Cálculo Vectorial

Cálculo Vectorial

Grandezas Escalares e Vectoriais

- Grandezas Escalares
  - Representam quantidades que ficam bem determinadas por um número, como por exemplo
    - Tempo
    - Temperatura
    - Pressão
    - …
- Grandezas Vectoriais:
  - Representam quantidades que não ficam completamente definidas por um número, como por exemplo
    - Posição
    - Velocidade
    - Aceleração
    - Força
    - …

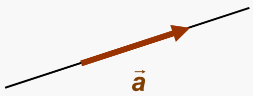
Cálculo Vectorial

Vectores

- Um vector representa-se
  - Analiticamente
    - Por uma letra sobre a qual é desenhada uma seta

$$\vec{a}$$

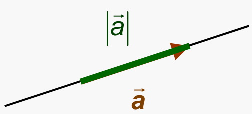
  - Graficamente
    - Por um segmento de recta orientado, compreendendo
      - Direcção
      - Sentido
      - Módulo



Cálculo Vectorial

Vectores

- A direcção do vector é definida pela recta suporte, ou linha de acção
  - Colinear com o próprio vector
- O sentido é o que vai da origem para a extremidade do vector
- O módulo do vector é o número positivo que mede o comprimento do segmento de recta orientado
  - Representa-se por $|\vec{a}|$ ou a
  - Se o módulo de um vector for igual a zero, o vector diz-se um vector nulo e representa-se por $\vec{0}$

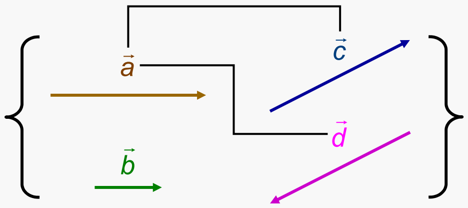


Cálculo Vectorial

Vectores

Vectores com o mesmo módulo, mas direcções diferentes (logo não se podem relacionar os sentidos)

Vectores com a mesma direcção e sentido, mas módulos diferentes

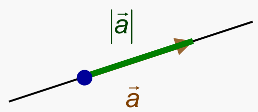


Vectores com a mesma direcção e módulo, mas sentidos diferentes (opostos)

Cálculo Vectorial

Vector Ligado

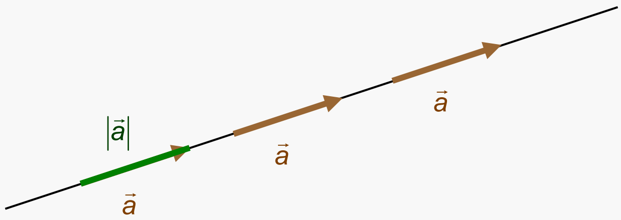
- Para ficar completamente definido, é necessário conhecer
  - A sua origem (ponto de aplicação)
  - A sua direcção
  - O seu sentido
  - O seu módulo



Cálculo Vectorial

Vector Deslizante

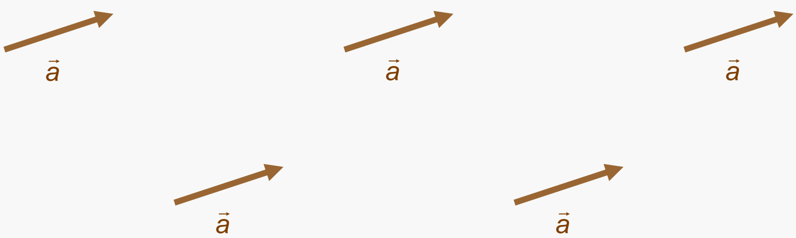
- Para ficar completamente definido, é necessário conhecer
  - A sua recta suporte
  - O seu sentido
  - O seu módulo
- O ponto de aplicação pode ser tomado arbitrariamente sobre a recta suporte



Cálculo Vectorial

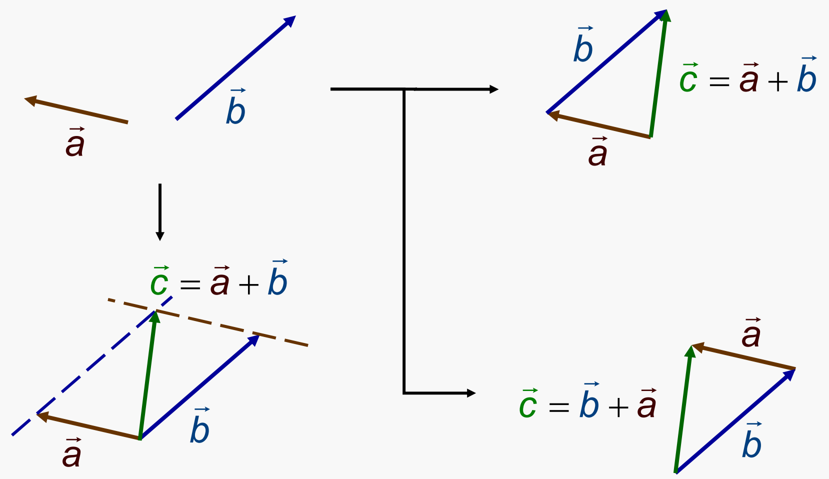
Vector Livre

- Para ficar completamente definido, é necessário conhecer
  - A sua direcção
  - O seu sentido
  - O seu módulo
- A recta suporte pode ser qualquer uma, desde que tenha a direcção do vector



Cálculo Vectorial

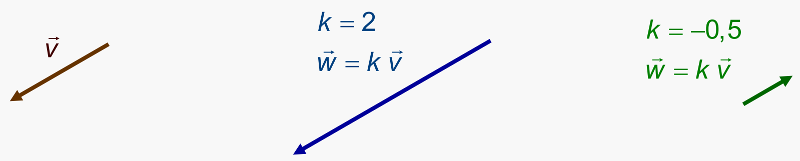
Adição de Vectores Livres



Cálculo Vectorial

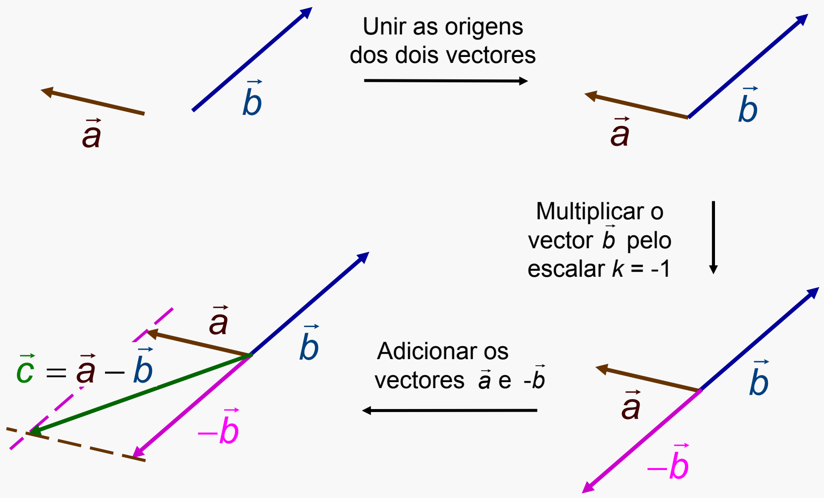
Multiplicação de um Vector por um Escalar

- Seja k um número real e $\vec{v}$ um vector
- A multiplicação do escalar k pelo vector $\vec{v}$ tem por resultado um vector, $\vec{w} = k\,\vec{v}$
  - Com a mesma direcção do vector $\vec{v}$
  - O mesmo sentido de $\vec{v}$ se $k > 0$
  - Sentido contrário ao de $\vec{v}$ se $k < 0$
  - E módulo igual ao produto dos módulos de k e $\vec{v}$ $\longrightarrow$ $|\vec{w}| = |k|\,|\vec{v}|$



Cálculo Vectorial

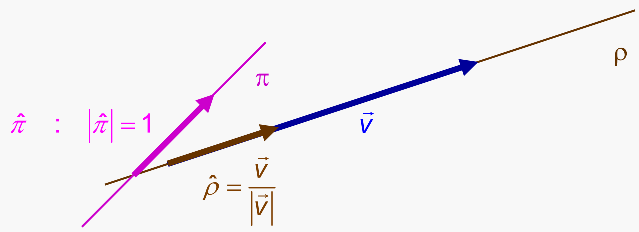
Subtracção de Vectores Livres



Cálculo Vectorial

Vector Unitário

- Um vector cujo módulo é igual à unidade chama-se vector unitário, ou versor
- Um versor é utilizado para indicar uma orientação (direcção) e sentido positivo no espaço
- Para obter o versor com a mesma direcção e sentido de um dado vector, basta dividir esse vector pelo seu módulo



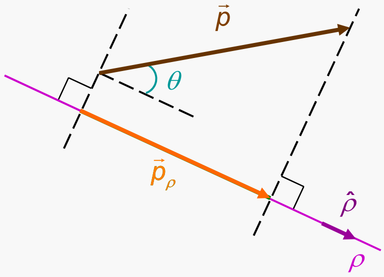
Cálculo Vectorial

Projecção de um Vector

- Consideremos um vector $\vec{p}$, que faz um ângulo θ com uma recta ρ
- A projecção p_ρ do vector $\vec{p}$ sobre a recta ρ, é um escalar igual ao comprimento do segmento de recta compreendido entre duas rectas perpendiculares à recta ρ, e que passam pela origem e extremidade do vector $\vec{p}$
- O vector $\vec{p}_\rho$ resultante da projecção do vector $\vec{p}$ sobre a recta ρ, é dado pelo produto do escalar p_ρ pelo versor $\hat{\rho}$

$$p_\rho = |\vec{p}|\cos(\theta)$$

$$\vec{p}_\rho = p_\rho\,\hat{\rho}$$



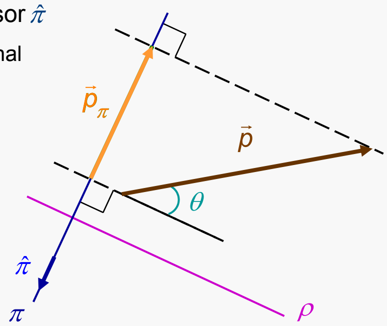
Cálculo Vectorial

Projecção de um Vector

- Conhecendo o ângulo θ que o vector $\vec{p}$ faz com a recta ρ, podemos projectá-lo sobre uma recta π perpendicular à recta ρ
- O módulo da projecção do vector $\vec{p}$ sobre a recta π é igual ao comprimento do segmento de recta compreendido entre duas rectas perpendiculares à recta π, e que passam pela origem e extremidade do vector $\vec{p}$
- O vector $\vec{p}_\pi$ resultante da projecção do vector $\vec{p}$ sobre a recta π, é dado pelo produto da projecção p_π pelo versor $\hat{\pi}$
  - É necessário ter em atenção o sinal

$$|p_\pi| = |\vec{p}|\,|\mathrm{sen}(\theta)|$$

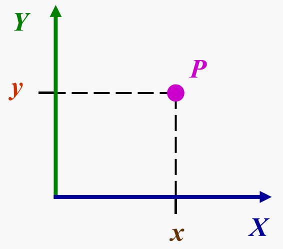
$$\vec{p}_\pi = \ominus|p_\pi|\,\hat{\pi}$$



Cálculo Vectorial

Representação Cartesiana – 2D

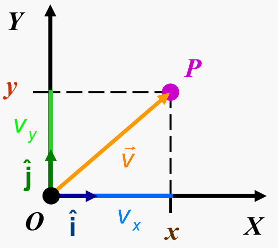
- Um sistema cartesiano a duas dimensões é definido por duas rectas orientadas e perpendiculares entre si
  - A recta vertical designa-se normalmente por eixo dos *YY*
  - A recta horizontal por eixo dos *XX*
- Um ponto *P* fica perfeitamente definido por um par ordenado do tipo (x,y).



Cálculo Vectorial

Representação Cartesiana – 2D

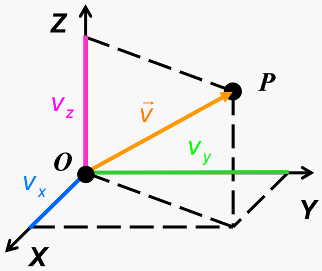
- O versor do eixo dos *XX* designa-se, normalmente, por $\hat{\imath}$
- O versor do eixo dos *YY* designa-se, normalmente, por $\hat{\jmath}$
- Sendo $\vec{v}$ um vector com origem em *O* e extremidade em *P*
  - v_x a projecção de $\vec{v}$ segundo o eixo dos *XX*
  - v_y a projecção de $\vec{v}$ segundo o eixo dos *YY*
- O vector $\vec{v}$ escreve-se analiticamente como $\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath}$



Cálculo Vectorial

Representação Cartesiana – 3D

- Um sistema cartesiano a três dimensões é definido por três rectas orientadas e perpendiculares entre si, definindo os eixos dos *XX*, *YY* e *ZZ*
- O versor do eixo dos *ZZ* é normalmente designado por $\hat{k}$
- Um vector com origem em *O*, extremidade em *P*, e componentes v_x, v_y e v_z, representa-se analiticamente por $\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$



Cálculo Vectorial

Adição e Subtracção Analítica de Vectores

- Sejam $\vec{v}$ e $\vec{u}$ dois vectores dados pelas expressões analíticas

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

$$\vec{u} = u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\,\hat{k}$$

- O vector $\vec{w}$, igual à soma ou diferença entre os vectores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, é dado por

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v} \pm \vec{u} \\ &= w_x\,\hat{\imath} + w_y\,\hat{\jmath} + w_z\,\hat{k} \\ &= \left(v_x \pm u_x\right)\hat{\imath} + \left(v_y \pm u_y\right)\hat{\jmath} + \left(v_z \pm u_z\right)\hat{k}\end{aligned}$$

Cálculo Vectorial

Multiplicação de um Vector por um Escalar

- Consideremos um vector $\vec{v}$ e um escalar λ, tais que

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

$$\lambda = \text{escalar}$$

- O vector $\vec{w}$ resultante do produto do escalar λ pelo vector $\vec{v}$, é dado por

$$\vec{w} = \lambda\vec{v} = w_x\,\hat{\imath} + w_y\,\hat{\jmath} + w_z\,\hat{k}$$

$$= \lambda\left(v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}\right)$$

$$= \lambda v_x\,\hat{\imath} + \lambda v_y\,\hat{\jmath} + \lambda v_z\,\hat{k}$$

- Ou seja, cada uma das componentes do vector resultante, é igual ao produto do escalar pela respectiva componente do vector inicial

Cálculo Vectorial

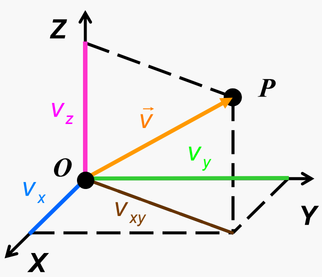
Módulo de um Vector

Num sistema de eixos ortogonal, o módulo do vector

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

é dado por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



Pelo teorema de Pitágoras, $v^2 = v_{xy}^2 + v_z^2$

Projectando v_{xy} nos eixos dos *XX* e dos *YY*, e aplicando o teorema de Pitágoras, $v_{xy}^2 = v_x^2 + v_y^2$

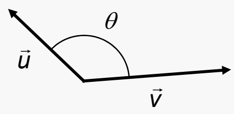
Substituindo na equação anterior, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

Cálculo Vectorial

Produto Escalar (ou Interno) entre dois Vectores

O produto escalar entre os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é um escalar dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u\, v\, \cos(\theta)$$



- Propriedades do produto escalar:
  - Comutativo $\longrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
  - Distributivo em relação à adição $\longrightarrow$ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Cálculo Vectorial

Produto Escalar (ou Interno) entre dois Vectores

- Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vectores dados por

$$\vec{u} = u_x\, \hat{\imath} + u_y\, \hat{\jmath} + u_z\, \hat{k}$$
$$\vec{v} = v_x\, \hat{\imath} + v_y\, \hat{\jmath} + v_z\, \hat{k}$$

- Calculemos o produto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(u_x\, \hat{\imath} + u_y\, \hat{\jmath} + u_z\, \hat{k}\right) \cdot \left(v_x\, \hat{\imath} + v_y\, \hat{\jmath} + v_z\, \hat{k}\right)$$

- Aplicando a propriedade distributiva do produto escalar

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(u_x\, \hat{\imath} + u_y\, \hat{\jmath} + u_z\, \hat{k}\right) \cdot \left(v_x\, \hat{\imath} + v_y\, \hat{\jmath} + v_z\, \hat{k}\right) \\
&= u_x v_x\, \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + u_x v_y\, \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + u_x v_z\, \hat{\imath} \cdot \hat{k} + \\
&\quad + u_y v_x\, \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + u_y v_y\, \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} + u_y v_z\, \hat{\jmath} \cdot \hat{k} + \\
&\quad + u_z v_x\, \hat{k} \cdot \hat{\imath} + u_z v_y\, \hat{k} \cdot \hat{\jmath} + u_z v_z\, \hat{k} \cdot \hat{k}
\end{aligned}$$

Cálculo Vectorial

Produto Escalar (ou Interno) entre dois Vectores

- Tendo em conta
  - A definição de produto escalar ($\vec{u}\cdot\vec{v} = u\,v\cos(\theta)$)
  - Que os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ são perpendiculares entre si

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}=1 \qquad \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}=0 \qquad \hat{\imath}\cdot\hat{k}=0$$

$$\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}=0 \qquad \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}=1 \qquad \hat{\jmath}\cdot\hat{k}=0$$

$$\hat{k}\cdot\hat{\imath}=0 \qquad \hat{k}\cdot\hat{\jmath}=0 \qquad \hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

- Vem para o produto escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(u_x\,\hat{\imath}+u_y\,\hat{\jmath}+u_z\,\hat{k}\right)\cdot\left(v_x\,\hat{\imath}+v_y\,\hat{\jmath}+v_z\,\hat{k}\right)\\ &= u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z\end{aligned}$$

Cálculo Vectorial

Produto Escalar (ou Interno) entre dois Vectores

- Dados dois vectores na sua forma analítica, podemos determinar o menor ângulo entre eles, usando o produto escalar
  - Combinando a definição de produto escalar com a equação agora obtida

$$\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=u\,v\cos(\theta)\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z\end{cases} \Rightarrow \quad u\,v\cos(\theta)=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\theta)=\frac{u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z}{u\,v}$$

- O módulo de um vector é igual à raiz quadrada do produto escalar do vector por ele próprio

$$\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{u}=u\,u\cos(0^\circ)\\ \vec{u}\cdot\vec{u}=u_xu_x+u_yu_y+u_zu_z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{u}=u^2\\ \vec{u}\cdot\vec{u}=u_x^2+u_y^2+u_z^2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u^2=u_x^2+u_y^2+u_z^2 \quad \Rightarrow \quad u=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$$

Cálculo Vectorial

Produto Escalar entre um Vector e um Versor

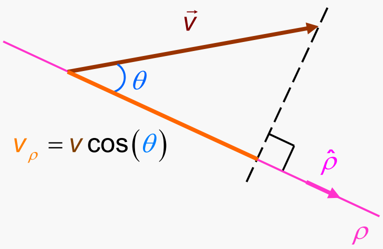
- O produto escalar entre um vector e um versor é igual à projecção do vector segundo a direcção do versor

- Consideremos um vector $\vec{v}$ que faz um ângulo θ com o versor $\hat{\rho}$
  - Da definição de produto escalar

$$\vec{v} \cdot \hat{\rho} = |\vec{v}||\hat{\rho}| \cos(\theta)$$

  - Da definição de versor, $|\hat{\rho}| = 1$

$$\vec{v} \cdot \hat{\rho} = |\vec{v}||\hat{\rho}| \cos(\theta) = v \cos(\theta)$$

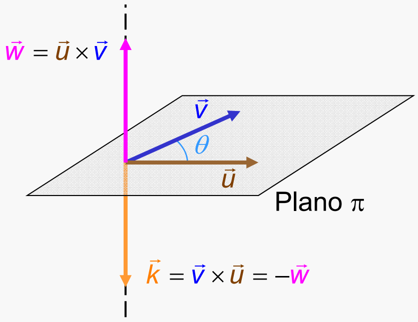


Cálculo Vectorial

Produto Vectorial (ou Externo) entre dois Vectores

- Consideremos dois vectores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$
  - Formam um ângulo θ entre eles
  - Definem um plano, π

- O produto vectorial entre os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ $(\vec{u} \times \vec{v})$, é um vector
  - Perpendicular ao plano π
  - Cujo sentido é dado pela regra da mão direita
  - Cujo módulo é dado por $|\vec{u} \times \vec{v}| = u\, v \,\mathrm{sen}(\theta)$



- O produto vectorial não é comutativo

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

Cálculo Vectorial

Produto Vectorial (ou Externo) entre dois Vectores

- Consideremos dois vectores, dados por

$$\begin{cases} \vec{u} = u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\,\hat{k} \\ \vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k} \end{cases}$$

- As componentes analíticas do vector dado por $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, podem ser obtidas calculando o determinante de uma matriz com três linhas e três colunas

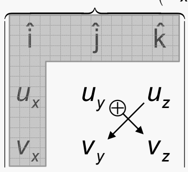
$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Cálculo Vectorial

Produto Vectorial (ou Externo) entre dois Vectores

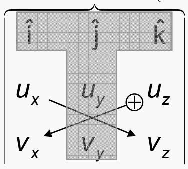
$$\vec{w} = w_x\,\hat{\imath} + w_y\,\hat{\jmath} + w_z\,\hat{k}$$

Componente XX (w_x)



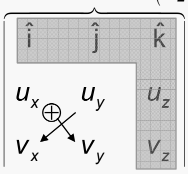
$$w_x = u_y\,v_z - u_z\,v_y$$

Componente YY (w_y)



$$w_y = u_z\,v_x - u_x\,v_z$$

Componente ZZ (w_z)



$$w_z = u_x\,v_y - u_y\,v_x$$

$$\vec{w} = \left(u_y\,v_z - u_z\,v_y\right)\hat{\imath} + \left(u_z\,v_x - u_x\,v_z\right)\hat{\jmath} + \left(u_x\,v_y - u_y\,v_x\right)\hat{k}$$

Cálculo Vectorial

Produto Vectorial (ou Externo) entre dois Vectores

- Consideremos dois vectores, dados por

$$\begin{cases} \vec{u} = u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\,\hat{k} \\ \vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k} \end{cases}$$

- As componentes analíticas do vector dado por $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, podem ser obtidas calculando o determinante de uma matriz com três linhas e três colunas

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Cálculo Vectorial

Produto Misto (ou Produto Triplo Composto)

- O produto misto entre os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é definido por $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$, sendo um escalar cujo módulo é dado por:

$$\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}\right| = \underbrace{u\ v\ \text{sen}(\vec{u} \sphericalangle \vec{v})}_{\left|(\vec{u} \times \vec{v})\right|}\ w\ \cos\left[(\vec{u} \times \vec{v}) \sphericalangle \vec{w}\right]$$

$$= u\ v\ w\ \text{sen}(\vec{u} \sphericalangle \vec{v}) \cos\left[(\vec{u} \times \vec{v}) \sphericalangle \vec{w}\right]$$

- A ordem das operações tem de ser
  - Primeiro o produto vectorial
  - Seguido do produto escalar

Cálculo Vectorial

Produto Misto (ou Produto Triplo Composto)

- Se $\vec{w}$ for um versor $(\vec{w} \equiv \hat{w})$, o resultado do produto misto $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \hat{w}$ é a projecção do vector resultante do produto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$, sobre a recta orientada pelo versor $\hat{w}$