Tensões e Deformações

Tensões e Deformações

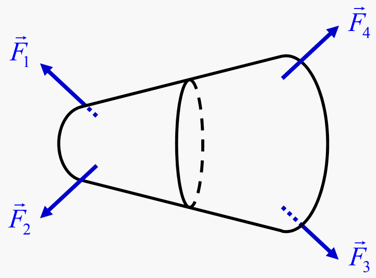
Mecânica dos Corpos Deformáveis

- Se um sistema for sujeito a forças e momentos externos, mas permanecer em equilíbrio estático, é provável que sofra deformação
- A extensão da deformação pode depender
  - Da intensidade, direcção, sentido e duração das forças aplicadas
  - Das propriedades dos materiais que constituem o sistema
  - De condições atmosféricas, tais como temperatura e humidade
- O estudo das deformações sofridas pelas estruturas devido à acção de forças e momentos externos, bem como da resistência dos materiais que constituem a estrutura, permite
  - Desenhar estruturas mais resistentes à acção das cargas a que vai estar sujeita
  - Escolher o material mais adequado para uma dada estrutura suportar as cargas a que vai ficar sujeita
  - Determinar as condições de carga para as quais uma estrutura existente pode operar de forma segura

Tensões e Deformações

Forças e Momentos Internos

- Consideremos um objecto com forma arbitrária, sujeito a forças externas
- Se o objecto estiver em equilíbrio
  - O somatório das forças externas que actuam sobre o objecto tem de ser igual a zero
  - O somatórios dos momentos das forças externas em relação a qualquer ponto do espaço, tem de ser igual a zero



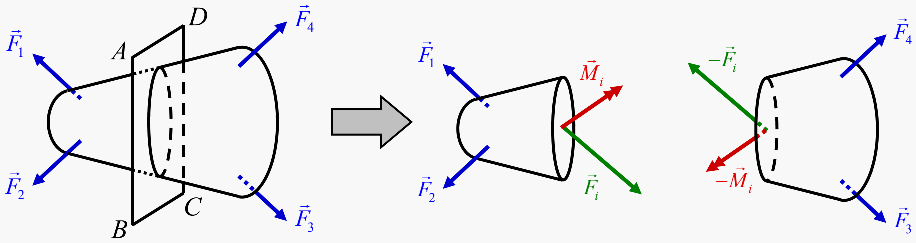
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,O} = \vec{0}$$

Tensões e Deformações

Forças e Momentos Internos

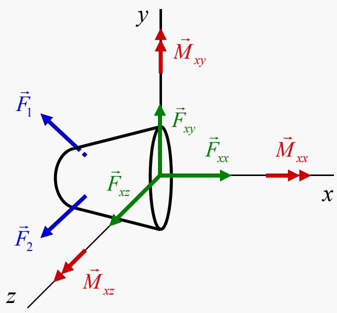
- Façamos passar um plano pelo objecto, de modo a separá-lo em dois
- Se o objecto está em equilíbrio, também os "dois objectos", obtidos por meio deste corte, têm de estar em equilíbrio
  - As condições de equilíbrio obrigam a que existam forças internas e/ou momentos internos a actuar na secção pela qual o corte foi efectuado



Tensões e Deformações

Forças e Momentos Internos

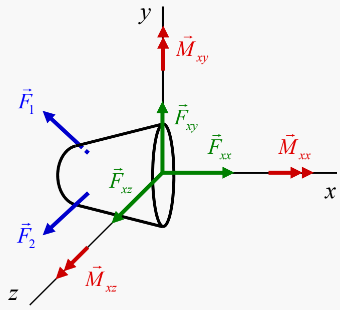
- A três dimensões, as componentes das forças e momentos internos podem ser decompostas em três eixos perpendiculares entre si, sendo um perpendicular ao plano de corte
- Estas componentes tomam nomes diferentes consoante a sua orientação relativamente ao plano de corte, e consoante o efeito que provocam



Tensões e Deformações

Forças e Momentos Internos

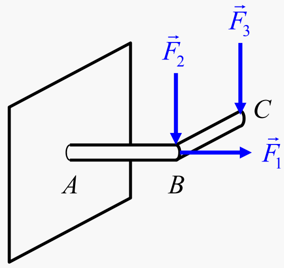
- A força perpendicular ao plano de corte, $\boldsymbol{F_{xx}}$, tende a alterar as dimensões do objecto segundo o eixo axial, e toma o nome de força axial
- As forças tangentes ao plano de corte, $\boldsymbol{F_{xy}}$ e $\boldsymbol{F_{xz}}$, tendem a fazer deslizar as secções de corte uma relativamente à outra, e denominam-se forças de corte
- A momento perpendicular ao plano de corte, $\boldsymbol{M_{xx}}$, tende a torcer o objecto em torno do seu eixo axial, e denomina-se momento de torção, ou momento torçor
- Os momentos paralelos ao plano de corte, $\boldsymbol{M_{xy}}$ e $\boldsymbol{M_{xz}}$, tendem a flectir o objecto nas direcções *x* e *y*, e denominam-se momentos flectores



Tensões e Deformações

Forças e Momentos Internos

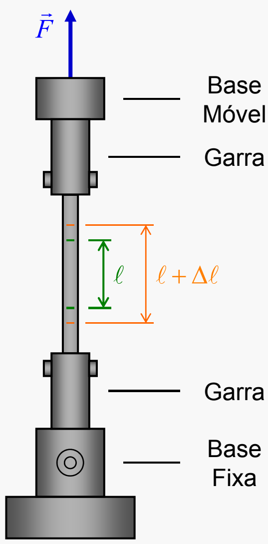
- Como exemplo dos vários efeitos que um sistema de forças pode ter sobre um objecto, consideremos uma barra em forma de L que se encontra fixa a uma parede, no ponto *A*
- Sobre a barra actuam as forças $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ e $\boldsymbol{F_3}$
  - A força $\boldsymbol{F_1}$ sujeita a barra *AB* a uma força axial de tracção
  - A força $\boldsymbol{F_2}$ sujeita a barra AB a uma força de corte e a um momento flector
  - A força $\boldsymbol{F_3}$ sujeita
    - A barra *BC* a uma força de corte e a um momento flector
    - A barra *AB* a um momento torçor



Tensões e Deformações

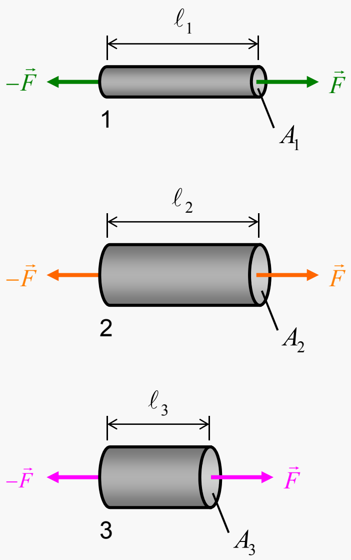
Forças Axiais (Tracção ou Compressão)

- Para estudar a resposta dos materiais quando sujeitos a forças axiais, de tracção ou compressão, utiliza-se um dispositivo de precisão que dispõe de uma base móvel e uma base fixa, entre as quais se coloca uma amostra de material de geometria conhecida
  - Aplicam-se forças controladas, até que o material entre em roptura
  - Mede-se a deformação sofrida pela amostra
- Os testes são repetidos para várias amostras do material, que podem ter com comprimentos e áreas de secção recta diferentes, aplicando-se diferentes cargas

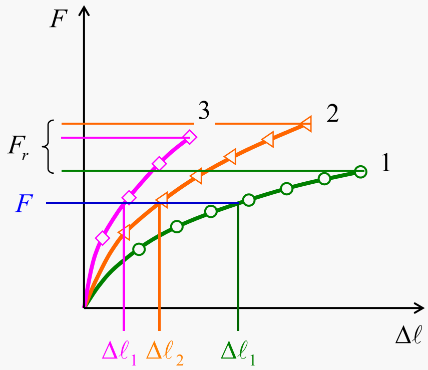


Tensões e Deformações

Forças Axiais (Tracção ou Compressão)

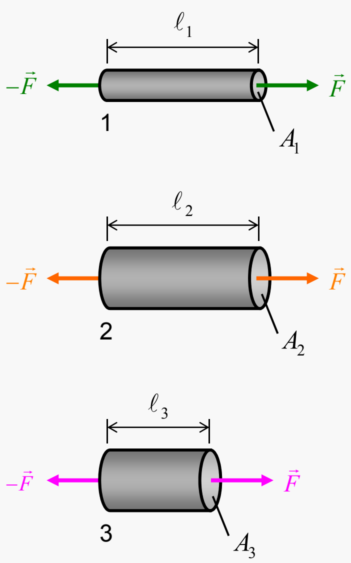


$$\begin{cases} \ell_2 = \ell_1 \\ A_2 > A_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ell_3 < \ell_2 = \ell_1 \\ A_3 = A_2 > A_1 \end{cases}$$

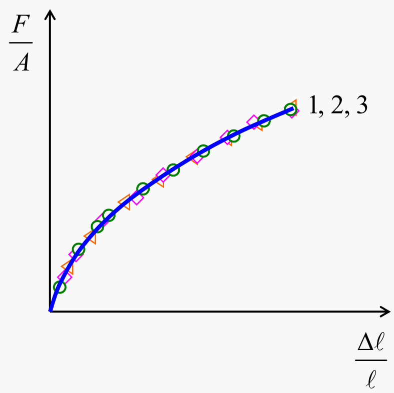


Tensões e Deformações

Forças Axiais (Tracção ou Compressão)



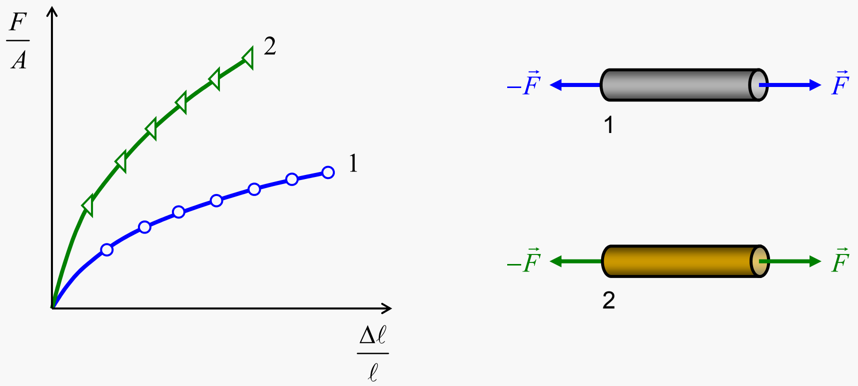
$$\begin{cases} \ell_2 = \ell_1 \\ A_2 > A_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ell_3 < \ell_2 = \ell_1 \\ A_3 = A_2 > A_1 \end{cases}$$



Tensões e Deformações

Forças Axiais (Tracção ou Compressão)

- Um gráfico de força por unidade de área em função da deformação por unidade de comprimento inicial, permite comparar directamente a resistência de materiais diferentes
  - O material 2 é mais resistente à acção de forças externas do que o material 1



Tensões e Deformações

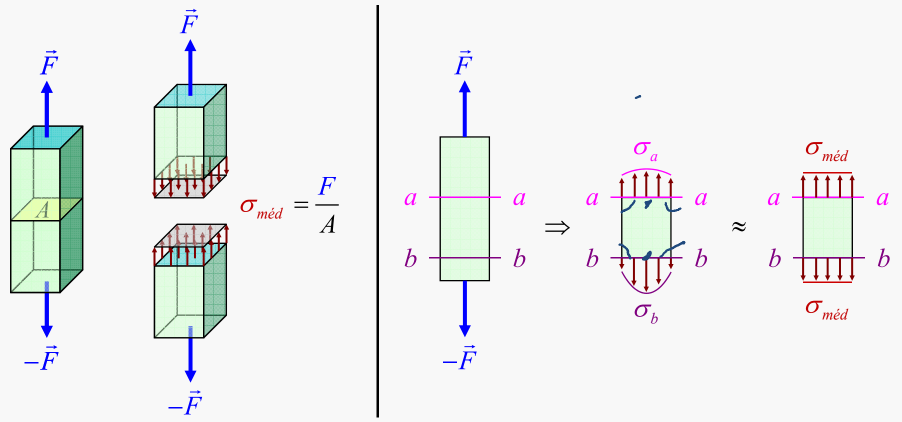
Conceito de Tensão e Deformação

- À força por unidade de área, dá-se o nome de tensão (*stress*)
  - Se a força for perpendicular ao plano em análise, a tensão designa-se por tensão normal (*normal stress*), tensão axial (*axial stress*), ou simplesmente tensão (*stress*), sendo habitual representar-se pela letra grega σ (sigma)
  - Se a força for tangente ao plano em análise, a tensão designa-se por tensão de corte (*shear stress*), sendo habitual representar-se pela letra grega τ (tau)
- À deformação por unidade de comprimento, dá-se o nome de deformação relativa, ou simplesmente deformação (*strain*)
  - Se a deformação ocorrer numa direcção perpendicular ao plano em análise, diz-se deformação normal (*normal strain*), deformação axial (*axial strain*), ou simplesmente deformação (*strain*), sendo habitual representarse pela letra grega ε (épsilon)
  - Se a deformação ocorrer numa direcção tangente ao plano em análise, diz-se deformação de corte, (*shear strain*), sendo habitual representarse pela letra grega γ (gama)

Tensões e Deformações

Tensão Axial

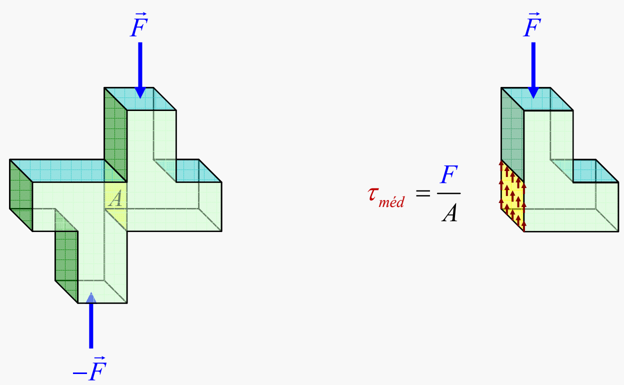
- Consideremos uma barra homogénea sujeita a forças axiais de tracção
  - Se a secção recta da barra for muito pequena, a tensão axial pode ser considerada constante ao longo da secção
  - Esta aproximação é melhor para secções mais afastadas da carga



Tensões e Deformações

Tensão de Corte

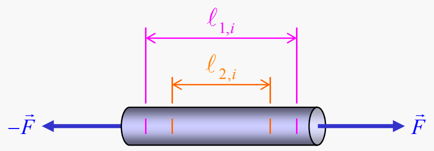
- Consideremos uma secção de uma barra homogénea sujeita a forças de corte
  - A tensão de corte não é necessariamente constante ao longo da secção
  - Se a área da secção for suficientemente pequena, a tensão de corte pode ser descrita pela tensão de corte média

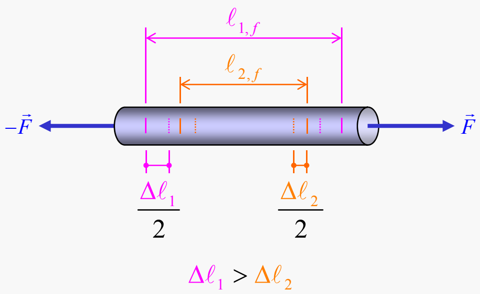


Tensões e Deformações

Deformação Axial

- Consideremos uma barra, na qual se efectuam duas marcas correspondentes a comprimentos iniciais $\ell_{1,i}$ e $\ell_{2,i}$, tais que $\ell_{1,i}$ > $\ell_{2,i}$ sujeita a forças axiais de tracção
- Após aplicação da carga, a variação dos comprimentos de referência não é a mesma, sendo maior a variação do comprimento maior, $\ell_{1,i}$
- A deformação axial relativa de ambos os comprimentos é a mesma





$$\boxed{\varepsilon = \frac{\ell_f - \ell_i}{\ell_i} = \frac{\Delta\ell}{\ell_i}}$$

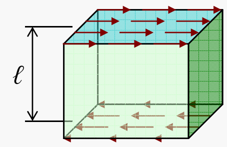
Tensões e Deformações

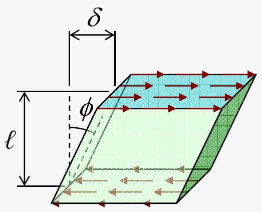
Deformação de Corte

- Consideremos um bloco paralelepipédico rectangular, com altura ℓ, sujeito a tensões de corte em duas faces paralelas
- Devido à acção das forças de corte, o bloco deformará para um paralelepípedo
- Seja δ o deslocamento sofrido pela face superior relativamente à face inferior
- A deformação de corte é definida por

$$\boxed{\gamma = \mathrm{tg}(\phi) = \frac{\delta}{\ell}}$$

$$\left(\text{Pequenas deformações} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}(\phi) \simeq \phi \quad \Rightarrow \quad \gamma \simeq \phi\right)$$



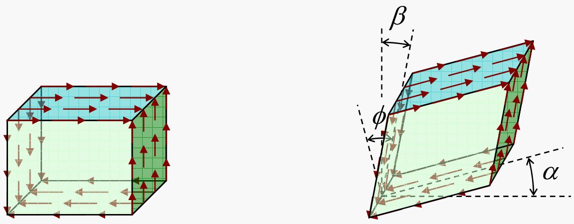


Tensões e Deformações

Deformação de Corte

- Consideremos um bloco paralelepipédico rectangular, com altura ℓ, sujeito a tensões de corte em duas faces paralelas
- Devido à acção das forças de corte, o bloco deformará para um paralelepípedo
- A deformação de corte é dada por

$$\boxed{\gamma \simeq \phi = \alpha + \beta}$$



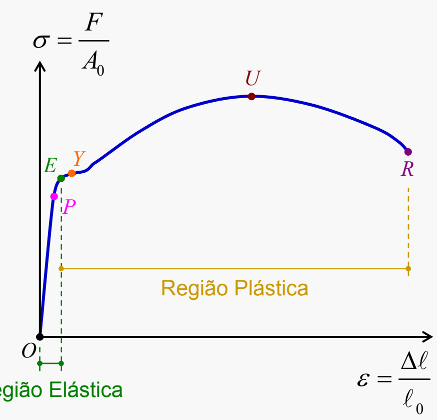
Tensões e Deformações

Diagramas de Tensão/Deformação

- Para um mesmo material, podem-se obter diferentes diagramas de tensão/deformação, consoante o tipo de tensão aplicada
  - Tensão axial
    - De tracção
    - De compressão
  - Tensão de corte
- Os diagramas de tensão/deformação, obtidos em condições semelhantes, para diferentes materiais, permitem comparar diferentes propriedades dos materiais, tais como
  - Rigidez
  - Dureza
  - Resistência
  - Ductilidade
  - Fragilidade

Diagramas de Tensão/Deformação de Engenharia

- Num diagrama tensão/deformação podemos distinguir vários pontos
  - O ponto P, corresponde ao limite de proporcionalidade linear
  - O ponto E, corresponde ao limite de elasticidade do material
  - O ponto Y, corresponde ao limite de escoamento (tensão de cedência)
  - O ponto U, corresponde à resistência à tensão
  - O ponto R, corresponde ao ponto de ruptura do material

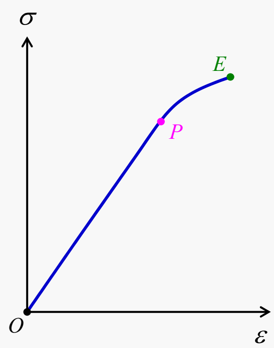


Diagramas de Tensão/Deformação de Engenharia

- Um material diz-se linearmente elástico (entre O e P) se apresentar uma relação linear entre a tensão e a deformação, podendo escrever-se

$$\sigma = k\,\varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \tau = k\,\gamma$$

- A constante de proporcionalidade toma nomes diferentes consoante o tipo de tensão aplicada
  - Para tensões axiais, designa-se por módulo de elasticidade, ou módulo de Young, sendo habitual representar-se pela letra *E*
  - Para tensões de corte, designa-se por módulo de rigidez, sendo habitual representar-se pela letra *G*

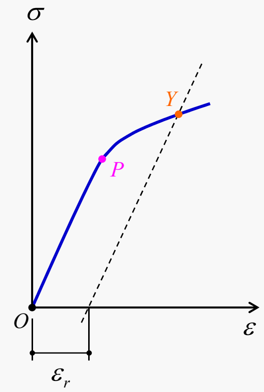


$$\boxed{\sigma = E\,\varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \tau = G\,\gamma}$$

Tensões e Deformações

Diagramas de Tensão/Deformação de Engenharia

- Para muitos materiais, não é possível distinguir entre o limite de elasticidade e o limite de escoamento
- O limite de escoamento, coincidente com o limite de elasticidade, é obtido por intercepção de uma recta paralela à porção linear da curva σ(ε), e que intercepta o eixo da deformação num ponto correspondente a uma deformação residual, ε_r
- O valor correspondente a ε_r depende do tipo de material
  - Metais e ligas em geral: ε_r = 0.002 (0.2%)
  - Cobre e suas ligas: ε_r = 0.005 (0.5%)
  - Ligas metálicas duras: ε_r = 0.001 (0.1%)
  - Cerâmicos: ε_r = 0.001 (0.1%)
  - Polímeros: ε_r = 0.005 (0.5%)

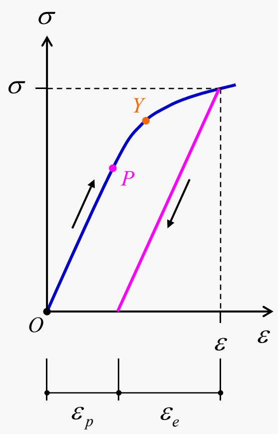


Tensões e Deformações

Diagramas de Tensão/Deformação de Engenharia

- Consideremos que se aplica a um material uma tensão superior à tensão de escoamento
  - O material sofre uma deformação ε
- Após remoção da carga, o material segue uma curva de descarga paralela à porção linear da curva de tensão deformação
  - Apresentando uma deformação permanente, ε_p
- A diferença entre a a deformação sofrida e a deformação permanente apresentada pelo material após remoção da carga, corresponde à deformação elástica recuperada

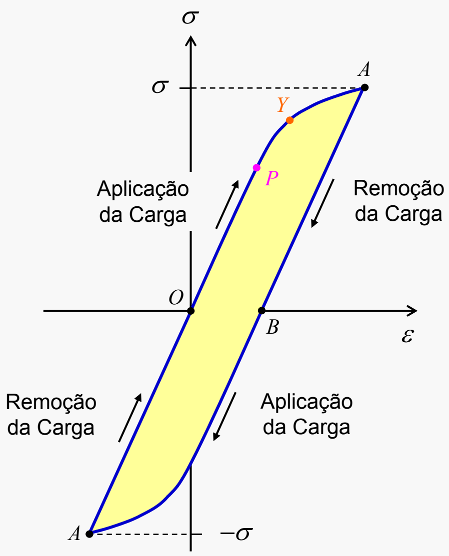
$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p}$$



Tensões e Deformações

Diagramas de Tensão/Deformação de Engenharia

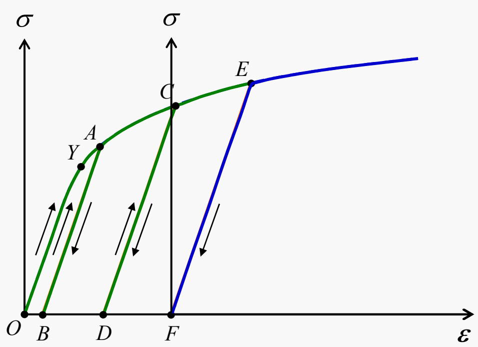
- A deformação permanente causada no material por aplicação da tensão pode ser recuperada
- Para tal é necessário aplicar uma tensão contrária à que deu origem à deformação permanente
- À curva de tensão/deformação assim obtida, dá-se o nome de ciclo de histerese do material
- A área interior da curva de histerese é igual à energia de deformação dissipada como calor em ambos os ciclos de carga



Tensões e Deformações

Diagramas de Tensão/Deformação de Engenharia

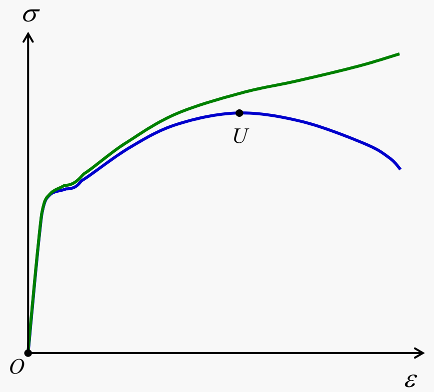
- Usando ciclos de carga e descarga apropriados, é possível endurecer os materiais
- O processo designa-se por encruamento, e consiste na aplicação e remoção de cargas, de modo a deslocar o limite de escoamento

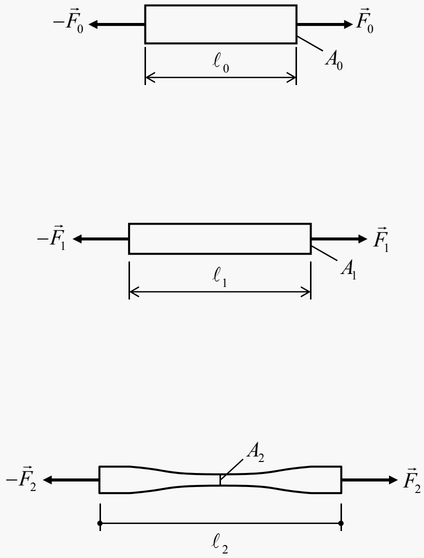


Tensões e Deformações

Diagramas de Tensão/Deformação Reais

$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{F}{A_0} \\ \varepsilon = \dfrac{\Delta \ell}{\ell_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma = \dfrac{F}{A_i} = \sigma_{eng}\left(1+\varepsilon_{eng}\right) \\ \varepsilon = \ln\left(\dfrac{\ell_i}{\ell_0}\right) = \ln\left(1+\varepsilon_{eng}\right) \end{cases}$$





Tensões e Deformações

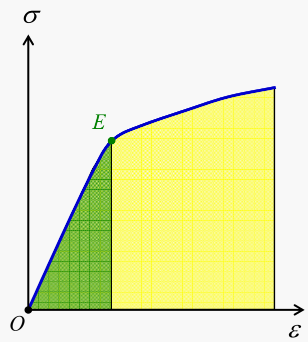
Propriedades dos Materiais

- O produto entre a tensão e a deformação é igual ao trabalho por unidade de volume, realizado pelas forças externas para deformar o material
- Num gráfico de tensão/deformação, a energia armazenada pelo material sob a forma de energia potencial elástica, é igual à área correspondente à região de elasticidade
  - Propriedade dos materiais, designada por resiliência, e medida pelo módulo de resiliência

$$U_r = \int_0^{\varepsilon_y} \sigma(\varepsilon)\, d\varepsilon \simeq \frac{1}{2}\sigma_y\, \varepsilon_y \simeq \frac{\sigma_y^2}{2E}$$

- A área total abaixo da curva de σ(ε) é igual à energia necessária para levar o material à ruptura
  - É uma propriedade dos materiais, designada por tenacidade

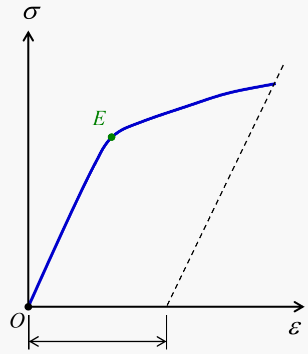
$$\int_0^{\varepsilon_r} \sigma(\varepsilon)\, d\varepsilon$$



Tensões e Deformações

Propriedades dos Materiais

- A rigidez de um material é igual ao seu módulo de elasticidade
- Um material diz-se dúctil se sofrer uma deformação permanente elevada antes de entrar em ruptura
  - A deformação permanente sofrida por um material imediatamente antes da ruptura é uma medida da sua ductilidade
- Um material com baixa ductilidade, diz-se frágil



Tensões e Deformações

Modelos Ideais de Comportamento dos Materiais

a) Rígido: não sofre deformação, independentemente da carga aplicada

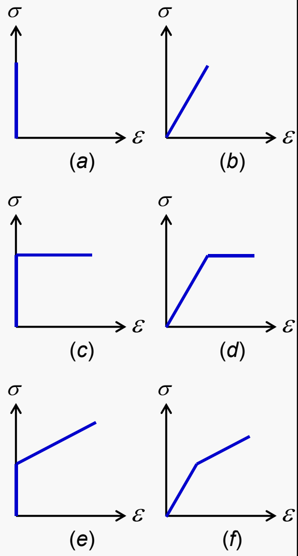
b) Elástico Linear: sofre deformação elástica linear até se atingir a ruptura

c) Rígido – Perfeitamente Plástico: não sofre qualquer deformação até se atingir o limite de escoamento, passando então a deformar de forma constante sem se alterar a tensão aplicada, até atingir a ruptura

d) Elástico Linear – Perfeitamente Plástico: sofre deformação elástica linear até se atingir o limite de escoamento, passando então a deformar de forma constante sem alteração da tensão aplicada, até se atingir a ruptura

e) Rígido – Linearmente Plástico: Não sofre qualquer deformação até se atingir a tensão de escoamento, passando então a apresentar deformação plástica linear

f) Elástico Linear – Plástico Linear: sofre deformação elástica linear até se atingir a tensão de escoamento, passando então a exibir deformação plástica linear



Tensões e Deformações

Razão de Poisson

- Quando se aplicam forças axiais num objecto
  - Este deforma variando a sua dimensão segundo a direcção das forças
  - As dimensões do objecto no plano transversal às forças variam, no sentido contrário à deformação axial
- Para materiais homogéneos e isotrópicos, e tensões na região de proporcionalidade linear, o quociente entre a deformação numa direcção perpendicular à tensão e a deformação na direcção da tensão, é uma constante, designada por razão de Poisson, representando-se pela letra grega υ (niu)

$$\upsilon = -\frac{\text{deformação tangencial}}{\text{deformação axial}}$$

- Para um material elástico, a razão de Poisson pode ser relacionada com os módulos de elasticidade e de rigidez, pela equação

$$\upsilon = \frac{E}{2\,G} - 1$$

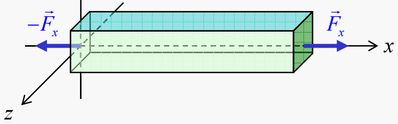
Tensões e Deformações

Razão de Poisson

- Consideremos um paralelepípedo rectangular de um material homogéneo e isotrópico com comprimento ℓ e área de secção recta A
- Consideremos um sistema de eixos tal que o eixo dos XX se encontra alinhado segundo a direcção do eixo do bloco, e os eixos YY e ZZ são perpendiculares às faces laterais do bloco
- Apliquemos forças axiais de tracção segundo o eixo dos XX, de tal modo que a tensão seja inferior à tensão limite de proporcionalidade linear

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} \quad \text{e} \quad \sigma_x = E\,\varepsilon_x$$

$$\upsilon = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

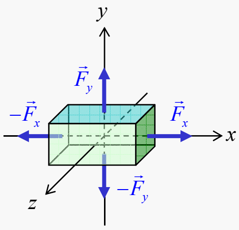


$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\upsilon\,\varepsilon_x = -\upsilon\frac{\sigma_x}{E}$$

Tensões e Deformações

Tensões Multiaxiais

- Consideremos um paralelepípedo rectangular de um material elástico, e um sistema de eixos com o eixo dos XX perpendicular às bases, e os eixos dos XX e dos YY perpendiculares às restantes faces
- Apliquemos forças axiais segundo XX e YY, e calculemos a deformação sofrida pelo objecto



$$\sigma_x = \frac{F_x}{A_x} \qquad \varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{y1} = -\upsilon\,\varepsilon_{x1} = -\upsilon\dfrac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_{z1} = -\upsilon\,\varepsilon_{x1} = -\upsilon\dfrac{\sigma_x}{E} \end{cases}$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_y} \qquad \varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{x2} = -\upsilon\,\varepsilon_{y2} = -\upsilon\dfrac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_{z2} = -\upsilon\,\varepsilon_{y2} = -\upsilon\dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases}$$

Tensões e Deformações

Tensões Multiaxiais

- A deformação total segundo cada um dos eixos, é igual à soma das deformações provocadas por cada uma das tensões

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{y1} = -\upsilon\frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{z1} = -\upsilon\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_{x2} = -\upsilon\frac{\sigma_y}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_y}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{z2} = -\upsilon\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{y1} + \varepsilon_{y2} \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{z1} + \varepsilon_{z2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \upsilon\dfrac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \upsilon\dfrac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_z = -\upsilon\dfrac{\sigma_x}{E} - \upsilon\dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_x - \upsilon\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_y - \upsilon\sigma_x\right) \\ \varepsilon_z = -\dfrac{\upsilon}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \end{cases}$$

Tensões e Deformações

Tensões Multiaxiais

- Resolvendo as duas primeira equações anteriores em ordem às tensões σ_x e σ_y

$$\begin{cases} \sigma_x - \upsilon\sigma_y = E\,\varepsilon_x \\ \sigma_y - \upsilon\sigma_x = E\,\varepsilon_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\left(\varepsilon_x + \upsilon\,\varepsilon_y\right)E}{\left(1-\upsilon^2\right)} \\ \sigma_y = \dfrac{\left(\upsilon\,\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)E}{\left(1-\upsilon^2\right)} \end{cases}$$

- Usando os resultados na última equação do slide anterior

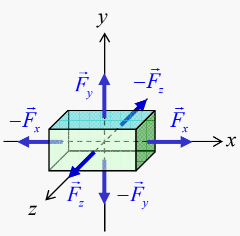
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \upsilon\sigma_y\right) \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \upsilon\sigma_x\right) \quad ; \quad \varepsilon_z = -\frac{\upsilon}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\upsilon}{1-\upsilon}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$

Tensões e Deformações

Tensões Multiaxiais

- Consideremos agora três forças axiais perpendiculares entre si a actuar num paralelepípedo rectangular de um material elástico



$$\sigma_x = \frac{F_x}{A_x} \qquad \varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{y1} = -\upsilon\,\varepsilon_{x1} = -\upsilon\dfrac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_{z1} = -\upsilon\,\varepsilon_{x1} = -\upsilon\dfrac{\sigma_x}{E} \end{cases}$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_y} \qquad \varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{x2} = -\upsilon\,\varepsilon_{y2} = -\upsilon\dfrac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_{z2} = -\upsilon\,\varepsilon_{y2} = -\upsilon\dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases}$$

$$\sigma_z = \frac{F_z}{A_z} \qquad \varepsilon_{z3} = \frac{\sigma_z}{E} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{x3} = -\upsilon\,\varepsilon_{z3} = -\upsilon\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_{y3} = -\upsilon\,\varepsilon_{z3} = -\upsilon\dfrac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

Tensões e Deformações

Tensões Multiaxiais

Somando as deformações segundo cada um dos eixos

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \upsilon\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \upsilon\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \upsilon\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left((1-\upsilon)\varepsilon_x - \upsilon\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right) \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left((1-\upsilon)\varepsilon_y - \upsilon\left(\varepsilon_x + \varepsilon_z\right)\right) \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left((1-\upsilon)\varepsilon_z - \upsilon\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right) \end{cases}$$

Resolvendo em ordem às tensões

Tensões e Deformações

Tensões Multiaxiais

- As tensões e deformações anteriormente referidas ocorrem segundo os eixos, e perpendicularmente à superfície do objecto, ou seja, são tensões e deformações axiais
- Usando a notação introduzida no início, podemos escrever

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_{xx} \\ \sigma_y = \sigma_{yy} \\ \sigma_z = \sigma_{zz} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{zz} \end{cases} \qquad \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\Delta V}{V} = K$$

$$\downarrow$$

módulo de compressibilidade

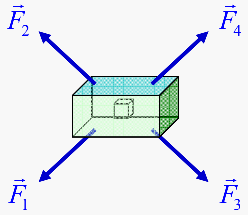
- De um modo geral, os materiais estão também sujeitos a forças de corte, o que leva ao aparecimento de tensões e deformações de corte
  - Se o material for linearmente elástico, e tiver módulo de rigidez igual a *G*, vimos já que a tensão de corte, τ_{ij}, e a deformação de corte por ela provocada, γ_{ij}, se relacionam pela equação

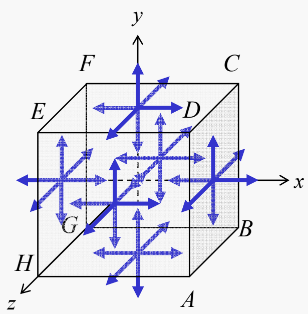
$$\tau_{ij} = G\,\gamma_{ij} \qquad \left(\text{com} \quad i \text{ e } j = x,\, y \text{ e } z \quad \text{e} \quad i \neq j\right)$$

Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Devido à acção de forças externas, podem surgir em cada uma das seis faces do elemento de volume, uma tensão axial, e duas tensões de corte, num total de dezoito componentes possíveis de tensão
- Considerando um sistema de eixos centrado no elemento de volume, podemos definir
  - Três faces positivas (*ABCD*, *ADEH* e *CDEF*)
  - Três faces negativas (*EFGH*, *BCFG* e *ABGH*)
- Por definição uma tensão é
  - Positiva se actuar numa face
    - Positiva no sentido positivo do eixo
    - Negativa no sentido negativo do eixo
  - Negativa se actuar numa face
    - Positiva no sentido negativo do eixo
    - Negativa no sentido positivo do eixo





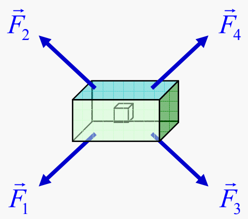
Tensões e Deformações

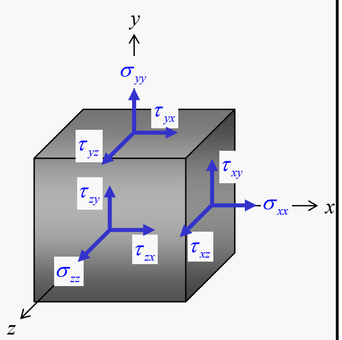
Análise de Tensões e Deformações

- Das condições de equilíbrio
  - As tensões em faces opostas são simétricas, pelo que o número de componentes de tensão distintas se reduz a um máximo de nove
    - Três tensões axiais
    - Seis tensões de corte
  - As tensões de corte perpendiculares entre si, têm de ser iguais, ou seja, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$
  - O número de componentes de tensão distintas reduz-se a seis

$$\sigma_{xx} \quad ; \quad \sigma_{yy} \quad ; \quad \sigma_{zz}$$

$$\tau_{xy} \quad ; \quad \tau_{xz} \quad ; \quad \tau_{yz}$$





Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- As nove componentes de tensão (das quais somente seis são distintas), podem ser agrupadas num tensor de segunda ordem

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Da mesma forma, as componentes de deformação podem também ser agrupadas num tensor de segunda ordem

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \gamma_{xy}/2 \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \gamma_{xz}/2 \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \gamma_{yz}/2 \end{cases}$$

Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Ao trabalhar com estados de tensão tridimensionais, é necessário definir um tensor de 4ª ordem, contendo 81 coeficientes, de modo a relacionar os tensores de tensão e de deformação
- Este tensor designa-se por tensor de rigidez, e permite escrever

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \qquad \sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad \left(\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)$$

- Por questões de simetria, somente 21 das 81 componente do tensor de rigidez são diferentes, podendo escrever-se na forma matricial

$$C = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & C_{xxxy} & C_{xxxz} & C_{xxyz} \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyzz} & C_{yyxy} & C_{yyxz} & C_{yyyz} \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & C_{zzxy} & C_{zzxz} & C_{zzyz} \\ C_{xyzxx} & C_{xyyy} & C_{xyzz} & C_{xyxy} & C_{xyxz} & C_{xyyz} \\ C_{xzxx} & C_{xzyy} & C_{xzzz} & C_{xzxy} & C_{xzxz} & C_{xzyz} \\ C_{yzxx} & C_{yzyy} & C_{yzzz} & C_{yzxy} & C_{yzxz} & C_{xyzyz} \end{bmatrix}$$

Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Tendo em conta que os tensores de tensões e de deformações só têm 6 componentes distintas, e escrevendo estes tensores na forma de Voigt

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}^T$$

a relação entre tensões e deformações é dada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & C_{xxxy} & C_{xxxz} & C_{xxyz} \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyzz} & C_{yyxy} & C_{yyxz} & C_{yyyz} \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & C_{zzxy} & C_{zzxz} & C_{zzyz} \\ C_{xyzxx} & C_{xyyy} & C_{xyzz} & C_{xyxy} & C_{xyxz} & C_{xyyz} \\ C_{xzxx} & C_{xzyy} & C_{xzzz} & C_{xzxy} & C_{xzxz} & C_{xzyz} \\ C_{yzxx} & C_{yzyy} & C_{yzzz} & C_{yzxy} & C_{yzxz} & C_{xyzyz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}$$

Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Para materiais isotrópicos, o tensor de rigidez é dado por

$$C = \frac{\lambda}{\upsilon} \begin{bmatrix} (1-\upsilon) & \upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & (1-\upsilon) & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & \upsilon & (1-\upsilon) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\upsilon)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\upsilon)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\upsilon)/2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \rightarrow \text{1º Coeficiente de Lamé}$$

Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Fazendo o produto entre o tensor de rigidez e o tensor de deformações, facilmente se verifica que, para materiais isotrópicos, as componentes do tensor de tensões são dadas por

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} + 2\,G\,\varepsilon_{ij} \qquad \text{com} \qquad i, j, k = 1, 2, 3 = x, y, z$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \text{Delta de Kronecker}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} + 2\,G\,\varepsilon_{ij}$$

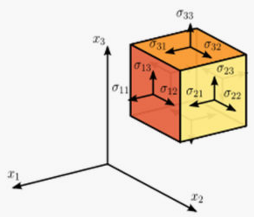
- Resolvendo em ordem às deformações, teremos

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\upsilon}{E}\delta_{ij}\,\sigma_{kk} + \frac{1}{2\,G}\sigma_{ij}$$

Tensões e Deformações

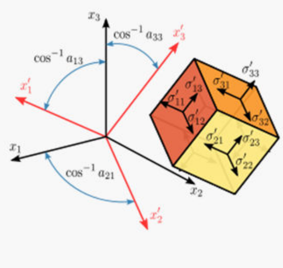
Análise de Tensões e Deformações

- Para estudar as tensões que actuam num sistema mecânico, e as deformações que estes sofrem, temos de definir um elemento de volume, e associar-lhe um sistema de eixos



- Normalmente o sistema de eixos é escolhido de modo a que um ou mais eixos coincidam com as direcções segundo as quais as tensões e deformações são máximas e/ou mínimas

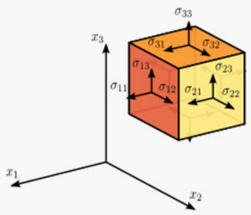
- Os sistemas biomecânicos apresentam poucas simetrias, e são irregulares, pelo que se torna necessário determinar as direcções de tensão e deformação máxima e/ou mínimas, a partir do conhecimento das tensões aplicadas segundo uma direcção arbitrária



Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Sejam
  - T a matriz de transformação do sistema de eixos S para o sistema de eixos S'
  - σ o tensor de tensões no sistema de eixos S
  - ε o tensor de deformações no sistema de eixos S

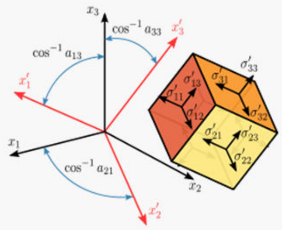


- O tensor das tensões no sistema de eixos S' é dado por

$$\sigma' = T\,\sigma\,T^T$$

- O tensor das deformações no sistema de eixos S' é dado por

$$\varepsilon' = T\,\varepsilon\,T^T$$



Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Para rotações do sistema de eixos em torno dos eixos X, Y e Z, as matrizes de transformação são dadas por

Rotação dos eixos no sentido positivo

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c & s\\ 0 & -s & c\end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & 0 & -s\\ 0 & 1 & 0\\ s & 0 & c\end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & s & 0\\ -s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Rotação dos eixos no sentido negativo

$$R_x(-\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}=R_x^T(\theta)$$

$$R_y(-\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & \sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix}=R_y^T(\theta)$$

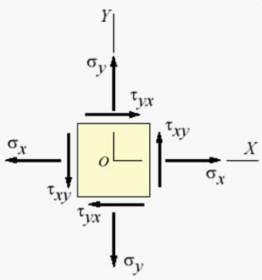
$$R_z(-\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=R_z^T(\theta)$$

Tensões e Deformações

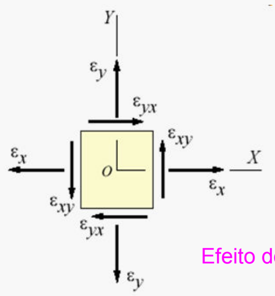
Análise de Tensões e Deformações

- Transformações de tensões e deformações a actuar num plano

Tensões



Deformações



Efeito de Poisson

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Tensões e Deformações

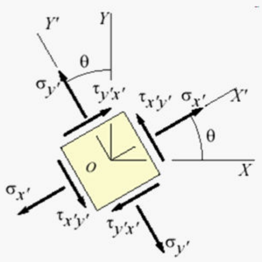
Análise de Tensões e Deformações

- Transformação das tensões a actuar num plano

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C]=[A][B] \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\sigma_x + s^2\sigma_y + 2cs\,\tau_{xy} & -cs\,\sigma_x + cs\,\sigma_y + c^2\tau_{xy} - s^2\tau_{xy} & 0 \\ -cs\,\sigma_x + cs\,\sigma_y + c^2\tau_{xy} - s^2\tau_{xy} & c^2\sigma_x + s^2\sigma_y - 2cs\,\tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \sigma'_x = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\theta) + \tau_{xy}\sin(2\theta) \\ \sigma'_y = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\theta) - \tau_{xy}\sin(2\theta) \\ \sigma'_z = 0 \\ \tau'_{xy} = -\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta) \\ \tau'_{xz} = 0 \\ \tau'_{yz} = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

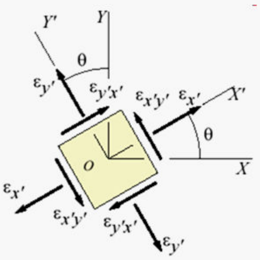
Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Transformação das deformações a actuar num plano

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_x & \varepsilon'_{xy} & \varepsilon'_{xz} \\ \varepsilon'_{yx} & \varepsilon'_y & \varepsilon'_{yz} \\ \varepsilon'_{zx} & \varepsilon'_{zy} & \varepsilon'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [C]=[A][B] \;\Rightarrow\; c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\,\varepsilon_x + s^2\,\varepsilon_y + 2cs\,\varepsilon_{xy} & -cs\,\varepsilon_x + cs\,\varepsilon_y + c^2\,\varepsilon_{xy} - s^2\,\varepsilon_{xy} & 0 \\ -cs\,\varepsilon_x + cs\,\varepsilon_y + c^2\,\varepsilon_{xy} - s^2\,\varepsilon_{xy} & c^2\,\varepsilon_x + s^2\,\varepsilon_y - 2cs\,\varepsilon_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \varepsilon'_x = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\theta) + \varepsilon_{xy}\sin(2\theta) \\ \varepsilon'_y = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\theta) - \varepsilon_{xy}\sin(2\theta) \\ \varepsilon'_z = \varepsilon_z \\ \varepsilon'_{xy} = -\dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin(2\theta) + \varepsilon_{xy}\cos(2\theta) \\ \varepsilon'_{xz} = 0 \\ \varepsilon'_{yz} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{sen}(2\theta) = 2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2} \end{array}}$$

Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Da infinidade de orientações possíveis do elemento de volume, há uma que tem particular interesse, e que define os planos principais
- Nos planos principais as tensões axiais assumem valores máximos e mínimos, e as tensões de corte são nulas
- As tensões principais são iguais aos valores máximo e mínimo dos valores próprios do tensor de tensões

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma^3 - \sigma_I\,\sigma^2 + \sigma_{II}\,\sigma - \sigma_{III} = 0$$

$$\sigma_I = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} - \tau_{zy}\,\tau_{yz} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} - \tau_{zx}\,\tau_{xz} + \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} - \tau_{xy}\,\tau_{yx}$$

$$\sigma_{III} = \sigma_{xx}\,\sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + \tau_{xy}\,\tau_{zx}\,\tau_{yz} + \tau_{yx}\,\tau_{zy}\,\tau_{xz} - \left(\sigma_{xx}\,\tau_{zy}\,\tau_{yz} + \tau_{xy}\,\tau_{yx}\,\sigma_{zz} + \tau_{zx}\,\tau_{xz}\,\sigma_{yy}\right)$$

Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- As direcções das tensões máximas e mínimas podem ser determinadas a partir das equações

$$\begin{cases} a_1\left(\sigma_{xx}-\sigma_a\right)+a_2\,\tau_{xy}+a_3\,\tau_{xz}=0 \\ a_1\,\tau_{xy}+a_2\left(\sigma_{yy}-\sigma_a\right)+a_3\,\tau_{yz}=0 \\ a_1\,\tau_{zx}+a_2\,\tau_{zy}+a_3\left(\sigma_{zz}-\sigma_a\right)=0 \end{cases}$$

$\sigma_a \rightarrow$ valor próprio do tensor de tensões

$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \rightarrow$ cossenos directores da direcção segundo a qual ocorre cada um dos valores próprios σ_a

Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

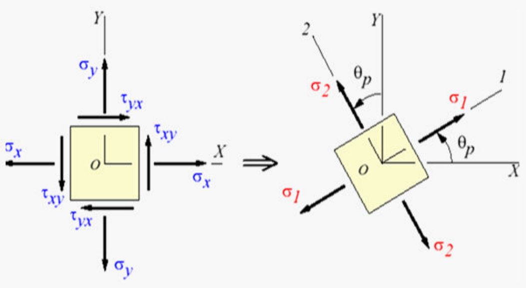
- Planos e tensões principais a duas dimensões

$$\begin{cases} \sigma_x'=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\theta)+\tau_{xy}\sin(2\theta) \\ \sigma_y'=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\theta)-\tau_{xy}\sin(2\theta) \\ \tau_{xy}'=-\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin(2\theta)+\tau_{xy}\cos(2\theta) \\ \sigma_z'=\tau_{xz}'=\tau_{yz}'=0 \end{cases}$$

$$\tau_{xy}'=0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin(2\theta_1)+\tau_{xy}\cos(2\theta_1)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta_1=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right)$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{e} \quad \cos(\operatorname{arctg}(x))=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$



$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

Tensões axiais máxima e mínima

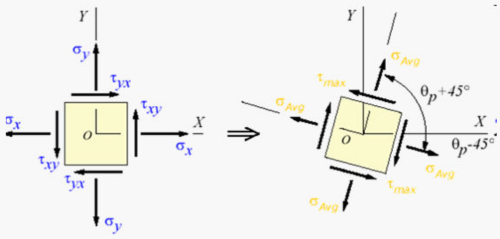
Análise de Tensões e Deformações

- A tensão de corte máxima a duas dimensões ocorre para uma direcção tal que as tensões axiais são iguais

$$\sigma'_x = \sigma'_y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta_2) + \tau_{xy}\sin(2\theta_2) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta_2) - \tau_{xy}\sin(2\theta_2)$$

$$\Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}\right) \qquad \tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\theta_2) + \tau_{xy}\cos(2\theta_2)$$

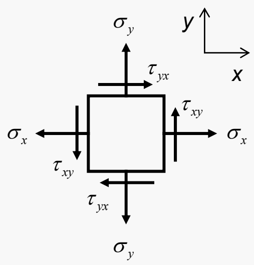
$$\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{e} \quad \cos(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

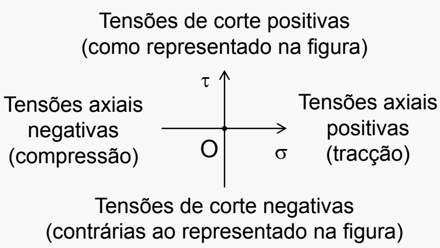


$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Análise de Tensões e Deformações

- Círculo de Mohr para tensões a duas dimensões
  - Permite determinar de forma gráfica as tensões num ponto de um material
  - Permite determinar as tensões principais e a tensão de corte máxima
  - Fazer um esboço das tensões conhecidas que actuam num dado elemento do material, representando os sentidos correctos das tensões
  - Desenhar um sistema de eixos rectangular, no qual o eixo horizontal representa a tensão axial e o eixo vertical a tensão de corte

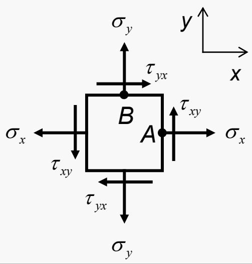


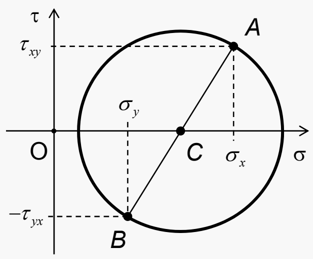


Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Círculo de Mohr para tensões a duas dimensões
  - Representar o ponto correspondente às tensões aplicadas na face positiva do eixo dos *XX* (ponto *A*)
  - Representar o ponto correspondente às tensões aplicadas na face superior, considerando a tensão de corte simétrica (ponto *B*)
  - Traçar um segmento de recta entre os pontos *A* e *B*
  - Traçar um círculo com centro no ponto *C* e raio igual a metade do comprimento do segmento de recta *AB*





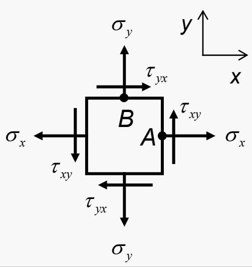
$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

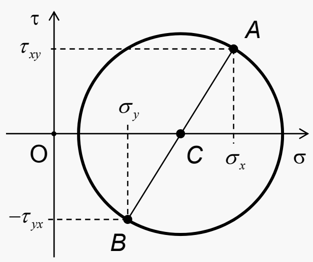
$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Círculo de Mohr para tensões a duas dimensões
  - No plano *XY*, as perpendiculares aos pontos *A* e *B* definem um ângulo de 90°
  - No plano $\tau(\sigma)$, os pontos *A* e *B* definem um ângulo de 180°
  - A uma rotação de um ângulo θ no plano *XY*, corresponde um ângulo 2θ no plano $\tau(\sigma)$





$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

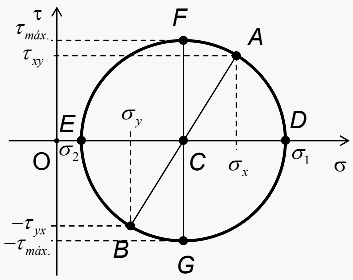
Análise de Tensões e Deformações

- Círculo de Mohr para tensões a duas dimensões
  - As tensões principais, σ_1 e σ_2, ocorrem para tensões de corte nulas, $\tau = 0$
  - A tensão de corte máxima ocorre quando as tensões axiais são iguais

$$\sigma_1 = \sigma_C + r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_C - r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{máx.} = r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{e} \quad r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

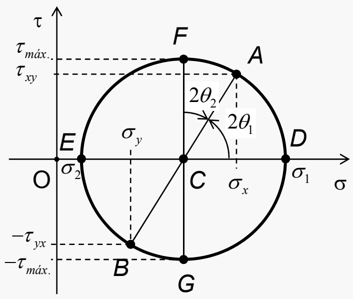
Tensões e Deformações

Análise de Tensões e Deformações

- Círculo de Mohr para tensões a duas dimensões
  - A direcção dos planos principais pode ser obtida através do ângulo entre o segmentos de recta *DE* e *AB*, partindo do ponto *D* para o ponto *A*
  - A direcção para a qual ocorre a tensão de corte máxima pode ser obtida através do ângulo entre os segmentos de recta *FG* e *AB*, partindo do ponto *F* para o ponto *A*

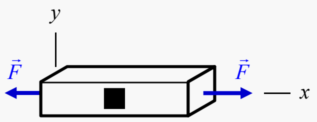
$$2\theta_1 = \text{arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

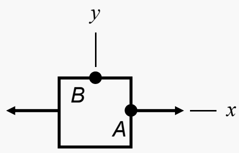
$$-2\theta_2 = \text{arctg}\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right) \Leftrightarrow \theta_2 = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}\right)$$

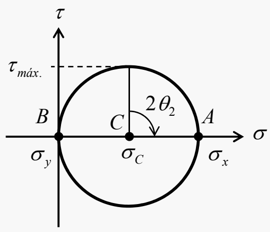


Análise de Tensões e Deformações

- Considere a barra representada na figura, que está sujeita a uma força na direcção do eixo dos *XX*. Para o elemento de área representado
  - Representar as tensões aplicadas
  - Representar o círculo de Mohr
  - Determinar a tensão de corte máxima, e o plano para o qual ocorre

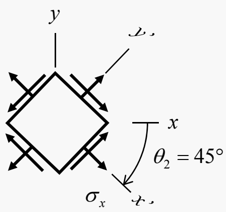






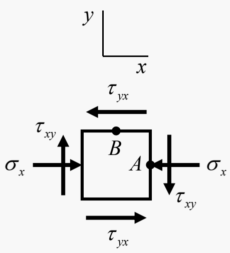
$$\tau_{máx} = r = \frac{\sigma_x}{2}$$

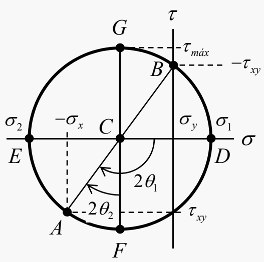
$$2\theta_2 = -90° \quad \Leftrightarrow \quad \theta_2 = -45°$$



Análise de Tensões e Deformações

- Um elemento volume de um material encontra-se em equilíbrio quando sujeito a uma tensão axial de compressão segundo o eixo dos *XX*, e a uma tensão de corte negativa perpendicular ao eixo dos *ZZ*
  - Representar as tensões que actuam no elemento de volume
  - Representar o círculo de Mohr
  - Determinar as tensões principais, a tensão de corte máxima, os planos principais, e o plano para o qual ocorre a tensão máxima





$$\sigma_1 = \sigma_c + r = -\frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_c - r = -\frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{máx} = r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\theta_1 = -45° - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sigma_x}{2\tau_{xy}}\right)$$

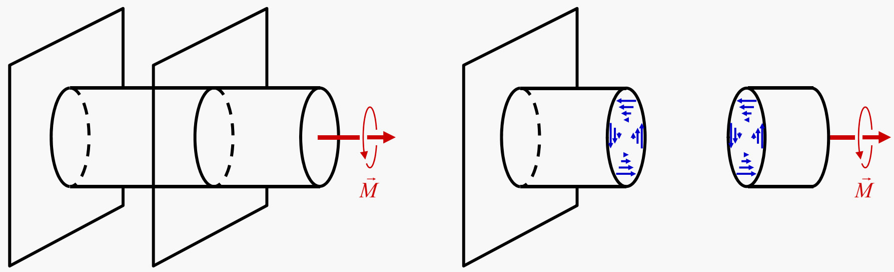
$$\sigma_C = -\frac{\sigma_x}{2} \quad ; \quad r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\theta_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sigma_x}{2\tau_{xy}}\right)$$

Tensões e Deformações

Torção

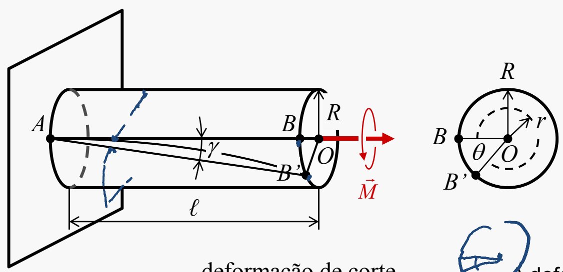
- Consideremos um cilindro de um material homogéneo, isotrópico e linearmente elástico, que se encontra fixo numa das suas extremidades a uma parede
- Apliquemos um momento torçor na extremidade livre do cilindro
- Façamos um corte numa secção recta do cilindro
- Para que a porção direita do cilindro esteja em equilíbrio, têm de existir forças de corte na superfície de corte



Tensões e Deformações

Torção

- Consideremos uma linha AB contida numa superfície longitudinal que passa pelo eixo do cilindro
- Para pequenas deformações, a linha AB' aproxima-se de um segmento de recta, que faz um ângulo γ com a linha AB
- Seja ℓ o comprimento do cilindro, e R o seu raio



$$\gamma \simeq \frac{\overline{BB'}}{\ell} \qquad \theta = \frac{\overline{BB'}}{R}$$

$$\gamma\,\ell = \theta\,R \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{\theta\,R}{\ell}$$

$$\gamma = \frac{\theta\,r}{\ell} \;\rightarrow$$ varia com a distância ao eixo do cilindro

A deformação é máxima na superfície do cilindro e nula no seu eixo, que se designa por eixo neutro

$\gamma \rightarrow$ deformação de corte sofrida pelo cilindro

$\theta \rightarrow$ ângulo de torção

Tensões e Deformações

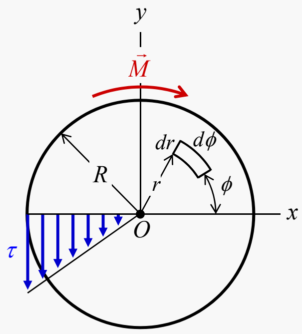
Torção

- Tensão de corte para deformações na região elástica linear

$$\left.\begin{array}{l}\tau = G\gamma \\ \gamma = \dfrac{\theta r}{\ell}\end{array}\right\} \quad \tau(r) = \frac{G\theta}{\ell} r$$

A tensão de corte varia com a distância ao eixo do cilindro

- O momento torçor é igual à soma dos momentos gerados pelas forças de corte



$$\left.\begin{array}{l}M = \int_A r\,\tau(r)\,dA \\ dA = r\,dr\,d\phi\end{array}\right\} \quad M = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,\tau(r)\,r\,dr\,d\phi$$

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\left(\frac{G\theta}{\ell}r\right) r\,dr\,d\phi = \frac{G\theta}{\ell}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\,dr\,d\phi$$

$$M = \frac{G\theta}{\ell}\left(\frac{\pi R^4}{2}\right)$$

Momento polar de inércia (J)

Tensões e Deformações

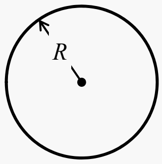
Torção

- Conhecendo o momento torçor e o momento polar de inércia, o ângulo de torção pode ser calculado a partir de

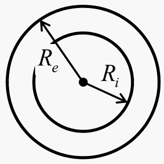
$$\theta = \frac{M\,\ell}{G\,J}$$

- Substituindo nas expressões da tensão de corte e da deformação de corte, teremos

$$\tau = \frac{M\,r}{J} \qquad \text{e} \qquad \gamma = \frac{M\,r}{G\,J}$$



$$J = \frac{\pi R^4}{2}$$

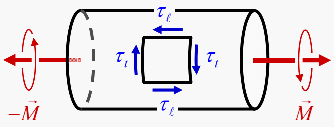


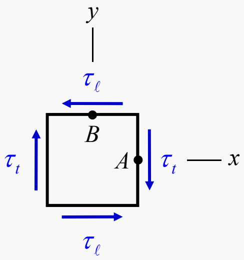
$$J = \frac{\pi\left(R_e^4 - R_i^4\right)}{2}$$

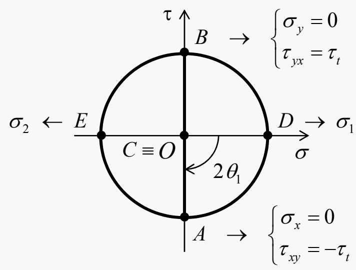
Tensões e Deformações

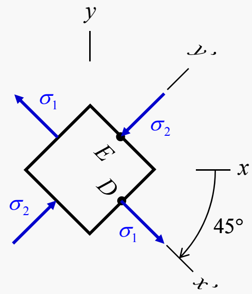
Torção

- Num cilindro sujeito a torção pura, um elemento de material com lados paralelos aos planos transversais e longitudinais do cilindro, está sujeito apenas a tensões de corte









$$\begin{cases} \sigma_C = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 0 \\ r = \tau_{xy} \end{cases}$$

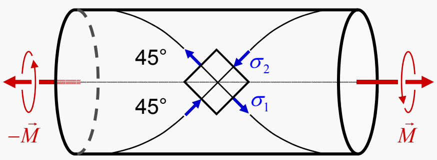
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_C + r = \tau_{xy} \\ \sigma_2 = \sigma_C - r = -\tau_{xy} \end{cases}$$

$$2\theta_1 = -90° \quad \Leftrightarrow \quad \theta_1 = -45°$$

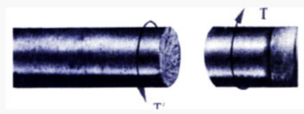
Tensões e Deformações

Torção

- Para um cilindro sujeito a torção pura, as trajectórias de tensão (linhas que seguem as direcções das tensões princpais) são helicoidais, formando um ângulo de 45° com o eixo do cilindro



- Os materiais dúcteis geralmente colapsam por corte, partindo em planos segundo os quais as tensões de corte são máximas, ou seja, perpendiculares ao eixo do cilindro

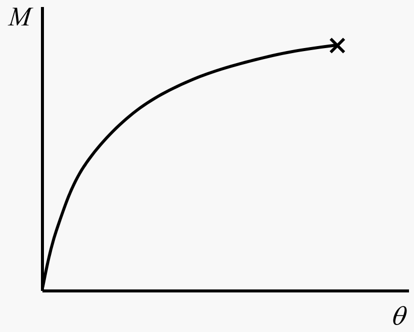


- Os materiais frágeis geralmente colapsam por tensões normais, partindo em planos segundo os quais as tensões de corte são máximas

Tensões e Deformações

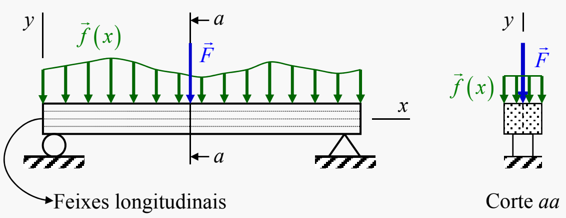
Torção

- Para estudar as propriedades dos materiais quando sujeitos a torção, utiliza-se um dispositivo de teste que regista o momento torçor e o ângulo de torção, fazendo-se então um gráfico do momento torçor em função do ângulo de torção



Tensões e Deformações

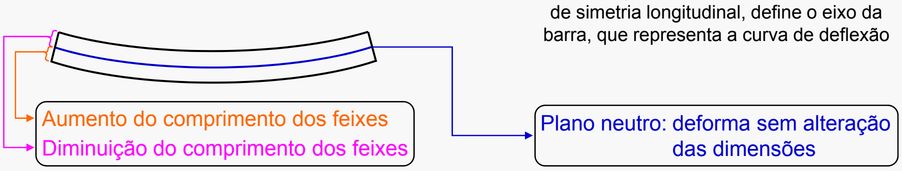
Flexão



Secção recta, carga e apoios simétricos relativamente a um plano longitudinal

Não ocorre rotação nem torção

A intercepção do plano neutro com o plano de simetria longitudinal, define o eixo da barra, que representa a curva de deflexão

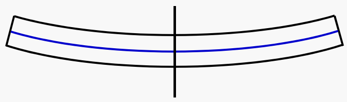


Tensões axiais, que variam ao longo da secção recta da barra

Tensões de corte na secção recta da barra

Tensões e Deformações

Flexão



- Tensões axiais e momento flector numa secção da barra

$\vec{M} \rightarrow$ Momento flector

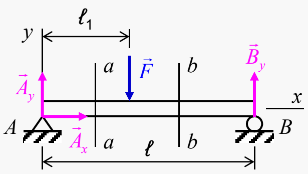
- Tensões de corte e forças de corte numa secção da barra

$\vec{V} \rightarrow$ Força de corte

- Em muitos problemas, os momentos flectores e as forças de corte que actuam ao longo de uma barra, podem ser determinados recorrendo ao método das secções e às condições de equilíbrio

Tensões e Deformações

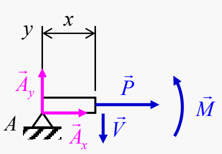
Flexão



$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y - F + B_y = 0 \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,A} = \vec{0} \Rightarrow -\ell_1 F + \ell B_y = 0$$

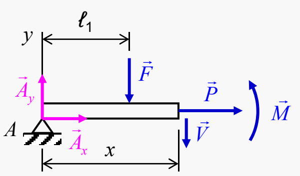
$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = \dfrac{\ell - \ell_1}{\ell} F \\ B_y = \dfrac{\ell_1}{\ell} F \end{cases}$$



$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} P + A_x = 0 \\ A_y - V = 0 \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,aa} = \vec{0} \Rightarrow -x\,A_y + M = 0$$

$$\begin{cases} P = 0 \\ V = A_y \\ M = x\,A_y \end{cases}$$



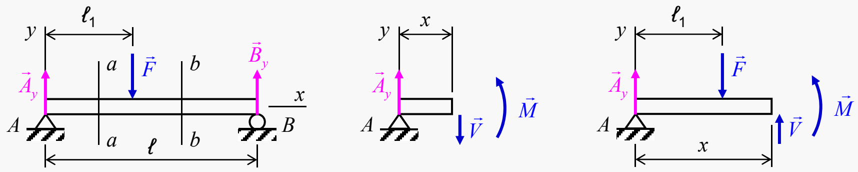
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} P + A_x = 0 \\ A_y - F - V = 0 \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,bb} = \vec{0} \Rightarrow (x - \ell_1)F - x\,A_y + M = 0$$

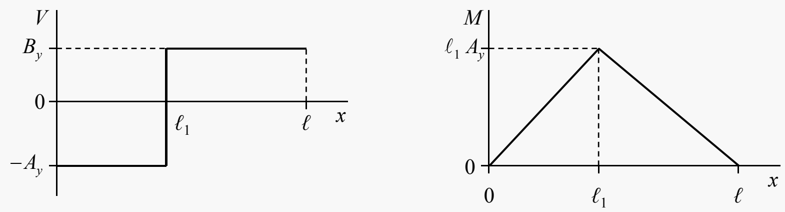
$$\begin{cases} P = 0 \\ V = -B_y \\ M = x\,A_y - (x - \ell_1)F \end{cases}$$

Tensões e Deformações

Flexão

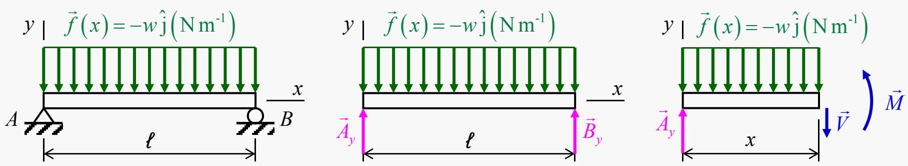


$$\begin{cases} A_y = \dfrac{\ell-\ell_1}{\ell} F \\ B_y = \dfrac{\ell_1}{\ell} F \end{cases} \qquad V = \begin{cases} A_y & 0 \le x < \ell_1 \\ B_y & \ell_1 < x \le \ell \end{cases} \qquad M = \begin{cases} x\,A_y & 0 \le x \le \ell_1 \\ x\,A_y - (x-\ell_1)F & \ell_1 \le x \le \ell \end{cases}$$



Tensões e Deformações

Flexão



$$\sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,A} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \ell\,B_y - \int_0^\ell x\,f(x)\,dx = 0 \;\Leftrightarrow\; \ell\,B_y - \int_0^\ell x\,w\,dx = 0 \qquad \boxed{B_y = \frac{w\,\ell}{2}}$$

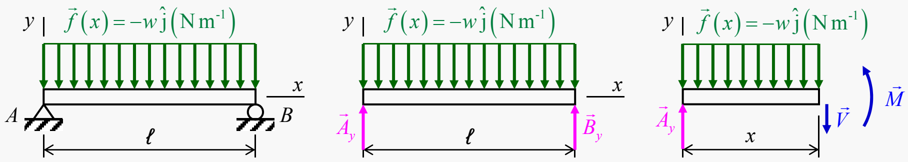
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \;\Rightarrow\; A_y + B_y - \int_0^\ell f(x)\,dx = 0 \;\Leftrightarrow\; A_y + B_y - \int_0^\ell w\,dx = 0 \qquad \boxed{A_y = \frac{w\,\ell}{2}}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \;\Rightarrow\; A_y - \int_0^x f(x')\,dx' - V = 0 \qquad \boxed{V = w\left(\frac{\ell}{2} - x\right)}$$

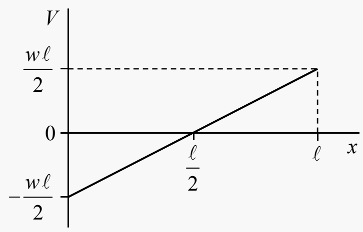
$$\sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,aa} = \vec{0} \;\Rightarrow\; -x\,A_y + \int_0^x x'\,f(x')\,dx' + M = 0 \qquad \boxed{M = \frac{w}{2}\left(\ell\,x - x^2\right)}$$

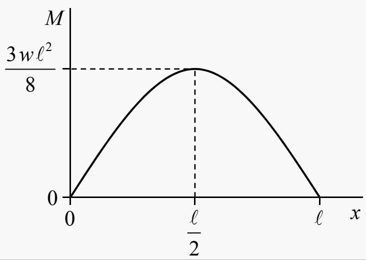
Tensões e Deformações

Flexão



$\boxed{A_y = \dfrac{w\ell}{2}}$ $\boxed{B_y = \dfrac{w\ell}{2}}$ $\boxed{V = w\left(\dfrac{\ell}{2} - x\right)}$ $\boxed{M = \dfrac{w}{2}\left(\ell x - x^2\right)}$

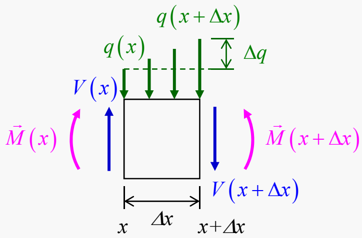




Tensões e Deformações

Flexão

- Consideremos um pequeno elemento de uma barra sobre a qual está aplicada uma carga distribuída
  - Na porção esquerda do elemento da barra (x) estão aplicadas a carga $q(x)$, a força de corte $V(x)$ e o momento flector $M(x)$
  - Na porção direita do elemento da barra ($x+\Delta x$) a carga, força de corte e momento flector são ligeiramente diferentes, e assumem os valores $q(x+\Delta x)$, $V(x+\Delta x)$ e $M(x+\Delta x)$, respectivamente
  - Sendo o elemento da barra muito pequeno, a carga distribuída pode ser aproximada à soma de uma função constante, $q(x)$, com uma função triangular, igual a zero na face esquerda e a Δq na face direita



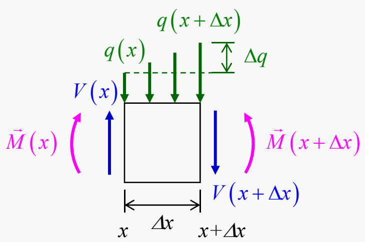
Tensões e Deformações

Flexão

- Considerando o equilíbrio de translação

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad V(x) - q(x)\Delta x - \frac{1}{2}\Delta p \Delta x - V(x+\Delta x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = -q(x) - \frac{1}{2}\Delta p$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[-q(x) - \frac{1}{2}\Delta p\right] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dV}{dx} = -q(x) - \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{2}\Delta p\right]$$



$$\boxed{\frac{dV(x)}{dx} = -q(x)}$$

$$\boxed{V(x_2) - V(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} -q(x)\,dx}$$

Tensões e Deformações

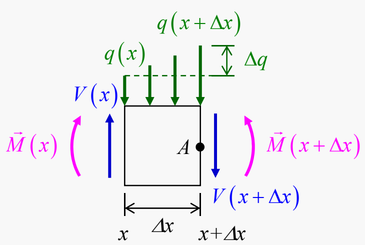
Flexão

- Considerando o equilíbrio de rotação

$$\sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i, A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad -M(x) - V(x)\Delta x + M(x+\Delta x) + q(x)\Delta x\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2}\Delta p \Delta x \frac{\Delta x}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{\Delta x} = V(x) - \frac{q(x)\Delta x}{2} - \frac{\Delta q\,\Delta x}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[V(x) - \frac{q(x)\Delta x}{2} - \frac{\Delta q\,\Delta x}{6}\right]$$



$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx} = V(x)}$$

$$\boxed{M(x_2) - M(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} V(x)\,dx}$$

Tensões e Deformações

Flexão

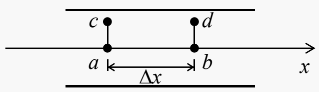
- Deformação axial sofrida pelas fibras da barra
  - Secções rectas perpendiculares ao eixo neutro da barra antes da deformação, continuam a ser planas e perpendiculares ao eixo neutro após a deformação

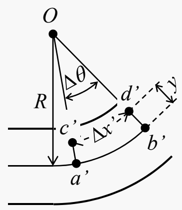
    $$\sphericalangle c'a'b' = \sphericalangle a'b'd' = \frac{\pi}{2}$$

  - No cálculo da deformação longitudinal da barra, a deformação transversal pode ser despresada

    $$|ac| = |a'c'| \quad e \quad |bd| = |b'd'|$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{(R-y)\Delta\theta - R\Delta\theta}{R\Delta\theta} \qquad \boxed{\varepsilon = -\frac{y}{R}}$$





Tensões e Deformações

Flexão

- Recordando, para materiais isotrópicos na região elástica linear

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\upsilon}{E}\delta_{ij}\,\sigma_{kk} + \frac{1}{2\,G}\sigma_{ij}$$

$$\upsilon = \frac{E}{2\,G} - 1$$

- Uma vez que, para um dado elemento de volume da barra, não existem forças a actuar na direcção do eixo dos *ZZ*, esta fica sujeita a um estado de tensão bidimensional, em que

$$\sigma_{zz} = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = 0 \quad ; \quad \tau_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \upsilon\left(\sigma_{yy} + \cancel{\sigma_{zz}}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \upsilon\left(\sigma_{xx} + \cancel{\sigma_{zz}}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\cancel{\sigma_{zz}} - \upsilon\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\upsilon}{E}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E}\cancel{\tau_{xz}}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\cancel{\tau_{yz}}$$

Tensões e Deformações

Flexão

- Numa barra sujeita a flexão, as tensões axiais segundo a direcção transversal (YY), são muito inferiores às tensões axiais segundo a direcção axial (XX), pelo que podemos ainda considerar

$$\sigma_{yy} \simeq 0$$

- Com esta simplificação, o estado de tensão/deformação axial é traduzido por uma equação unidimensional

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx}$$

- Substituindo o resultado anteriormente obtido para a deformação axial, teremos

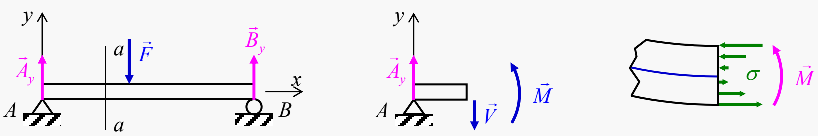
$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{R}$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{E}{R}y$$

Tensões e Deformações

Flexão

- Como vimos anteriormente, a resultante ao longo da direcção axial tem de ser nula



$$R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_A \sigma_{xx}\, dA = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{E}{R}\int_A y\, dA = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{EQ}{R} = 0$$

$$Q = \int_A y\, dA \quad \rightarrow \quad 1^{\text{o}} \text{ momento de área em torno do eixo neutro}$$

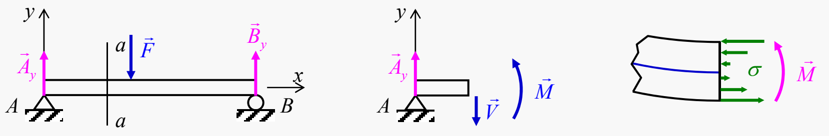
$$Q = \bar{y}\, A$$

Como o 1º momento de área em torno do eixo neutro é nulo, este passa pelo centroide da secção recta da barra

Tensões e Deformações

Flexão

- Calculemos agora o momento flector a partir das forças axiais que actuam na secção recta da barra



$$M = \int_A y\,\sigma_{xx}\,dA \Leftrightarrow M = \int_A y\left(-\frac{E}{R}y\right)dA \Leftrightarrow M = -\frac{E}{R}\int_A y^2\,dA$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{\sigma_{xx}}{y}\int_A y^2\,dA \Leftrightarrow M = \frac{\sigma_{xx}}{y} I \Leftrightarrow \sigma_{xx} = \frac{M\,y}{I}$$

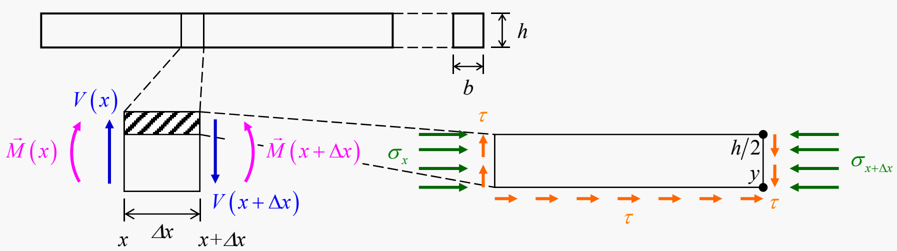
$$I = \int_A y^2\,dA \rightarrow \text{2º momento de área}$$

$$\boxed{\sigma_{xx} = -\frac{M\,y}{I}}$$

Tensões e Deformações

Flexão

- Tensões de corte a actuar numa secção da barra



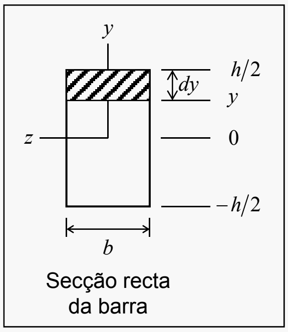
$$\sum_i \vec{F}_{i,xx} = \vec{0} \Leftrightarrow \int_{A'} \sigma_x\,dA' - \int_{A'} \sigma_{x+\Delta x}\,dA' + \tau\,b\,\Delta x = 0 \Leftrightarrow \int_{A'} (\sigma_x - \sigma_{x+\Delta x})\,dA' + \tau\,b\,\Delta x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{A'} \left(\frac{M(x)\,y}{I} - \frac{M(x+\Delta x)\,y}{I}\right) dA' + \tau\,b\,\Delta x = 0 \Leftrightarrow -\frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{I}\int_{A'} y\,dA' + \tau\,b\,\Delta x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{I}\frac{dM(x)}{dx}\int_{A'} y\,dA' + \tau\,b = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{V}{I\,b}\int_{A'} y\,dA'$$

Tensões e Deformações

Flexão



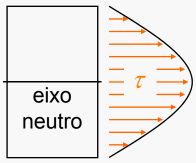
$$\tau = \frac{V\,Q}{I\,b}$$

O segundo momento de área, I, surge da tensão axial, e é calculado para a área total da secção recta

$$I = \int_A y^2\,dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2\,b\,dy \qquad I = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$Q = \int_{A'} y\,dA' = \int_{y}^{h/2} y'\,b\,dy' \qquad Q(y) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

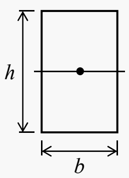
$$\tau = \frac{6V}{b\,h^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$



A tensão de corte é máxima no eixo neutro, e nula na superfície

Tensões e Deformações

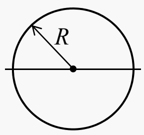
Flexão



Plano Neutro

$$A = b\,h \qquad I = \frac{b\,h^3}{12} \qquad Q_{máx} = \frac{b\,h^2}{8}$$

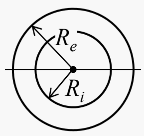
$$\sigma_{máx} = \frac{M\,h}{2\,I} \qquad \tau_{máx} = \frac{3V}{2\,A}$$



Plano Neutro

$$A = \pi\,R^2 \qquad I = \frac{\pi\,R^4}{4} \qquad Q_{máx} = \frac{2\,R^3}{3}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{M\,R}{I} \qquad \tau_{máx} = \frac{4V}{3\,A}$$



Plano Neutro

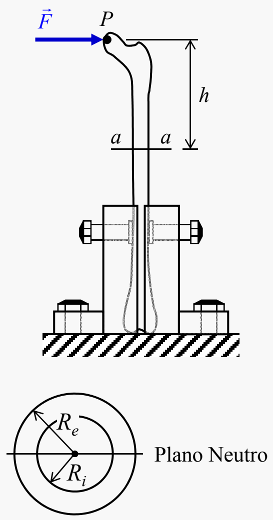
$$A = \pi\left(R_e^2 - R_i^2\right) \qquad I = \frac{\pi\left(R_e^4 - R_i^4\right)}{4} \qquad Q_{máx} = R_e\left(R_e^2 + R_i^2\right)$$

$$\sigma_{máx} = \frac{M\,R_e}{I} \qquad \tau_{máx} = \frac{2V}{A}$$

Tensões e Deformações

Flexão

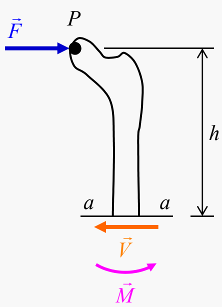
- Um fémur é montado num dispositivo de teste à flexão, tal como ilustrado na figura, de tal modo que a porção distal do fémur se encontra fixa. Num ponto P da cabeça do fémur é aplicada uma força horizontal com intensidade F = 500 N. A distância entre a linha de acção da força F e o corte aa é igual a 16 cm, medidos a partir do ponto P, e a secção recta do fémur tem a forma de um anel com raio interno R_i = 6 mm e raio externo R_e = 13 mm
  - Represente o diagrama de corpo livre da porção superior do fémur (até ao corte aa)
  - Calcule as reacções internas na secção aa
  - Calcule a tensão axial máxima e a tensão de corte máxima a que fica sujeita a secção aa

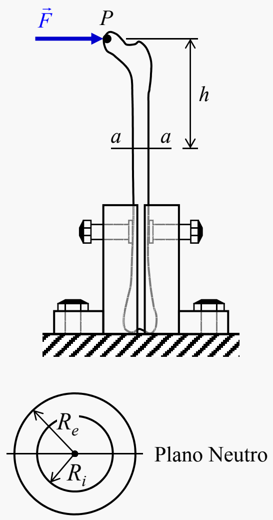


Tensões e Deformações

Flexão

- Diagrama de corpo livre da porção superior do fémur (até ao corte *aa*)

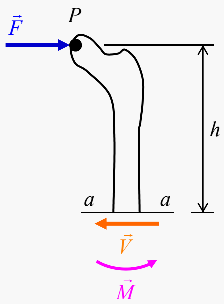




Tensões e Deformações

Flexão

- Calculo das reacções internas na secção *aa*



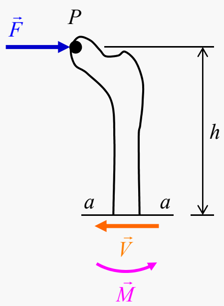
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad F - V = 0 \qquad \boxed{V = F}$$

$$\sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,P} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad M - hF = 0 \qquad \boxed{M = h\,F}$$

Tensões e Deformações

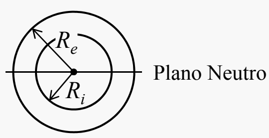
Flexão

- Cálculo da tensão axial máxima e da tensão de corte máxima a que fica sujeita a secção *aa*



$$\sigma_{máx} = \frac{M\,R_e}{I} = \frac{h\,F\,R_e}{I} \qquad \boxed{\sigma_{máx} \simeq 48{,}6\ \text{MPa}}$$

$$\tau_{máx} = \frac{2V}{A} = \frac{2F}{A} \qquad \boxed{\tau_{máx} \simeq 2{,}4\ \text{MPa}}$$



$$A = \pi\left(R_e^2 - R_i^2\right) \qquad I = \frac{\pi\left(R_e^4 - R_i^4\right)}{4} \qquad Q_{máx} = R_e\left(R_e^2 + R_i^2\right)$$

$$\sigma_{máx} = \frac{M\,R_e}{I} \qquad \tau_{máx} = \frac{2V}{A}$$

Tensões e Deformações

Efeitos Combinados

- Até agora analisámos os efeitos de forças axiais, forças de corte, torção pura e flexão pura, como se cada uma destas formas de carga fosse aplicada isoladamente
  - Os materiais podem estar sujeitos à acção combinada de tensões axiais, tensões de corte, torção e flexão

- Para analisar as tensões e deformações a que fica sujeito um elemento de um dado material sujeito a cargas arbitrárias
  - Determinam-se as tensões, axiais e de corte, que cada tipo de carga introduz num dado elemento do material, como se cada uma das cargas actuasse isoladamente
  - As tensões axiais e de corte resultantes do efeito combinado de várias cargas obtêm-se somando as tensões axiais e de corte calculadas isoladamente

Tensões e Deformações

Efeitos Combinados

- Um dos métodos de tratamento utilizados para fracturas intertrocantéricas (Figura 1), consiste na aplicação de um dispositivo de fixação, tal como ilustrado na Figura 2
- Na Figura 3 encontra-se esquematizado um método para testar a resistência a esforços do dispositivo de fixação

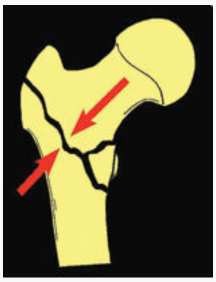


Figura 1

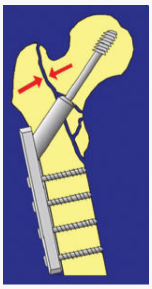


Figura 2

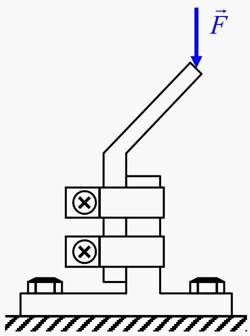
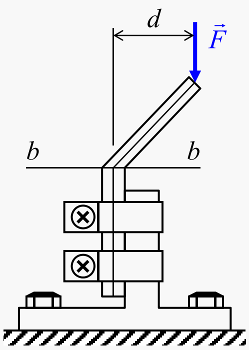


Figura 3

Tensões e Deformações

Efeitos Combinados

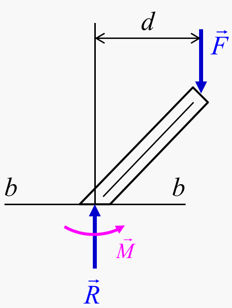
- Supondo que a força $\boldsymbol{F}$ representada na figura tem uma intensidade de 1000 N, que a distância horizontal entre o ponto de aplicação da força e o ponto médio do corte *bb* é d = 6 cm, e que a secção recta no corte *bb* é um quadrado com lado a = 15 mm
  - Represente o diagrama de corpo livre da porção superior da fixação
  - Calcule as reacções internas na secção *bb*
  - Determine as tensões geradas na secção *bb*

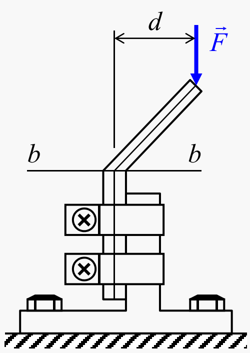


Tensões e Deformações

Efeitos Combinados

- Diagrama de corpo livre da porção superior do dispositivo de fixação, até ao corte *bb*

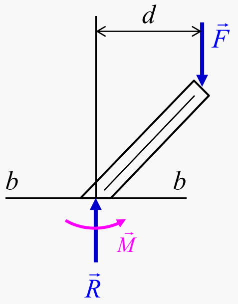




Tensões e Deformações

Efeitos Combinados

- Determinação das reacções internas no corte *bb*



$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \;\Rightarrow\; -F + R = 0 \qquad \boxed{R = F}$$

$$\sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i,O} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; M - d\,F = 0 \qquad \boxed{M = d\,F}$$

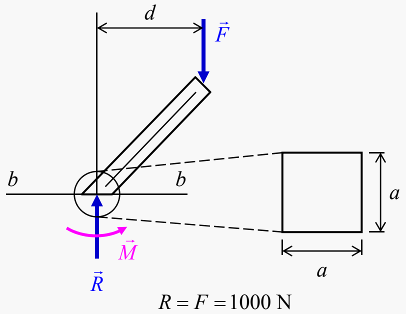
Tensões e Deformações

Efeitos Combinados

- Determinação das tensões geradas na secção *bb*
  - A força R directamente aplicada na secção bb origina uma tensão axial de compressão (σ_a) dada por

$$\sigma_a = -\frac{R}{A} \;\Leftrightarrow\; \sigma_a = -\frac{R}{a^2} \;\Leftrightarrow\; \sigma_a = -\frac{1000}{0.015^2}$$

$$\boxed{\sigma_a = -4,(4)\ \mathrm{MPa}}$$

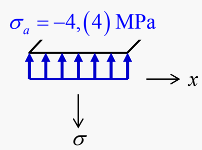


$R = F = 1000\ \mathrm{N}$

$a = 15\ \mathrm{mm} = 0.015\ \mathrm{m}$

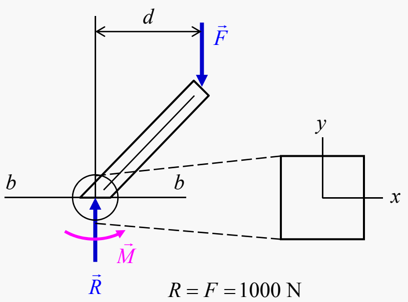
$d = 6\ \mathrm{cm} = 0.06\ \mathrm{m}$

Assumindo uma distribuição uniforme da tensão axial na secção bb



Efeitos Combinados

- Determinação das tensões geradas na secção *bb*
  - A força F aplicada no dispositivo de fixação vai gerar um momento flector na secção bb, originando tensões axiais, que são máximas nas porções externas da secção recta no corte bb, e nula no seu centro



$R = F = 1000 \text{ N}$

$a = 15 \text{ mm} = 0.015 \text{ m}$

$d = 6 \; cm = 0.06 \text{ m}$

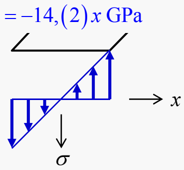
$$\sigma_b = -\frac{M\,x}{I} \qquad M = d\,F \qquad I = \frac{a^4}{12}$$

$$\sigma_b = -\frac{12\,d\,F\,x}{a^4} \qquad \boxed{\sigma_b = -14,(2)\,x \text{ GPa}}$$

$$x = -7{,}5 \text{ mm} \;\Rightarrow\; \sigma_b = 106,(6) \text{ MPa}$$

$$x = 7{,}5 \text{ mm} \;\Rightarrow\; \sigma_b = -106,(6) \text{ MPa}$$

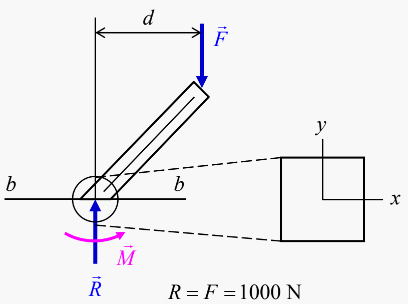
$\sigma_b = -14,(2)\,x$ GPa



Tensões e Deformações

Efeitos Combinados

- A tensão axial que actua na secção bb é então a soma das duas tensões axiais calculadas anteriormente, σ_a e σ_b



$R = F = 1000 \text{ N}$

$a = 15 \text{ mm} = 0.015 \text{ m}$

$d = 6 \; cm = 0.06 \text{ m}$

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_b$$

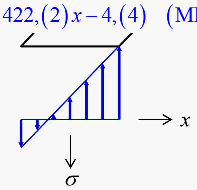
$$\sigma = -4,(4) - 1422,(2)\,x \quad (\text{MPa})$$

$$x = -7{,}5 \text{ mm} \;\Rightarrow\; \sigma = 6,(2) \text{ MPa}$$

$$x = -3{,}125 \text{ mm} \;\Rightarrow\; \sigma = 0 \text{ MPa}$$

$$x = 7{,}5 \text{ mm} \;\Rightarrow\; \sigma = -15,(1) \text{ MPa}$$

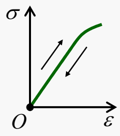
$\sigma = -1422,(2)\,x - 4,(4) \quad (\text{MPa})$



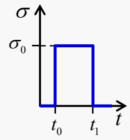
Tensões e Deformações

Viscoelasticidade

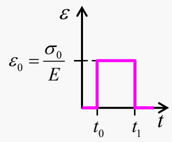
- Para um material elástico, a relação entre tensão e deformação não depende do tempo
  - Genericamente, a relação entre tensão e deformação é dada por $\sigma = \sigma(\varepsilon)$
  - Para materiais elásticos lineares, $\sigma(\varepsilon)$ reduz-se à Lei de Hooke, $\sigma = E\,\varepsilon$



- Quando submetidos a cargas, os materiais elásticos ideais deformam instantaneamente, apresentando uma deformação proporcional à carga aplicada
  - A energia fornecida é armazenada sob a forma de energia potencial



- Quando removida a carga aplicada, os materiais elásticos recuperam a sua forma inicial, seguindo o mesmo caminho da curva de tensão deformação observado durante a carga
  - O processo de descarga dá-se sem perdas de energia



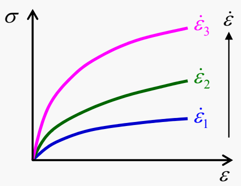
Tensões e Deformações

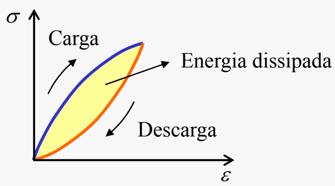
Viscoelasticidade

- Muitos materiais apresentam curvas de tensão/deformação para as quais a tensão necessária para obter uma dada deformação depende da taxa à qual ocorre a deformação
- Estes materiais dizem-se viscoelásticos, e a relação entre tensão e deformação pode ser escrita genericamente na forma

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \cdots, t) \qquad \text{onde} \qquad \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \ddot{\varepsilon} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}, \quad \cdots$$

- As curvas de tensão deformação durante a carga e descarga não coincidem, podendo apresentar um ciclo de histerese

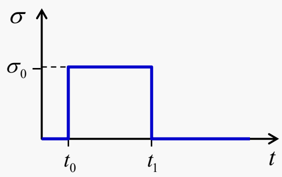


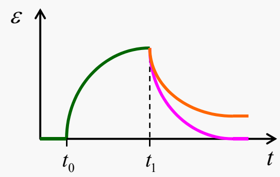


Tensões e Deformações

Viscoelasticidade

- Quando sujeitos a uma tensão constante, os materiais viscoelásticos apresentam curvas de deformação que dependem não só do tempo, mas também do valor da tensão aplicada
- Após remoção da tensão, verifica-se uma recuperação (parcial ou total) da deformação, que depende igualmente do tempo
- As curvas de deformação em função do tempo obtidas para uma tensão com a forma de uma função degrau, designam-se por curvas de fluência e recuperação
- O quociente entre a curva de deformação na fase de carga, $\varepsilon(t)$, e a amplitude da tensão constante aplicada, σ_0, denomina-se função de fluência, sendo característica de um dado material

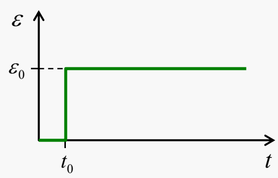


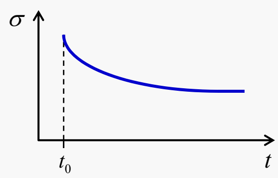


Tensões e Deformações

Viscoelasticidade

- Para um material viscoelástico, a tensão necessária para manter uma deformação constante varia ao longo do tempo
- As curvas de tensão em função do tempo obtidas para uma deformação com a forma de uma função degrau, designam-se por curvas de relaxação de tensão
- O quociente entre a curva de relaxação de tensões $\sigma(t)$, e a amplitude da deformação constante aplicada, ε_0, denomina-se função de relaxação, sendo característica de um dado material



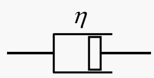


Tensões e Deformações

Viscoelasticidade

- Os modelos físicos mais simples de materiais viscoelásticos, assumem que o comportamento
  - Elástico obedece à lei de Hooke $\longrightarrow$ $\sigma = E\,\varepsilon$
  - Viscoso obedece à lei de Newton da viscosidade $\longrightarrow$ $\sigma = \eta\,\dot{\varepsilon}$
- O comportamento de um material viscoelástico pode ser modelizado combinando elementos elásticos lineares com elementos viscosos
  - Os elementos elásticos (molas) sofrem deformação limitada quando sujeitos a tensões, restituindo a configuração inicial após retirada a tensão
  - Os elementos viscosos (amortecedores) sofrem deformação enquanto estiver aplicada uma tensão, mantendo uma deformação constante após retirada a tensão

Componente elástica

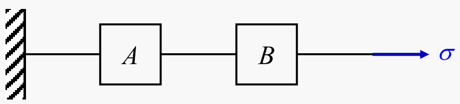


Componente viscosa

Tensões e Deformações

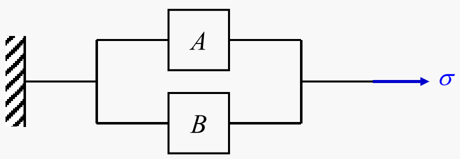
Viscoelasticidade

- Elementos associados em série, estão sujeitos à mesma tensão, mas sofrem deformações diferentes, sendo a deformação total a soma das deformações sofridas por cada elemento individual



$$\begin{cases} \sigma_A = \sigma_B = \sigma \\ \varepsilon = \varepsilon_A + \varepsilon_B \end{cases}$$

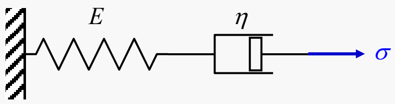
- Elementos associados em paralelo, sofrem a mesma deformação, mas a tensão total aplicada é igual à soma das tensões aplicadas em cada elemento



$$\begin{cases} \sigma = \sigma_A + \sigma_B \\ \varepsilon_A = \varepsilon_B = \varepsilon \end{cases}$$

Viscoelasticidade

- Modelo de Maxwell
  - O comportamento do material é modelizado por uma associação em série de uma mola com um amortecedor



$$\begin{cases} \sigma = \sigma_E = \sigma_\eta \\ \varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_\eta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_E = E\,\varepsilon_E \\ \sigma_\eta = \eta\,\dot{\varepsilon}_\eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varepsilon}_E = \dfrac{\dot{\sigma}_E}{E} \\ \dot{\varepsilon}_\eta = \dfrac{\sigma_\eta}{\eta} \end{cases}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_e}{E} + \frac{\sigma_v}{\eta}$$

$$\boxed{\eta\,\dot{\sigma} + E\,\sigma = E\,\eta\,\dot{\varepsilon}}$$

Tensões e Deformações

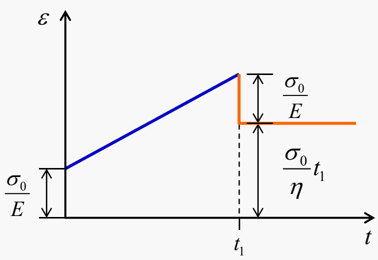
Viscoelasticidade

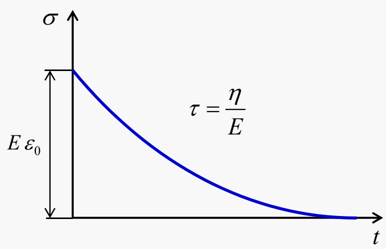
- Modelo de Maxwell

Fluência $\rightarrow$ $\varepsilon(t) = \dfrac{\sigma_0}{\mathrm{E}} + \dfrac{\sigma_0}{\eta} t$

Recuperação $\rightarrow$ $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 - \dfrac{\sigma_0}{E}$

Relaxação $\rightarrow$ $\sigma(t) = E\,\varepsilon_0 \exp\left(-\dfrac{E}{\eta} t\right)$



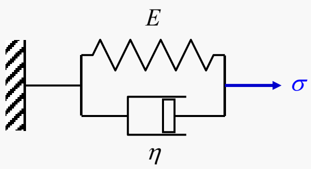


Um material de Maxwell apresenta comportamento de fluido viscoso

Tensões e Deformações

Viscoelasticidade

- Modelo de Kelvin-Voigt
  - O comportamento do material é modelizado por uma associação em paralelo de uma mola com um amortecedor



$$\begin{cases} \sigma = \sigma_E + \sigma_\eta \\ \varepsilon = \varepsilon_E = \varepsilon_\eta \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} \sigma_E = E\,\varepsilon_E \\ \sigma_\eta = \eta\,\dot{\varepsilon}_\eta \end{cases} \\ \\ \sigma = \sigma_E + \sigma_\eta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \sigma = E\,\varepsilon_E + \eta\,\dot{\varepsilon}_\eta \qquad \boxed{\sigma = E\,\varepsilon + \eta\,\dot{\varepsilon}}$$

Tensões e Deformações

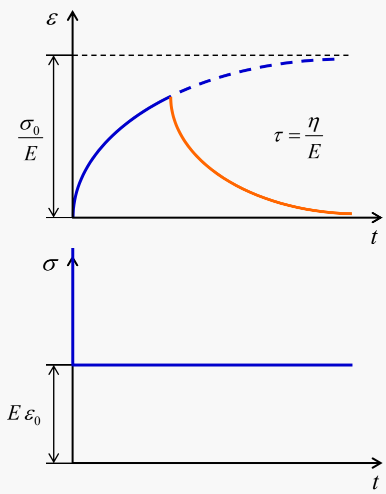
Viscoelasticidade

- Modelo de Kelvin-Voigt

Fluência $\rightarrow$ $\varepsilon(t) = \dfrac{\sigma_0}{\mathrm{E}}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{E}{\eta}t\right)\right)$

Recuperação $\rightarrow$ $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left(-\dfrac{E}{\eta}t\right)$

Relaxação $\rightarrow$ $\sigma(t) = \varepsilon_0\left(\eta\,\delta(t) + E\,u(t)\right)$

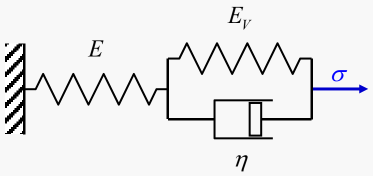


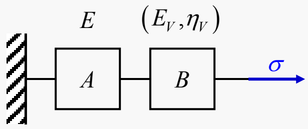
Um material de Kelvin-Voigt apresenta comportamento de sólido viscoelástico

Tensões e Deformações

Viscoelasticidade

- Sólido Linear Padrão (Forma de Kelvin-Voigt)
  - O comportamento do material é modelizado por uma associação em série de uma mola com um sólido de Kelvin-Voigt





$$\begin{cases} \sigma = \sigma_A = \sigma_B \\ \varepsilon = \varepsilon_A + \varepsilon_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_A = E\,\varepsilon_A \\ \sigma_B = E_V\,\varepsilon_B + \eta_V\,\dot{\varepsilon}_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_A = \dfrac{\sigma_A}{E} \\ \sigma_B = \left(E_V + \eta_V \dfrac{d}{dt}\right)\varepsilon_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_A = \dfrac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_B = \dfrac{\sigma}{\left(E_V + \eta_V \dfrac{d}{dt}\right)} \end{cases}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_A + \varepsilon_B \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{\left(E_V + \eta_V \dfrac{d}{dt}\right)}$$

$$\boxed{\eta_V\,\dot{\sigma} + (E + E_V)\sigma = E\,E_V\,\varepsilon + E\,\eta_V\,\dot{\varepsilon}}$$

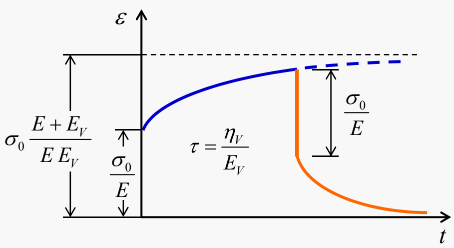
Tensões e Deformações

Viscoelasticidade

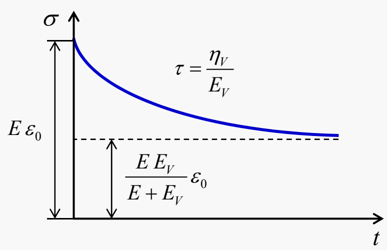
- Sólido Linear Padrão (Forma de Kelvin-Voigt)

Fluência $\rightarrow \varepsilon(t) = \dfrac{\sigma_0}{\mathrm{E}} + \dfrac{\sigma_0}{E_V}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{E_V}{\eta_V}t\right)\right)$

Recuperação $\rightarrow \varepsilon(t) = \left(\varepsilon_0 - \dfrac{\sigma_0}{\mathrm{E}}\right)\exp\left(-\dfrac{E_V}{\eta_V}t\right)$



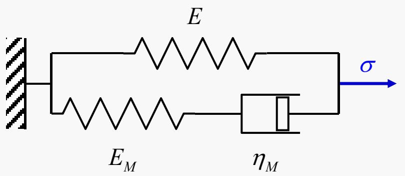
Relaxação $\rightarrow \sigma(t) = \varepsilon_0 \dfrac{E}{E + E_V}\left[E_V + E\,\exp\left(-\dfrac{E_V}{\eta_V}t\right)\right]$

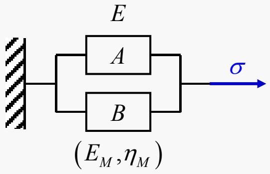


Tensões e Deformações

Viscoelasticidade

- Sólido Linear Padrão (Forma de Maxwell)
  - O comportamento do material é modelizado por uma associação em paralelo de uma mola com um fluido de Maxwell





$$\begin{cases}\sigma = \sigma_A + \sigma_B \\ \varepsilon = \varepsilon_A = \varepsilon_B\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma_A = E\,\varepsilon_A \\ \eta_M\,\dot{\sigma}_B + E_M\,\sigma_B = E_M\,\eta_M\,\dot{\varepsilon}_B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sigma_A = E\,\varepsilon_A \\ \left(\eta_M \dfrac{d}{dt} + E_M\right)\sigma_B = E_M\,\eta_M\,\dot{\varepsilon}_B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sigma_A = E\,\varepsilon_A \\ \sigma_B = \dfrac{E_M\,\eta_M\,\dot{\varepsilon}_B}{\left(\eta_M \dfrac{d}{dt} + E_M\right)}\end{cases}$$

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_B \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = E\,\varepsilon_A + \frac{E_M\,\eta_M\,\dot{\varepsilon}_B}{\left(\eta_M \dfrac{d}{dt} + E_M\right)}$$

$$\boxed{\eta_M\,\dot{\sigma} + E_M\,\sigma = E\,E_M\,\varepsilon + \left(E + E_M\right)\eta_M\,\dot{\varepsilon}}$$

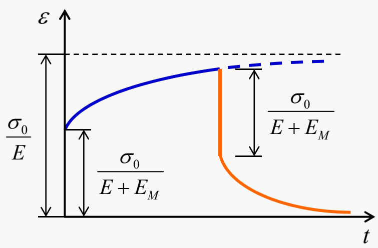
Tensões e Deformações

Viscoelasticidade

- Sólido Linear Padrão (Forma de Maxwell)

$$\text{Fluência} \quad \rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left[1 - \frac{E_M}{E + E_M}\exp\left(-\frac{E\,E_M}{\left(E + E_M\right)\eta_M}t\right)\right]$$

$$\text{Recuperação} \rightarrow \varepsilon(t) = \left(\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E + E_M}\right)\exp\left(-\frac{E\,E_M}{\left(E + E_M\right)\eta_M}t\right)$$

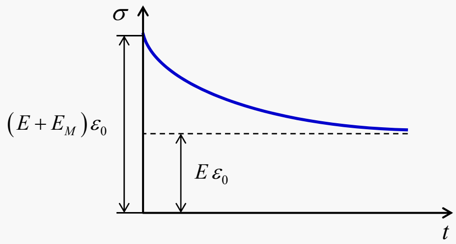


$$\tau = \frac{\left(E + E_M\right)\eta_M}{E\,E_M}$$

Viscoelasticidade

- Sólido Linear Padrão (Forma de Maxwell)

$$\text{Relaxação} \rightarrow \sigma(t) = \varepsilon_0 \left[E + E_M \exp\left(-\frac{E_M}{\eta_M} t \right) \right]$$



$$\tau = \frac{\eta_M}{E_M}$$