

Folha 1 – Cálculo Vectorial

Questões:

1. Considere o vector $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$.
 - a) Calcule o módulo do vector \vec{a} .
 - b) Determine analiticamente os vectores $-0,5\vec{a}$, $2\vec{a}$ e \hat{a} .
 - c) Represente graficamente, no plano XY , os vectores \vec{a} , $-0,5\vec{a}$, $2\vec{a}$ e \hat{a} .
 - d) Determine os ângulos que o vector \vec{a} forma com o eixo horizontal e com o eixo vertical.
 2. Considere os vectores $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ e $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j}$.
 - a) Determine, analiticamente, os vectores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.
 - b) Calcule os módulos $|\vec{a} + \vec{b}|$ e $|\vec{a} - \vec{b}|$.
 - c) Represente graficamente os vectores \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.
 - d) Qual o ângulo formado entre os vectores \vec{a} e \vec{b} ?
 3. Indique em que condições se verificam as seguintes proposições:
 - a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a + b = c$
 - b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $|a - b| = c$
 - c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$
 - d) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$
 - e) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$
- Nota:** $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ e $c = |\vec{c}|$.
4. Calcule os seguintes produtos escalares:

a) $\hat{i} \cdot \hat{i}$	d) $\hat{i} \cdot \hat{j}$	g) $\hat{j} \cdot \hat{k}$
b) $\hat{j} \cdot \hat{j}$	e) $\hat{i} \cdot \hat{k}$	h) $\hat{k} \cdot \hat{i}$
c) $\hat{k} \cdot \hat{k}$	f) $\hat{j} \cdot \hat{i}$	i) $\hat{k} \cdot \hat{j}$
 5. Sendo \vec{a} e \vec{b} vectores não nulos, indique em que condições se verifica:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$	e) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$
b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$	d) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$	
 6. Dados dois vectores $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ e $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, determine:
 - a) O produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
 - b) O menor ângulo formado entre os vectores.
 - c) O versor \hat{b} .
 - d) A projecção do vector \vec{a} na direcção de \vec{b} .

7. Um vector \vec{a} tem 4 m de módulo e faz um ângulo de 60° com o sentido positivo do eixo dos XX, medido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

- Determine as componentes do vector \vec{a} no sistema de eixos cartesiano XY.
- Qual será a direcção de um vector \vec{b} , de módulo igual a 3 m, para que o vector soma destes dois vectores $(\vec{a} + \vec{b})$ tenha 5 m de módulo?

8. Determine os seguintes produtos vectoriais:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $\hat{i} \times \hat{i}$ | d) $\hat{i} \times \hat{j}$ | g) $\hat{j} \times \hat{k}$ |
| b) $\hat{j} \times \hat{j}$ | e) $\hat{i} \times \hat{k}$ | h) $\hat{k} \times \hat{i}$ |
| c) $\hat{k} \times \hat{k}$ | f) $\hat{j} \times \hat{i}$ | i) $\hat{k} \times \hat{j}$ |

9. Sendo \vec{a} e \vec{b} vectores não nulos, indique em que condições se verifica:

- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$

10. Sabendo que o vector \vec{a} tem o sentido positivo da direcção do eixo dos XX e mede 2, e que o vector \vec{b} tem o sentido negativo do eixo dos ZZ e mede 5, determine:

- O módulo do produto vectorial entre os vectores $(|\vec{a} \times \vec{b}|)$.
- Qual a direcção do produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$?
- Qual o sentido do produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$?

11. Dados dois vectores $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ e $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, determine o produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$, através:

- Da propriedade distributiva do produto vectorial relativamente à adição.
- Do determinante da matriz de 3×3 :

$$\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

12. Dados os vectores \vec{a} e \vec{b} tais que: $\vec{a} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 6$ e $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \hat{i} = 0$, determine:

- O menor ângulo formado entre os dois vectores.
- As componentes do vector \vec{b} .

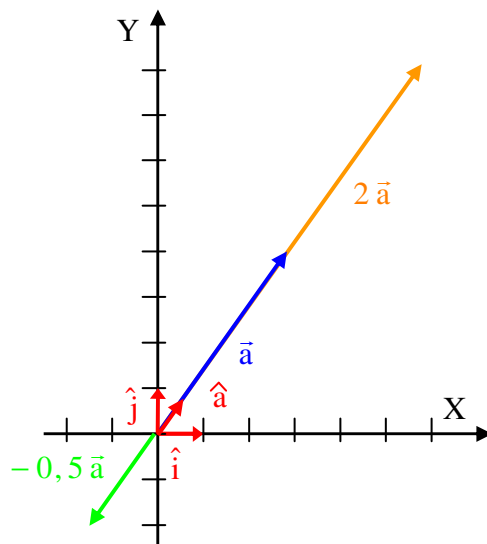
Soluções:

1.

a) 5

b) $-0,5\vec{a} = -1,5\hat{i} - 2\hat{j}$; $2\vec{a} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$; $\hat{a} = 0,6\hat{i} + 0,8\hat{j}$

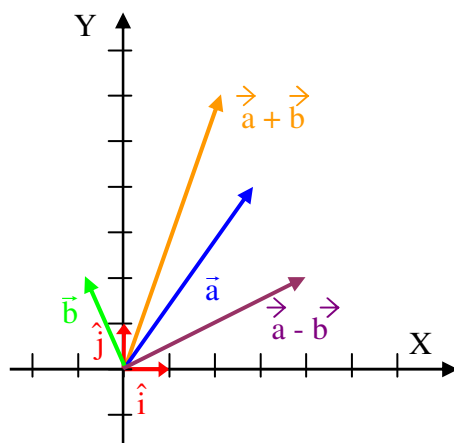
c)

d) $53,13^\circ$ com a parte positiva do eixo dos XX; $36,87^\circ$ com a parte positiva do eixo dos YY

2.

a) $\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j}$; $\vec{a} - \vec{b} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$ b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 6,32$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 4,47$

c)

d) $63,4^\circ$

3.

a) Quando \vec{a} e \vec{b} têm a mesma direcção e o mesmo sentidob) Quando \vec{a} e \vec{b} têm a mesma direcção e sentidos opostosc) Quando $\vec{b} = \vec{0}$ d) Quando \vec{a} e \vec{b} são perpendicularese) Quando \vec{a} e \vec{b} são perpendiculares

4.

- | | | |
|------|------|------|
| a) 1 | d) 0 | g) 1 |
| b) 1 | e) 0 | h) 0 |
| c) 1 | f) 0 | i) 0 |

5.

- a) Quando os vectores \vec{a} e \vec{b} são perpendiculares
- b) Quando os vectores \vec{a} e \vec{b} têm a mesma direcção e o mesmo sentido
- c) \vec{a} e \vec{b} têm a mesma direcção e sentidos opostos
- d) O menor ângulo formado pelos vectores \vec{a} e \vec{b} pertence a $[0^\circ, 90^\circ[$
- e) O menor ângulo formado pelos vectores \vec{a} e \vec{b} pertence a $]90^\circ, 180^\circ]$

6.

- a) -1
- b) $93,72^\circ$
- c) $\hat{b} = 0,485\hat{i} - 0,485\hat{j} + 0,728\hat{k}$
- d) $-0,118\hat{i} + 0,118\hat{j} - 0,170\hat{k}$

7.

- a) $\vec{a} = 2,00\hat{i} + 3,46\hat{j}$ (m)
- b) \vec{b} é perpendicular a \vec{a}

8.

- | | | |
|--------------|---------------|---------------|
| a) $\vec{0}$ | d) \hat{k} | g) \hat{i} |
| b) $\vec{0}$ | e) $-\hat{j}$ | h) \hat{j} |
| c) $\vec{0}$ | f) $-\hat{k}$ | i) $-\hat{i}$ |

9.

- a) Quando $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$, ou \vec{a} e \vec{b} têm a mesma direcção
- b) Quando \vec{a} e \vec{b} são perpendiculares

10.

- a) 10
- b) Do eixo dos YY
- c) Sentido positivo do eixo dos YY

11. $4\hat{i} - 11\hat{j} - 10\hat{k}$

12.

- a) $50,2^\circ$
- b) $\vec{b} = 1,2\hat{i} + 0,6\hat{j} + 0,8\hat{k}$