Exercício Computacional - Processos Estocásticos

Vítor H. Nascimento
Carlos A. Prete Jr.

3 de maio de 2021

1 Filtragem de um sinal ruidoso

a) Considere o sinal

$$x_0(t) = \begin{cases} \sin^3(\Omega t)e^{-\frac{t}{\tau}}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

com $\Omega = 2\pi \times 500$ rad/s e $\tau = 0.5$ s. Amostre $x_0(t)$ com uma frequência de amostragem $f_a = 40$ kHz por 2 segundos para obter o sinal discreto $x_0[n]$. Qual é o comprimento de $x_0[n]$?

Ouça o sinal $x_0[n]$ usando o comando `sound(x0, 40000)` no Matlab, ou o comando `wavplay(x0, 40_000)` em Julia (você vai precisar carregar antes o pacote `WAV`: `using WAV`).

b) Adicione um ruído branco gaussiano a $x_0[n]$ para obter o sinal ruidoso $x[n]$, de forma que $x[n]$ tenha SNR igual a 10 dB. Mostre no mesmo gráfico o sinal ruidoso e o sinal sem ruído. Ouça o sinal $x[n]$.

c) Considere o filtro com resposta ao impulso $h[n] = 0,1\,\mathrm{sinc}\,(0,1(n-50))$, para $0 \leq n \leq 100$, e zero caso contrário. Plote a resposta em frequência deste filtro (use o comando `freqz` do Matlab e de Julia — neste último caso, carregue antes o pacote `DSP`).

d) Passe os sinais $x_0[n]$ e $x[n]$ pelo filtro $H(z)$, obtendo os sinais $y_0[n]$ e $y[n]$ (use o comando `filter` do Matlab ou o comando `filt` de Julia). Plote no mesmo gráfico $y_0[n]$ e $y[n]$. Ouça os sinais $y0[n]$ e $y[n]$.

e) Explique porque $x[n]$ e $y[n]$ não são processos estacionários em nenhum sentido, mas os ruídos $v_x[n] = x[n] - x_0[n]$ e $v_y[n] = y[n] - y_0[n]$ são estacionários no sentido amplo (no caso de $v_y[n]$, desprezando-se o transitório do filtro).

f) Calcule a expressão teórica da densidade espectral de potência do ruído na entrada e na saída, bem como a potência do ruído na entrada e na saída.

g) Meça experimentalmente a potência média do ruído em $x[n]$ e em $y[n]$ por duas maneiras:

(a) Calculando $r_{v_x}[0]$ e $r_{v_y}[0]$ pela média de diversas realizações dos processos. Por exemplo no caso de $r_{v_x}[0]$ use a fórmula abaixo para $L = 1.000$:

$$r_{v_x}[0] \approx \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^{L} \left(v_x^{(\ell)}[n]\right)^2.$$

Calcule a expressão para todos os valores de n, e veja se eles são aproximadamente constantes ou não.

(b) Usando o fato dos ruídos serem ergódicos, ou seja, usando a expressão

$$r_{v_x}[0] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(v_x^{(\ell)}[n]\right)^2,$$

em que agora ℓ corresponde a uma realização qualquer do ruído, e N é o comprimento do sinal.

Compare os resultados obtidos com as duas expressões entre si e com o valor teórico. Os resultados ficam mais próximos quando os valores de N e L são aumentados para 10.000? Para 100.000?