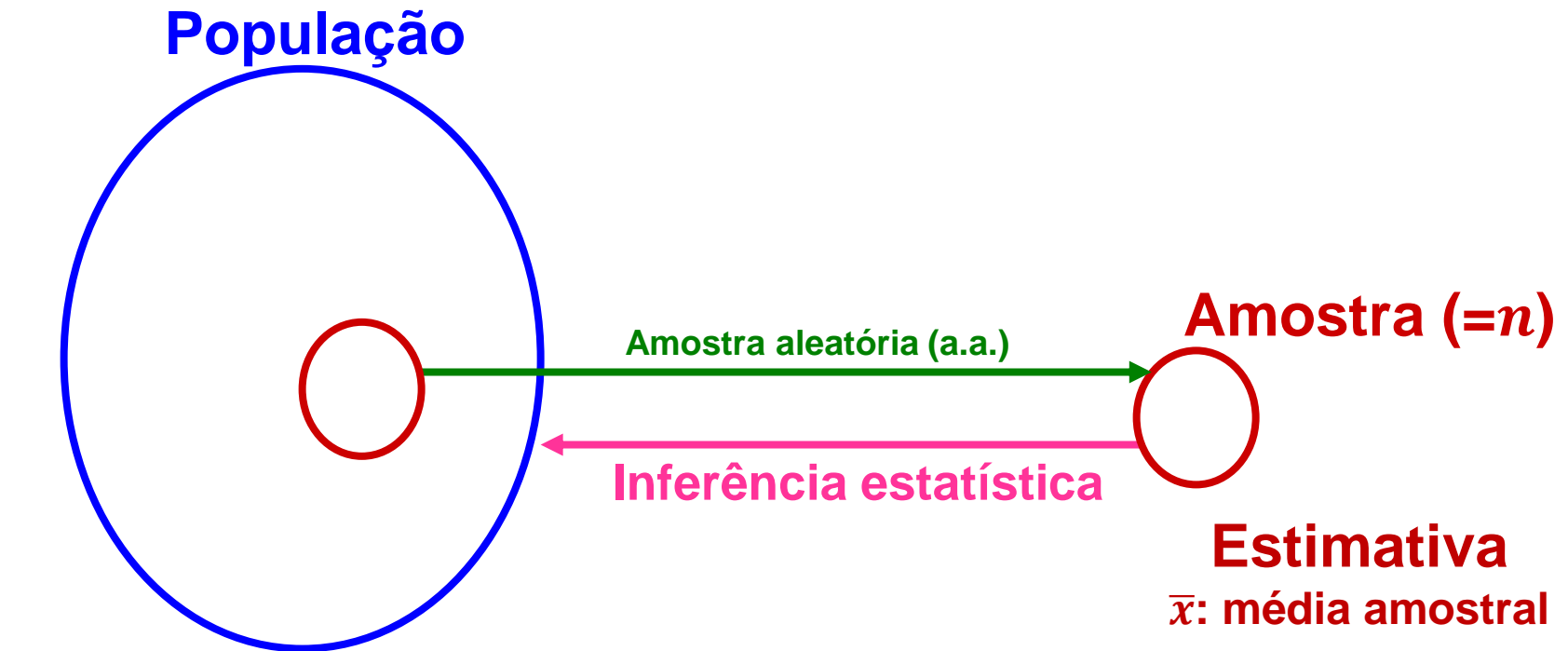


# **DISTRIBUIÇÃO DA MÉDIA AMOSTRAL**

# Introdução



**Parâmetro**

$\mu$ : média populacional

**$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ ,  
sendo  $\sigma^2$ : variância  
populacional**

**Estudar a  
distribuição da  
média amostral -  $\bar{X}$  !**

# Introdução

## Dois conceitos importantes:

- **O que é Inferência Estatística:** utiliza dados obtidos de uma amostra para fazer estimativas (pontuais ou intervalares) ou testar hipóteses sobre características de interesse de uma população.
- **A média amostral  $\bar{X}$  é uma variável aleatória**, já que amostras diferentes produzem, em geral, diferentes valores (estimativas) para a média amostral.

# Introdução

Como a média amostral é uma variável aleatória, ela possui uma distribuição de probabilidades.

Assim, estudaremos:

**Distribuição de probabilidades da média amostral,**

ou seja,

**Distribuição de probabilidades de  $\bar{X}$ .**

# Distribuição da média amostral

A distribuição de probabilidades de  $\bar{X}$  é...

...baseada nas estimativas das médias amostrais provenientes de todas as amostras possíveis de uma população conhecida.

# Distribuição da média amostral quando variável de interesse é normal

Se  $X \sim \text{Normal}$   $\rightarrow \bar{X} \sim \text{Normal}$

**SIMULAÇÃO**

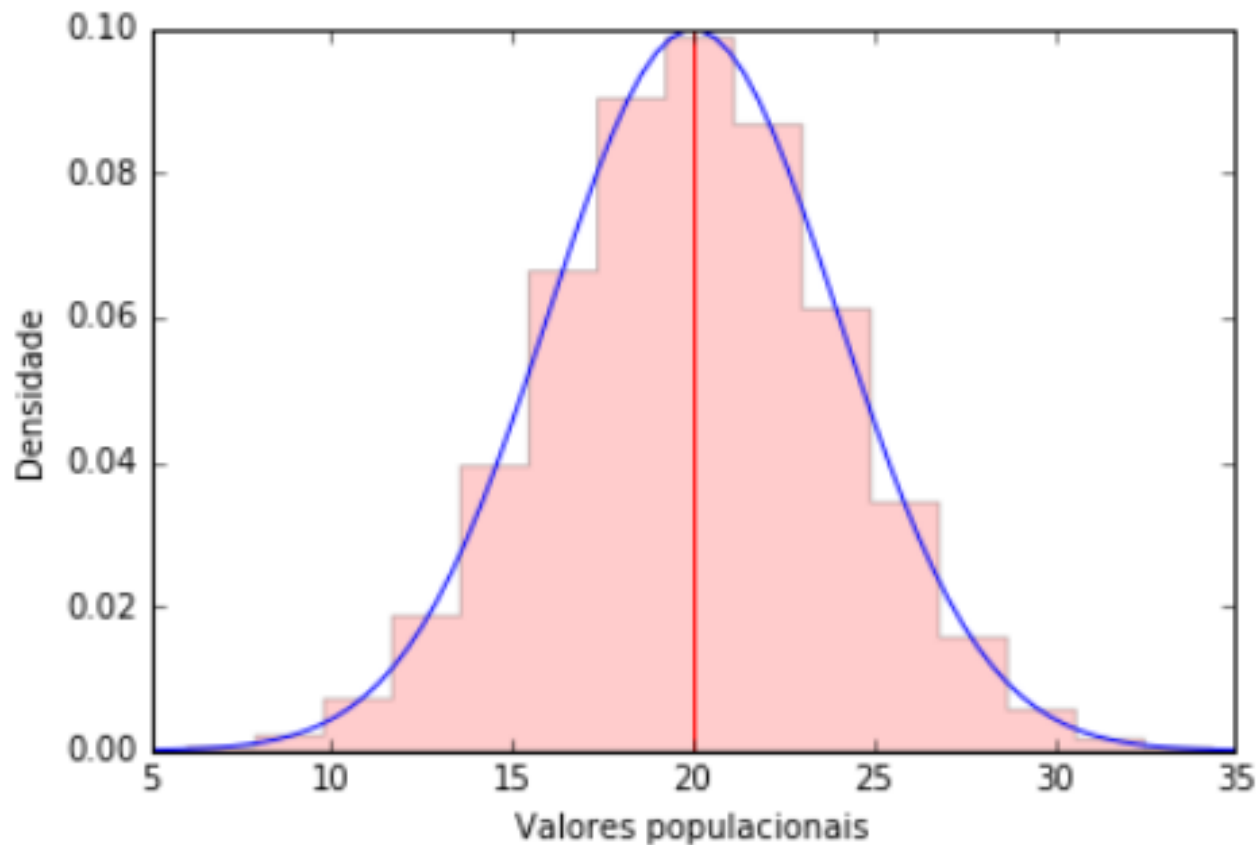
# Distribuição da variável de interesse - X

X segue uma distribuição Normal

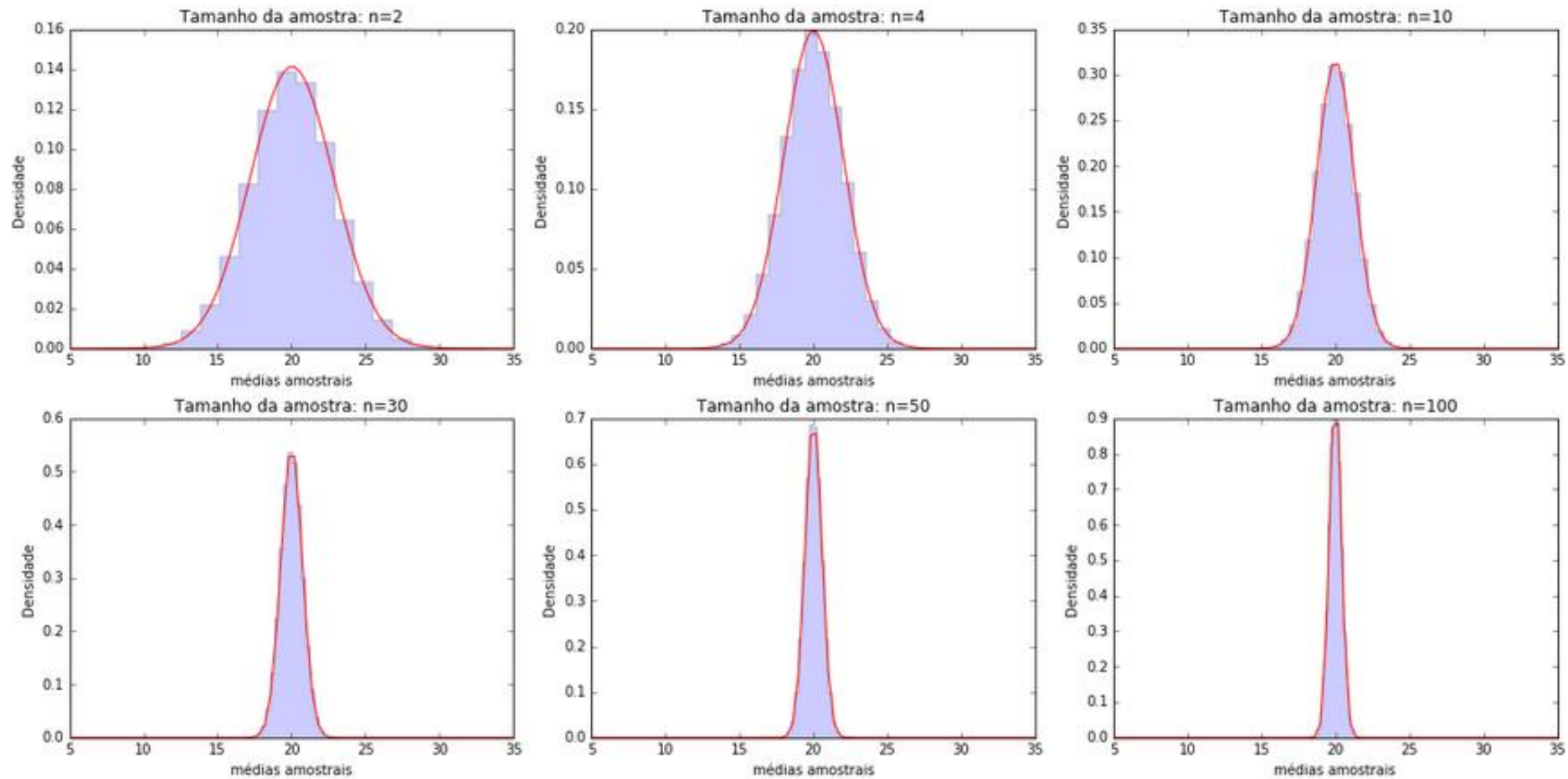
Média de X ==> Valor de  $\mu$  = 20.006

Variância de X ==> Valor de  $\sigma^2$  = : 15.982

-----



# Distribuição das médias amostrais - $\bar{X}$



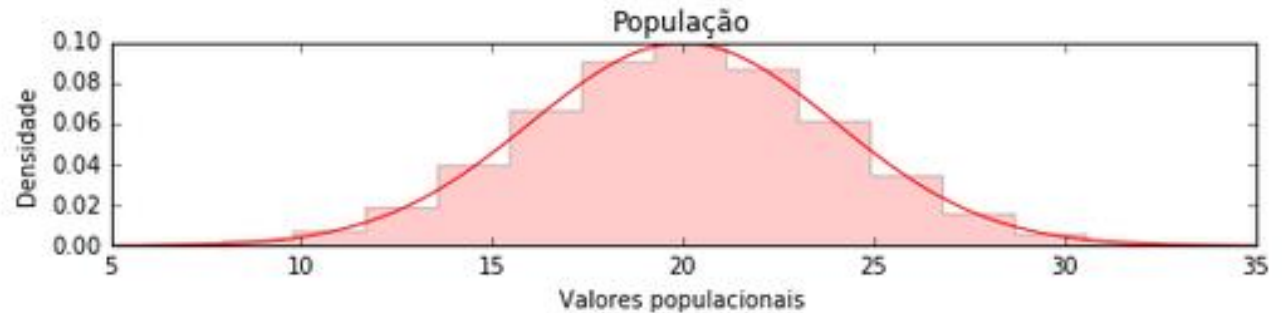


# Distribuição das médias amostrais - $\bar{X}$

```
Tamanho da amostra: n= 2
Média das médias amostrais: 20.028
Variância das médias amostrais: 7.973
-----
Tamanho da amostra: n= 4
Média das médias amostrais: 20.009
Variância das médias amostrais: 4.003
-----
Tamanho da amostra: n= 10
Média das médias amostrais: 20.005
Variância das médias amostrais: 1.599
-----
Tamanho da amostra: n= 30
Média das médias amostrais: 20.005
Variância das médias amostrais: 0.528
-----
Tamanho da amostra: n= 50
Média das médias amostrais: 20.006
Variância das médias amostrais: 0.317
-----
Tamanho da amostra: n= 100
Média das médias amostrais: 20.006
Variância das médias amostrais: 0.159
```

# Caso particular de $n=2$

$X \sim \text{Normal} \Rightarrow$



$X_1 \sim \text{Normal} \Rightarrow$

$\Downarrow$

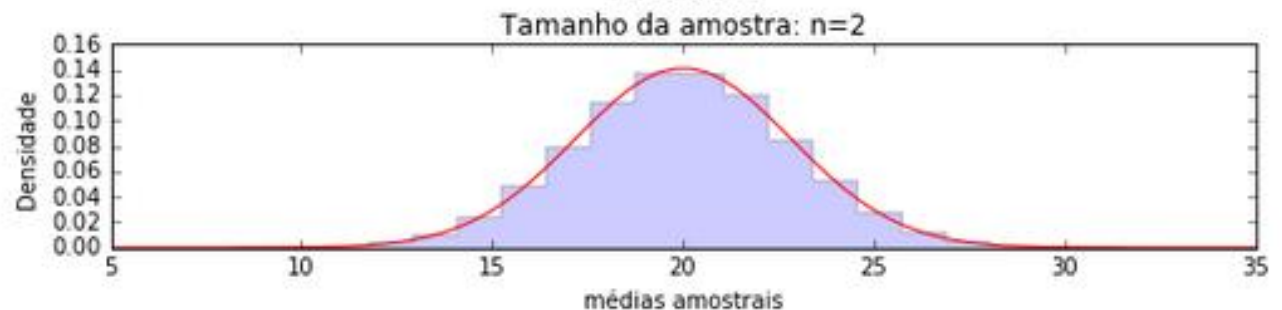
$\text{Corr}(X_1, X_2) \cong 0$

$\Uparrow$

$X_2 \sim \text{Normal} \Rightarrow$



$\bar{X} \sim \text{Normal} \Rightarrow$



# Resultados das Simulações:

## Conclusões

Quando a variável de interesse **X é Normal**:

- a distribuição de  $\bar{X}$  é **NORMAL** não importando o tamanho amostral;
- a média das médias amostrais sempre fica próxima à verdadeira média populacional;
- a variância das médias amostrais é, aproximadamente, a variância populacional dividida por  $n$ ; e
- a sequência  $X_1, \dots, X_n$  é uma amostra aleatória (independente e identicamente distribuída a  $X$ ).

# **Distribuição da média amostral quando variável de interesse é normal**

**Se  $X \sim \text{Normal}$   $\rightarrow \bar{X} \sim \text{Normal}$**

**TEORIA**

# Distribuição da média amostral

## Observação

Quando a variável aleatória de interesse -  $X$  tiver distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , então:

A distribuição de  $\bar{X}$  será exata normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2/n$ .

*Esse resultado segue do fato de que a distribuição de uma combinação linear de v.a.'s normais independentes também é normal.*

# Distribuição da média amostral

**Corolário 1** – Seja  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  amostra aleatória da v.a.  $X$  com média  $\mu$  ( $E(X) = \mu$ ) e variância  $\sigma^2$  ( $\text{Var}(X) = \sigma^2$ ) e seja a média amostral

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

então

$$Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0; 1)$$

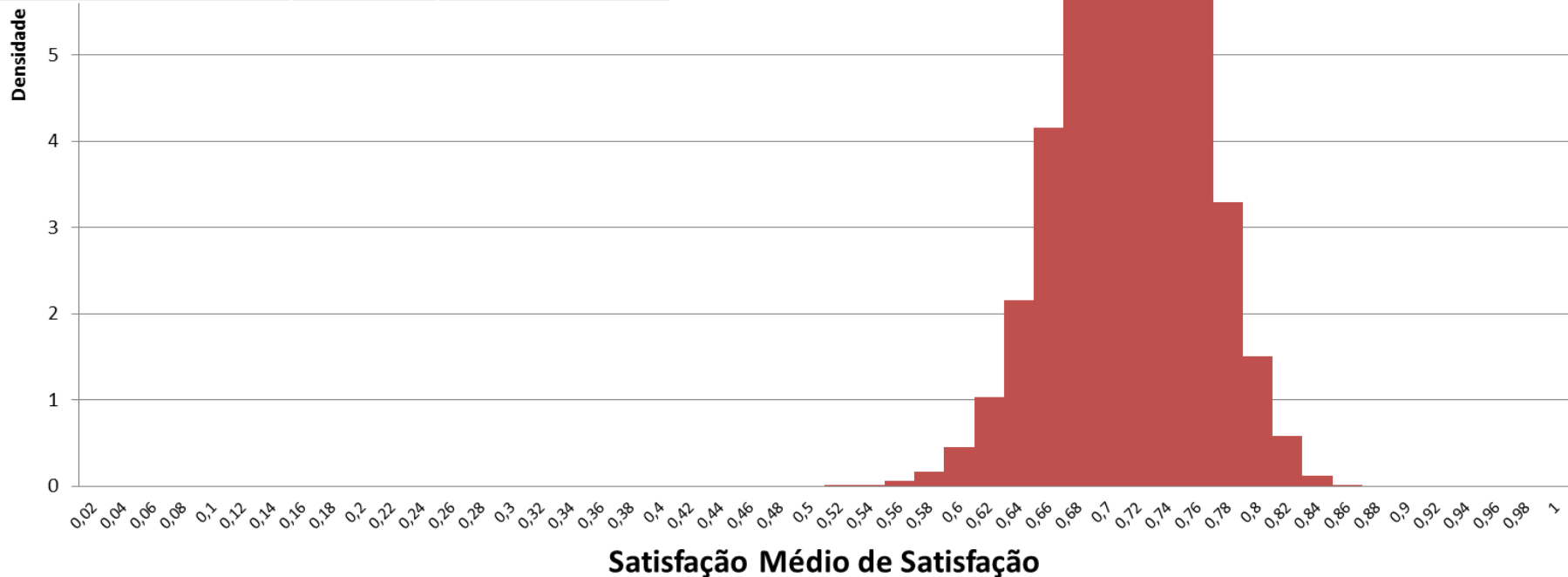
# Exemplo 1

Assuma que a variável de interesse *Grau de satisfação de um passageiro com a experiência proporcionada ao longo da viagem no navio de cruzeiro* tenha distribuição normal com média populacional igual a 0,705 e variância populacional igual a 0,1050.

- a) Descreva a distribuição do *Grau médio de satisfação*, para uma amostra aleatória de 50 passageiros.
- b) Qual a probabilidade de se ter uma média amostral abaixo de 0,65 a partir de uma amostra aleatória de 50 passageiros? **Resp.: 11,51%**
- c) Qual deve ser o tamanho amostral para a probabilidade acima valer exatamente 5%? **Resp.: n pelo menos 95**
- d) Fixando em 99% a probabilidade da média amostral não se afastar, para mais ou para menos, da média populacional, calcule essa distância (margem de erro - denotada por  $\varepsilon$ ) para uma amostra de 50 passageiros. **Resp.:  $\varepsilon=0,118$**

# Distribuição de $\bar{X}$ com $n=50$

Variável Grau	Média	Variância
$X$ (v.a. populacional)	0,705	0,1050
$\bar{X}$ (média amostral com $n=50$ )	0,705	$\frac{0,1050}{50}$





## Exemplo 2

As especificações para a fabricação de um certo produto exigem  $\mu = 25$  mg e  $\sigma = 2$  mg de um certo composto A. O fabricante deseja examinar uma amostra de cada lote produzido para saber se os produtos se encontram em conformidade com as exigências, no que diz respeito ao valor médio do composto A, uma vez que o desvio padrão se encontra dentro dos padrões requeridos.

Qual deve ser o tamanho da amostra que o fabricante precisará analisar, em cada lote, para que o erro amostral seja de, no máximo, 15% da verdadeira variância do composto A, para mais ou para menos, em 95% das vezes que tal inspeção for feita?

Resp.:  $n \geq 43$

# Exemplo 3

Um processo de produção é verificado periodicamente por um inspetor de controle de qualidade. O inspetor seleciona amostras aleatórias simples de 36 produtos acabados e calcula o peso médio (em kg) dos produtos da amostra.

a) Se os resultados dos testes depois de um longo período de tempo mostram que  $P(1,90 \leq \bar{X} \leq 2,10) = 0,90$  e  $P(\bar{X} > 2,10) = 0,05$ , sendo  $\bar{X}$  uma variável aleatória que denota o peso médio dos produtos acabados, quais são a média e o desvio-padrão para a população de produtos produzidos sob esse processo? **Resp:  $\mu = 2$  e  $\sigma = 0,36585$**

b) Para que o erro amostral não supere as 100 gramas, para mais ou para menos, em 99% das vezes que o inspetor de controle de qualidade verificar a produção, quantos produtos acabados deverão ser inspecionados? Caso necessite, utilize os resultados encontrados no item anterior. **Resp: n pelo menos 89**

c) Você teve que fazer algum tipo de suposição para responder aos itens anteriores? Em caso afirmativo, qual? Por quê? Justifique a sua resposta. **Resp: X seja exatamente normal (até a teoria desta aula).**

**Distribuição Normal : Valores de  $P( Z \leq z ) = A(z)$**

Tabela de Valores de Função Z											
	Segunda decimal de z										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Parte inteira e primeira decimal de z	0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
	0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
	0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
	0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
	0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
	0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
	0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
	0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
	0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
	0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
	1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
	1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
	1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
	1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
	1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
	1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
	1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
	1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
	1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
	1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
	2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
	2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
	2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
	2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
	2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
	2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
	2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
	2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
	2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
	2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
	3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
	3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
	3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
	3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
	3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
	3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
	3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
	3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
	3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
	3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000