(\varepsilon)$, sua derivada em relação ao tempo é dada por,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{76}$$

Se a tensão é dada por,

$$\sigma(\varepsilon) = D(\varepsilon)\varepsilon \tag{77}$$

A derivada em relação ε é,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}\varepsilon + D\right) = Dt \tag{78}$$

Logo a relação constitutiva incremental é dada por,

$$\dot{\sigma} = \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}\varepsilon + D\right)\dot{\varepsilon} \tag{79}$$