Sistemas de Forças e Binários

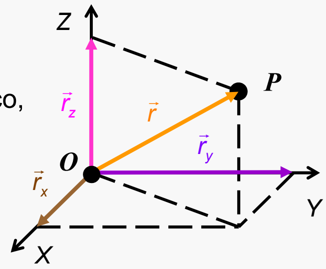
Introdução

- A Mecânica é uma disciplina da Física que pode ser dividida em três ramos
  - A Cinemática, que estuda o movimento dos corpos sem considerar as causas do movimento
    - Preocupa-se com a posição, velocidade e aceleração dos corpos, sem que para tal seja necessário considerar as forças que sobre eles actuam
  - A Cinética (ou Dinâmica), que estuda o efeito das cargas (forças e momentos) sobre o movimento dos corpos, tentando dar resposta às seguintes questões
    - Conhecido o movimento de um dado corpo, caracterizar as cargas que sobre ele actuam
    - Conhecidas as cargas que actuam sobre um dado corpo, caracterizar o seu movimento
  - A Estática, que estuda a distribuição de cargas (forças e momentos) que actuam sobre um corpo em equilíbrio, isto é, um corpo que está em repouso, ou se move com velocidade constante

Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Cinemática

- Os conceitos básicos em cinemática são
  - Espaço
  - Tempo
- Para localizar um ponto material no espaço, precisamos
  - Definir um sistema de eixos
  - A origem do sistema de eixos
  - O vector posição do corpo relativamente à origem do sistema de eixos
    - Define um ponto sobre a trajectória do corpo
    - No SI, a unidade do vector posição é o metro (m)



Sistemas de Forças e Binários

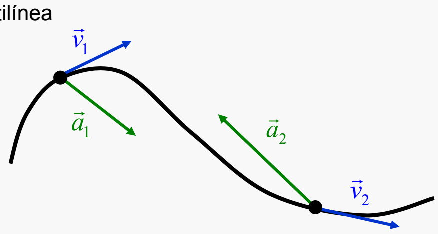
Revisões – Cinemática

- A partir da posição e do tempo, podemos obter as restantes grandezas relevantes para a cinemática
  - O vector velocidade
    - Derivada do vector posição em ordem ao tempo
    - Tangente à trajectória em cada ponto
    - No SI, a unidade de velocidade é o metro por segundo (m s^{-1})

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

  - O vector aceleração
    - Derivada do vector velocidade em ordem ao tempo
    - Aponta para o interior da trajectória se esta for curvilínea
    - Tangente à trajectória se esta for rectilínea
    - No SI, a unidade de aceleração é o metro por segundo quadrado (m s^{-2})

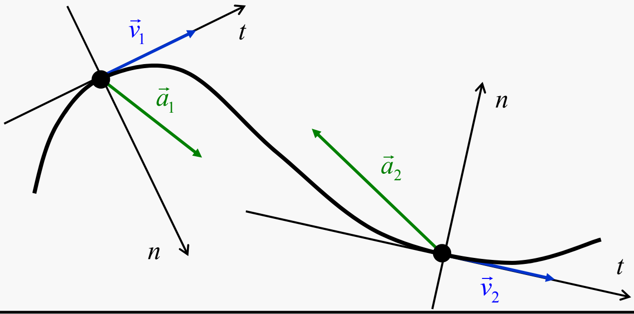
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Cinemática

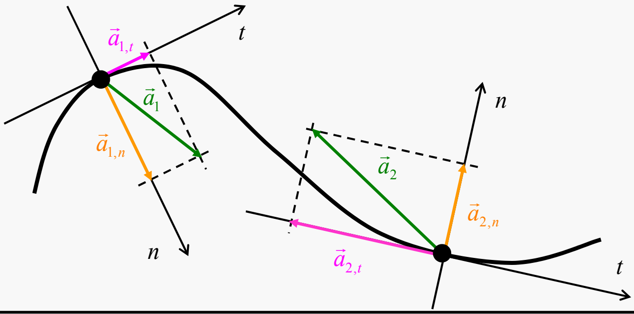
- Em cada ponto da trajectória, podemos definir um sistema de eixos ortogonal a duas dimensões
  - Que define um plano que contém os vectores velocidade e aceleração
  - Tem um dos eixos tangente à trajectória no ponto (eixo tangencial)
  - Tem um eixo perpendicular à trajectória (eixo normal), e que aponta para o interior da curvatura da trajectória no ponto



Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Cinemática

- Podemos agora decompor o vector aceleração neste novo sistema de eixos
  - Numa componente tangencial (aceleração tangencial)
  - Numa componente normal (ou centrípeta)
- O vector aceleração é a soma dos vectores aceleração tangencial e aceleração normal (ou centrípeta) $\left(\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n\right)$

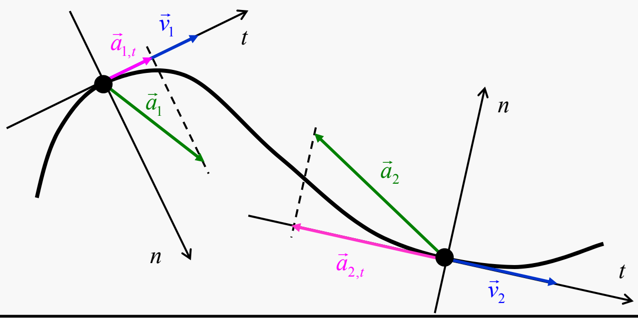


Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Cinemática

- A componente tangencial da aceleração é responsável pela alteração do módulo da velocidade instantânea da partícula, verificando-se

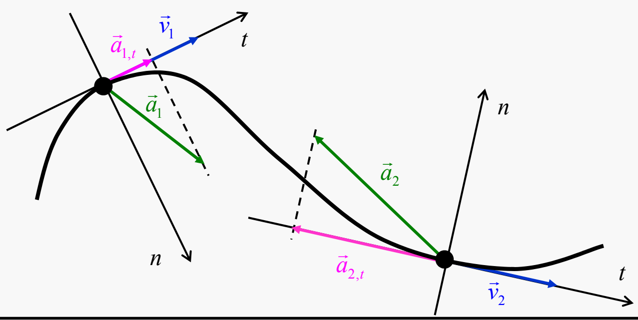
$$\left| \vec{a}_t \right| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$$



Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Cinemática

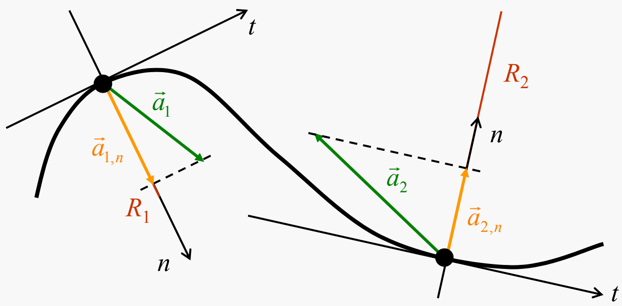
- Dependendo do sentido relativo entre os vectores aceleração tangencial e velocidade, o movimento pode ser
  - Acelerado, se ambos os vectores tiverem o mesmo sentido
  - Retardado, se o vector aceleração tangencial tiver sentido oposto ao vector velocidade



Revisões – Cinemática

- Sendo *R* o raio de curvatura da trajectória no ponto em estudo
  - O módulo da aceleração normal, ou centrípeta, é dado por

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$



Sistemas de Forças e Binários

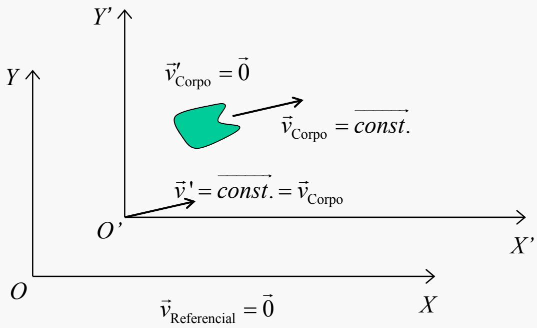
Revisões – Leis de Newton

- 1ª Lei de Newton (Lei da Inércia)
  - Um corpo em repouso permanece em repouso a menos que sobre ele actue uma força externa
  - Um corpo em movimento desloca-se com velocidade constante a menos que sobre ele actue uma força externa
    - Por velocidade entende-se a velocidade vectorial, que para ser constante tem de ter
      - Direcção constante
      - Sentido constante
      - Módulo constante
  - A necessidade de aplicar uma força para alterar o estado de movimento, está associada à noção de inércia
    - Propriedade dos corpos
    - Mede a resistência que estes oferecem à alteração do seu estado de movimento, quando sujeitos à acção de uma força

Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Leis de Newton

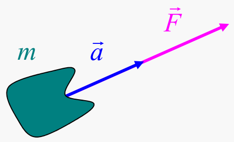
- Referencial Inercial
  - Um referencial no qual a 1ª Lei de Newton é válida designa-se por Referencial Inercial
  - Um Referencial Inercial tem velocidade nula, ou velocidade constante



Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Leis de Newton

- 2ª Lei de Newton (ou Lei Fundamental da Dinâmica)
  - Se sobre um corpo de massa *m* for aplicada uma força isolada, ou fazendo parte de um sistema de forças, esta força comunica aceleração ao corpo
    - Com a mesma direcção e sentido da força
    - Cujo módulo é
      - Directamente proporcional à intensidade da força
      - Inversamente proporcional à massa do corpo
  - A unidade de força no SI é o Newton (N)

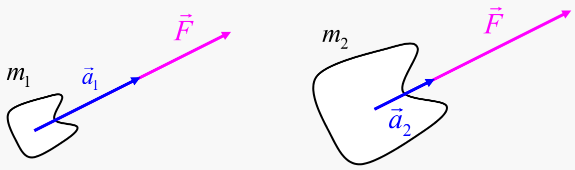


$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Leis de Newton

- 2ª Lei de Newton (ou Lei Fundamental da Dinâmica)
  - Se aplicarmos uma força com a mesma direcção, sentido e módulo a dois corpos com massas m_1 e m_2, tais que $m_1 < m_2$, os dois corpos sofrem acelerações
    - Com a mesma direcção e sentido
    - Mas módulos diferentes, sendo maior a aceleração comunicada ao corpo de menor massa



$$|\vec{a}_1| = \frac{|\vec{F}|}{m_1} \quad > \quad |\vec{a}_2| = \frac{|\vec{F}|}{m_2}$$

Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Leis de Newton

- Da 1ª e 2ª Leis de Newton, conclui-se que
  - Força é uma influência externa que actua sobre um corpo, comunicando-lhe aceleração num referencial inercial
  - A massa é uma propriedade intrínseca dos corpos, e mede a resistência que estes oferecem à alteração do seu estado de repouso ou movimento, ou seja, é uma medida da inércia do corpo
  - Ao contrário da massa, o peso não é propriedade intrínseca dos corpos, mas sim uma força, que surge da Lei de Newton da gravitação, segundo a qual
    - Dois pontos materiais de massas m_1 e m_2 atraem-se mutuamente com forças iguais e opostas, direcção igual à direcção da linha que une os dois pontos, e com intensidade proporcional ao valor das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

onde G é a constante de gravitação, igual a $6{,}67428 \times 10^{-11}$ $m^3 kg^{-1} s^{-2}$

Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Leis de Newton

- Peso de um Corpo
  - Assumindo que
    - A Terra é uma esfera com
      - Raio R = 6 378 136,245 m
      - Massa $M = 5{,}9742\times10^{24}$ kg, concentrada no seu centro
    - Um corpo de massa m à superfície da terra tem dimensões desprezáveis quando comparadas com o raio da terra
  - O peso do corpo é uma força
    - Com direcção perpendicular à superfície da Terra
    - Cujo sentido aponta para o centro da Terra
    - Com intensidade dada por

$$P = G\frac{M\,m}{R^2} = \frac{M\,G}{R^2}m = \frac{5{,}9742\times10^{24}\times 6{,}67428\times10^{-11}}{6378136{,}245^2}m \simeq 9{,}8\,m$$

Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Leis de Newton

- Peso de um Corpo
  - Sendo o peso de um corpo uma força, então, de acordo com a 2ª Lei de Newton, poderá ser escrita como o produto entre
    - A sua massa
    - E a aceleração a que fica sujeito
  - Tendo em conta o resultado anterior, a 2ª Lei de Newton, e designando por $\vec{g}$ a aceleração a que um corpo fica sujeito quando colocado no campo gravítico da Terra (aceleração da gravidade), podemos escrever para o peso de um corpo

$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$

onde o módulo do vector $\vec{g}$ tem o valor aproximado de 9,8 m s^{-2}, no SI

Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Leis de Newton

- Peso de um Corpo
  - Depende do campo gravítico ao qual está sujeito
    - Na Lua, o peso de um corpo é cerca de um sexto do peso na Terra
  - Uma unidade de força comummente usada é o kgf (quilograma-força)
    - 1 kgf é a força exercida por uma massa de 1 kg, sujeita a uma certa gravidade
    - Nesta unidade, uma massa de 1 kg pesa 1 kgf tanto na Terra como na Lua

Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Leis de Newton

- Princípio da independência do efeito de forças simultâneas
  - Se actuarem simultaneamente várias forças num corpo, o efeito de cada uma delas no estado de movimento do corpo é independente do efeito das restantes forças
  - A força efectiva que se fará sentir no corpo é igual à soma das forças se estas fossem aplicadas isoladamente
  - Consideremos um corpo de massa *m* no qual actuam simultaneamente *N* forças, dadas por

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = m\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 = m\vec{a}_2 \\ \vec{F}_3 = m\vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{F}_N = m\vec{a}_N \end{cases}$$

Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Leis de Newton

- Princípio da independência do efeito de forças simultâneas
  - Somando todas as forças

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + m\vec{a}_3 + \cdots + m\vec{a}_N$$

  - Designado a soma de todas as forças por $\vec{F}_R$ (força resultante)

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + m\vec{a}_3 + \cdots + m\vec{a}_N$$

  - Pondo a massa em evidência

$$\vec{F}_R = m\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \cdots + \vec{a}_N \right)$$

  - Designando por $\vec{a}$ o vector aceleração à qual o corpo fica sujeito devido à acção combinada de todas as forças

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Sistemas de Forças e Binários

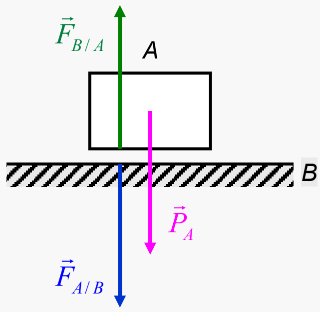
Revisões – Leis de Newton

- 3ª Lei de Newton (Lei da acção e reacção)
  - A 3ª Lei de Newton estabelece que para cada acção de um corpo *A* sobre um corpo *B* há sempre uma reacção do corpo *B* sobre o corpo *A*
    - Estas duas forças designam-se por par acção/reacção, e têm
      - A mesma direcção
      - A mesma intensidade
      - Sentidos opostos
    - A acção que o corpo *A* exerce sobre o corpo *B* é uma força aplicada sobre o corpo *B*
    - A reacção que o corpo *B* exerce sobre o corpo *A* é uma força aplicada sobre o corpo *A*
  - A 3ª Lei de Newton é de primordial importância na identificação e representação das forças que actuam sobre os objectos em estudo

Sistemas de Forças e Binários

Revisões – Leis de Newton

- 3ª Lei de Newton (Lei da acção e reacção)
  - Consideremos que um corpo *A* está assente, e em repouso, sobre uma superfície horizontal *B*, tal como ilustrado na figura
    - Sobre o corpo *A* actua o peso $\vec{P}$, devido à atracção gravítica com a terra
    - Como o corpo *A* está em contacto com a superfície *B*, vai exercer sobre esta uma força, que designaremos por $\vec{F}_{A/B}$
    - Em resposta a esta força, a superfície *B* vai exercer uma força com a mesma direcção e intensidade, mas sentido oposto, sobre o corpo *A*, $\vec{F}_{B/A}$
  - As forças $\vec{F}_{A/B}$ e $\vec{F}_{B/A}$ constituem um par acção/reacção
    - Têm a mesma direcção e intensidade, mas sentidos opostos



$$F_{A/B} = F_{B/A}$$

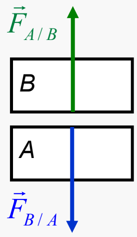
Sistemas de Forças e Binários

Classificação das Forças

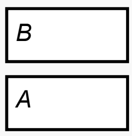
- Dependendo da sua natureza, da forma como actuam, da sua direcção, etc., as forças podem ser classificadas de diferentes formas
  - Externas ou internas
  - Normais ou tangenciais
  - De tracção ou compressão
  - Forças fundamentais
  - Forças de contacto
  - Etc.

Classificação das Forças

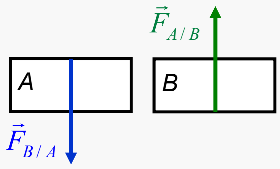
- Forças Externas e Forças Internas
  - Forças externas são as forças que, aplicadas num corpo, são susceptíveis de provocar alteração na condição de equilíbrio ou movimento desse corpo, ou de o deformar
  - Forças internas são as forças que mantém um corpo agregado quando sujeito a forças externas
  - Dependendo da situação em análise, uma mesma força pode ser considerada como força externa, ou como força interna



Num sistema constituído pelos dois corpos, as forças são internas, e anulam-se

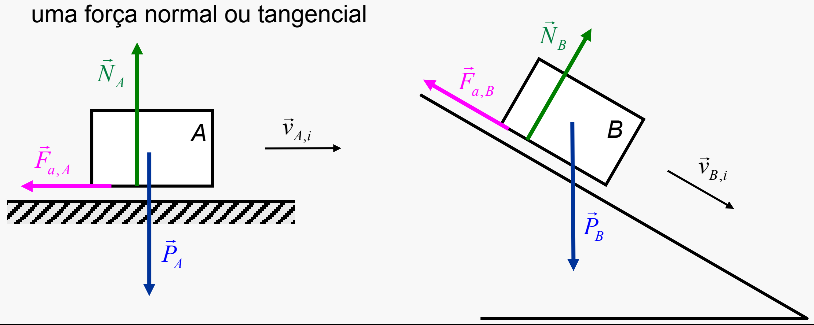


Se os dois corpos forem tratados separadamente, as forças são externas



Classificação das Forças

- Forças normais e tangenciais
  - As forças dizem-se normais se forem perpendiculares às superfícies de contacto entre os corpos
  - As forças dizem-se tangenciais se forem tangentes à superfície de contacto entre os corpos
  - O peso actua no volume do corpo, não se podendo classificar à priori como uma força normal ou tangencial



Sistemas de Forças e Binários

Classificação das Forças

- Forças de tracção e de compressão

  – As forças de tracção tendem a aumentar as dimensões de um objecto, ao longo da direcção em que actuam

  – As forças de compressão tendem a reduzir as dimensões de um objecto, ao longo da direcção em que actuam

Forças de Tracção

Forças de Compressão

Sistemas de Forças e Binários

Classificação das Forças

- Forças Fundamentais

  – Forças responsáveis pela interacção de todas as partículas, e que não podem ser explicadas pela existência de uma força mais fundamental

  – Na natureza existem quatro forças fundamentais

    - Força Gravitacional
    - Força Electromagnética
    - Força Nuclear Forte
    - Força Nuclear Fraca

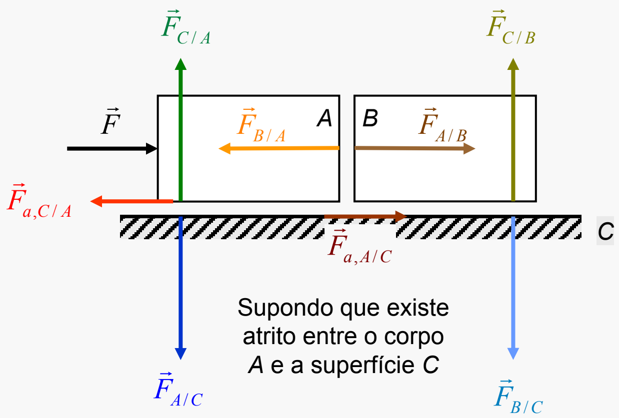
    Forças macroscópicas que observamos entre os corpos

  – As forças fundamentais fazem-se sentir sem que exista contacto entre os corpos

Sistemas de Forças e Binários

Classificação das Forças

- Forças de Contacto – Entre Superfícies
  - Resultam do contacto entre corpos
  - São perpendiculares ou tangentes às superfícies de contacto



$$F_{C/A} = F_{A/C}$$

$$F_{C/B} = F_{B/C}$$

$$F_{a,C/A} = F_{a,A/C}$$

$$F_{A/B} = F_{B/A}$$

Sistemas de Forças e Binários

Classificação das Forças

- Força de Contacto – Força de Atrito
  - Surge quando duas superfícies em contacto deslizam, ou tendem a deslizar, uma relativamente à outra
  - Depende do acabamento entre as superfícies em contacto
    - O atrito aumenta com o aumento da rugosidade das superfícies

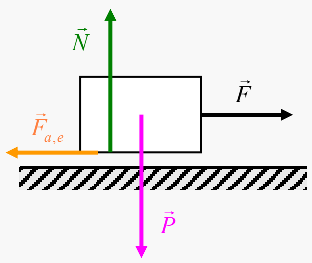
  - Depende da interacção entre os átomos e moléculas das duas superfícies
    - O atrito é maior para materiais que interagem mais fortemente

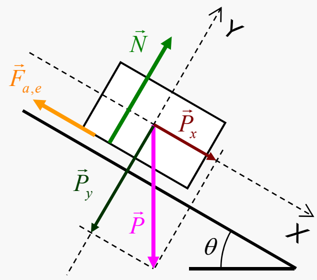
  - Não depende da área de contacto entre os dois corpos

Sistemas de Forças e Binários

Tipos de Forças

- Forças de Contacto – Força de Atrito Estático
  - Se não houver movimento relativo entre as superfícies, o atrito diz-se estático
  - Só existe atrito estático se existirem forças aplicadas que tendam a deslocar uma superfície relativamente à outra





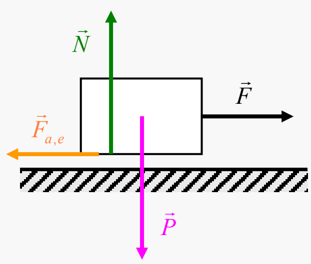
$\vec{F}_{a,e} = -\vec{F}$ Se $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{a,e} = \vec{0}$ $\vec{F}_{a,e} = -\vec{P}_x$

Sistemas de Forças e Binários

Tipos de Forças

- Forças de Contacto – Força de Atrito Estático
  - A força de atrito estático aumenta com a força aplicada, até atingir um valor máximo, dado por

    $F_{a,e,máx.} = \mu_e N$ $\mu_e =$ coeficiente de atrito estático
  - Se a força aplicada sobre o corpo, no sentido do movimento, aumentar, o corpo inicia o movimento
    - Passa a haver atrito cinético



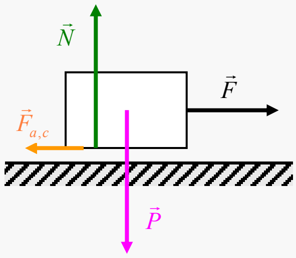
$\vec{F}_{a,e} = -\vec{F}$

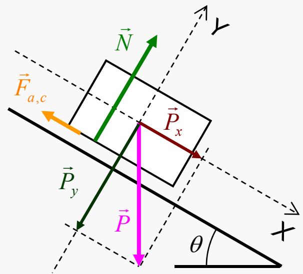
Sistemas de Forças e Binários

Tipos de Forças

- Forças de Contacto – Força de Atrito Cinético
  - A intensidade do atrito cinético tem um valor constante dado por

$F_{a,c} = \mu_c N$ μ_c = coeficiente de atrito cinético

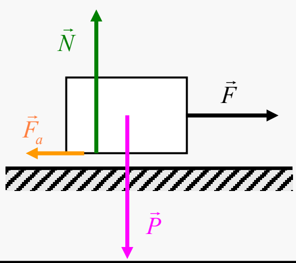


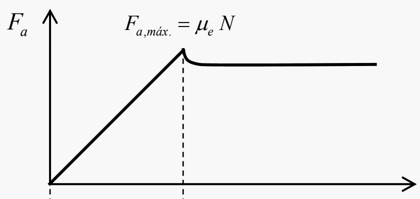


Sistemas de Forças e Binários

Tipos de Forças

- Forças de Contacto – Força de Atrito
  - De um modo geral
    - O coeficiente de atrito estático entre duas superfícies é superior ao coeficiente de atrito cinético
    - A força de atrito cinética é inferior ao valor máximo da força de atrito estático (para o mesmo corpo e a mesma superfície)
  - Havendo movimento relativo entre as superfícies em contacto, estas
    - Aquecem (devido à dissipação de energia)
    - Sofrem desgaste





Sistemas de Forças e Binários

Tipos de Forças

- Forças de Contacto – Força de Atrito (Resumo)
  - Depende
    - Dos materiais que constituem as superfícies de contacto
    - Do acabamento das superfícies em contacto
  - Não depende da área de contacto entre as superfícies
  - Diz-se
    - Estática se não houver movimento relativo entre as superfícies, assumindo um valor dado por

$$0 < F_{ae} \leq \mu_e N$$

    - Cinética se houver movimento relativo entre as superfícies, assumindo um valor dado por

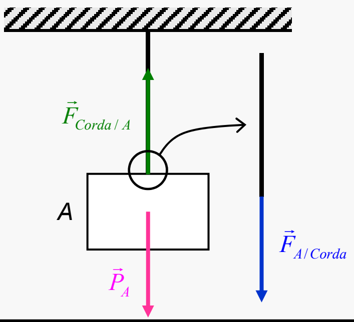
$$F_{ac} = \mu_c N$$

  - Geralmente o coeficiente de atrito estático é superior ao coeficiente de atrito cinético

Sistemas de Forças e Binários

Tipos de Forças

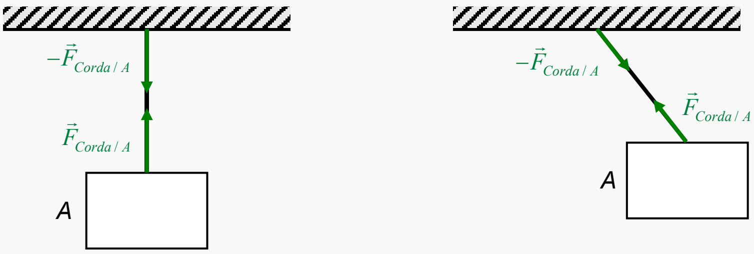
- Forças de Contacto – Cordas, Fios e Cabos
  - Podemos exercer uma força de contacto num objecto usando uma corda, fio ou cabo
    - O corpo suspenso na corda, exerce uma força de tracção na corda
    - A corda reage sobre o corpo exercendo uma força com a mesma direcção e intensidade, mas sentido contrário



Sistemas de Forças e Binários

Tipos de Forças

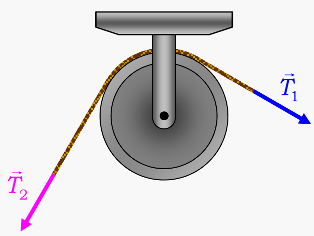
- Forças de Contacto – Cordas, Fios e Cabos
  - Se o peso do cabo puder ser desprezado quando comparado com a tensão aplicada, a força
    - Tem a direcção do cabo
    - Transmite-se ao longo do cabo, sendo aplicada uma força com a mesma direcção, intensidade e sentido oposto na outra extremidade



Sistemas de Forças e Binários

Tipos de Forças

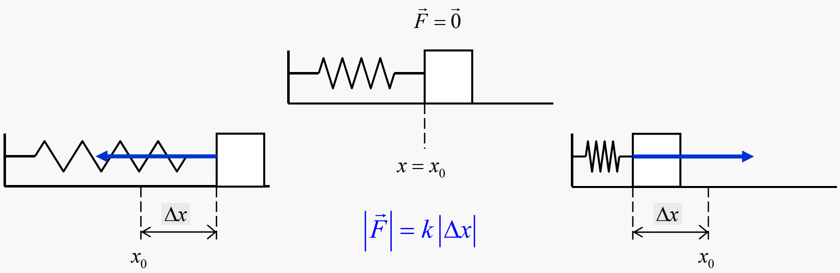
- Forças de Contacto – Cordas, Fios e Cabos
  - Para alterar a direcção de uma corda, pode-se utilizar uma roldana
  - As tensões na corda, dos dois lados da roldana, são iguais se
    - O peso da corda for desprezável comparado com as tensões nela aplicada
    - A roldana puder rodar livremente (sem atrito no seu eixo)
    - A corda estiver estacionária ou fizer rodar a roldana com velocidade angular constante



Sistemas de Forças e Binários

Tipos de Forças

- Forças de Contacto – Molas
  - Uma mola exerce força se distendida ou comprimida relativamente ao seu comprimento em repouso
  - A força exercida por uma mola
    - Tem a direcção do eixo que une as extremidades da mola
    - É proporcional à compressão ou distensão da mola
    - Tem sentido contrário à deformação sofrida



Sistemas de Forças e Binários

Partícula, ou Massa Pontual

- Em mecânica, uma partícula é um objecto pontual com massa, mas com dimensões nulas

- Um corpo pode ser considerado como uma partícula se
  - O seu tamanho, forma e estrutura forem irrelevantes no contexto do estudo em causa
  - Todos os seus pontos se moverem com a mesma velocidade

Sistemas de Forças e Binários

Estática da Partícula

- A estática é o ramo da Mecânica que estuda os objectos em equilíbrio

- Um objecto está em equilíbrio se, num referencial inercial,
  - Todos os seus pontos tiverem velocidade constante
  - Todos os seus pontos tiverem velocidade nula

- Das leis de Newton, decorre que um objecto estará em equilíbrio se
  - A aceleração de todos os seus pontos for nula
  - A força resultante (ou resultante) que actua em cada ponto do objecto for nula

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \forall_{\textit{ponto do objecto considerado}}$$

Sistemas de Forças e Binários

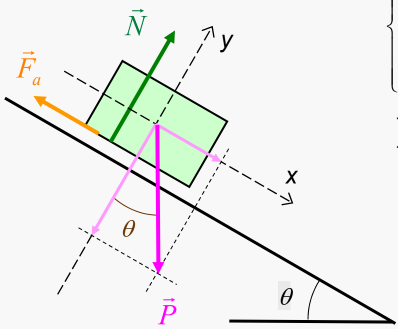
Estática da Partícula

- Para resolver um problema de estática da partícula, é necessário efectuar os seguintes passos
  - Desenhar o diagrama de corpo livre do objecto em estudo
    - Identificar o objecto que se pretende isolar
      - Depende das forças que se pretendem determinar
    - Fazer um esboço do objecto isolado, representando
      - Dimensões relevantes
      - Ângulos
    - Representar todas as forças externas que actuam sobre o objecto isolado
      - Designando de forma clara cada uma das forças que actuam no objecto
  - Escolher e representar um sistema de eixos apropriado, que facilite a resolução do problema
  - Escrever todas as forças na forma analítica, no sistema de eixos escolhido
  - Resolver a equação de equilíbrio, de modo a determinar as forças ou parâmetros desconhecidos

Sistemas de Forças e Binários

Estática da Partícula

- Exemplo 1):
  - Determinar a força de atrito estática que actua no bloco



$$\begin{cases} \vec{P} = P\,\mathrm{sen}(\theta)\,\hat{\imath} - P\cos(\theta)\,\hat{\jmath} \\ \vec{N} = N\,\hat{\jmath} \\ \vec{F}_a = -F_a\,\hat{\imath} \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = m\,\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_a = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad P\,\mathrm{sen}(\theta)\,\hat{\imath} - P\cos(\theta)\,\hat{\jmath} + N\,\hat{\jmath} - F_a\,\hat{\imath} = \vec{0}$$

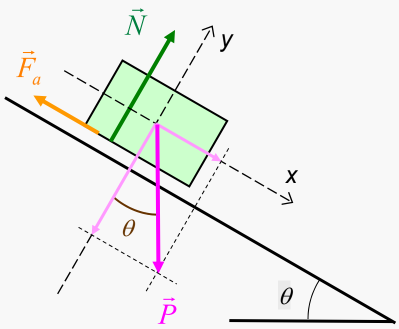
$$\Leftrightarrow \quad \left[P\,\mathrm{sen}(\theta) - F_a\right]\hat{\imath} + \left[N - P\cos(\theta)\right]\hat{\jmath} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P\,\mathrm{sen}(\theta) - F_a = 0 \\ N - P\cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

Sistemas de Forças e Binários

Estática da Partícula

- Exemplo 2):
  - Determinar o coeficiente de atrito estático mínimo que tem de existir entre a superfície e o bloco, de modo a que este esteja em repouso



Parte do problema foi resolvido no exemplo 1), tendo-se obtido o resultado

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F_a = P\,\mathrm{sen}(\theta) \\ N = P\cos(\theta) \end{cases}$$

Considerando que o corpo está na iminência de iniciar o movimento

$$F_a = \mu_e N$$

Usando as equações anteriores, e resolvendo em ordem a μ_e

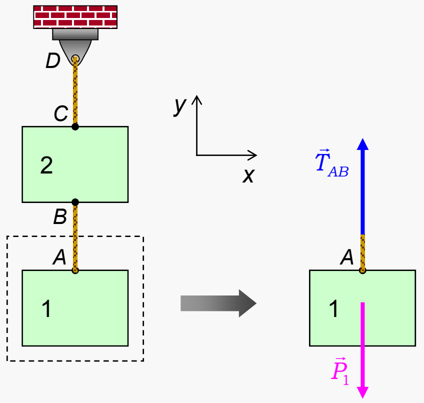
$$\mu_e \cancel{P}\cos(\theta) = \cancel{P}\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \mu_e = \mathrm{tg}(\theta)$$

Sistemas de Forças e Binários

Estática da Partícula

- Exemplo 3):
  - Determinar as tensões nas cordas *AB* e *CD*

Comecemos por determinar a tensão na corda *AB*



$$\begin{cases} \vec{T}_{AB} = T_{AB}\,\hat{j} \\ \vec{P} = -P\,\hat{j} \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \iff \vec{T}_{AB} + \vec{P}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow T_{AB}\,\hat{j} - P_1\,\hat{j} = \vec{0}$$

$$\iff \left(T_{AB} - P_1 \right)\hat{j} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow T_{AB} - P_1 = 0$$

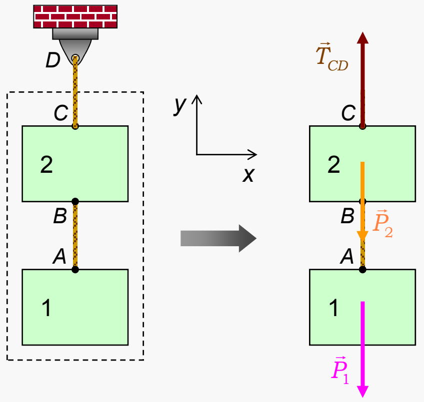
$$\iff T_{AB} = P_1$$

Sistemas de Forças e Binários

Estática da Partícula

- Exemplo 3):
  - Determinar as tensões nas cordas *AB* e *CD*

Determinemos agora a tensão na corda *CD*



$$\begin{cases} \vec{T}_{CD} = T_{CD}\,\hat{j} \\ \vec{P}_1 = -P_1\,\hat{j} \\ \vec{P}_2 = -P_2\,\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{T}_{CD} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow T_{CD}\,\hat{j} - P_1\,\hat{j} - P_2\,\hat{j} = \vec{0}$$

$$\iff \left(T_{CD} - P_1 - P_2 \right)\hat{j} = \vec{0}$$

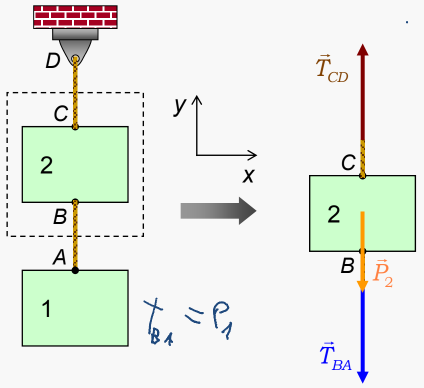
$$\Rightarrow T_{CD} - P_1 - P_2 = 0$$

$$\Rightarrow T_{CD} = P_1 + P_2$$

Estática da Partícula

- Exemplo 3):
  - Determinar as tensões nas cordas *AB* e *CD*

Outra forma de determinar a tensão na corda *CD*



$T_{B1} = P_1$

$$\begin{cases} \vec{T}_{CD} = T_{CD}\,\hat{j} \\ \vec{T}_{BA} = -T_{BA}\,\hat{j} \\ \vec{P}_2 = -P_2\,\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{T}_{CD} + \vec{T}_{BA} + \vec{P}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad T_{CD}\,\hat{j} - T_{BA}\,\hat{j} - P_2\,\hat{j} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(T_{CD} - T_{BA} - P_2 \right)\hat{j} = \vec{0}$$

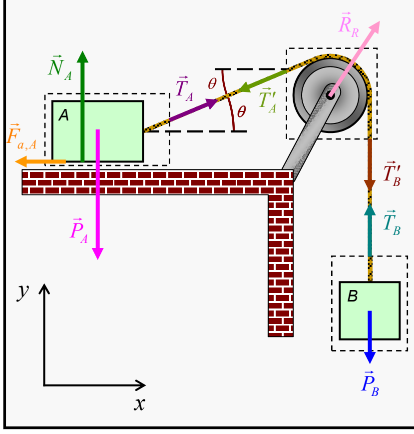
$$\Rightarrow \quad T_{CD} - T_{BA} - P_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_{CD} = T_{BA} + P_2$$

Sistemas de Forças e Binários

Estática da Partícula

- Exemplo 4):
  - Determinar a tensão na corda, o coeficiente de atrito estático mínimo entre a superfície horizontal e o bloco *A,* e a força a que fica sujeito o eixo da roldana, de modo a que o sistema esteja em repouso



Corpo A $\rightarrow \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P}_A + \vec{N}_A + \vec{F}_{a,A} + \vec{T}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} xx: & T_A \cos(\theta) - F_{a,A} = 0 \\ yy: & N_A + T_A \operatorname{sen}(\theta) - P_A = 0 \end{cases}$$

Corpo B $\rightarrow \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{T}_B + \vec{P}_B = \vec{0} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{ yy: \ T_B - P_B = 0$$

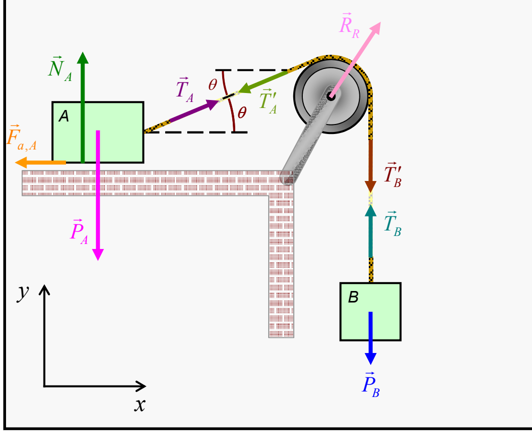
Roldana $\rightarrow \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{T}'_A + \vec{T}'_B + \vec{R}_R = \vec{0} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} xx: & R_{R,x} - T'_A \cos(\theta) = 0 \\ yy: & R_{R,y} - T'_A \operatorname{sen}(\theta) - T'_B = 0 \end{cases}$$

Sistemas de Forças e Binários

Estática da Partícula

- Exemplo 4):
  - Determinar a tensão na corda, o coeficiente de atrito estático mínimo entre a superfície horizontal e o bloco *A,* e a força a que fica sujeito o eixo da roldana, de modo a que o sistema esteja em repouso



A roldana e as cordas são ideais

$$\begin{cases} T'_A = T'_B = T \\ T_A = T'_A \\ T_B = T'_B \end{cases}$$

Substituindo nas equações anteriores

$$\text{Corpo A} \rightarrow \begin{cases} T\cos(\theta) - F_{a,A} = 0 \\ N_A + T\,\text{sen}(\theta) - P_A = 0 \end{cases}$$

$$\text{Corpo A} \rightarrow T - P_B = 0$$

$$\text{Roldana} \rightarrow \begin{cases} R_{R,x} - T\cos(\theta) = 0 \\ R_{R,y} - T\,\text{sen}(\theta) - T = 0 \end{cases}$$

Sistemas de Forças e Binários

Corpo Rígido, ou Indeformável

- Idealização de um corpo sólido de tamanho finito
  - Cujas dimensões não podem ser desprezadas face ao fenómeno em estudo
  - Pode ser constituído por uma distribuição contínua ou discreta de massa
  - Não sofre deformação quando sujeito à acção de forças externas
    - A distância entre quaisquer dois pontos de um corpo rígido não varia ao longo do tempo
  - Quando sujeito a forças externas, o seu movimento pode sofrer
    - Translação
    - Rotação

    $\Big\}$ Ou ambos
  - O efeito das forças externas no movimento
    - De translação é descrito pela 2ª Lei de Newton
    - De rotação é descrito por uma equação análoga à da 2ª Lei de Newton (por vezes designada por 2ª Lei de Newton da Rotação), que envolve a aceleração angular e o **momento de uma força** em relação a um eixo

Sistemas de Forças e Binários

Momento de uma força em relação a um ponto

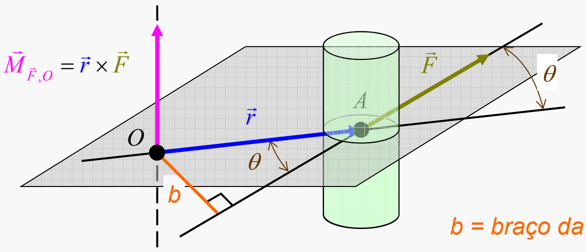
$\vec{M}_{F}^{O} = \vec{M}_{F_x} + \vec{M}_{F_y}$

- Traduz a tendência que a força tem de impor rotação em torno do ponto
- É igual ao produto vectorial entre o vector posição da força em relação ao ponto, e o vector força
- O vector momento está aplicado no ponto em relação ao qual é calculado (é um vector ligado)
- No SI tem unidades de N m
- Considerando as linhas de acção dos vectores posição e força

logo: $|\vec{M}_{F,O}| = bF$

$|\vec{M}_{F,O}| = |\vec{M}_{F_y}| = L|F_y|$

$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$



$$\left|\vec{M}_{\vec{F},O}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r\,F\sin(\theta)$$

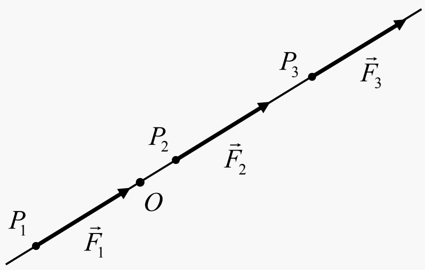
Distância do ponto O, em relação ao qual se calcula o momento, à linha de acção da força

b = braço da força

Sistemas de Forças e Binários

Momento de uma força em relação a um ponto

- Uma força cuja linha de acção passe pelo ponto em relação ao qual se calcula o momento
  - Tem braço nulo
    - Não gera momento

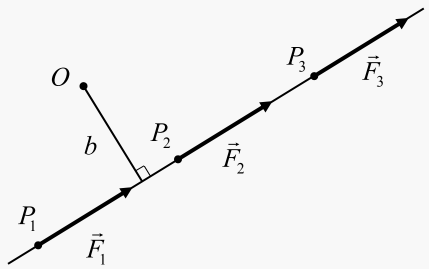


$$\begin{cases} \left|\vec{M}_{\vec{F},O}\right| = b\,F \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F},O} = \vec{0}$$

Sistemas de Forças e Binários

Momento de uma força em relação a um ponto

- Todas as forças sobre uma mesma linha de acção têm o mesmo braço
  - Os vectores momento das forças, em relação a um mesmo ponto, têm todos a mesma direcção
  - O sentido do vector momento não depende do ponto de aplicação da força
  - Se as forças tiverem todas a mesma intensidade, então têm todas o mesmo vector momento
    - O vector força é um vector deslizante

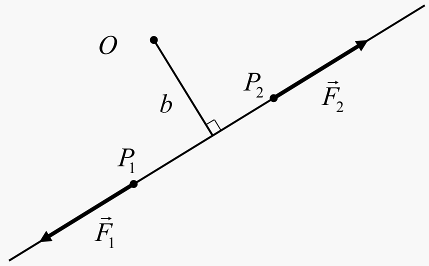


$$\begin{cases} \left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_3\right| = F \\ \left|\vec{M}_{\vec{F}_i,O}\right| = b\,F \\ \vec{M}_{\vec{F}_1,O} = \vec{M}_{\vec{F}_2,O} = \vec{M}_{\vec{F}_3,O} \end{cases}$$

Sistemas de Forças e Binários

Momento de uma força em relação a um ponto

- Os vectores momento, em relação a qualquer ponto do espaço, de duas forças com a mesma linha de acção e sentidos opostos, têm
  - A mesma direcção
  - A mesma intensidade
  - Sentidos opostos

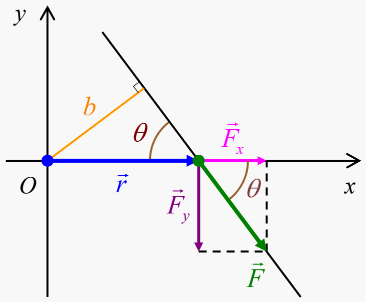


$$\begin{cases} \left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = F \\ \left|\vec{M}_{\vec{F}_i,O}\right| = b\,F \\ \vec{M}_{\vec{F}_1,O} = -\vec{M}_{\vec{F}_2,O} \end{cases}$$

Sistemas de Forças e Binários

Momento de uma força em relação a um ponto

- Consideremos
  - Uma força aplicada num ponto qualquer do espaço
  - O seu vector posição relativamente a um ponto em relação ao qual se pretende calcular o momento da força
  - Um sistema de eixos, cujo eixo dos *XX* é colinear com o vector posição, $\vec{r}$
- Calculemos o vector momento da força $\vec{F}$ em relação a ponto *O*, decompondo a força no sistema de eixos

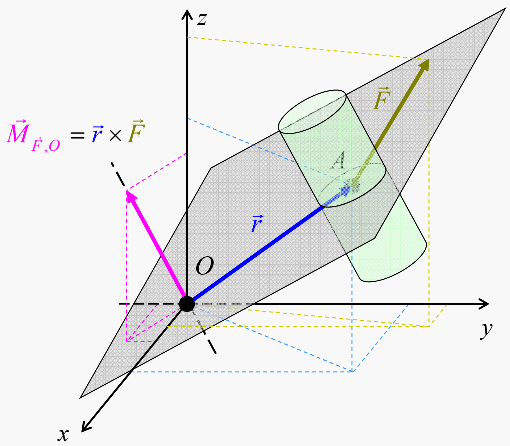


$$\vec{M}_{\vec{F},O} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\left(\vec{F}_x+\vec{F}_y\right)$$
$$= \vec{r}\times\vec{F}_x + \vec{r}\times\vec{F}_y$$
$$= \cancel{\vec{r}\times\vec{F}_x} - r\,F_y\,\hat{k}$$
$$= -r\,F\sin(\theta)\,\hat{k}$$
$$\vec{M}_{\vec{F},O} = -b\,F\,\hat{k} = -r\sin(\theta)\,F\,\hat{k}$$

Sistemas de Forças e Binários

Momento de uma força em relação a um ponto

- As componentes do vector momento de uma força em relação a um ponto, podem ser obtidas analiticamente, através do produto vectorial entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$



$$\vec{M}_{\vec{F},O} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

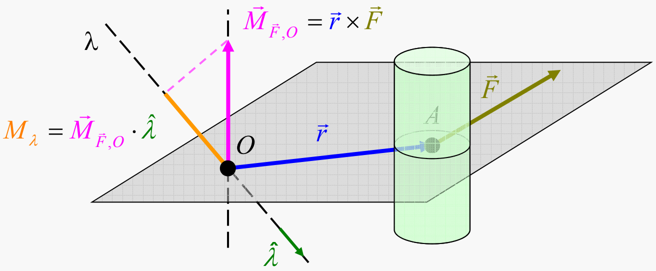
$$= \left(y\,F_z - z\,F_y\right)\hat{\imath} + \left(z\,F_x - x\,F_z\right)\hat{\jmath} + \left(x\,F_y - y\,F_x\right)\hat{k}$$

$$= M_x\,\hat{\imath} + M_y\,\hat{\jmath} + M_z\,\hat{k}$$

Sistemas de Forças e Binários

Momento de uma força em relação a um eixo

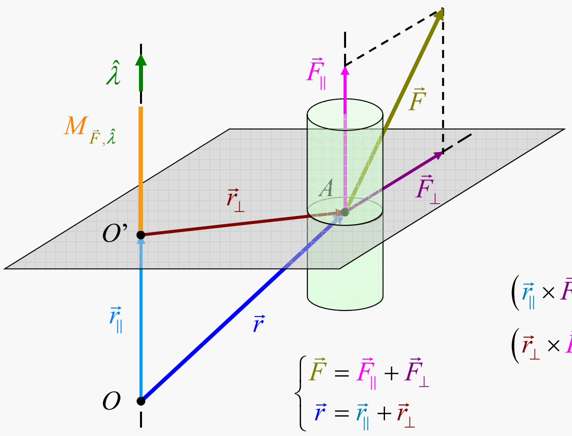
- Traduz a tendência da força impor rotação em torno do eixo
- Projecção do momento, em relação a um ponto do eixo, sobre esse mesmo eixo
  - Para o sistema de eixos *XYZ*, calculando o momento em relação à origem, que é um ponto comum aos três eixos, obtém-se $\vec{M}_{\vec{F},O} = M_x\,\hat{\imath} + M_y\,\hat{\jmath} + M_z\,\hat{k}$
  - Os momentos em relação a cada um dos eixos, são as componentes do vector momento: $M_{OX} = \vec{M}_{\vec{F},O}\cdot\hat{\imath} = M_x$, $M_{OY} = \vec{M}_{\vec{F},O}\cdot\hat{\jmath} = M_y$ e $M_{OZ} = \vec{M}_{\vec{F},O}\cdot\hat{k} = M_z$



Sistemas de Forças e Binários

Momento de uma força em relação a um eixo

- Pode ser calculado decompondo a força numa direcção perpendicular ao eixo, e numa força paralela ao eixo



$$\begin{cases}\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}\\ \vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
M_{\vec{F},\hat{\lambda}} &= \left(\vec{r}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{\lambda}\\
&= \left[\left(\vec{r}_{\parallel}+\vec{r}_{\perp}\right)\times\left(\vec{F}_{\parallel}+\vec{F}_{\perp}\right)\right]\cdot\hat{\lambda}\\
&= \left(\vec{r}_{\parallel}\times\vec{F}_{\parallel}\right)\cdot\hat{\lambda} + \left(\vec{r}_{\parallel}\times\vec{F}_{\perp}\right)\cdot\hat{\lambda} +\\
&\quad + \left(\vec{r}_{\perp}\times\vec{F}_{\parallel}\right)\cdot\hat{\lambda} + \left(\vec{r}_{\perp}\times\vec{F}_{\perp}\right)\cdot\hat{\lambda}
\end{aligned}$$

$$\vec{r}_{\parallel} \text{ é } \parallel \text{ a } \vec{F}_{\parallel} \;\rightarrow\; \vec{r}_{\parallel}\times\vec{F}_{\parallel} = \vec{0}$$

$$\left(\vec{r}_{\parallel}\times\vec{F}_{\perp}\right) \text{ é } \perp \text{ a } \hat{\lambda} \;\rightarrow\; \left(\vec{r}_{\parallel}\times\vec{F}_{\perp}\right)\cdot\hat{\lambda} = 0$$

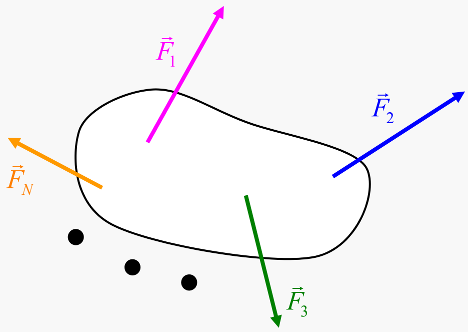
$$\left(\vec{r}_{\perp}\times\vec{F}_{\parallel}\right) \text{ é } \perp \text{ a } \hat{\lambda} \;\rightarrow\; \left(\vec{r}_{\perp}\times\vec{F}_{\parallel}\right)\cdot\hat{\lambda} = 0$$

$$M_{\vec{F},\hat{\lambda}} = \left(\vec{r}_{\perp}\times\vec{F}_{\perp}\right)\cdot\hat{\lambda}$$

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças

- A um conjunto particular de forças que actuam sobre um corpo rígido, chamamos sistema de forças
  - A força resultante, $\vec{R}$,é igual à soma das forças
  - O momento resultante em relação a um ponto *O*, $\vec{M}_{r,O}$, é igual à soma dos momentos das forças calculados relativamente a esse ponto



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_i \vec{F}_i$$

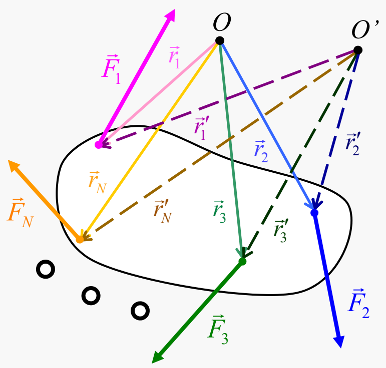
$$\vec{M}_{r,O} = \vec{M}_{\vec{F}_1,O} + \vec{M}_{\vec{F}_2,O} + \vec{M}_{\vec{F}_3,O} + \cdots + \vec{M}_{\vec{F}_N,O}$$

$$= \sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,O}$$

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças – Transformação do Centro de Momentos

- Calculemos o momento resultante de um sistema de forças em relação a um dado ponto *O*
- Calculemos agora o momento resultante do mesmo sistema de forças em relação a um outro ponto *O'*



$$\vec{M}_{r,O} = \vec{M}_{\vec{F}_1,O} + \vec{M}_{\vec{F}_2,O} + \vec{M}_{\vec{F}_3,O} + \cdots + \vec{M}_{\vec{F}_N,O}$$

$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{F}_N$$

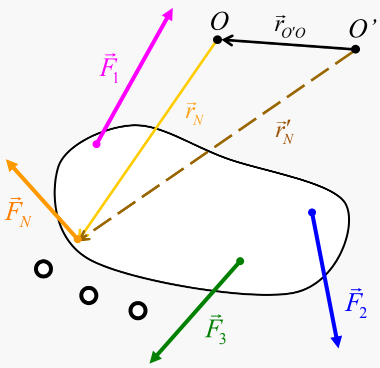
$$\vec{M}_{r,O'} = \vec{M}_{\vec{F}_1,O'} + \vec{M}_{\vec{F}_2,O'} + \vec{M}_{\vec{F}_3,O'} + \cdots + \vec{M}_{\vec{F}_N,O'}$$

$$= \vec{r}\,'_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}\,'_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}\,'_3 \times \vec{F}_3 + \cdots + \vec{r}\,'_N \times \vec{F}_N$$

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças – Transformação do Centro de Momentos

- Designemos por $\vec{r}_{O'O}$ o vector posição do ponto *O* relativamente ao ponto *O'*
- Os vectores posição relativos a *O'* podem ser escritos na forma $\vec{r}_i' = \vec{r}_{O'O} + \vec{r}$
- Substituindo na equação do momento resultante em relação a *O'*



$$\vec{M}_{r,O'} = \vec{r}_1' \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2' \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3' \times \vec{F}_3 + \cdots + \vec{r}_N' \times \vec{F}_N$$

$$= \left(\vec{r}_{O'O} + \vec{r}_1\right) \times \vec{F}_1 + \left(\vec{r}_{O'O} + \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_2 + \left(\vec{r}_{O'O} + \vec{r}_3\right) \times \vec{F}_3 + \cdots + \left(\vec{r}_{O'O} + \vec{r}_N\right) \times \vec{F}_N$$

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças – Transformação do Centro de Momentos

- Aplicando a propriedade distributiva do produto vectorial

$$\vec{M}_{r,O'} = \left(\vec{r}_{O'O} + \vec{r}_1\right) \times \vec{F}_1 + \left(\vec{r}_{O'O} + \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_2 + \left(\vec{r}_{O'O} + \vec{r}_3\right) \times \vec{F}_3 + \cdots + \left(\vec{r}_{O'O} + \vec{r}_N\right) \times \vec{F}_N$$

$$= \vec{r}_{O'O} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O'O} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{O'O} \times \vec{F}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \cdots + \vec{r}_{O'O} \times \vec{F}_N + \vec{r}_N \times \vec{F}_N$$

- Reagrupando os termos

$$\vec{M}_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O'O} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{O'O} \times \vec{F}_3 + \vec{r}_{O'O} \times \vec{F}_N + \cdots$$

$$\cdots + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{F}_N$$

- Pondo $\vec{r}_{O'O}$ em evidência

$$\vec{M}_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_N\right) + \cdots$$

$$\cdots + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{F}_N$$

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças – Transformação do Centro de Momentos

$$\vec{M}_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \overbrace{\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_N\right)}^{\vec{R}} + \underbrace{\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{F}_N}_{\vec{M}_{r,O}}$$

- Tendo em conta
  - A expressão do momento resultante das forças em relação ao ponto *O*

$$\vec{M}_{r,O} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{F}_N$$

  - A expressão da resultante das forças

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N$$

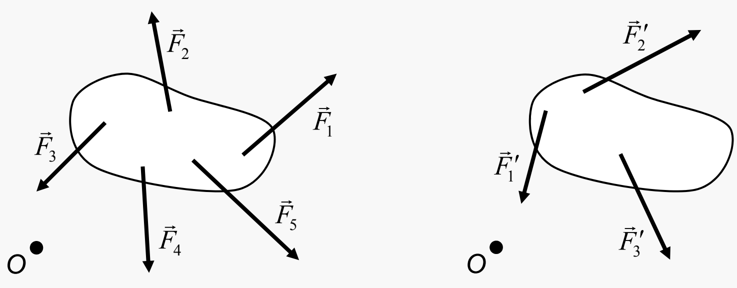
- Podemos finalmente escrever

$$\vec{M}_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O}$$

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Equivalentes

- Dois sistemas de forças que actuam num corpo rígido dizem-se equivalentes, em relação a um ponto O, se produzirem o mesmo efeito sobre o corpo rígido
  - Têm a mesma resultante $\left(\vec{R} = \vec{R}'\right)$
  - Têm o mesmo momento resultante em relação ao ponto *O* $\left(\vec{M}_{r,O} = \vec{M}'_{r,O}\right)$



Sistemas de Forças e Binários

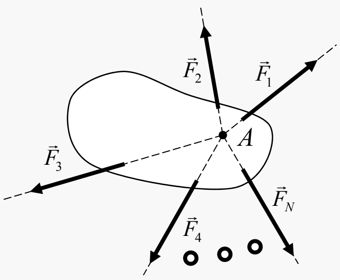
Sistemas de Forças Equivalentes – Casos Particulares

- Forças Complanares
  - Um sistema de forças diz-se complanar se todas as forças que constituem o sistema se encontram num mesmo plano
- Forças Concorrentes
  - Um sistema de forças diz-se concorrente se as linhas de acção de todas as forças se interceptarem num mesmo ponto
- Forças Paralelas
  - Um sistema de forças diz-se paralelo se as linhas de acção de todas as forças forem paralelas

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Concorrentes

- Consideremos um sistema de forças aplicadas num corpo rígido
  - As linhas de acção das forças passam todas pelo mesmo ponto
    - O sistema de forças pode ser bidimensional ou tridimensional
- Sendo as forças vectores deslizantes
  - Deslocar os seus pontos de aplicação ao longo das suas linhas de acção
  - Forças aplicadas no ponto de intercepção das linhas de acção (ponto *A*)



Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Concorrentes

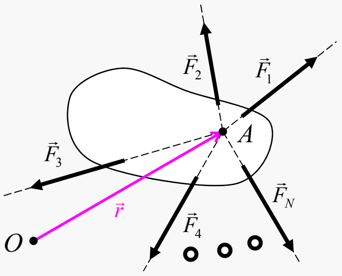
- O movimento de translação do corpo pode ser descrito por uma única força, a resultante, aplicada em qualquer ponto do corpo

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_i \vec{F}_i$$

- Calculemos o momento resultante em relação a um ponto qualquer, *O*

$$\vec{M}_{r,O} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \vec{r} \times \vec{F}_4 + \cdots + \vec{r} \times \vec{F}_N$$

$$= \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \cdots + \vec{F}_N \right) = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_{\vec{R},O}$$



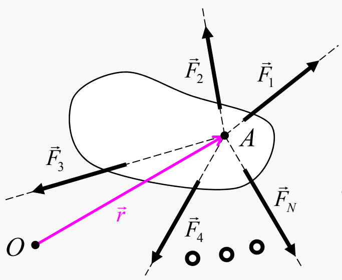
Teorema de Varignon

- O momento resultante de um sistema de forças concorrentes, em relação a um ponto qualquer do espaço, é igual ao momento da resultante em relação ao mesmo ponto do espaço
- Confirma o facto de o momento de uma força em relação a um ponto do espaço, ser igual à soma dos momentos das componentes das forças em relação ao mesmo ponto do espaço

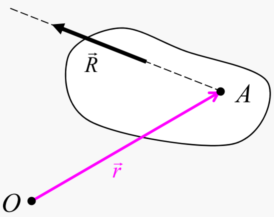
Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Concorrentes

- Um sistema de forças concorrentes pode então ser substituído por um sistema mais simples, com uma única força
  - Igual à resultante das forças $\left(\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \right)$
  - Aplicada segundo uma linha de acção que passa pelo ponto de intercepção das linhas de acção de todas as forças, de tal modo que o momento resultante, é igual ao momento da resultante $\left(\vec{M}_{r,O} = \vec{M}_{\vec{R},O} \right)$



Estes dois sistemas de forças são equivalentes

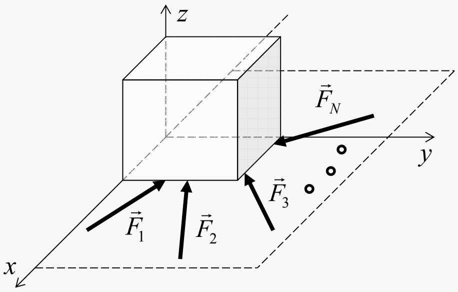


Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Complanares

- Consideremos um sistema de forças que se encontram todas no mesmo plano (por simplicidade, o plano *XY*)

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = F_{1x}\,\hat{i} + F_{1y}\,\hat{j} \\ \vec{F}_2 = F_{2x}\,\hat{i} + F_{2y}\,\hat{j} \\ \quad\vdots \\ \vec{F}_N = F_{Nx}\,\hat{i} + F_{Ny}\,\hat{j} \end{cases}$$



Calculando a resultante de todas as forças

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$$

$$= F_{1x}\,\hat{i} + F_{1y}\,\hat{j} + F_{2x}\,\hat{i} + F_{2y}\,\hat{j} + \cdots + F_{Nx}\,\hat{i} + F_{Ny}\,\hat{j}$$

$$= \left(F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{Nx}\right)\hat{i} + \left(F_{1y} + F_{2y} + \cdots \pm F_{Ny}\right)\hat{j}$$

$$\vec{R} = R_x\,\hat{i} + R_y\,\hat{j}$$

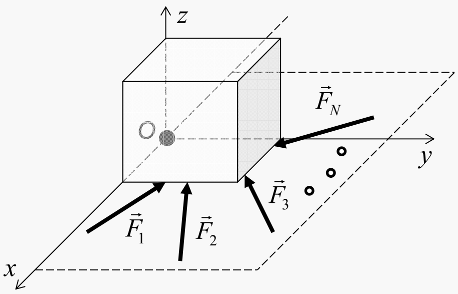
A resultante também só vai ter componentes no plano (neste caso *XY*)

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Complanares

- O vector momento de cada uma das forças em relação a um ponto do plano, a origem, por exemplo, é perpendicular ao plano

$$\begin{cases} \vec{M}_{\vec{F}_1,O} = M_{\vec{F}_1,O}\,\hat{k} = M_{1z}\,\hat{k} \\ \vec{M}_{\vec{F}_2,O} = M_{\vec{F}_2,O}\,\hat{k} = M_{2z}\,\hat{k} \\ \quad\vdots \\ \vec{M}_{\vec{F}_N,O} = M_{\vec{F}_N,O}\,\hat{k} = M_{Nz}\,\hat{k} \end{cases}$$



Calculando o momento resultante

$$\vec{M}_{r,O} = \sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,O} = \vec{M}_{\vec{F}_1,O} + \vec{M}_{\vec{F}_2,O} + \cdots + \vec{M}_{\vec{F}_N,O}$$

$$= M_{1z}\,\hat{k} + M_{2z}\,\hat{k} + \cdots + M_{Nz}\,\hat{k}$$

$$= \left(M_{1z} + M_{2z} + \cdots + M_{Nz}\right)\hat{k}$$

$$\vec{M}_{r,O} = M_z\,\hat{k}$$

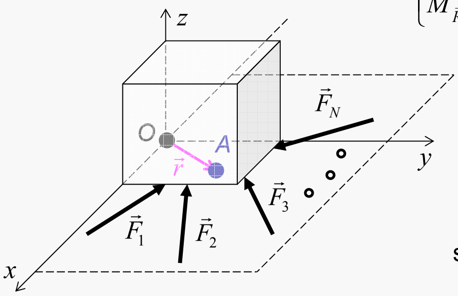
O momento resultante só tem componentes segundo a direcção perpendicular ao plano no qual estão definidas as forças

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Complanares

- Podemos substituir o sistema de força por uma única força, igual à resultante, aplicada num ponto *A*, de coordenadas (x,y), tal que o momento da resultante seja igual ao momento resultante

$$\begin{cases} \vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} \\ \vec{R} = R_x\,\hat{i} + R_y\,\hat{j} \end{cases}$$



Calculando o momento da resultante, aplicada no ponto *A*, relativamente ao ponto *O*

$$\begin{cases} \vec{M}_{r,O} = M_z\,\hat{k} \\ \vec{M}_{\vec{R},O} = \vec{r} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{vmatrix} = \left(x\,R_y - y\,R_x \right)\hat{k} \end{cases}$$

$$M_z = x\,R_y - y\,R_x \quad \Leftrightarrow \quad y\,R_x = x\,R_y - M_z$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{R_y}{R_x}x - \frac{M_z}{R_x}$$

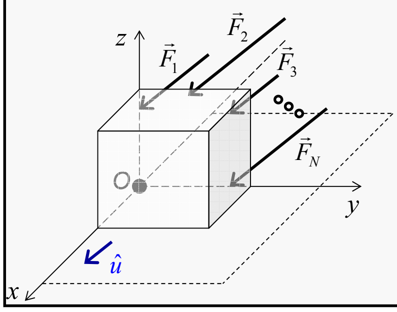
O sistema de forças complanar pode ser substituído pela sua resultante aplicada num ponto da recta anteriormente obtida

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Paralelas

- Consideremos um sistema de forças paralelas, cuja direcção é dada pelo versor $\hat{u}$

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = F_1\,\hat{u} \\ \vec{F}_2 = F_2\,\hat{u} \\ \vdots \\ \vec{F}_n = F_n\,\hat{u} \end{cases}$$



Calculemos a resultante das forças

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$$

$$= F_1\,\hat{u} + F_2\,\hat{u} + \cdots + F_N\,\hat{u}$$

$$= \left(F_1 + F_2 + \cdots + F_N \right)\hat{u}$$

$$\vec{R} = \left(\sum_i F_i \right)\hat{u}$$

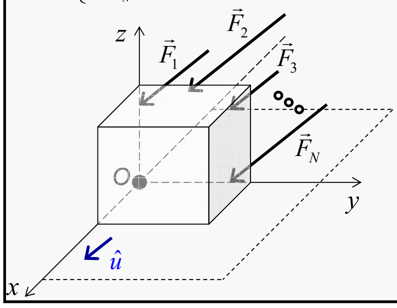
A resultante tem de ser um vector com a direcção do versor que define as direcções dos vectores força que actuam no sistema

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Paralelas

- O vector momento de cada uma das forças em relação a um ponto do plano, a origem, *O*, por exemplo, é dado por

$$\begin{cases} \vec{M}_{\vec{F}_1,O} = \vec{r}_1 \times F_1\,\hat{u} = F_1\,\vec{r}_1 \times \hat{u} \\ \vec{M}_{\vec{F}_2,O} = \vec{r}_2 \times F_2\,\hat{u} = F_2\,\vec{r}_2 \times \hat{u} \\ \vdots \\ \vec{M}_{\vec{F}_N,O} = \vec{r}_N \times F_N\,\hat{u} = F_N\,\vec{r}_N \times \hat{u} \end{cases}$$



Calculemos o momento resultante em relação ao ponto *O*

$$\vec{M}_{r,O} = \sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,O} = \vec{M}_{\vec{F}_1,O} + \vec{M}_{\vec{F}_2,O} + \cdots + \vec{M}_{\vec{F}_N,O}$$

$$= F_1\,\vec{r}_1 \times \hat{u} + F_2\,\vec{r}_2 \times \hat{u} + \cdots + F_N\,\vec{r}_N \times \hat{u}$$

$$= \left(F_1\,\vec{r}_1 + F_2\,\vec{r}_2 + \cdots + F_N\,\vec{r}_N\right) \times \hat{u}$$

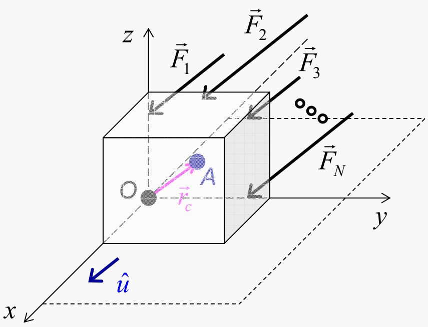
$$\vec{M}_{r,O} = \sum_i \left(F_i\,\vec{r}_i\right) \times \hat{u}$$

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Paralelas

- Podemos substituir o sistema de forças por uma única força, aplicada num ponto tal que o momento da resultante seja igual ao momento resultante

$$\vec{M}_{\vec{R},O} = \vec{M}_{r,O} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_c \times \left(\sum_i F_i\right)\hat{u} = \sum_i \left(F_i\,\vec{r}_i\right) \times \hat{u} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_i F_i\right)\vec{r}_c \times \hat{u} = \sum_i \left(F_i\,\vec{r}_i\right) \times \hat{u}$$



Como ambos os membros da igualdade têm um produto vectorial pelo mesmo vector, a igualdade verifica-se se os primeiros vectores do produto vectorial forem iguais, logo

$$\left(\sum_i F_i\right)\vec{r}_c = \sum_i \left(F_i\,\vec{r}_i\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_c = \frac{\sum_i \left(F_i\,\vec{r}_i\right)}{\sum_i F_i}$$

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Paralelas

- O ponto de aplicação da resultante, definido pelo vector posição, designa-se por centro de forças paralelas
- Decompondo a última expressão para o sistema de eixos Cartesiano

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i (F_i\,\vec{r}_i)}{\sum_i F_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_i (F_i\,x_i)}{\sum_i F_i} \\ y_c = \dfrac{\sum_i (F_i\,y_i)}{\sum_i F_i} \\ z_c = \dfrac{\sum_i (F_i\,z_i)}{\sum_i F_i} \end{cases}$$

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Paralelas

- Para um conjunto de massas

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i (P_i\,\vec{r}_i)}{\sum_i P_i} \Leftrightarrow \vec{r}_c = \frac{\sum_i (m_i\,g\,\vec{r}_i)}{\sum_i m_i\,g} \Leftrightarrow \vec{r}_c = \frac{g\sum_i (m_i\,\vec{r}_i)}{g\sum_i m_i} \Leftrightarrow \vec{r}_c = \frac{\sum_i (m_i\,\vec{r}_i)}{\sum_i m_i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_i (m_i\,x_i)}{\sum_i m_i} \\ y_c = \dfrac{\sum_i (m_i\,y_i)}{\sum_i m_i} \\ z_c = \dfrac{\sum_i (m_i\,z_i)}{\sum_i m_i} \end{cases}$$

Para um corpo rígido

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}\,\rho\,dV}{\int \rho\,dV}$$

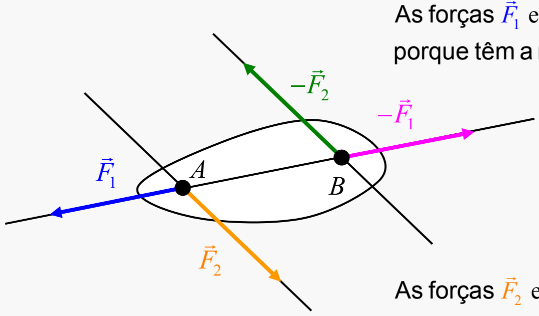
$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \Rightarrow \quad dm = \rho\,dV$$

Sistemas de Forças e Binários

Binários

- Um binário é um sistema de duas forças
  - Com linhas de acção paralelas e não coincidentes
  - A mesma intensidade
  - Sentidos contrários

As forças $\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_1$ não constituem um binário, porque têm a mesma linha de acção

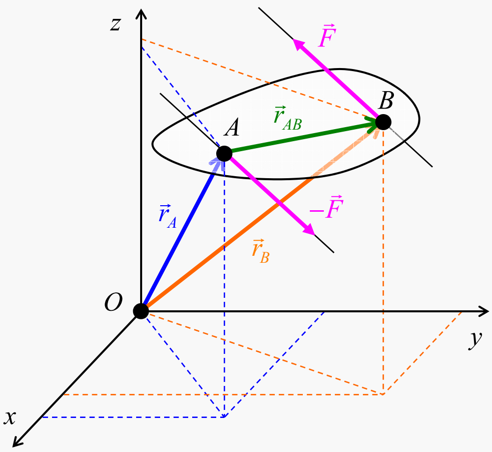


As forças $\vec{F}_2$ e $-\vec{F}_2$ têm linhas de acção paralelas, mas não colineares, logo constituem um binário

Sistemas de Forças e Binários

Momento de um Binário

- O momento de um binário em relação a um ponto do espaço é igual ao momento resultante do sistema de duas forças que o constituem



$$\vec{M}_{B,O} = \vec{M}_{\vec{F},O} + \vec{M}_{-\vec{F},O}$$

$$= \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times \left(-\vec{F}\right)$$

$$= \vec{r}_B \times \vec{F} - \vec{r}_A \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_{B,O} = \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

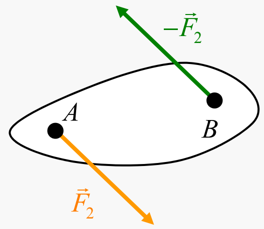
$$\vec{M}_{B,O} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

O momento de um binário não depende do ponto em relação ao qual é calculado (é um vector livre)

Sistemas de Forças e Binários

Binários

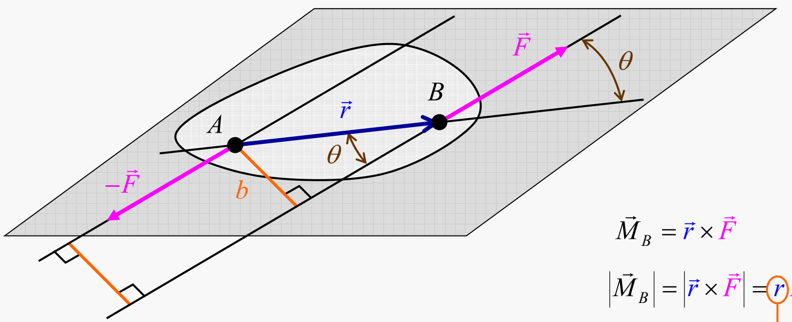
- A resultante de um binário é nula
  - Não impõe translação
- O momento resultante de um binário, em relação a qualquer ponto do espaço, não é nulo
  - Impõe rotação



Sistemas de Forças e Binários

Momento de um Binário

- Braço de um binário



$$\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{F}$$

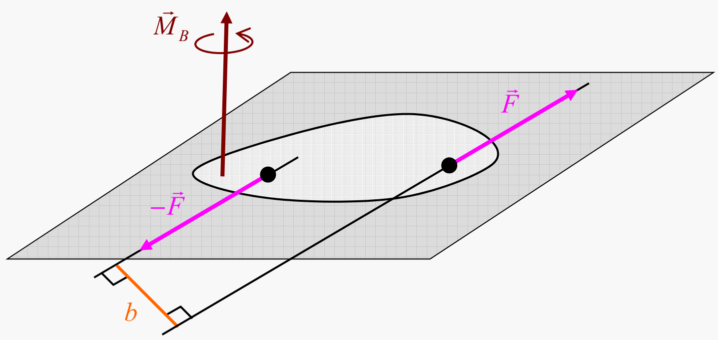
$$\left|\vec{M}_B\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = rF\sin(\theta)$$

b = braço do binário ← Distância entre as linhas de acção das forças do binário (medida na perpendicular) ←

Sistemas de Forças e Binários

Momento de um Binário

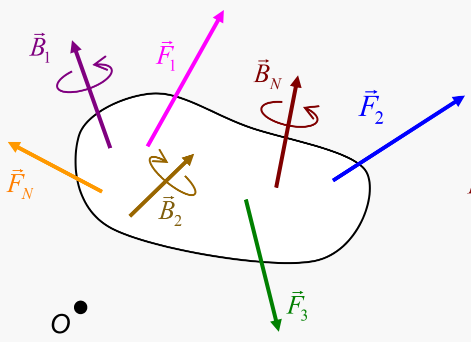
- Resumindo
  - O momento de um binário é um vector livre
    - Perpendicular ao plano definido pelas forças que o constituem
    - Sentido dado pela regra da mão direita para a rotação imposta pelas forças
    - Módulo dado pelo produto do braço do binário pelo módulo de uma das forças que o constituem $(M_B = b\,F)$



Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças e Binários

- A um conjunto particular de forças e binários que actuam sobre um corpo rígido chamamos sistema de forças e binários
  - A força resultante, $\vec{R}$,é igual à soma das forças
  - O momento resultante em relação a um ponto *O*, $\vec{M}_{r,O}$, é igual à soma dos momentos das forças calculados relativamente a esse ponto com a soma dos momentos dos binários aplicados



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_i \vec{F}_i$$

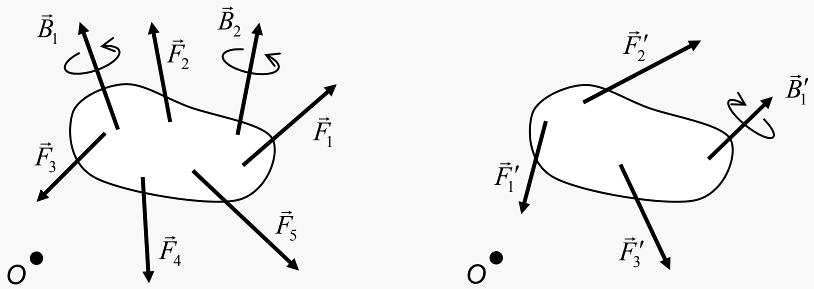
$$\vec{M}_{r,O} = \vec{M}_{\vec{F}_1,O} + \cdots + \vec{M}_{\vec{F}_n,O} + \vec{M}_{\vec{B}_1} + \cdots + \vec{M}_{\vec{B}_N}$$

$$= \sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,O} + \sum_i \vec{M}_{B_i}$$

Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças e Binários Equivalentes

- Dois sistemas de forças e binários que actuam num corpo rígido dizem-se equivalentes, em relação a um ponto *O*, se produzirem o mesmo efeito sobre o corpo rígido
  - Têm a mesma resultante $\left(\vec{R} = \vec{R}'\right)$
  - Têm o mesmo momento resultante em relação ao ponto *O* $\left(\vec{M}_{r,O} = \vec{M}'_{r,O}\right)$



Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças e Binários Equivalentes

- Se dois sistemas de forças e binários são equivalentes em relação a um ponto, então são equivalentes em relação a qualquer outro ponto

$$\text{Sistema 1} \rightarrow \begin{cases} \vec{R}^1 \\ \vec{M}^1_{r,O} \end{cases} \qquad \text{Sistema 2} \rightarrow \begin{cases} \vec{R}^2 \\ \vec{M}^2_{r,O} \end{cases}$$

$$\vec{M}^1_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \vec{R}^1 + \vec{M}^1_{r,O} \qquad \vec{M}^2_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \vec{R}^2 + \vec{M}^2_{r,O}$$

$$\vec{R}^1 = \vec{R}^2 = \vec{R}$$

$$\vec{M}^1_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}^1_{r,O} \qquad \vec{M}^2_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}^2_{r,O}$$

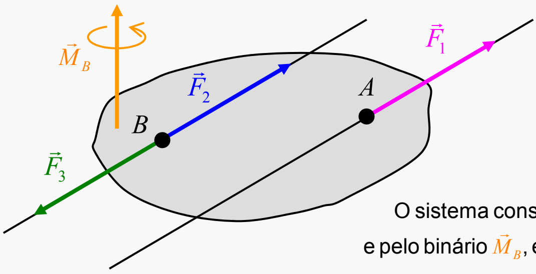
$$\vec{M}^1_{r,O} = \vec{M}^2_{r,O} = \vec{M}_{r,O}$$

$$\vec{M}^1_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O} \qquad \vec{M}^2_{r,O'} = \vec{r}_{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O}$$

Sistemas de Forças e Binários

Translação de Forças

- Consideremos uma força $\vec{F}_1$ aplicada num ponto *A* de um corpo rígido
- Pretende-se aplicar a força $\vec{F}_1$ num outro ponto *B* do corpo rígido
  - Apliquemos no ponto *B* duas forças, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, com a direcção e intensidade da força $\vec{F}_1$, mas sentidos opostos $\left(\vec{F}_2 = \vec{F}_1 \text{ e } \vec{F}_3 = -\vec{F}_2 = -\vec{F}_1\right)$
    - As forças $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, bem como os seus momentos em relação a qualquer ponto do espaço, anulam-se
    - As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ formam um binário com momento $\vec{M}_B$



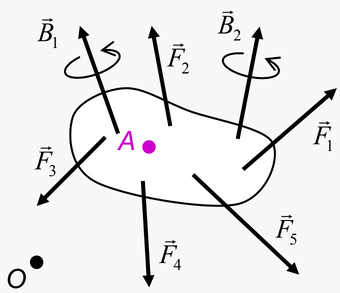
A força $\vec{F}_1$ aplicada no ponto *A*, produz o mesmo efeito sobre o corpo rígido, relativamente ao ponto *B*, que o momento do binário $\vec{M}_B$ e a força $\vec{F}_2$ aplicada no ponto *B*

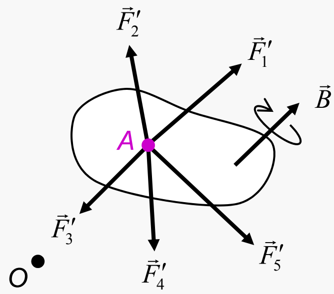
O sistema constituído pela força $\vec{F}_2$ aplicada no ponto *B* e pelo binário $\vec{M}_B$, é equivalente à força $\vec{F}_1$ aplicada no ponto *A*

Sistemas de Forças e Binários

Translação de Forças

- Consideremos um sistema de forças e binários a actuar num corpo rígido
- Podemos efectuar a translação de cada uma das forças para o ponto *A*, tal como ilustrado anteriormente
  - Um sistema de forças concorrentes no ponto *A*
  - Um conjunto de binários
    - Sendo vectores livres, podem ser adicionados e substituídos por um único binário

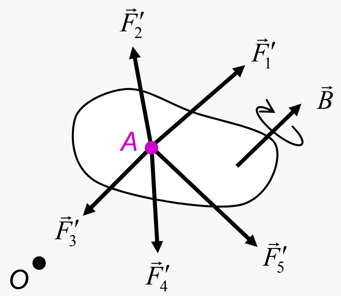


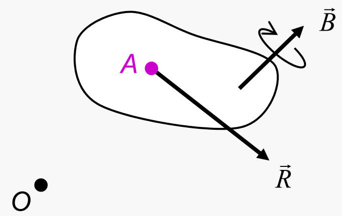


Sistemas de Forças e Binários

Translação de Forças

- Aplicando o teorema de Varignon
  - O sistema de forças e binários anteriormente obtido, pode então ser substituído
    - Por uma única força (a resultante), aplicada no ponto A
    - Um binário, aplicado em qualquer ponto do espaço





Sistemas de Forças e Binários

Automomento ou Invariante Escalar de um Sistema

- O automomento de um sistema de forças é igual ao produto escalar entre a resultante e o momento resultante

$$A = \vec{R} \cdot \vec{M}_{r,O}$$

- Consideremos que os momentos eram calculados em relação a um outro ponto P

$$A' = \vec{R} \cdot \vec{M}_{r,P}$$

  - Usando a expressão anteriormente obtida para a transformação do centro de momentos $\left(\vec{M}_{r,P} = \vec{r}_{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O}\right)$

$$A' = \vec{R} \cdot \left(\vec{r}_{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O} \right) \Leftrightarrow A' = \boxed{\vec{R} \cdot \boxed{\left(\vec{r}_{PO} \times \vec{R} \right)}} + \vec{R} \cdot \vec{M}_{r,O}$$

Vector perpendicular a $\vec{R}$

$$\vec{R} \cdot \left(\vec{r}_{PO} \times \vec{R} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow A' = \vec{R} \cdot \vec{M}_{r,O}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A' = A}$$

O automomento é constante, razão pela qual se designa também por invariante escalar

Sistemas de Forças e Binários

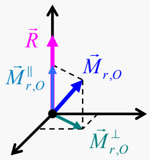
Momento Resultante Mínimo

- Consideremos a expressão da transformação do centro de momentos

$$\vec{M}_{r,P} = \vec{r}_{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O}$$

- Decompondo o vector $\vec{M}_{r,O}$ numa componente paralela a $\vec{R}$, $\vec{M}^{\parallel}_{r,O}$, e numa componente perpendicular a $\vec{R}$, $\vec{M}^{\perp}_{r,O}$

$$\vec{M}_{r,P} = \vec{r}_{PO} \times \vec{R} + \vec{M}^{\parallel}_{r,O} + \vec{M}^{\perp}_{r,O}$$



- Como o automomento, dado por $A = \vec{R} \cdot \vec{M}_{r,O}$, é constante, e $\vec{R}$ também é constante, então $\vec{M}^{\parallel}_{r,O}$ tem de ser constante, o momento mínimo do sistema de forças é obtido quando

$$\vec{M}^{\perp}_{r,O} + \vec{r}_{PO} \times \vec{R} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{M}^{\perp}_{r,O} = -\vec{r}_{PO} \times \vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{M}^{\perp}_{r,O} = \vec{r}_{OP} \times \vec{R}$$

- P define os pontos do espaço relativamente aos quais o momento é mínimo

Sistemas de Forças e Binários

Eixo Central de Momentos

- Para obter os pontos do espaço em relação aos quais o momento resultante é mínimo, basta considerar que o momento resultante é paralelo à resultante, ou seja, que se verifica a equação

$$\vec{M}_{r,P} = k\,\vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O} = k\,\vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R} \cdot \left(\vec{r}_{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O}\right) = \vec{R} \cdot \left(k\,\vec{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{R} \cdot \left(\vec{r}_{PO} \times \vec{R}\right) + \vec{R} \cdot \vec{M}_{r,O} = k\,R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R} \cdot \vec{M}_{r,O} = k\,R^2 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{A}{R^2}$$

- Usando a equação de transformação do centro de momentos, e o resultado anterior, virá

$$\vec{M}_{r,P} = k\,\vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O} = \frac{A}{R^2}\vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad -\vec{r}_{OP} \times \vec{R} + \vec{M}_{r,O} = \frac{A}{R^2}\vec{R}$$

- Considerando as expressões analíticas dos vectores $\vec{r}_{OP}$, $\vec{R}$ e $\vec{M}_{r,O}$,

$$\vec{r}_{OP} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k} \quad , \quad \vec{R} = R_x\,\hat{\imath} + R_y\,\hat{\jmath} + R_z\,\hat{k} \quad , \quad \vec{M}_{r,O} = M_x\,\hat{\imath} + M_y\,\hat{\jmath} + M_z\,\hat{k}$$

Sistemas de Forças e Binários

Eixo Central de Momentos

- Podemos escrever

$$\vec{M}_{r,O} - \vec{r}_{OP} \times \vec{R} = \frac{A}{R^2}\vec{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad M_x\,\hat{\imath} + M_y\,\hat{\jmath} + M_z\,\hat{k} - \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \frac{A}{R^2}\left(R_x\,\hat{\imath} + R_y\,\hat{\jmath} + R_z\,\hat{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad M_x\,\hat{\imath} + M_y\,\hat{\jmath} + M_z\,\hat{k} - \left[\left(y\,R_z - z\,R_y\right)\hat{\imath} + \left(z\,R_x - x\,R_z\right)\hat{\jmath} + \left(x\,R_y - y\,R_x\right)\hat{k}\right]$$
$$= \frac{A}{R^2}\left(R_x\,\hat{\imath} + R_y\,\hat{\jmath} + R_z\,\hat{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[M_x - \left(y\,R_z - z\,R_y\right)\right]\hat{\imath} + \left[M_y - \left(z\,R_x - x\,R_z\right)\right]\hat{\jmath} + \left[M_z - \left(x\,R_y - y\,R_x\right)\right]\hat{k}$$
$$= \frac{A}{R^2}R_x\,\hat{\imath} + \frac{A}{R^2}R_y\,\hat{\jmath} + \frac{A}{R^2}R_z\,\hat{k}$$

Sistemas de Forças e Binários

Eixo Central de Momentos

- Da equação vectorial obtida

$$\left[M_x - \left(y\,R_z - z\,R_y\right)\right]\hat{\imath} + \left[M_y - \left(z\,R_x - x\,R_z\right)\right]\hat{\jmath} + \left[M_z - \left(x\,R_y - y\,R_x\right)\right]\hat{k} =$$
$$= \frac{A}{R^2}R_x\,\hat{\imath} + \frac{A}{R^2}R_y\,\hat{\jmath} + \frac{A}{R^2}R_z\,\hat{k}$$

- Podemos retirar três equações escalares segundo cada um dos eixos X, Y e Z

$$\left.\begin{cases} M_x - \left(y\,R_z - z\,R_y\right) = \dfrac{A}{R^2}R_x \\ M_y - \left(z\,R_x - x\,R_z\right) = \dfrac{A}{R^2}R_y \\ M_z - \left(x\,R_y - y\,R_x\right) = \dfrac{A}{R^2}R_z \end{cases}\right\}$$

O sistema de equações define uma recta, denominada por eixo central de momentos, em relação à qual o momento resultante do sistema é mínimo

Sistemas de Forças e Binários Equivalentes

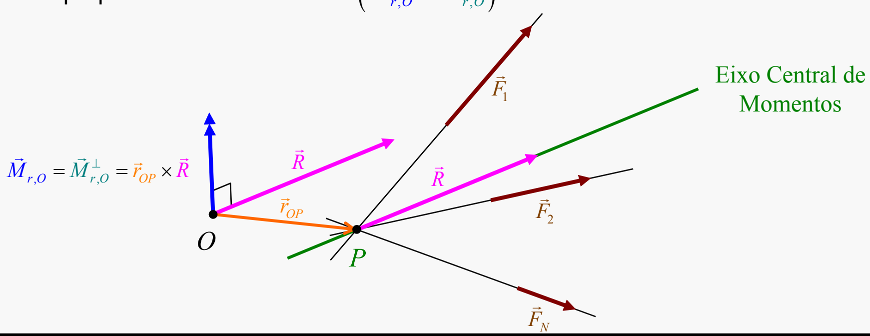
- Seja
  - *O* um ponto qualquer do espaço
  - *P* um ponto do eixo central de momentos
- Qualquer sistema de forças e binários pode ser reduzido a um sistema equivalente mais simples, de acordo com a tabela seguinte

Resultante	Automomento ou Momento Resultante	Sistema Equivalente	
		Em *O*	**Em *P***
$\vec{R} \neq \vec{0}$ (Admite ECM)	$A = \vec{R} \cdot \vec{M}_{r,O} \neq 0$	$\vec{R}\,,\,\vec{M}_{r,O}$	$\vec{R}\,,\,\vec{M}^{\parallel}_{r,O}$
	$A = \vec{R} \cdot \vec{M}_{r,O} = 0$	$\vec{R}\,,\,\vec{M}_{r,O} = \vec{M}^{\perp}_{r,O}$	$\vec{R}$
$\vec{R} = \vec{0}$ (Não admite ECM)	$\vec{M}_{r,O} \neq \vec{0}$	$\vec{M}_{r,O}$ (Binário)	–
	$\vec{M}_{r,O} = \vec{0}$	Equilíbrio	–

Sistemas de Forças e Binários

Sistema de Forças Concorrentes

- O eixo central de momentos é a recta com direcção igual à direcção da resultante, e que passa pelo ponto *P* no qual as forças são concorrentes
- O momento resultante mínimo é nulo
  - O momento resultante em relação a qualquer ponto do eixo central de momentos é nulo $\left(\vec{M}^{\parallel}_{r,P} = \vec{0}\right)$
  - O momento resultante em relação a qualquer outro ponto do espaço, é perpendicular à resultante $\left(\vec{M}_{r,O} = \vec{M}^{\perp}_{r,O}\right)$



Sistemas de Forças e Binários

Sistema de Forças Complanares

- Se as forças actuarem todas no mesmo plano (X,Y)
  - A resultante só tem componentes no plano (X,Y)
  - O momento resultante em relação a qualquer ponto do plano, O, é perpendicular ao plano das forças (tem direcção de Z)
  - O automomento é nulo

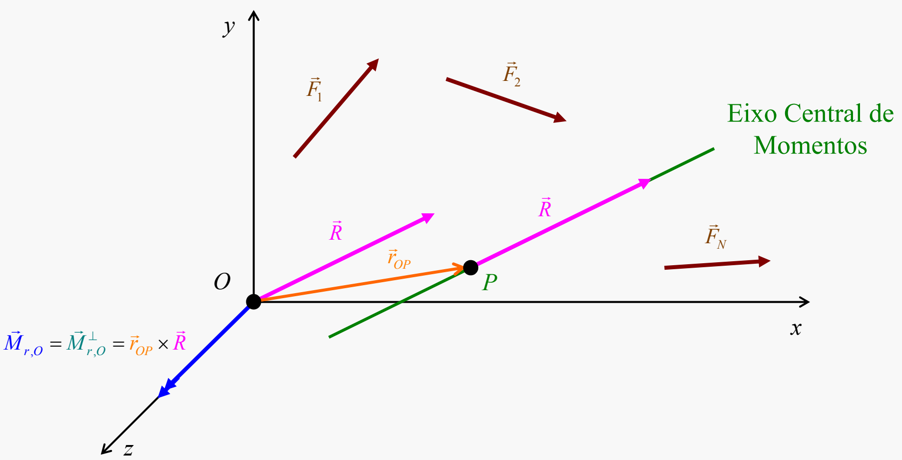
$$\left(\vec{R} = R_x\,\hat{\imath} + R_y\,\hat{\jmath}\right) \qquad \left(\vec{M}_{r,O} = M_z\,\hat{k}\right) \qquad \left(A = \vec{R}\cdot\vec{M}_{r,O} = 0\right)$$

$$\begin{cases} \cancel{M_x} - \left(y\,\cancel{R_z} - z\,R_y\right) = \cancel{\dfrac{A}{R^2}R_x} \\ \cancel{M_y} - \left(z\,R_x - x\,\cancel{R_z}\right) = \cancel{\dfrac{A}{R^2}R_y} \\ M_z - \left(x\,R_y - y\,R_x\right) = \cancel{\dfrac{A}{R^2}R_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{R_y}{R_x}x - \dfrac{M_z}{R_x} \\ z = 0 \end{cases}$$

O eixo central de momentos está no plano das forças (X,Y)

Sistemas de Forças e Binários

Sistema de Forças Complanares



Sistema de Forças Paralelas

- Se as forças actuarem todas na mesma direcção (Y)
  - A resultante só tem componente na direcção das forças (Y)
  - O momento resultante só tem componentes no plano perpendicular à direcção da resultante (X,Z)
  - O automomento é nulo

$\left(\vec{R} = R_y\,\hat{\jmath} \right)$ $\left(\vec{M}_{r,O} = M_x^{\perp}\,\hat{\imath} + M_z^{\perp}\,\hat{k} \right)$ $\left(A = \vec{R}\cdot\vec{M}_{r,O} = 0 \right)$

$$\begin{cases} M_x - \left(y\,\cancel{R_z} - z\,R_y \right) = \cancel{\dfrac{A}{R^2}R_x} \\ \cancel{M_y} - \left(z\,\cancel{R_x} - x\,\cancel{R_z} \right) = \cancel{\dfrac{A}{R^2}R_y} \\ M_z - \left(x\,R_y - y\,\cancel{R_x} \right) = \cancel{\dfrac{A}{R^2}R_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{M_z}{R_y} \\ y = \text{Qualquer} \\ z = \dfrac{M_x}{R_y} \end{cases}$$

O eixo central de momentos tem a direcção das forças e passa pelo ponto (x,z)

Sistema de Forças Paralelas