Estática

Condições de Equilíbrio

- Um corpo rígido diz-se em equilíbrio estático se estiver em equilíbrio e a sua velocidade nula

- Para que um corpo rígido sobre o qual actua um sistema de forças e binários esteja em equilíbrio é necessário que se verifiquem duas condições
  - A resultante das forças tem de ser zero (de modo a garantir equilíbrio de translação)

    $$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

  - O momento resultante em relação a qualquer ponto do espaço tem de ser nulo (de modo a garantir equilíbrio de rotação)

    $$\vec{M}_{r,O} = \sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,O} + \sum_i \vec{M}_{B_i} = \vec{0}$$

Estática

Condições de Equilíbrio

- Se um corpo rígido estiver em equilíbrio em relação a um ponto *O* do espaço, então estará em equilíbrio em relação a qualquer ponto do espaço, *O*'
  - Se o sistema está em equilíbrio em relação ao ponto *O*, então

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{r,O} = \vec{0} \end{cases}$$

  - Considerando a expressão da transformação de momentos

$$\vec{M}_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O}$$

  - Pelo que

$$\vec{M}_{r,O'} = \vec{0}$$

Estática

Condições de Equilíbrio (3D)

- Para que sejam nulos os vectores resultante e momento resultante, têm de ser nulas as suas componentes, pelo que, para problemas genéricos a três dimensões, as equações anteriores levam a seis equações escalares
  - Três para a resultante das forças

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

  - Três para o momento resultante

$$\vec{M}_{r,O} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

  - Sendo possível determinar até seis incógnitas

Condições de Equilíbrio (2D)

- Para sistemas de forças complanares (no plano *XY*, por exemplo), e com binários perpendiculares ao plano das forças (com componente segundo a direcção perpendicular ao plano *XY*, ou seja, segundo *Z*), as seis equações anteriores reduzem-se a três
  - Duas para a resultante das forças

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases}$$

  - Uma para o momento resultante

$$\vec{M}_{r,O} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad M_z = 0$$

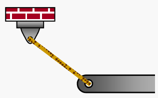
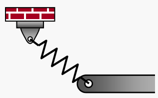
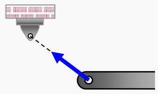
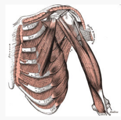
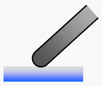
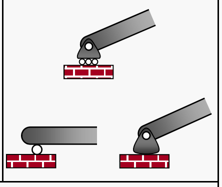
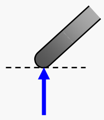
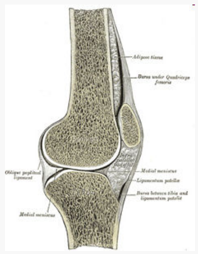
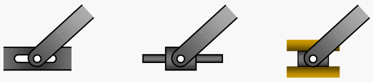
  - Sendo possível determinar até 3 incógnitas

Apoios

- De um modo geral, se aplicarmos a um corpo rígido, livre de ligações com outros corpos, um sistema de força e binários, este adquirirá movimento de translação e de rotação, não se verificando as condições de equilíbrio (a menos que o próprio sistema de forças e binários seja um sistema nulo)
- Existindo ligações a outros corpos, os movimentos podem ser restringidos
  - O corpo exerce uma acção sobre a ligação
  - A ligação exercerá sobre o corpo uma reacção com a mesma direcção e intensidade, mas sentido oposto
- Os apoios, ou ligações, desempenham um papel importante em estática, sendo importante estudar as reacções que estes exercem sobre os corpos em análise
  - Podem ser classificados de acordo com o número de reacções que exercem sobre o corpo em estudo

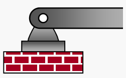
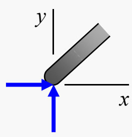
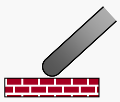
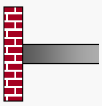
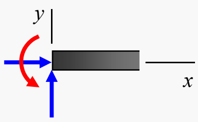
Estática

Apoios a Duas Dimensões

Suporte		Reacção	Análogo Biomecânico
Corda 	Mola 	Uma força colinear com o suporte 	Músculos e Tendões 
Contacto com uma superfície lisa (sem atrito) 	Rolete 	Uma força perpendicular ao plano de apoio 	Contacto entre ossos 
Cursor 			

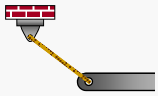
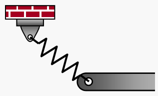
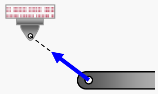
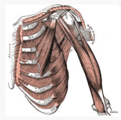
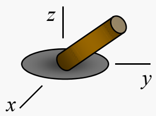
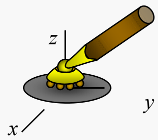
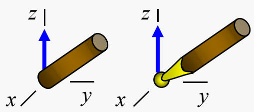
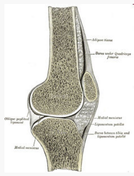
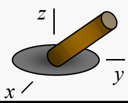
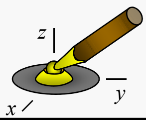
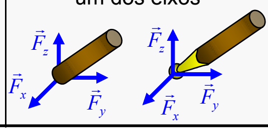
Estática

Apoios a Duas Dimensões

Suporte	Reacção	Análogo Biomecânico
Rótula ou Pino 	Duas forças perpendiculares entre si 	Algumas articulações como a do cotovelo 
Contacto com uma superfície rugosa (com atrito) 		
Encastramento 	Duas forças e um momento 	Ossos do crânio (a 2D) 

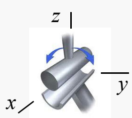
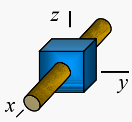
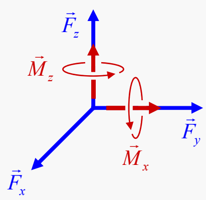
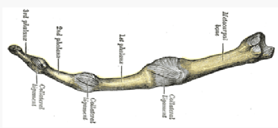
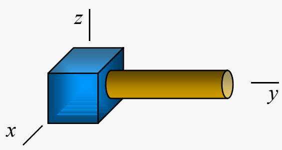
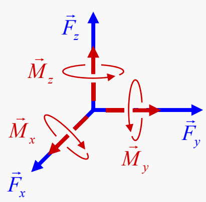
Estática

Apoios a Três Dimensões

Suporte		Reacção	Análogo Biomecânico
Corda 	Mola 	Uma força colinear com o suporte 	Músculos e Tendões 
Contacto com uma superfície lisa (sem atrito) 	Rolete 	Uma força perpendicular ao plano de apoio 	Contacto entre ossos 
Contacto com uma superfície rugosa 	Rótula 	Uma força segundo cada um dos eixos 	Cabeça do fémur 

Estática

Apoios a Três Dimensões

Suporte		Reacção	Análogo Biomecânico
Dobradiça 	Eixo rotativo 	Três forças e dois momentos 	Articulações interfalângicas 
Encastramento 		Três forças e três momentos 	Ossos do crânio 

Estática

Resolução de Problemas de Estática do Corpo Rígido

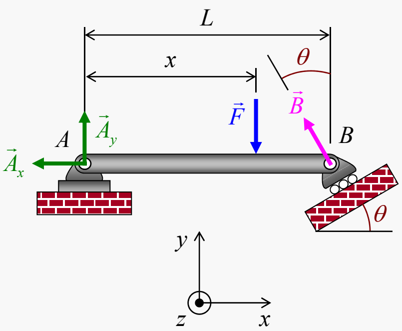
- Para resolver um problema de estática do corpo rígido, procede-se da mesma forma que para um problema de estática da partícula
  - Desenhar o diagrama de corpo livre do objecto em estudo
    - Identificar o objecto que se pretende isolar
    - Fazer um esboço do objecto isolado, representando as dimensões relevantes
    - Representar todas as forças externas que actuam sobre o objecto isolado
      - Tendo particular atenção aos pontos nos quais as forças actuam
  - Escolher e representar um sistema de eixos apropriado, que facilite a resolução do problema
  - Escrever todas as forças na forma analítica, no sistema de eixos escolhido
  - Calcular os momentos de todas as forças em relação a um ponto arbitrário do espaço, que facilite a resolução do problema
  - Resolver as equações de equilíbrio, de modo a determinar as forças ou parâmetros desconhecidos

Estática

Diagramas de Corpo Livre

- Exemplo:
  - Determinar as reacções que os apoios exercem sobre a barra.

$$\vec{R}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A_x - B_x = 0 \\ A_y - F + B_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = -B_x \\ A_y = F - B_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = -B\,\mathrm{sen}(\theta) \\ A_y = F - B\cos(\theta) \end{cases}$$



$$\vec{M}_{r,A}=\vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{\vec{A}_x,A}+\vec{M}_{\vec{A}_y,A}+\vec{M}_{\vec{F},A}+\vec{M}_{\vec{B},A}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -x\,F + L\,\mathrm{sen}(90-\theta)\,B = 0$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x\,F}{L\cos(\theta)}$$

$$\begin{cases} A_x = -\dfrac{x\,F}{L\cos(\theta)}\,\mathrm{sen}(\theta) \\ A_y = F - \dfrac{x\,F}{L\cos(\theta)}\cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = -\dfrac{x}{L}\,F\,\mathrm{tg}(\theta) \\ A_y = \dfrac{L-x}{L}\,F \end{cases}$$

Estática

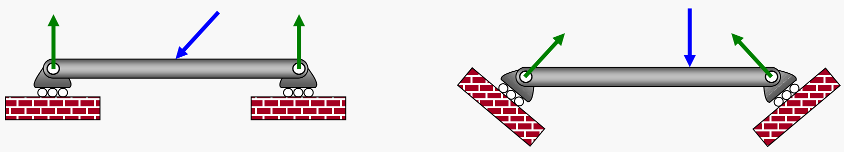
Suficiência de Apoios

- Para garantir o equilíbrio de um corpo contra qualquer carregamento, as condições de equilíbrio têm de ser satisfeitas, e o corpo tem de estar correctamente apoiado nos seus suportes
- Dependendo da distribuição e tipo de apoios, podemos ter
  - Sistemas hipoestáticos
    - O número de incógnitas é inferior ao número de equações possíveis resultantes da aplicação das condições de equilíbrio estático
    - Os apoios não impedem todos os movimentos possíveis do sistema em estudo
  - Sistemas isoestáticos
    - O número de incógnitas é igual ao número de equações possíveis resultantes da aplicação das condições de equilíbrio estático
    - Os apoios são suficientes, garantindo o equilíbrio estático do sistema
  - Sistemas hiperestáticos
    - O número de incógnitas é superior ao número de equações possíveis resultantes da aplicação das condições de equilíbrio estático
    - Os apoios garantem o equilíbrio, diminuindo as reacções nos apoios

Estática

Suficiência de Apoios – Sistemas Hipoestáticos

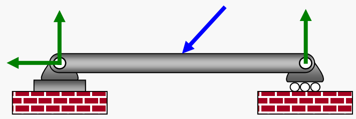
- Um sistema hipoestático tem um número insuficiente de apoios, movendo-se sob a acção das cargas aplicadas
- A duas dimensões, considerando as reacções segundo cada um dos eixos, esta situação pode ocorrer se
  - Os suportes exercerem forças paralelas
    - Se as cargas aplicadas tiverem componentes perpendiculares às forças exercidas pelos apoios, o objecto pode mover-se
  - Os suportes só exercerem forças concorrentes
    - O momento resultantes das reacções dos apoios em relação ao ponto de intercepção das linhas de acção das reacções é nulo, mas o momento resultante das cargas calculado em relação ao mesmo ponto não o é



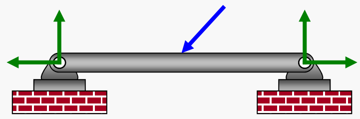
Estática

Suficiência de Apoios

Sistema Isoestático



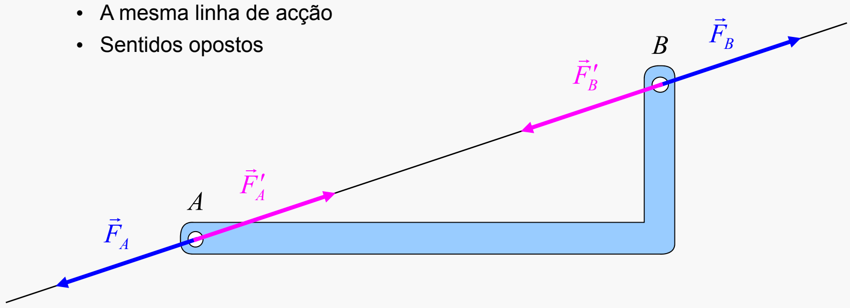
Sistema Hiperestático



Estática

Elementos de Duas Forças

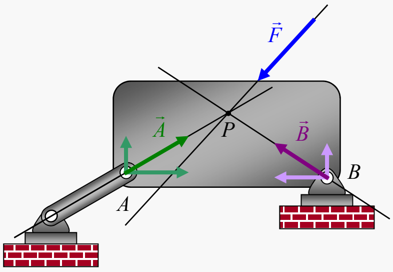
- Consideremos um sistema de forças e binários a actuar num objecto
  - Se o sistema de forças e binários puder ser substituído por duas forças a actuar em pontos distintos do objecto, o objecto diz-se um elemento de duas forças
  - Se o elemento de duas forças estiver em equilíbrio, então as duas forças têm
    - A mesma intensidade
    - A mesma linha de acção
    - Sentidos opostos



Estática

Elementos de Três Forças

- Consideremos um sistema de forças e binários a actuar num objecto
  - Se o sistema de forças e binários puder ser substituído por três forças a actuar em pontos distintos do objecto, o objecto diz-se um elemento de três forças
  - Se o elemento de três forças estiver em equilíbrio, então as três forças são coplanares
    - Paralelas
    - Concorrentes num ponto



$$\vec R=\vec 0 \quad\Rightarrow\quad \vec A+\vec B+\vec F=\vec 0$$

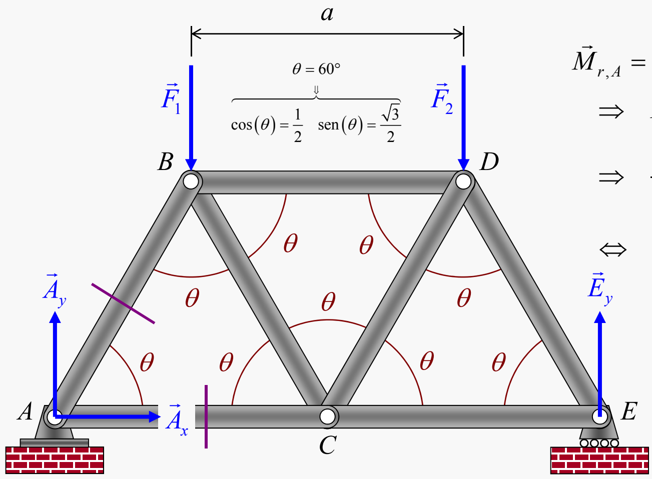
$$\vec M_{r,P}=\vec 0 \quad\Rightarrow\quad \cancel{\vec M_{\vec A,P}}+\vec M_{\vec B,P}+\cancel{\vec M_{\vec F,P}}=\vec 0$$

$$\Rightarrow\quad \vec M_{\vec B,P}=\vec 0$$

Estática

Análise de Estruturas em Equilíbrio

$$\vec R=\vec 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec A+\vec E+\vec F_1+\vec F_2=\vec 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A_x=0 \\ A_y+E_y-F_1-F_2=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A_x=0 \\ \boxed{A_y=F_1+F_2-E_y} \end{cases}$$



$$\vec M_{r,A}=\vec 0$$

$$\Rightarrow\quad \vec M_{\vec F_1,A}+\vec M_{\vec F_2,A}+\vec M_{\vec E,A}=\vec 0$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{a}{2}F_1-\frac{3a}{2}F_2+2a\,E_y=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2a\,E_y=\frac{a}{2}\left(F_1+3F_2\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{E_y=\frac{F_1+3F_2}{4}}$$

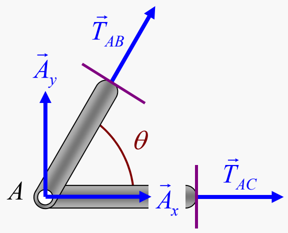
$$A_y=\frac{3F_1+F_2}{4}$$

Estática

Análise de Estruturas em Equilíbrio

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = \dfrac{3\,F_1 + F_2}{4} \\ E_y = \dfrac{F_1 + 3\,F_2}{4} \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_x + T_{AC} + \dfrac{1}{2} T_{AB} = 0 \\ A_y + \dfrac{\sqrt{3}}{2} T_{AB} = 0 \end{cases}$$

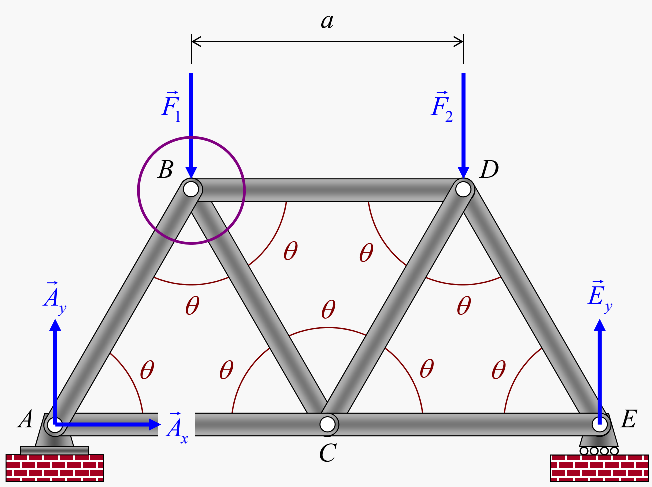


$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_{AB} = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(3\,F_1 + F_2\right) \\ T_{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(3\,F_1 + F_2\right) \end{cases}$$

Estática

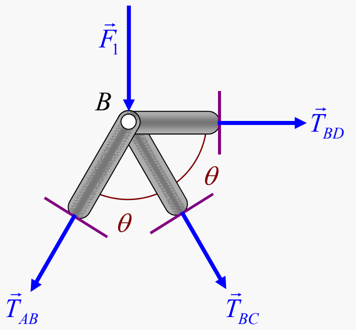
Análise de Estruturas em Equilíbrio

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = \dfrac{3\,F_1 + F_2}{4} \\ E_y = \dfrac{F_1 + 3\,F_2}{4} \\ T_{AC} = \dfrac{3\,F_1 + F_2}{4} \operatorname{cotg}(\theta) \\ T_{AB} = -\dfrac{3\,F_1 + F_2}{4 \operatorname{sen}(\theta)} \end{cases}$$



Estática

Análise de Estruturas em Equilíbrio



$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = \dfrac{3\,F_1 + F_2}{4} \\ E_y = \dfrac{F_1 + 3\,F_2}{4} \\ T_{AC} = -\dfrac{3\,F_1 + F_2}{4}\,\mathrm{cotg}(\theta) \\ T_{AB} = -\dfrac{3\,F_1 + F_2}{4\,\mathrm{sen}(\theta)} \end{cases}$$

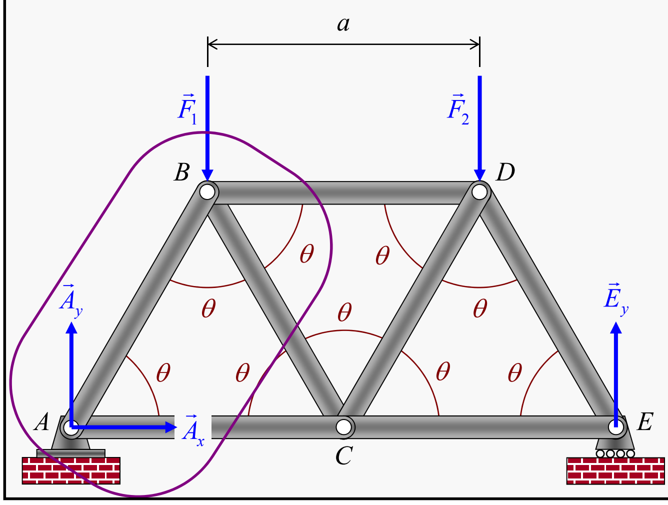
$$\vec{R} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{F}_1 + \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{BC} + \vec{T}_{BD} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} T_{BD} + T_{BC}\cos(\theta) - T_{AB}\cos(\theta) = 0 \\ -F_1 - T_{AB}\,\mathrm{sen}(\theta) - T_{BC}\,\mathrm{sen}(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_{BC} = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}(F_1 - F_2) \\ T_{BD} = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}(F_1 + F_2) \end{cases}$$

Estática

Análise de Estruturas em Equilíbrio

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = \dfrac{3\,F_1 + F_2}{4} \\ E_y = \dfrac{F_1 + 3\,F_2}{4} \end{cases}$$



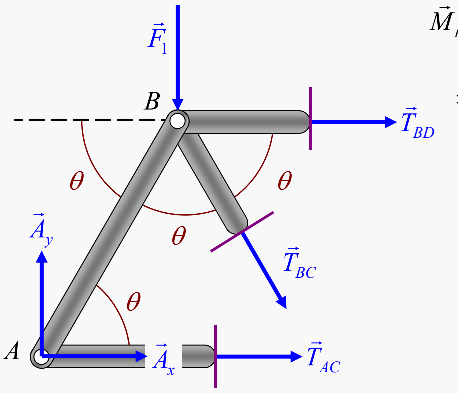
Estática

Análise de Estruturas em Equilíbrio

$$\vec{R}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}_x+\vec{A}_y+\vec{T}_{AC}+\vec{T}_{BC}+\vec{T}_{BD}+\vec{F}_1=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_x+T_{AC}+T_{BC}\cos(\theta)+T_{BD}=0 \\ A_y-T_{BC}\operatorname{sen}(\theta)-F_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x=0 \\ A_y=\dfrac{3F_1+F_2}{4} \\ E_y=\dfrac{F_1+3F_2}{4} \end{cases}$$



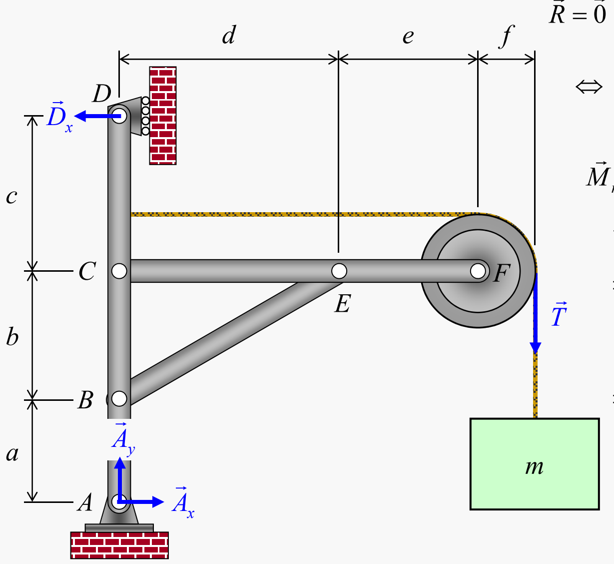
$$\vec{M}_{r,A}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_{\vec{T}_{BC},A}+\vec{M}_{\vec{T}_{BD},A}+\vec{M}_{\vec{F}_1,A}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad -a\operatorname{sen}(\theta)T_{BC}-a\operatorname{sen}(\theta)T_{BD}-\frac{a}{2}F_1=0$$

$$\begin{cases} T_{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}(3F_1+F_2) \\ T_{BC}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(F_1-F_2) \\ T_{BD}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(F_1+F_2) \end{cases}$$

Estática

Análise de Estruturas em Equilíbrio



$$\vec{R}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}+\vec{D}+\vec{T}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_x-D_x=0 \\ A_y-T=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A_x=D_x \\ A_y=T \end{cases}$$

$$\vec{M}_{r,A}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{M}_{\vec{D}_x,A}+\vec{M}_{\vec{T},A}=\vec{0}$$

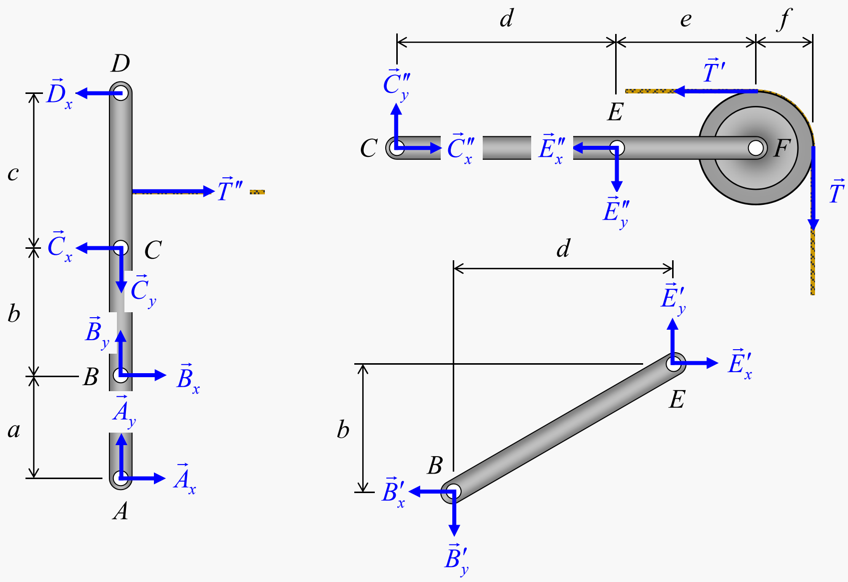
$$\Rightarrow \quad +(a+b+c)D_x -(d+e+f)T=0$$

$$\Rightarrow \quad D_x=\frac{d+e+f}{a+b+c}T$$

$$\boxed{A_x=D_x=\frac{d+e+f}{a+b+c}T}$$

Estática

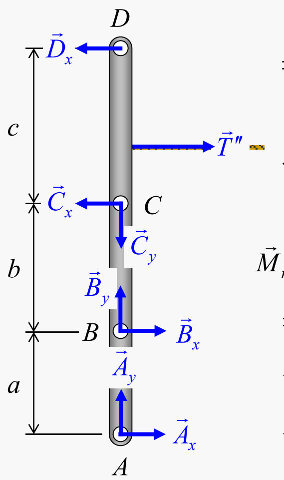
Análise de Estruturas em Equilíbrio



Estática

Análise de Estruturas em Equilíbrio

$$\begin{cases} A_x = D_x = \dfrac{d+e+f}{a+b+c}T \\ A_y = T \end{cases}$$



$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{T}'' + \vec{D} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{A_x} + B_x - C_x + T - \cancel{D_x} = 0 \\ A_y + B_y - C_y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B_x - C_x + T = 0 \\ B_y - C_y + T = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_{r,C} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_{\vec{A},C} + \vec{M}_{\vec{B}_x,C} + \vec{M}_{\vec{T}'',C} + \vec{M}_{\vec{D}_x,C} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad +(a+b)A_x + b\,B_x + c\,D_x - f\,T = 0$$

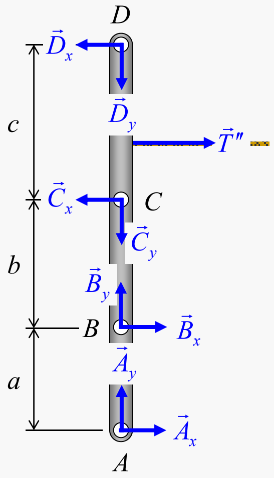
$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c)A_x + b\,B_x - f\,T = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (d+e+f)T + b\,B_x - f\,T = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad B_x = -\frac{d+e}{b}T$$

Análise de Estruturas em Equilíbrio

$$\begin{cases} A_x = D_x = \dfrac{d+e+f}{a+b+c}T \\ A_y = T \end{cases}$$



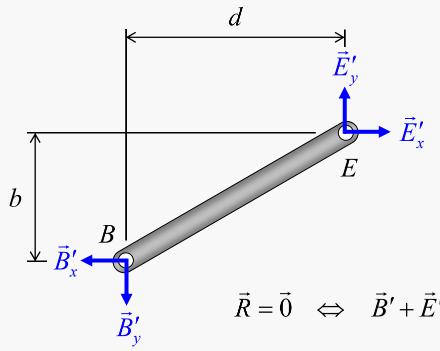
$$\begin{cases} B_x - C_x + T = 0 \\ B_y - C_y + T = 0 \\ B_x = -\dfrac{d+e}{b}T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_x = B_x + T \\ B_y - C_y + T = 0 \\ \boxed{B_x = -\dfrac{d+e}{b}T} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_x = \dfrac{b-d-e}{b}T \\ B_y - C_y + T = 0 \\ B_x = -\dfrac{d+e}{b}T \end{cases}$$

Estática

Análise de Estruturas em Equilíbrio

$$\begin{cases} A_x = D_x = \dfrac{d+e+f}{a+b+c}T \\ A_y = T \\ \boxed{B_x = -\dfrac{d+e}{b}T} \\ B_y - C_y + T = 0 \\ C_x = \dfrac{b-d-e}{b}T \end{cases}$$



$$\vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{B}' + \vec{E}' = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -B_x + E_x = 0 \\ -B_y + E_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{E_x = B_x} \\ \boxed{E_y = B_y} \end{cases}$$

$$\vec{M}_{r,B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{\vec{E}'_x,B} + \vec{M}_{\vec{E}'_y,B} = \vec{0} \Rightarrow -b\,E_x + d\,E_y = 0$$

$$\Leftrightarrow E_y = \frac{b}{d}E_x \Leftrightarrow \boxed{E_y = -\frac{d+e}{d}T}$$

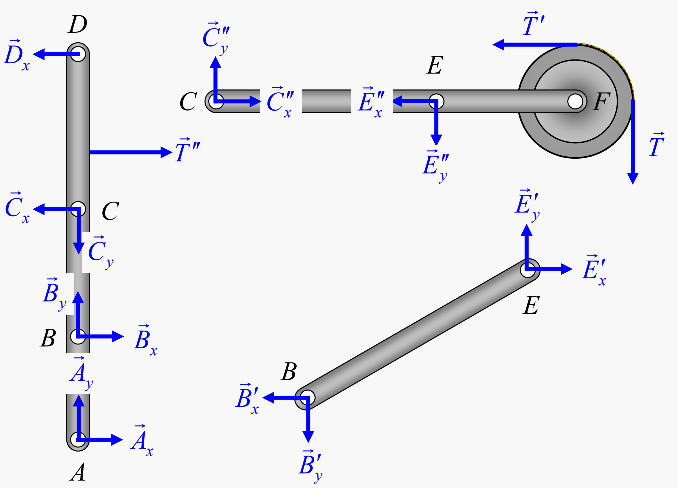
Estática

Análise de Estruturas em Equilíbrio

$$
\begin{cases}
A_x = D_x = \dfrac{d+e+f}{a+b+c}T \\
A_y = T \\
B_x = E_x = -\dfrac{d+e}{b}T \\
B_y = E_y = -\dfrac{d+e}{d}T \\
C_x = \dfrac{b-d-e}{b}T \\
B_y - C_y + T = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
A_x = D_x = \dfrac{d+e+f}{a+b+c}T \\
A_y = T \\
B_x = E_x = -\dfrac{d+e}{b}T \\
\boxed{B_y = E_y = -\dfrac{d+e}{d}T} \\
C_x = \dfrac{b-d-e}{b}T \\
C_y = B_y + T
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
A_x = D_x = \dfrac{d+e+f}{a+b+c}T \\
A_y = T \\
B_x = E_x = -\dfrac{d+e}{b}T \\
B_y = E_y = -\dfrac{d+e}{d}T \\
C_x = \dfrac{b-d-e}{b}T \\
C_y = -\dfrac{e}{d}T
\end{cases}
$$

Estática

Análise de Estruturas em Equilíbrio

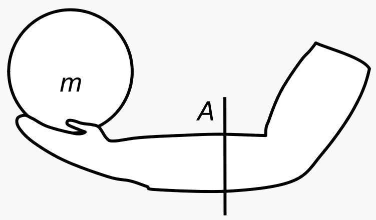


$$
\begin{cases}
A_x = D_x = \dfrac{d+e+f}{a+b+c}T \\
A_y = T \\
B_x = E_x = -\dfrac{d+e}{b}T \\
B_y = E_y = -\dfrac{d+e}{d}T \\
C_x = \dfrac{b-d-e}{b}T \\
C_y = -\dfrac{e}{d}T
\end{cases}
$$

Estática

Forças que Actuam numa Secção do Antebraço

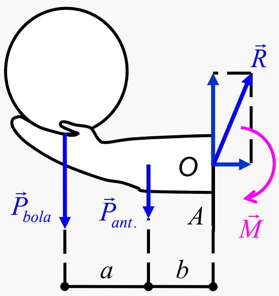
- Consideremos que uma pessoa segura um objecto de massa m, mantendo o antebraço na horizontal
  - Pretendemos determinar as forças que actuam numa secção *A* do antebraço, que poderá corresponder ao local de uma fractura, ou de um reimplante



Estática

Forças que Actuam numa Secção do Antebraço

- Começamos por isolar a porção do antebraço em estudo
- Seguidamente representemos as forças aplicadas aplicadas no antebraço
  - O peso da bola, P_{bola}
  - O peso do antebraço, $P_{ant.}$
  - A força de reacção que a porção omitida do antebraço exerce sobre a porção em estudo, *R*
  - O momento que a porção omitida do antebraço exerce sobre a porção em estudo, *M*
- Representamos as distâncias relevantes para a resolução do problema
- Escrevemos as equações de equilíbrio e resolvemos em ordem às grandezas desconhecidas



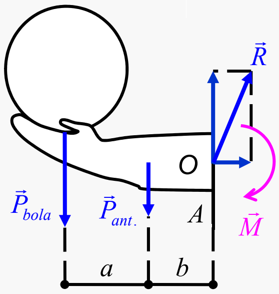
Estática

Forças que Actuam numa Secção do Antebraço

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{r,O} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{P}_{bola} + \vec{P}_{antebraço} + \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\vec{P}_{bola},O} + \vec{M}_{\vec{P}_{ant.},O} + \cancel{\vec{M}_{\vec{R},O}} + \vec{M} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xx: & R_x = 0 \\ yy: & -P_{bola} - P_{ant.} + R_y = 0 \\ zz: & (a+b)P_{bola} + b\,P_{ant.} - M = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xx: & R_x = 0 \\ yy: & R_y = P_{bola} + P_{ant.} \\ zz: & M = a\,P_{bola} + b\left(P_{bola} + P_{ant.}\right) \end{cases}$$

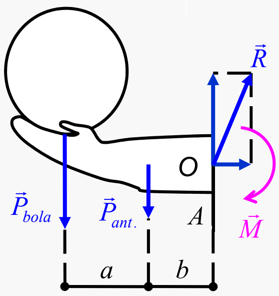


Estática

Forças que Actuam numa Secção do Antebraço

$$\begin{cases} xx: & R_x = 0 \\ yy: & R_y = P_{bola} + P_{ant.} \\ zz: & M = a\,P_{bola} + b\left(P_{bola} + P_{ant.}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 20\text{ cm} \\ b = 15\text{ cm} \\ m_{bola} = 1\text{ kg} \\ m_{antebraço} = 0{,}5\text{ kg} \end{cases}$$

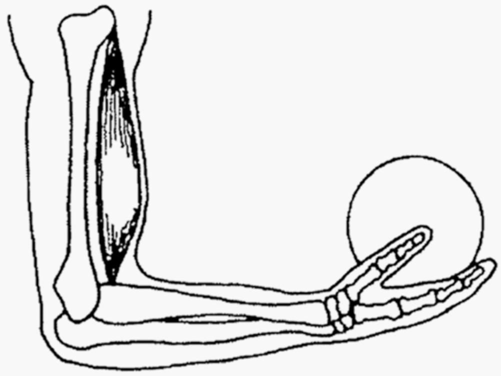
$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 102{,}9\text{ N} \\ M = 17{,}395\text{ N m}^{-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} R = 102{,}9\text{ N} \\ M = 17{,}395\text{ N m}^{-1} \end{cases}$$



Estática

Forças que Actuam na Articulação do Cotovelo

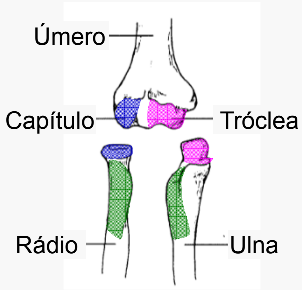
- Pretende-se determinar a reacção a que fica sujeita a articulação do cotovelo numa situação semelhante à anterior



Estática

Forças que Actuam na Articulação do Cotovelo

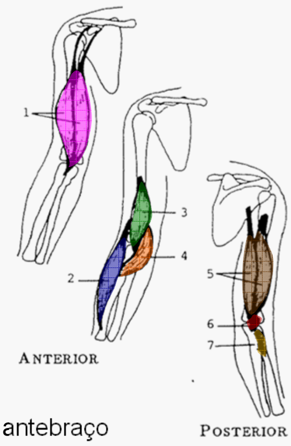
- O cotovelo é constituído por três articulações:
  - Articulação Úmero-Ulnar
    - Só permite movimentos de rotação uniaxiais, limitando o movimento à flexão ou extensão do antebraço
  - Articulação úmero-radial
    - Permite rotação segundo dois eixos perpendiculares
  - Articulação radio-ulnar proximal
    - Permite rotação relativa entre a ulna e o rádio.



Estática

Forças que Actuam na Articulação do Cotovelo

- Músculos que controlam a articulação do cotovelo:
  1) Bíceps: intervêm na flexão do cotovelo, principalmente quando o antebraço está supinado
  2) Braquiorradial: é o músculo mais efectivo na flexão do cotovelo quando o antebraço está na posição neutra (entre as posições de supinação e pronação máximas)
  3) Braquial: é o motor primário da flexão do cotovelo, sendo igualmente efectivo em qualquer posição (supinação ou pronação)
  4) Pronador Redondo: auxilia o pronador quadrado quando a pronação é rapida
  5) Tríceps: extensor do cotovelo
  6) Ancóneo: auxilia na extensão
  7) Supinador: é o principal músculo supinador do antebraço

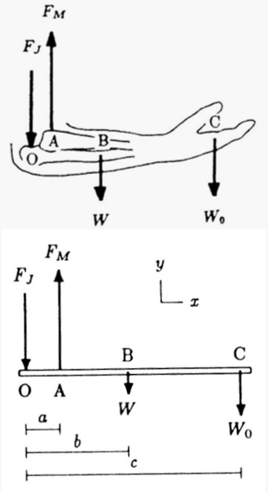


Estática

Forças que Actuam na Articulação do Cotovelo

- Na situação que se pretende estudar, podemos considerar, em primeira aproximação, que o Bícepes é o principal músculo flector do antebraço
- Neste caso, o diagrama de corpo livre pode ser representado como na figura ao lado

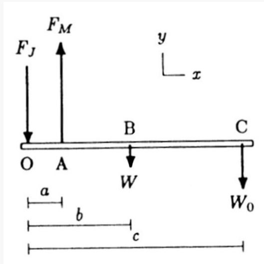
Ponto O:	eixo de rotação da articulação do cotovelo
Ponto A:	inserção do Bíceps no Rádio
Ponto B:	centro de gravidade do antebraço
Ponto C:	situado numa linha vertical que passa pelo centro de gravidade do objecto que se encontra na mão
$\boldsymbol{F_J}$:	força de reacção do Úmero sobre a articulação do cotovelo
$\boldsymbol{F_M}$:	força exercida pelo Bíceps no antebraço
$\boldsymbol{W}$:	peso total do antebraço
$\boldsymbol{W_0}$:	peso do objecto que se encontra na mão



Estática

Forças que Actuam na Articulação do Cotovelo

- Escrevendo as equações de equilíbrio estático, podemos determinar a reacção que o Úmero exerce sobre o cotovelo



$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{r,O} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F}_J + \vec{F}_M + \vec{W} + \vec{W}_0 = \vec{0} \\ \cancel{\vec{M}_{\vec{F}_J,O}} + \vec{M}_{\vec{F}_M,O} + \vec{M}_{\vec{W},O} + \vec{M}_{\vec{W}_0,O} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xx: & - \\ yy: & -F_J + F_M - W - W_0 = 0 \\ zz: & a\,F_M - b\,W - c\,W_0 = 0 \end{cases}$$

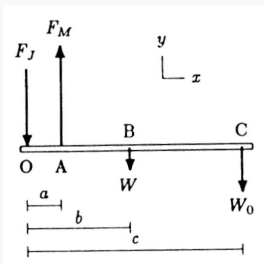
$$\Rightarrow \begin{cases} F_J = F_M - W - W_0 \\ F_M = \dfrac{b\,W + c\,W_0}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_J = \dfrac{(b-a)W + (c-a)W_0}{a} \\ F_M = \dfrac{b\,W + c\,W_0}{a} \end{cases}$$

Estática

Forças que Actuam na Articulação do Cotovelo

- Assumindo os valores teremos

$$\begin{cases} a = 4\ \text{cm} \\ b = 15\ \text{cm} \\ c = 35\ \text{cm} \\ W = 2{,}1\ \text{kgf} \end{cases}$$



$$\begin{cases} F_J = \dfrac{(b-a)W + (c-a)W_0}{a} \\ F_M = \dfrac{b\,W + c\,W_0}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_J = 7{,}75\,W_0 + 5{,}775 \\ F_M = 8{,}75\,W_0 + 7{,}875 \end{cases}$$

Estática

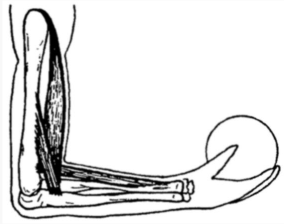
Forças que Actuam na Articulação do Cotovelo

- Num modelo mais realista, teríamos de considerar as forças

  F_{M1}: exercida pelo Bíceps

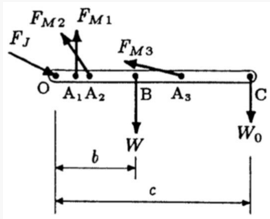
  F_{M2}: exercida pelo músculo braquial

  F_{M3}: exercida pelo músculo braquiorradial



- E as equações do equilíbrio levariam a um sistema indeterminado

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_{r,O} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{Jx} = F_{M1x} + F_{M2x} + F_{M3x} \\ F_{Jy} = F_{M1y} + F_{M2y} + F_{M3y} - W - W_0 \\ a_1 F_{M1} + a_2 F_{M2} + a_3 F_{M3} = bW + cW_0 \end{cases}$$



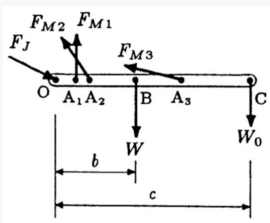
  - Para resolver o sistema, teríamos de conhecer as forças F_{M1}, F_{M2} e F_{M3}

Estática

Forças que Actuam na Articulação do Cotovelo

- Para determinar a relação entre as forças F_{M1}, F_{M2} e F_{M3}, podem ser usadas pelo menos duas abordagens:
  - Determinar a intensidade relativa das forças recorrendo a electromiografia
  - Assumindo que os músculos exercem forças proporcionais às áreas das suas secções rectas

- Designado as áreas dos músculos Bíceps, Braquial, e Braquiorradial por A_1, A_2 e A_3, respectivamente, podemos escrever

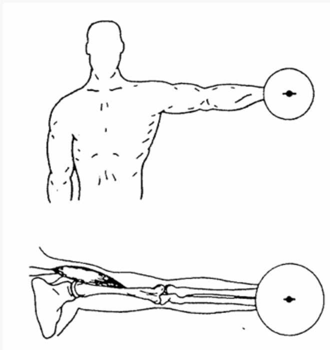


$$\begin{cases} F_{M1} = k\,A_1 \\ F_{M2} = k\,A_2 \\ F_{M3} = k\,A_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{F_{M2}}{F_{M1}} = \dfrac{A_2}{A_1} = k_{21} \\ \dfrac{F_{M3}}{F_{M1}} = \dfrac{A_3}{A_1} = k_{31} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{M2} = k_{21}\,F_{M1} \\ F_{M3} = k_{31}\,F_{M1} \end{cases}$$

Estática

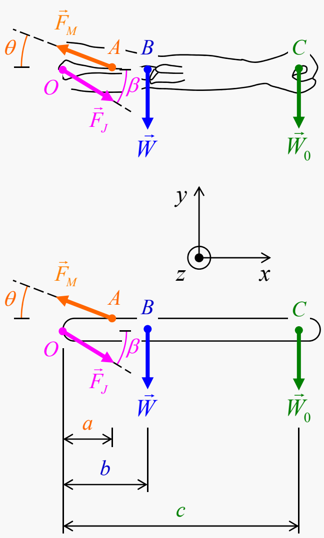
Forças que Actuam na Articulação do Ombro

- Consideremos a situação representada na figura, na qual uma pessoa segura um peso com o braço esticado na posição horizontal. Assumindo que só o músculo deltóide efectua força, determinar a intensidade e direcção da reacção sobre a articulação do úmero, e a força exercida pelo deltóide.



Estática

Forças que Actuam na Articulação do Ombro



$$\vec{R}=\vec{0} \iff \begin{cases} F_J\cos(\beta)-F_M\cos(\theta)=0 \\ -F_J\,\mathrm{sen}(\beta)+F_M\,\mathrm{sen}(\theta)-W-W_0=0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_{r,O}=\vec{0} \iff \cancel{\vec{M}_{\vec{F}_J,O}}+\overbrace{\vec{M}_{\vec{F}_M,O}}^{\simeq\, a\,\mathrm{sen}(\theta)F_M\,\hat{\mathrm{k}}}+\vec{M}_{\vec{W},O}+\vec{M}_{\vec{W}_0,O}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow a\,\mathrm{sen}(\theta)F_M-bW-cW_0=0$$

$$\iff \boxed{F_M=\frac{bW+cW_0}{a\,\mathrm{sen}(\theta)}}$$

$$\begin{cases} F_J\cos(\beta)=F_M\cos(\theta) \\ F_J\,\mathrm{sen}(\beta)=F_M\,\mathrm{sen}(\theta)-W-W_0 \end{cases}$$

Estática

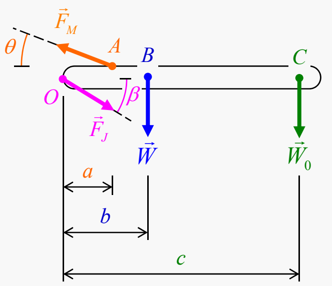
Forças que Actuam na Articulação do Ombro

$$F_M = \frac{bW + cW_0}{a\,\mathrm{sen}(\theta)}$$

$$\boxed{\begin{cases} F_J \cos(\beta) = F_M \cos(\theta) \\ F_J \,\mathrm{sen}(\beta) = F_M \,\mathrm{sen}(\theta) - W - W_0 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} F_J^2 \cos^2(\beta) = F_M^2 \cos^2(\theta) \\ F_J^2 \,\mathrm{sen}^2(\beta) = F_M^2 \,\mathrm{sen}^2(\theta) - 2F_M \,\mathrm{sen}(\theta)(W+W_0) + (W+W_0)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F_J^2 = F_M^2 \cos^2(\theta) + F_M^2 \,\mathrm{sen}^2(\theta) - 2F_M \,\mathrm{sen}(\theta)(W+W_0) + (W+W_0)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad F_J^2 = F_M^2 - 2F_M \,\mathrm{sen}(\theta)(W+W_0) + (W+W_0)^2 \quad \Leftrightarrow \quad F_J = \sqrt{F_M^2 - 2F_M \,\mathrm{sen}(\theta)(W+W_0) + (W+W_0)^2}$$



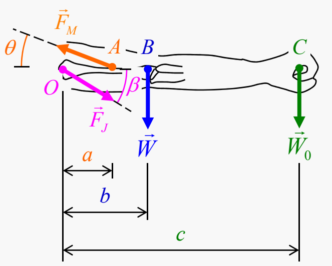
$$\frac{F_J \,\mathrm{sen}(\beta)}{F_J \cos(\beta)} = \frac{F_M \,\mathrm{sen}(\theta) - W - W_0}{F_M \cos(\theta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}(\beta) = \frac{F_M \,\mathrm{sen}(\theta) - W - W_0}{F_M \cos(\theta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta = \mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}(\theta) - (W+W_0)\sec(\theta)\right]$$

Estática

Forças que Actuam na Articulação do Ombro



$$\begin{cases} F_M = \dfrac{bW + cW_0}{a\,\mathrm{sen}(\theta)} \\ F_J = \sqrt{F_M^2 - 2F_M \,\mathrm{sen}(\theta)(W+W_0) + (W+W_0)^2} \\ \beta = \mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}(\theta) - (W+W_0)\sec(\theta)\right] \end{cases}$$

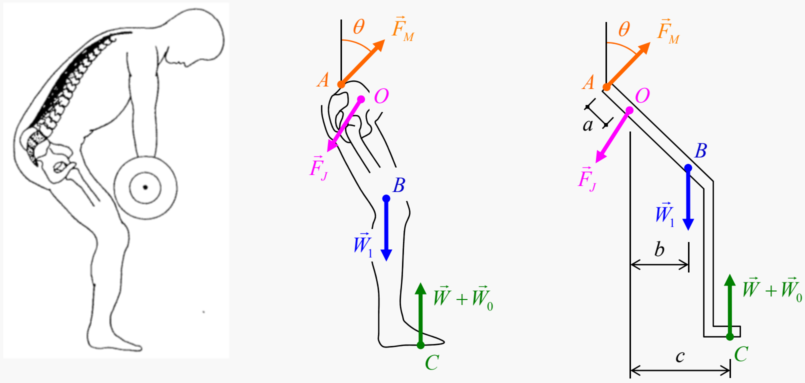
$a = 10$ cm ; $b = 30$ cm ; $c = 60$ cm ; $\theta = 15°$; $W = 4$ kgf

	W_0 (kgf)						
	0	1	2	4	6	8	10
F_M (kgf)	46	70 (1,5×)	93 (2×)	139 (3×)	185 (4×)	232 (5 ×)	278 (6×)
F_J (kgf)	45	68	91	137	183	229	275
β (graus)	75,5	78,5	80,4	82,9	84,3	85,3	86,0

Estática

Forças que Actuam na 5ª Vértebra Lombar

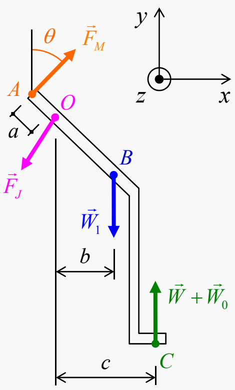
- Consideremos uma pessoa a segurar um peso W_0, de tal forma que o seu tronco um ângulo θ com a vertical
- Pretende-se calcular a força exercida pelos músculos erectores da coluna vertebral, e a reacção que esta exerce sobre a 5ª vértebra lombar



Estática

Forças que Actuam na 5ª Vértebra Lombar

- Considerando as condições de equilíbrio



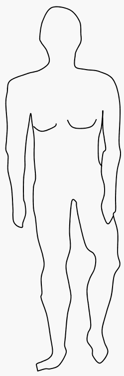
$$\begin{cases} F_M = \dfrac{c\left(W+W_0\right)-bW_1}{a} \\ F_{Jx} = F_M \operatorname{sen}\left(\theta\right) \\ F_{Jy} = F_M \cos\left(\theta\right) - W_1 + W + W_0 \end{cases}$$

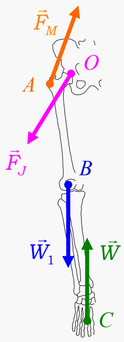
$$\begin{cases} a = 3{,}5 \text{ cm} \\ b = 14 \text{ cm} \\ c = 21 \text{ cm} \\ \theta = 45° \\ W_1 = 28 \text{ kgf} \\ W = 70 \text{ kgf} \end{cases}$$

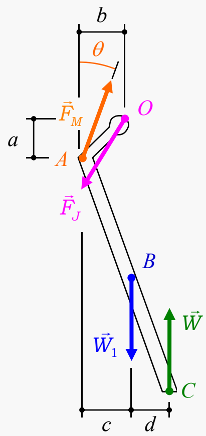
	W_0 (kgf)				
	0	5	10	15	20
F_M (kgf)	308	338	368	398	428
F_J (kgf)	339	373	406	440	474

Forças que Actuam na Epífise da Cabeça do Fémur

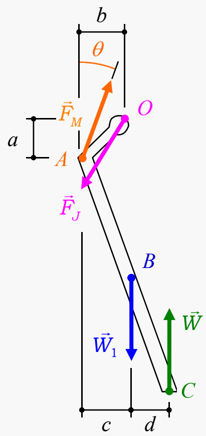
- Consideremos uma pessoa apoiada numa só perna
- Pretende-se calcular a força muscular exercida pelos músculos que se inserem no grande trocanter, bem como a reacção exercida na epífise da cabeça do fémur







Forças que Actuam na Epífise da Cabeça do Fémur



$$\begin{cases} F_M = \dfrac{cW_1 - (c+d-b)W}{a\,\mathrm{sen}(\theta) - b\cos(\theta)} \\ F_{Jx} = F_M\,\mathrm{sen}(\theta) \\ F_{Jy} = F_M\cos(\theta) - W_1 + W \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 6{,}2\ \text{cm} \\ b = 6{,}2\ \text{cm} \\ c = 6{,}1\ \text{cm} \\ d = 9{,}7\ \text{cm} \\ \theta = 20^\circ \\ W_1 = 0{,}17\,W \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_M \simeq 2{,}3\,W \\ F_J \simeq 3{,}1\,W \end{cases}$$