



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA
LABORATÓRIO DE FÍSICA



ELECTROMAGNETISMO

Trabalho prático nº 3

Magnetostática e Indução magnética

Guia de Laboratório

ISEC
5-10-2007

1 Objectivo

Neste trabalho abordar-se-ão experimentalmente os conceitos de auto-indutância e indutância mútua. Este último conceito será utilizado para medir a intensidade do campo magnético gerado por uma bobina circular em diversos pontos do espaço.

2 Introdução

Veremos que, em contraste com os restantes trabalhos destes Laboratórios de Electromagnetismo, o cálculo teórico exacto das grandezas apresenta uma considerável dificuldade, enquanto a sua medida é relativamente simples.

Utilizaremos duas bobinas: uma bobina de grandes dimensões (bobina “1”) que servirá para criar o campo magnético e uma bobina de pequenas dimensões (bobina “2”) que servirá para demonstrar o fenómeno de indução mútua e para estimar a intensidade e sentido do campo magnético criado pela bobina 1. Na Figura 1 estão representadas as dimensões geométricas destes objectos.

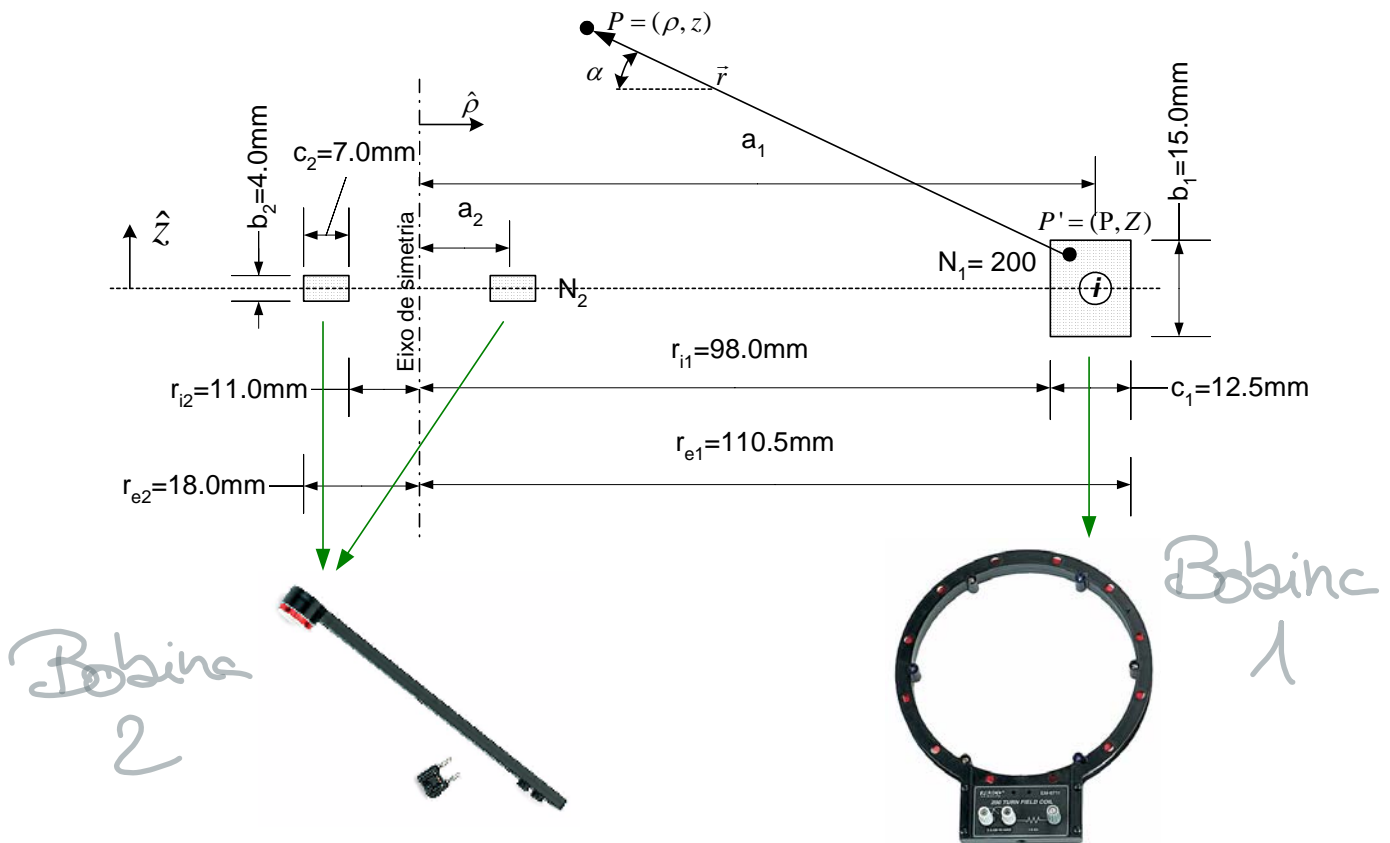


Figura 1 – Dimensões geométricas aproximadas das duas bobinas (“1” e “2”) a utilizar. A bobina 2 é representada centrada com a bobina 1. Os raios a_1 e a_2 são “raios efectivos”, a discutir abaixo. A bobina 2 tem $N_2 = 2000$ espiras .

2.1 Campo magnético gerado por uma espira circular

Como sabemos das aulas teóricas, o campo de indução magnética $\vec{B}(P)$ criado num ponto P por uma distribuição de corrente filiforme $\vec{i} = i\hat{l}$ calcula-se pela Lei de Biot-Savart

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\text{fio}} \frac{\vec{i} \wedge \hat{r}}{r^2} dl, \quad (1.1)$$

onde \vec{r} é o vector-posição que liga o elemento de linha dl ao ponto P .

Neste trabalho utilizaremos a bobina circular de secção quadrada, núcleo de ar e $N_1 = 200$ espiras, cujas dimensões se podem ver na Figura 1. Cada uma das espiras está situada no anel de coordenadas $P' = P\hat{\rho} + Z\hat{z}$ (ver Figura 1), de modo que $r = \sqrt{(\rho - P)^2 + (z - Z)^2}$.

Para uma única espira situada em $P' = a_1\hat{\rho} + 0\hat{z}$ (representada explicitamente na Figura 1) (1.1) escreve-se

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{espira}}(\rho, z) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha)\hat{z} + \sin(\alpha)\hat{\rho}}{r^2} d\theta \\ r &= \sqrt{(\rho - a_1)^2 + z^2} \\ \cos(\alpha) &= \frac{\rho - a_1}{r}, \quad \sin(\alpha) = \frac{z}{r} \end{aligned} \quad (1.2)$$

O integral pode ser expresso como (por exemplo [SCH], pag. 334)

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{espira}}(\rho, z) &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{z}{\rho u} \left(-K(k) + \frac{(a_1^2 + \rho^2 + z^2)}{r^2} E(k) \right) \hat{\rho} + \\ &\quad \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{u} \left(K(k) + \frac{(a_1^2 - \rho^2 - z^2)}{r^2} E(k) \right) \hat{z} \\ \text{com } u &= \sqrt{(a_1 + \rho)^2 + z^2}, \quad k = \frac{2\sqrt{a_1\rho}}{u} \end{aligned} \quad (1.3)$$

com a ajuda das funções $E(k)$ e $K(k)$, conhecidas por “integrais elípticos” e cuja definição e propriedades podem ser encontradas em qualquer manual sobre funções especiais. A maioria dos programas de cálculo implementa essas funções, que se usam da mesma forma que as funções seno, coseno, etc. Na Figura 2 mostram-se algumas linhas de campo e o mapa de cores da intensidade de campo.

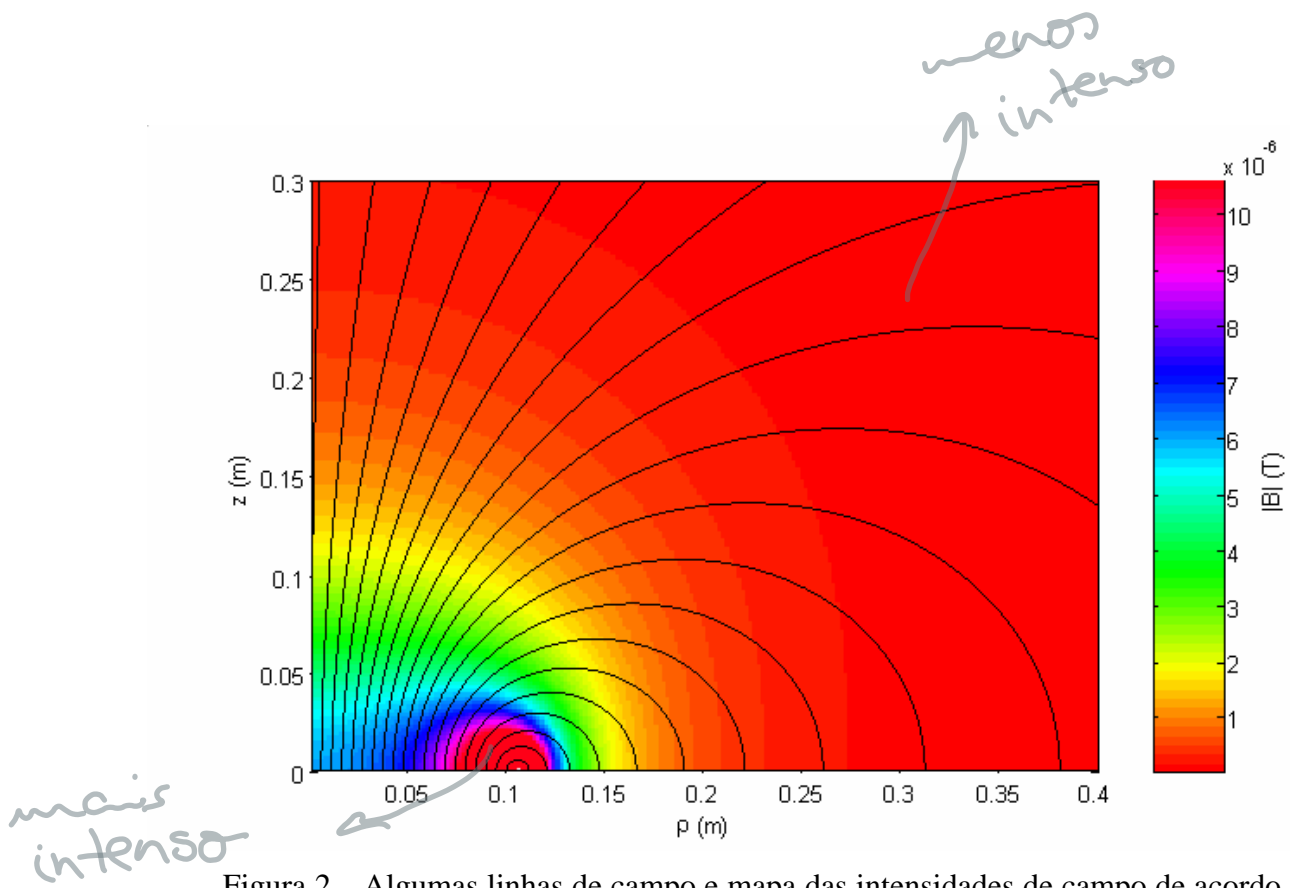


Figura 2 – Algumas linhas de campo e mapa das intensidades de campo de acordo com (1.3) para $i = 1A$, $a_1 = 0,105m$.

Sobre o eixo central e sobre o plano da espira o campo apenas tem componente segundo \hat{z} e as expressões simplificam-se algo:

$$\vec{B}_{espira}(0, z) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{a_1^2}{(a_1^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad (1.4)$$

$$\vec{B}_{espira}(\rho, 0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{(a_1 - \rho)K(k) + (a_1 + \rho)E(k)}{a_1^2 - \rho^2} \hat{z} \quad (1.5)$$

com $k = \frac{2\sqrt{a_1\rho}}{a_1 + \rho}$

Na Figura 3 e Figura 4 mostram-se os gráficos destas funções.

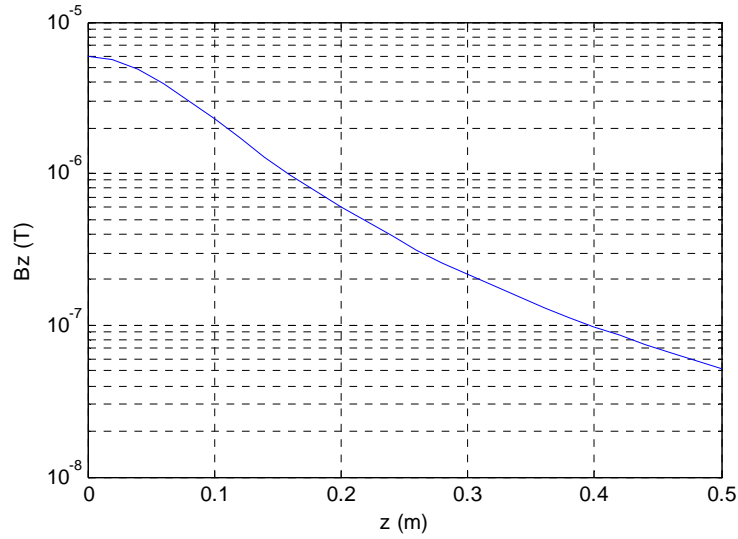


Figura 3 – Gráfico da função (1.4) para $i = 1A$, $a_1 = 0,105m$.

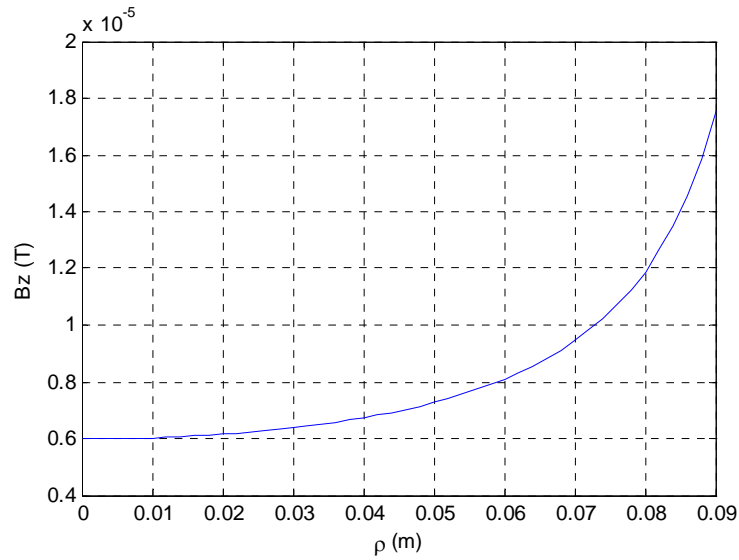


Figura 4 - Gráfico da função (1.5) para $i = 1A$, $a_1 = 0,105m$.

2.2 Campo magnético gerado por uma bobina circular de secção quadrada

Na realidade a bobina é constituída por espiras ligeiramente diferentes, preenchendo um espaço rectangular, e cada uma destas espiras, correspondente à circunferência de coordenadas $P' = P\hat{\rho} + Z\hat{z}$ * (ver Figura 1), irá gerar um campo ligeiramente diferente. Aplicando o Princípio da Sobreposição, o campo total será

$$\vec{B}_{bobine} = \sum_{N_1 \text{ espiras}} \vec{B}_{espira}(P, Z) \quad (1.6)$$

Admitindo que as espiras se distribuem uniformemente sobre o rectângulo, esta soma pode sempre ser calculada numericamente.

* $P = \rho$ maiúsculo.

Com algumas aproximações podemos obter um resultado analítico para o cálculo do campo no centro da bobina se imaginarmos que as espiras são muito finas e passarmos da soma a um integral. A densidade de corrente será

$$|\vec{j}| = \frac{N_1 i}{b_1 c_1}, \quad (1.7)$$

e tomando espiras de secção rectangular muito finas de área $dPdZ$, (1.6) escreve-se (o i já está em \vec{B}_{espira})

$$\vec{B}_{\text{bobine}}(\rho, z) = \frac{N_1}{b_1 c_1} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{r_{i1}}^{r_{e1}} \vec{B}_{\text{espira}}(\rho, z, P, Z) dPdZ \quad (1.8)$$

Podemos obter uma solução analítica se calcularmos no centro da bobina ($\rho = 0, z = 0$) utilizando (1.4)

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{bobine}}(0, 0) &= \frac{N_1}{b_1 c_1} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{r_{i1}}^{r_{e1}} \frac{\mu_0 i}{2} \frac{P^2}{(P^2 + Z^2)^{3/2}} \hat{z} dPdZ \\ &= \frac{\mu_0 i N_1}{2} \frac{\ln\left(\frac{2r_{e1} + \sqrt{4r_{e1}^2 + b_1^2}}{2r_{i1} + \sqrt{4r_{i1}^2 + b_1^2}}\right)}{c_1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

No limite em que a bobina é muito fina ($b_1 \ll r_{i1}$), o que é o nosso caso, podemos simplificar a expressão (1.9) para

$$\vec{B}_{\text{bobine}}(0, 0) = \frac{\mu_0 i N_1}{2} \frac{\ln(r_{e1}/r_{i1})}{c_1} \quad \text{se } b_1 \ll r_{i1} \quad (1.10)$$

Comparando com (1.4) calculado no centro da bobina ($z = 0$), verificamos que obtemos o mesmo resultado se em (1.4) utilizarmos para a_1 o valor

$$\boxed{a_1 = \frac{c_1}{\ln(r_{e1}/r_{i1})} \quad \text{se } b_1 \ll r_{i1}} \quad (1.11)$$

Deste modo, para o cálculo do campo no centro da bobina esta pode ser representada pela espira equivalente de raio dado por (1.11), que é um raio médio adaptado às circunstâncias particulares do problema.

No limite em que a dimensão lateral da bobina é muito menor que o seu raio ($c_1 \ll r_{i1}$), esta média tende para a média aritmética

$$a_1 = \frac{r_{e1} + r_{i1}}{2} \quad \text{se } b_1, c_1 \ll r_{i1}. \quad (1.12)$$

Claro que os resultados (1.9) a (1.12) são exactos apenas para o cálculo do campo no centro da bobina, mas, como aproximação, vamos utiliza-los em todos os pontos.

2.3 Força electromotriz induzida numa bobina circular

Como sabemos das aulas teóricas, força electromotriz induzida num circuito qualquer é dada por

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dt} \quad (1.13)$$

onde ϕ é o fluxo magnético ligado ao circuito:

$$\phi = \int_{\substack{\text{superfície} \\ \text{que se apoia} \\ \text{no circuito}}} \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (1.14)$$

Se o campo \vec{B} é criado pela corrente i_1 que flui no próprio circuito (circuito “1”) então o Princípio de Sobreposição exige que o fluxo seja proporcional a esta corrente, denominando-se a constante de proporcionalidade “coeficiente de auto-indução”:

$$\phi_{1,1} = L i_1 \quad (1.15)$$

e

$$v_1 = L \frac{di_1}{dt} \quad (1.16)$$

Se a indutância não é pura, quer dizer, se o fio tem alguma resistência R , o que é dificilmente evitável, então a tensão v_1 será dada pela associação série de L e R .

$$\boxed{v_1 = L \frac{di_1}{dt} + R i_1} \quad (1.17)$$

Noutro circuito “2” sujeito ao campo criado por i_1 o fluxo será também proporcional a esta corrente, denominando-se a constante de proporcionalidade “coeficiente de indução mútua”:

$$\phi_{2,1} = M i_1 \quad (1.18)$$

e

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} \quad (1.19)$$

Se definirmos o valor médio do campo magnético ligado com uma espira plana como

$$\langle \vec{B} \cdot \hat{s} \rangle = \frac{\theta_{\text{espira}}}{A} \quad (1.20)$$

onde A é a área da espira e \hat{s} o versor da superfície que nela se apoia, verificamos que, se conhecermos a taxa de variação do campo, uma medida da força electromotriz induzida na espira permite determinar o campo médio sobre a espira. Repare-se que esta grandeza depende da orientação relativa do campo e da espira, atingindo o valor máximo quando o campo é perpendicular ao plano da espira e o valor zero quando este é paralelo àquele, permitindo determinar também a direcção do campo.

Para N_2 espiras ligeiramente diferentes, formando uma bobina, devemos somar sobre as espiras:

$$\theta_{\text{bobina}} = \sum_{n=1}^{N_2} A_n \langle \vec{B} \cdot \hat{s} \rangle_n \quad (1.21)$$

Se a bobina for suficientemente pequena para podermos considerar que o campo magnético varia pouco na região interior a esta^{*}, então podemos escrever o campo médio fora da soma e rearranjar os termos como

$$\theta_{bobina} = N_2 < \vec{B} \cdot \hat{s} > \frac{\sum_{n=1}^{N_2} A_n}{N_2} = N_2 < \vec{B} \cdot \hat{s} > < A > \quad (1.22)$$

fazendo aparecer a área média da bobina

$$< A > = \pi < a >^2 \quad (1.23)$$

O raio médio $< a >$ deverá ser atribuído de acordo com a discussão da secção seguinte.

2.4 Cálculo do coeficiente de indução mútua

O coeficiente de indução mútua definido em (1.18) pode ser calculado exactamente pela notável fórmula de Neumann[†], tomando apenas em consideração a forma geométrica dos circuitos que se influenciam mutuamente:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2}{r_{1,2}}. \quad (1.24)$$

A ilustração geométrica das grandezas em presença pode ser vista na Figura 5.

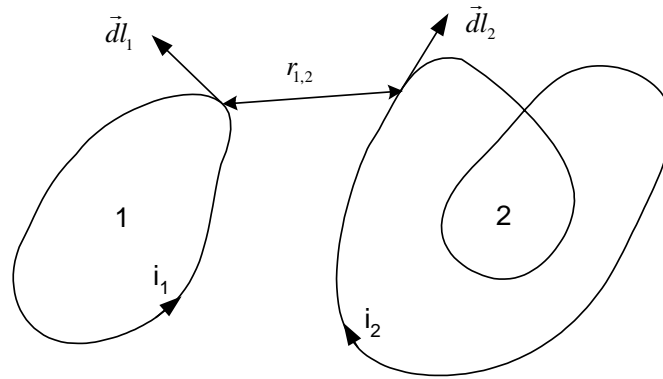


Figura 5 – Ilustração geométrica das grandezas presentes em (1.24).

Para filamentos circulares coaxiais de raios a_1 e a_2 separados pela distância axial h o resultado foi dado por Maxwell:

$$M = \frac{2\mu_0}{k} \sqrt{a_1 a_2} \left(\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right) \quad (1.25)$$

com $k = 2 \sqrt{\frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2 + h^2}}$

Claro que no nosso caso não temos dois filamentos mas sim duas bobinas de secção rectangular. Tomando em atenção a discussão anterior, deveremos utilizar para a bobina 1 o filamento equivalente de raio definido por (1.11) (raio médio da bobina) e utilizar para a bobina 2 uma fórmula equivalente, pois a fórmula geral (1.24) é perfeitamente simétrica

^{*} Será esse o nosso caso? Ver Figura 1 para as dimensões da bobina e Figura 3 e Figura 4 para o campo.

[†] Frank Neumann, 1845.

$$a_2 = \frac{c_2}{\ln(r_{e2}/r_{i2})} \quad \text{se } b_2 \ll r_{i2} \quad (1.26)$$

Deve-se ainda multiplicar o resultado de (1.25) pelo número de espiras de ambas as bobinas.

Se conhecermos M , o campo médio referido em (1.22) pode ser calculado como

$$\langle \vec{B} \cdot \hat{s} \rangle = \frac{M i_1}{N_2 \langle A \rangle} \quad (1.27)$$

Nesta fórmula $\langle A \rangle$ deve ser compatível com o raio médio da bobina, calculado, por exemplo, como em (1.26): $\langle A \rangle = \pi a_2^2$.

É de notar que existem muitos outros métodos mais precisos (mas menos adequados a um guia de laboratório) para o cálculo de indutâncias. Para situações concretas podem-se utilizar programas de cálculo numérico (por exemplo [FAS]) ou aproximações algo obsoletas, mas bem estudadas, baseadas em tabelas [GRO].

2.5 Cálculo do coeficiente de auto-indução

O coeficiente de auto-indução de uma bobina ou condutor pode ser visto como o coeficiente de indução mútua entre os filamentos que constituem essa bobina ou condutor. Aparece aqui a dificuldade adicional de que o coeficiente de auto-indução de um filamento infinitamente fino diverge, como se pode verificar calculando (1.25) com $a_1 = a_2$.

O cálculo exacto é deveras complexo. Para um condutor circular de raio a e secção circular de raio R a solução é conhecida (por exemplo [SCH], pag. 324)

$$L = \mu_0 a \left(\ln \left(\frac{8a}{R} \right) - \frac{7}{4} \right) \quad (1.28)$$

mas veremos que se aplica mal a bobinas de secção rectangular. Para estas podemos usar a aproximação de Grover ([GRO], pag. 95)

$$L = \mu_0 \alpha N^2 \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{12} \right) \ln \left(\frac{8}{p} \right) - 0.84834 + 0.2041p \right), \quad p = \left(\frac{c}{2a} \right)^2. \quad (1.29)$$

2.6 Lembrete de corrente alternada sinusoidal

Em corrente alternada as tensões são da forma $v = V \sin(\omega t + \varphi_v)$ e as correntes na forma $i = I \sin(\omega t + \varphi_i)$, com $\omega = 2\pi f$. Uma das fases φ pode ser tomada como nula. Os valores rms (indicaremos por $\langle \rangle$) são menores que a amplitude por um factor $\sqrt{2}$ (por exemplo $\langle i \rangle = I / \sqrt{2}$).

A razão $Z = V / I = \langle v \rangle / \langle i \rangle$ denomina-se impedância. Num circuito RL série a impedância é dada por $Z_{RL} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

A derivada da corrente é $di/dt = \omega I \cos(\omega t + \varphi_i)$ e portanto tem amplitude ωI .

2.7 Referências

[FAS] FastHenry do MIT: http://www.rle.mit.edu/cpg/research_codes.htm.

[GRO] F.W.Grover, “*Inductance calculations: working formulas and tables*”, Dover, New York, 1962.

[SCH] J. Schwinger et al, *Classical Electrodynamics*, Perseus Books, Reading, Massachussets.

3 Medidas

Utilizaremos um gerador de tensão sinusoidal com frequência variável. Este gerador tem uma impedância interna de $50\ \Omega$ e uma amplitude em vazio de 30 V , de modo que não podemos assumir que será aplicada aos circuitos a estudar uma amplitude constante.

A não ser que tal seja dito explicitamente, as correntes e tensões serão medidas com o multímetro, que dá valores rms. As formas de onda serão também visualizadas num osciloscópio. O esquema a utilizar para as medidas está descrito na Figura 6.

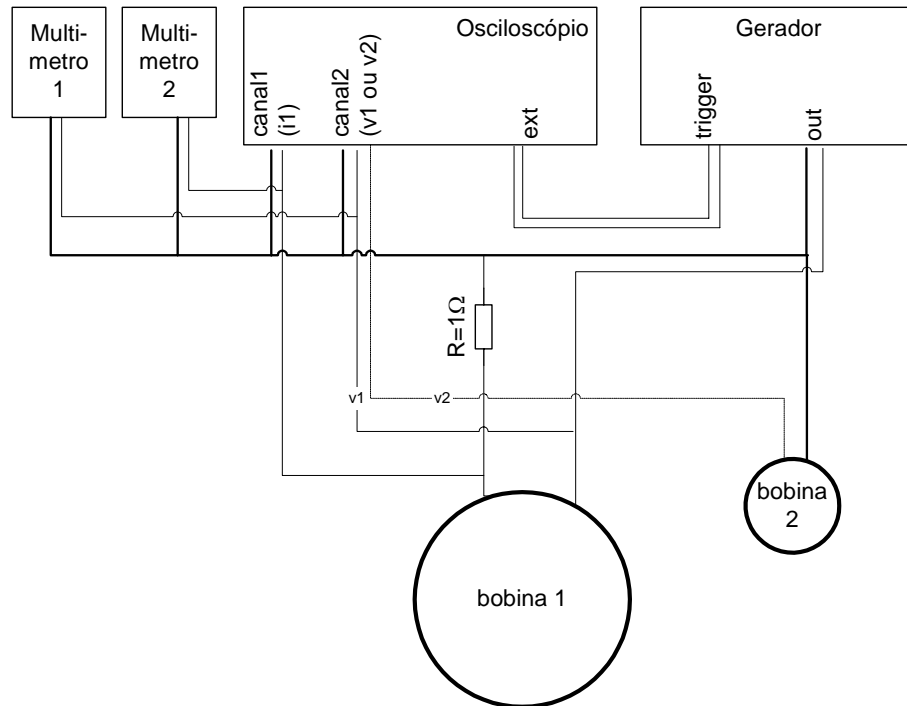


Figura 6 – Esquema eléctrico da experiência.

Utilize o gerador de sinais na sua amplitude máxima.

3.1 Dimensões das bobinas

Medir as grandezas geométricas representadas na Figura 1. Calcular os valores de c_1 e c_2 de acordo com a Figura 1 e os raios médios das bobinas a_1 e a_2 de acordo com, respectivamente, (1.11) e (1.26)

3.2 Medida do coeficiente de auto-indução da bobina 1

3.2.1 A partir da impedância

Medir com o multímetro a resistência R da bobina.

Ajustar o gerador para as frequências indicadas na folha de relatório (medir com o multímetro na escala de frequências) e registar a corrente rms na bobina 1 ($\langle i_1 \rangle$) bem como a tensão rms aos seus terminais ($\langle v_1 \rangle$).

Calcule e registe no local próprio a frequência angular ω bem como a impedância indutiva $\omega L = \sqrt{Z^2 - R^2}$. Se representarmos ωL em função de ω deveremos obter uma recta com

pendente igual ao valor de L (é uma medida muito mais robusta do que tirar apenas um ponto). Comparar o valor medido com o valor calculado através de (1.29).

3.3 Medida do coeficiente de indução mútua

Vamos medir o coeficiente de indução mútua quando as bobinas são coaxiais e coplanares.

Colocar cuidadosamente as bobinas nesta situação e efectuar medidas de $\langle i_1 \rangle$ e $\langle v_2 \rangle$ às frequências indicadas na folha de relatório. Calcular a transimpedância $Z_{1,2} = \langle v_2 \rangle / \langle i_1 \rangle$ e representar esta quantidade em função de ω . Interpretar o significado da pendente e determinar o valor de M . Comparar com o resultado de (1.25).

Comente o valor do erro.

3.4 Estimativa da intensidade do campo no centro do sistema

Utilizando a medida de M efectuada no ponto anterior e (1.27) estimar o campo magnético por unidade de corrente no centro do sistema, e comparar com o valor dado por (1.4).

Comente o valor do erro.

3.5 Estimativa da direcção do campo magnético

Colocando a bobina 2 num ponto qualquer do espaço, rodar esta até anular a tensão induzida. Consultar a Figura 2 e verificar se a direcção deduzida corresponde minimamente ao cálculo.

3.6 Medida da variação espacial do campo

Fixando uma certa frequência (perto de 2 kHz é boa ideia) colocar a bobina 2 nas posições enumeradas na folha de relatório e medir as tensões induzidas.

A folha de cálculo representa automaticamente as funções (1.4) e (1.5) normalizadas ao centro do sistema, bem como os pontos medidos.

Comente o gráfico.