# Folha 1
# Cálculo Vectorial



## Exercício 2) – Enunciado

Considere os vectores $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = -\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath}$.

$a)$ Determine, analiticamente, os vectores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.

$b)$ Calcule os módulos $\left| \vec{a} + \vec{b} \right|$ e $\left| \vec{a} - \vec{b} \right|$.

$c)$ Represente graficamente os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.

$d)$ Qual o ângulo formado entre os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$?

## Exercício 2) – Resolução

$a)$ Determine, analiticamente, os vectores $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$.

$$Dados: \begin{cases} \vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} \\ \vec{b} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \end{cases}$$

$$\vec{a}+\vec{b} = \left( 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} \right) + \left( -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \right) = \left( 3-1 \right)\hat{\imath} + \left( 4+2 \right)\hat{\jmath} = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$$

$$\vec{a}-\vec{b} = \left( 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} \right) - \left( -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \right) = \Big( 3-\left( -1 \right) \Big)\hat{\imath} + \left( 4-2 \right)\hat{\jmath} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$



## Exercício 2) – Resolução

$b)$ Calcule os módulos $\left| \vec{a}+\vec{b} \right|$ e $\left| \vec{a}-\vec{b} \right|$.

$$Dados: \begin{cases} \vec{a}+\vec{b} = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} \\ \vec{a}-\vec{b} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \end{cases}$$

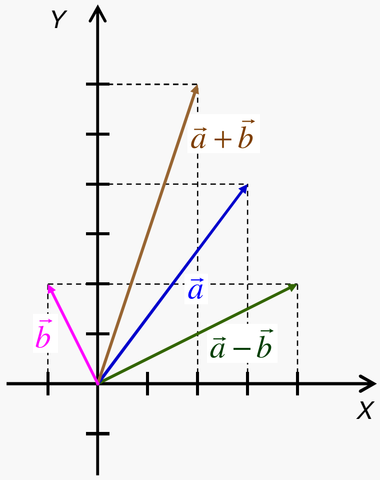
$$\left| \vec{a}+\vec{b} \right| = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = \sqrt{2^3 \times 5} = 2\sqrt{10} \simeq 6,32$$

$$\left| \vec{a}-\vec{b} \right| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5} \simeq 4,47$$

## Exercício 2) – Resolução

$c)$ Represente graficamente os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$.

$$Dados: \begin{cases} \vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} \\ \vec{b} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \\ \vec{a}+\vec{b} = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} \\ \vec{a}-\vec{b} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \end{cases}$$




Folha 1 – Cálculo Vectorial

## Exercício 2) – Resolução

$d)$ Qual o ângulo formado entre os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$?

$$Dados: \begin{cases} \vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} \\ \vec{b} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \end{cases}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b}\right)$$

Temos de calcular $\vec{a}\cdot\vec{b}$, bem como os módulos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$

## Exercício 2) – Resolução

$d)$ (Continuação)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left( 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} \right)\cdot\left( -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \right) = 3\times\left( -1 \right) + 4\times 2 = -3 + 8 = 5$$

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \sqrt{\left( -1 \right)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Substituindo na expressão de $\theta$

$$\theta = \operatorname{arcos}\left( \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b} \right) \Leftrightarrow \theta = \operatorname{arcos}\left( \frac{5}{5\times\sqrt{5}} \right) \Leftrightarrow \theta \simeq 63{,}43°$$



## Exercício 3) – Enunciado

Indique em que condições se verificam as seguintes proposições

$a)$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a + b = c.$

$b)$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $\left| a - b \right| = c.$

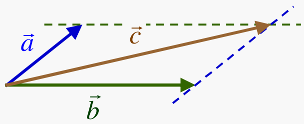
$c)$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}.$

$d)$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2.$

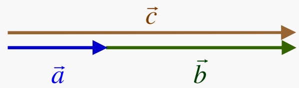
$e)$ $\left| \vec{a} + \vec{b} \right| = \left| \vec{a} - \vec{b} \right|.$

## Exercício 3) – Resolução

$a)\quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \quad \text{e} \quad a+b=c.$




$a+b\neq c$



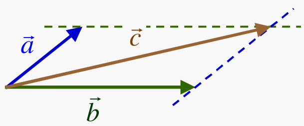

$a+b=c$

Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm de ter a mesma direcção e sentido.

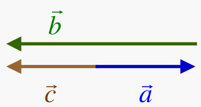


## Exercício 3) – Resolução

$b)\quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \quad \text{e} \quad \left| a-b \right| = c.$




$\left| a-b \right| \neq c$

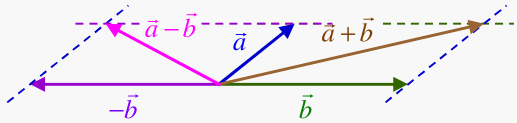



$\left| a-b \right| = c$

Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm de ter a mesma direcção e sentidos opostos.

## Exercício 3) – Resolução

$c) \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}.$

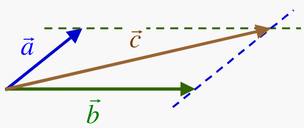



O vector $\vec{b}$ tem de ser um vector nulo.

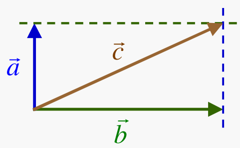
Folha 1 – Cálculo Vectorial

## Exercício 3) – Resolução

$d) \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \quad \text{e} \quad a^2+b^2=c^2.$




$a^2+b^2\neq c^2$



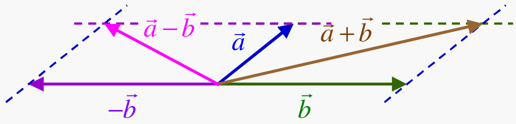

$a^2+b^2=c^2$

Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm de ser perpendiculares.

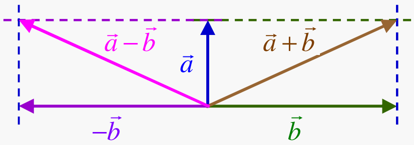
Folha 1 – Cálculo Vectorial

## Exercício 3) – Resolução

$e)\quad \left| \vec{a}+\vec{b} \right| = \left| \vec{a}-\vec{b} \right|.$




$\left| \vec{a}+\vec{b} \right| \neq \left| \vec{a}-\vec{b} \right|$




$\left| \vec{a}+\vec{b} \right| = \left| \vec{a}-\vec{b} \right|$

Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm de ser perpendiculares.

Folha 1 – Cálculo Vectorial

## Exercício 5) – Enunciado

Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores não nulos, indique em que condições se verifica

$a)\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0.$

$b)\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=a\,b.$

$c)\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=-a\,b.$

$d)\quad \vec{a}\cdot\vec{b}>0.$

$e)\quad \vec{a}\cdot\vec{b}<0.$

## Exercício 5) – Resolução

Recordando a definição de produto escalar

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\left(\ \theta\ \right)$$

$a)$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 90°.$

$b)$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b \quad \Rightarrow \quad \theta = 0°.$

$c)$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = -a\,b \quad \Rightarrow \quad \theta = 180°.$

$d)$ $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Rightarrow \quad 0° \le \theta < 90°.$

$e)$ $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Rightarrow \quad 90° < \theta \le 180°.$



## Exercício 6) – Enunciado

Dados dois vectores $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ e $\vec{b} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$, determine:

$a)$ O produto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

$b)$ O menor ângulo formado entre os vectores.

$c)$ O versor $\hat{b}$.

$d)$ A projecção do vector $\vec{a}$ na direcção de $\vec{b}$.

## Exercício 6) – Resolução

a) O produto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Dados: $\begin{cases} \vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k} \\ \vec{b} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k} \end{cases}$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}} = \left( 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k} \right)\cdot\left( 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k} \right) = 3\times 2 + 2\times\left( -2 \right) + \left( -1 \right)\times 3$$

$$= 6 - 4 - 3$$

$$= \boxed{-1}$$



## Exercício 6) – Resolução

$b$) O menor ângulo formado entre os vectores.

Dados: $\begin{cases} \vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k} \\ \vec{b} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -1 \end{cases}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\left( \theta \right) \Leftrightarrow \cos\left( \theta \right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b} \Rightarrow \theta = \arccos\left( \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b} \right)$$

$$a = \sqrt{3^2 + 2^2 + \left( -1 \right)^2} = \sqrt{14} \quad , \quad b = \sqrt{2^2 + \left( -2 \right)^2 + 3^2} = \sqrt{17}$$

$$\theta = \arccos\left( \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b} \right) \Leftrightarrow \theta = \arccos\left( \frac{-1}{\sqrt{14}\sqrt{17}} \right) \Leftrightarrow \boxed{\theta \simeq 93{,}72°}$$

Folha 1 – Cálculo Vectorial

## Exercício 6) – Resolução

$c)$ O versor $\hat{b}$.

Dados: $\begin{cases} \vec{b} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k} \\ \left|\vec{b}\right| = \sqrt{17} \end{cases}$

$$\boxed{\hat{b}} = \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{2\sqrt{17}}{17}\hat{\imath} - \frac{2\sqrt{17}}{17}\hat{\jmath} + \frac{3\sqrt{17}}{17}\hat{k}}$$

Folha 1 – Cálculo Vectorial

## Exercício 6) – Resolução

$d)$ A projecção do vector $\vec{a}$ na direcção de $\vec{b}$.

Dados: $\begin{cases} \vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k} \\ \hat{b} = \frac{2\sqrt{17}}{17}\hat{\imath} - \frac{2\sqrt{17}}{17}\hat{\jmath} + \frac{3\sqrt{17}}{17}\hat{k} \end{cases}$

$$\boxed{\mathrm{Proj}_{\hat{b}}\,\vec{a}} = \vec{a}\cdot\hat{b} = \left(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right)\cdot\left(\frac{2\sqrt{17}}{17}\hat{\imath} - \frac{2\sqrt{17}}{17}\hat{\jmath} + \frac{3\sqrt{17}}{17}\hat{k}\right)$$

$$= 3\times\frac{2\sqrt{17}}{17} + 2\times\left(-\frac{2\sqrt{17}}{17}\right) + \left(-1\times\right)\frac{3\sqrt{17}}{17}$$

$$= \boxed{-\frac{\sqrt{17}}{17}} \simeq -0,243$$

## Exercício 9) – Enunciado

Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores não nulos, indique em que condições se verifica:

$a)$ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

$b)$ $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=ab$



## Exercício 9) – Resolução

$a)$ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$

O produto vectotial é nulo se os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tiverem a mesma direcção.

$b)$ $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=ab.$

Como o módulo do produto vectorial entre os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é dado por

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=ab\,\mathrm{sen}\left(\theta\right)$$

os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm ser perpendiculares.

## Exercício 10) – Enunciado

Sabendo que o vector $\vec{a}$ tem o sentido positivo da direcção do eixo dos XX e mede 2, e que o vector $\vec{b}$ tem o sentido negativo do eixo dos ZZ e mede 5, determine:

*a*) O módulo do produto vectorial entre os vectores $\left( \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \right)$.

*b*) Qual a direcção do produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$?

*c*) Qual o sentido do produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$?



## Exercício 10) – Resolução

*a*) O módulo do produto vectorial entre os vectores $\left( \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \right)$.

$$\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = a\,b\,\mathrm{sen}\left( \theta \right) = 2 \times 5 \times \mathrm{sen}\left( 90° \right) = 10$$

*b*) Qual a direcção do produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$?

O vector resultante do produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ tem a direcção do eixo do $YY$.

*c*) Qual o sentido do produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$?

O vector resultante do produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ tem o sentido positivo do eixo do $YY$.

## Exercício 12) – Enunciado

Dados os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que $\vec{a} = 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = 6$ e $\left( \vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \hat{i} = 0$, determine:

$a)$ O menor ângulo formado entre os vectores.

$b)$ As componentes do vector $\vec{b}$.

Folha 1 – Cálculo Vectorial

## Exercício 12) – Resolução

$a)$ O menor ângulo formado entre os vectores.

Dados: $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \\ \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = 6 \end{cases}$

Sendo θ o ângulo entre os vectores, e aplicando as definições de produto escalar e do módulo do produto vectorial

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \\ \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\,b\cos\left( \theta \right) = 5 \\ a\,b\,\mathrm{sen}\left( \theta \right) = 6 \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira

## Exercício 12) – Resolução

*a*) (Continuação)

$$\begin{cases} a\,b\cos(\theta) = 5 \\ a\,b\,\mathrm{sen}(\theta) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{\cancel{a}\,\cancel{b}\,\mathrm{sen}(\theta)}{\cancel{a}\,\cancel{b}\cos(\theta)} = \frac{6}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}(\theta) = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad \theta = \mathrm{arctg}(1{,}2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta \simeq 50{,}19°}$$



## Exercício 12) – Resolução

*b*) As componentes do vector $\vec{b}$.

$$\text{Dados:} \quad \begin{cases} \vec{a} = 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 5 \\ \left|\,\vec{a}\times\vec{b}\,\right| = 6 \\ \left(\,\vec{a}\times\vec{b}\,\right)\cdot\hat{\imath} = 0 \end{cases}$$

Uma vez que o vector $\vec{b}$ é desconhecido, comecemos por escrevê-lo na sua forma analítica

$$\vec{b} = b_x\,\hat{\imath} + b_y\,\hat{j} + b_z\,\hat{k}$$

## Exercício 12) – Resolução

*b*) (Continuação)

Calculemos $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $\longrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=5 \Leftrightarrow \left(3\,\hat{j}+4\hat{k}\right)\cdot\left(b_x\,\hat{i}+b_y\,\hat{j}+b_z\,\hat{k}\right)=5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3b_y+4b_z=5$$

Obtemos desta forma uma equação que relaciona as componentes $y$ e $z$ do $\vec{b}$.

Calculemos $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ $\longrightarrow$ $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 3 & 4\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=$

$$\left(3b_z\,\hat{i}+4b_x\,\hat{j}\right)-\left(3b_x\,\hat{k}+4b_y\,\hat{i}\right)=\left(3b_z-4b_y\right)\hat{i}+4b_x\,\hat{j}-3b_x\,\hat{k}$$

Folha 1 – Cálculo Vectorial

## Exercício 12) – Resolução

*b*) (Continuação)

Aplicando a equação $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\hat{i}=0$

$$\left(c_x\,\hat{i}+c_y\,\hat{j}+c_z\,\hat{k}\right)\cdot\hat{i}=0 \;\Rightarrow\; c_x=0 \;\Rightarrow\; 3b_z-4b_y=0$$

Obtemos desta forma uma segunda equação que relaciona as componentes $y$ e $z$ do vector $\vec{b}$. Resolvendo este sistema de duas equações a duas incógnitas, obtemos as componentes $b_y$ e $b_z$ do vector $\vec{b}$.

$$\begin{cases}3b_y+4b_z=5\\ 3b_z-4b_y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\times 4) & 12b_y+16b_z=20\\ (\times 3) & 9b_z-12b_y=0\end{cases} \Rightarrow 25b_z=20 \Leftrightarrow \boxed{b_z=0{,}8}$$

**Folha 1 – Cálculo Vectorial**

## Exercício 12) – Resolução

*b*) (Continuação)

Subsituindo o resultado numa das equações anteriores, determinamos $b_y$

$$3b_z - 4b_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_y = \frac{3}{4} b_z \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{b_y = 0,6}$$

Falta-nos só determinar a componente $b_x$. Para o fazermos, vamos utilizar a equação do módulo do produto vectorial entre os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\cancel{\left(3b_z - 4b_y\right)^2} + 16b_x^2 + 9b_x^2} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{25b_x^2} = 6 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 5b_x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad b_x = \frac{6}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{b_x = 1,2}$$

**Folha 1 – Cálculo Vectorial**

## Exercício 12) – Resolução

*b*) (Continuação)

Tendo as componentes $b_x$, $b_y$ e $b_z$, podemos finalmente escreve o vector $\vec{b}$.

$$\boxed{\vec{b} = 1,2\,\hat{\imath} + 0,6\,\hat{\jmath} + 0,8\,\hat{k}}$$