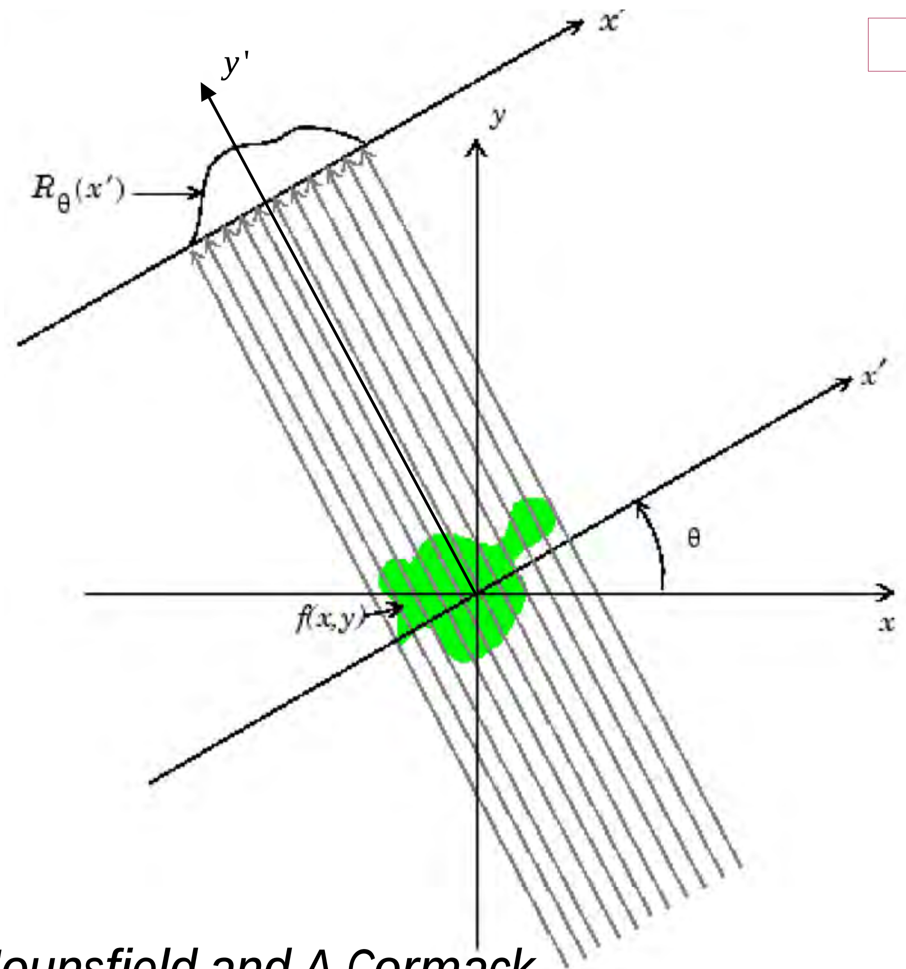
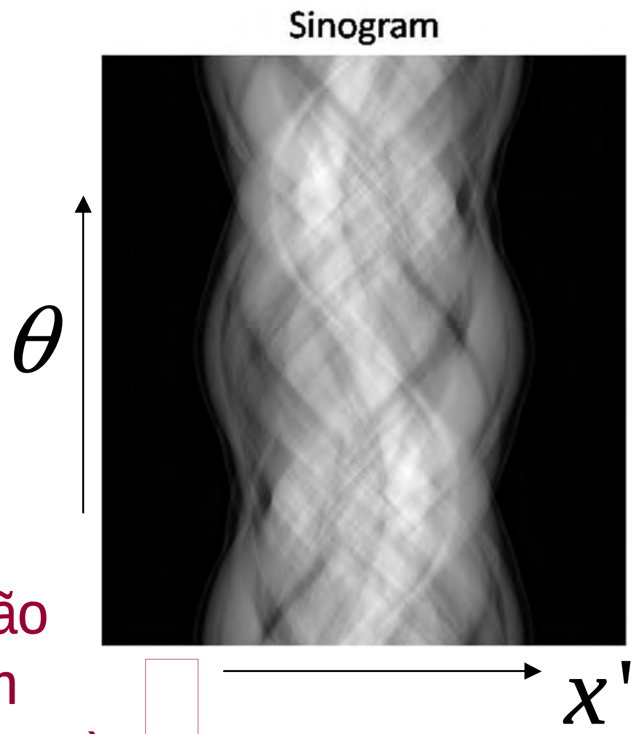
Princípio da Tomografia Axial Computorizada (TAC)

Projecções de Radon através de um objecto

$$R(x',\theta) = \int f(x',y')dy'$$



Aquisição



Reconstrução
de imagem
(pequeno milagre)

G.Hounsfield and A.Cormack,
Prémio Nobel da Fisiologia ou Medicina, 1979

Transformada de Fourier (recapitulação)

Definição

$$F(\omega_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{i\omega_x x}\, dx = transformada\ de\ f(x) = \mathrm{F}(f)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x)\ e^{-i\omega_x x}\, d\omega_x = transformada\ inversa = \mathrm{F}^{-1}(F)$$

Teorema da convolução (ou da filtragem)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x)\underbrace{H(\omega_x)}_{"\ filtro\ "}\ e^{-i\omega_x x}\, d\omega_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')h(x-x')\ dx'$$

$$\mathrm{F}^{-1}(FH) = \mathrm{F}^{-1}(F) \otimes \mathrm{F}^{-1}(H)$$

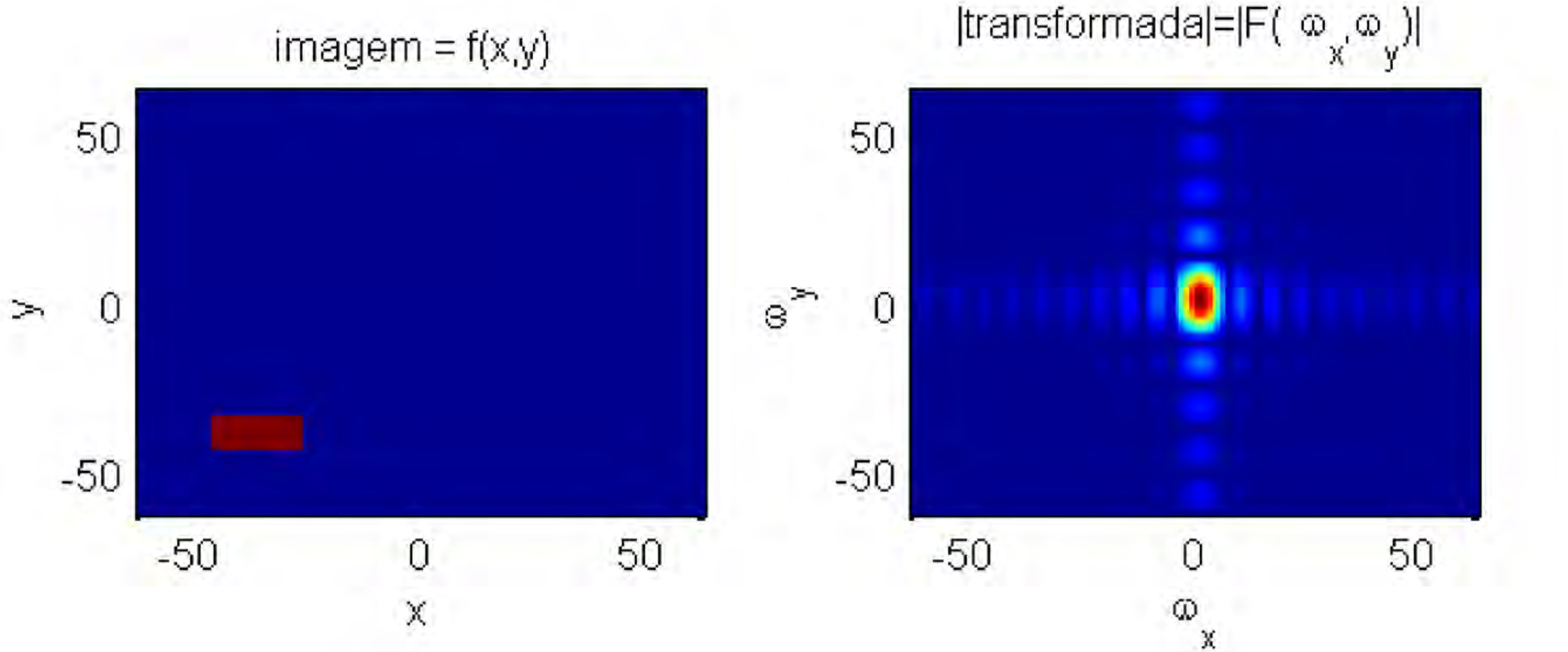
Transformada de Fourier de uma imagem (2D)

$$F(\omega_x,\omega_y) = \int \left(\int f(x,y) e^{i\omega_y y} dy \right) e^{i\omega_x x}\, dx$$

(à parte de constantes)

$$= \iint f(x,y) e^{i\omega_x x + i\omega_y y}\, dx\, dy$$

$$= \iint f(x,y) e^{i\vec{\omega}\cdot\vec{x}}\, dx\, dy; \quad \vec{x} = [x,y];\ \vec{\omega} = [\omega_x,\omega_y]$$



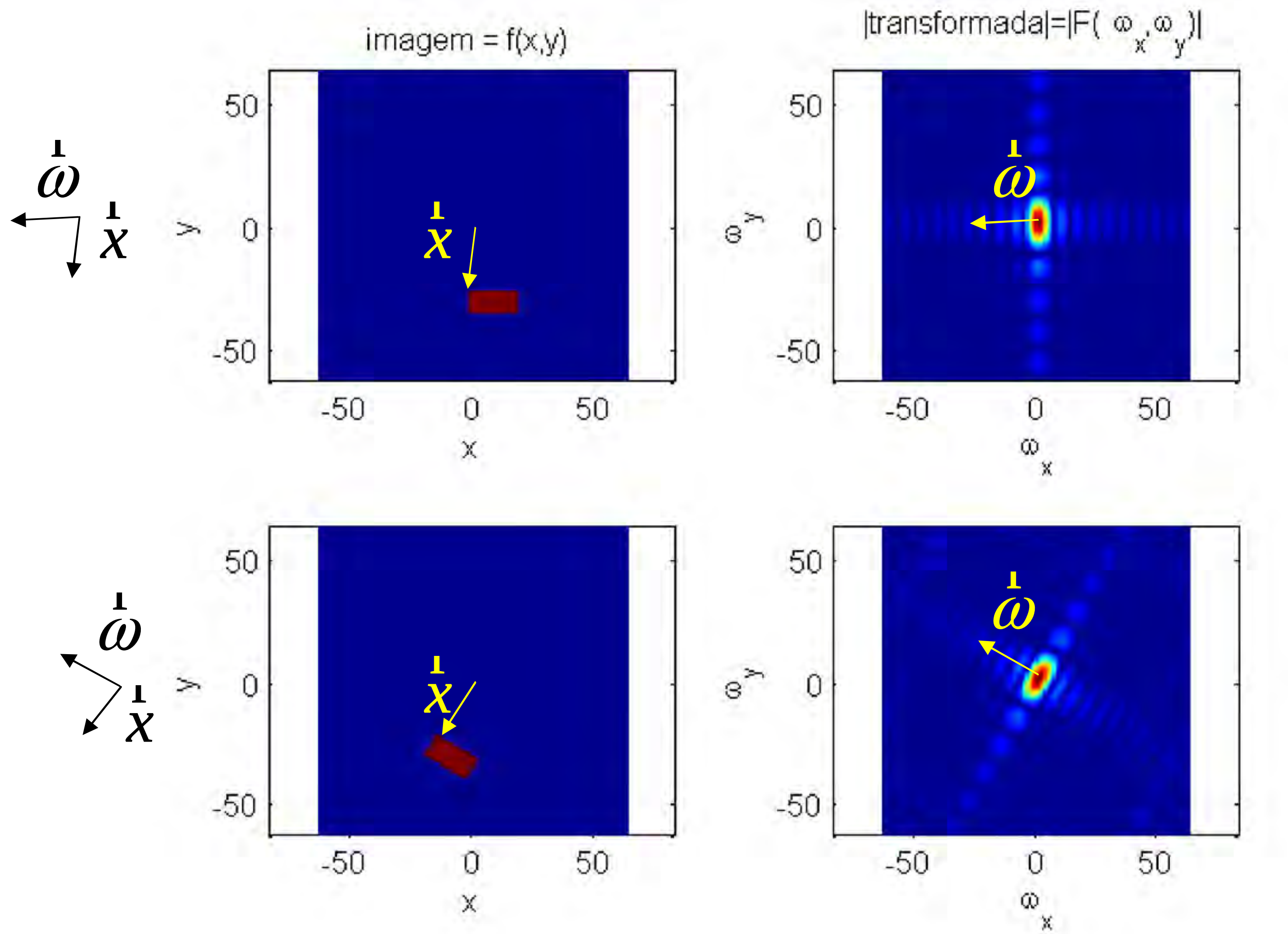
Propriedade 1: rotação da imagem=rotação da transformada

$$F(\vec{\omega}) = \iint f(x,y)\, e^{i\vec{\omega}\cdot\vec{x}}\, dx\, dy; \quad \vec{x} = [x, y]; \; \vec{\omega} = [\omega_x, \omega_y]$$

O produto interno de 2 vectores não se altera se ambos rodarem do mesmo ângulo

$\Downarrow$

nada se altera se a imagem e a transformada rodarem do mesmo ângulo

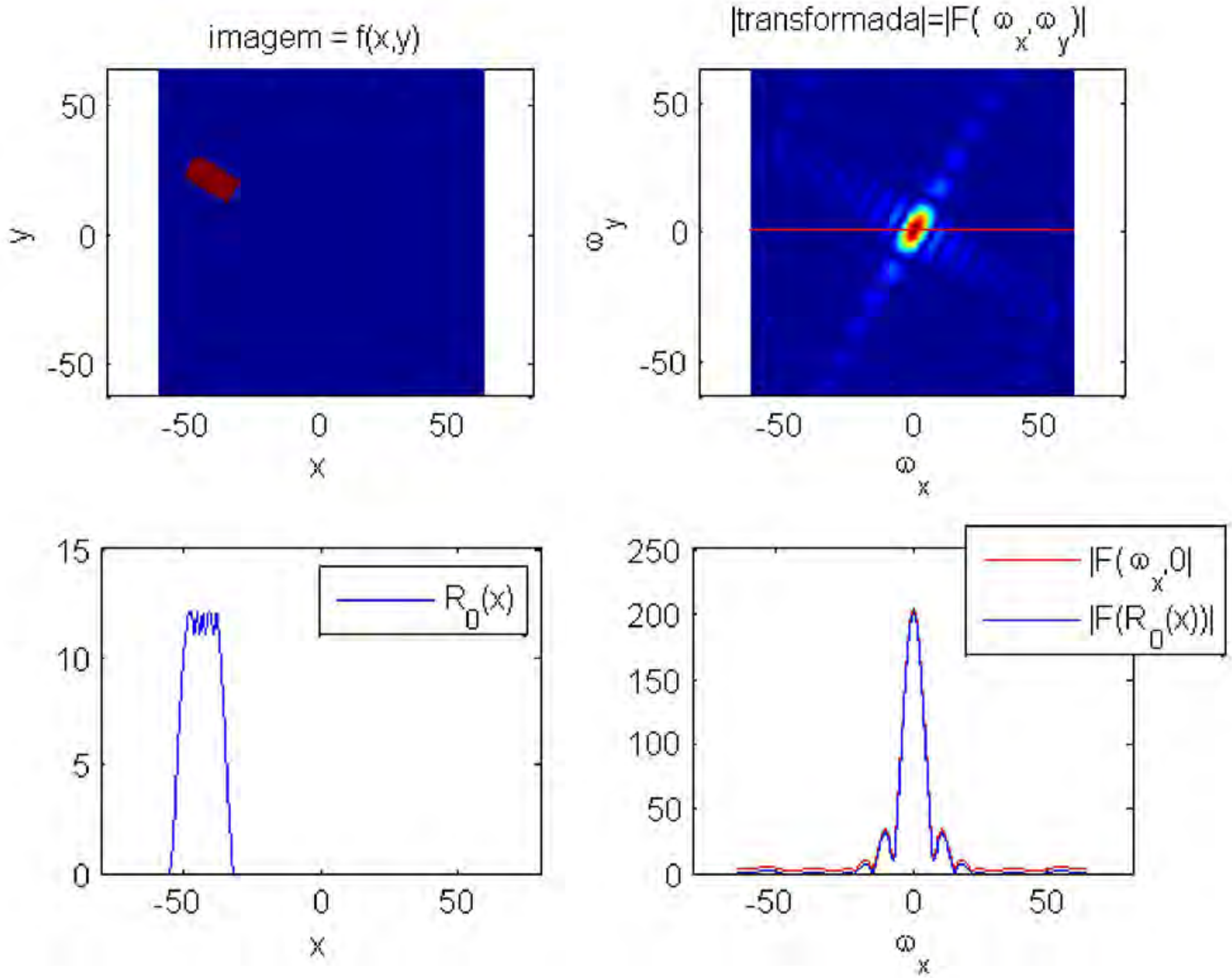


Propriedade 2: teorema da fatia central

$$F(\omega_x,\omega_y) = \int \left(\int f(x,y) e^{i\omega_y y} dy \right) e^{i\omega_x x}\, dx$$

$$F(\omega_x,0) = \int \Big(\underbrace{\int f(x,y)\, dy}_{\substack{\text{Projecção na direcção y} \\ R_0(x)}} \Big) e^{i\omega_x x}\, dx$$

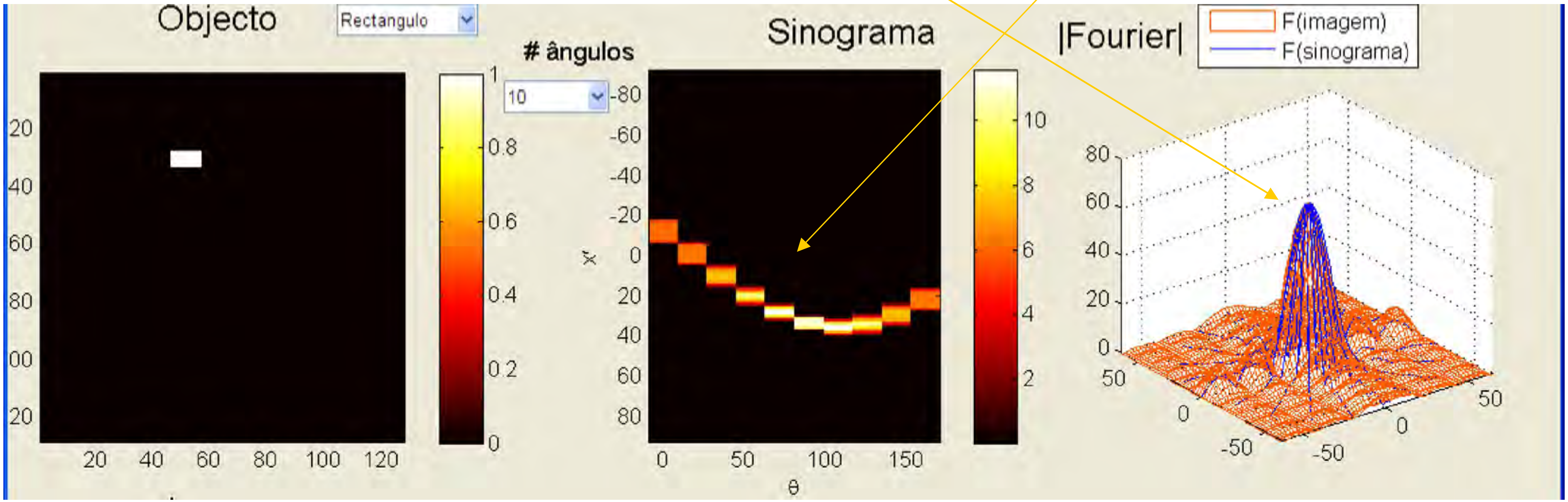
A transformada da projecção em y é a linha central da transformada da imagem



Reconstrução por interpolação no espaço da transformada

Combinando as 2 propriedades anteriores, concluímos que o conjunto de projecções a diversos ângulos define a transformada da imagem sobre raios que passam pela origem, rodados dos mesmos ângulos.

$$F(\omega_x,\theta) = \int R(x',\theta)\ e^{i\omega_x x'}\, dx' = \mathrm{F}(R)$$



Para reconstruir a imagem é preciso definir a transformada numa grelha rectangular (vermelha), por interpolação a partir das linhas medidas (azuis).
É claro que a informação é muito melhor nas baixas frequências que nas altas, onde as linhas são mais espaçadas.

Reconstrução por retroprojecção filtrada

A técnica mais comum e famosa: FBP (Filtered Back-Projection)

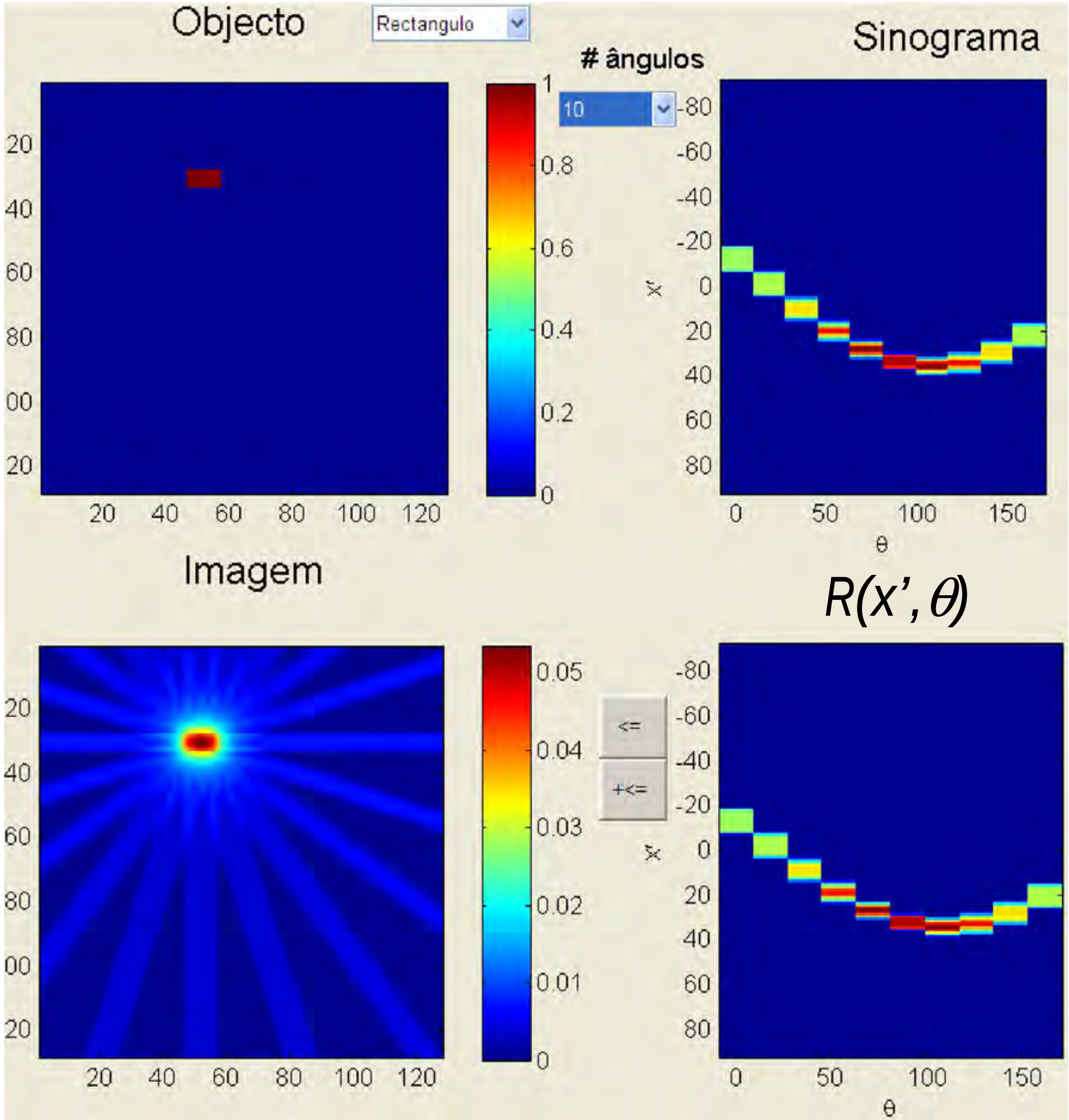
1º Retroprojecção simples

$$f(x,y) \approx \int_0^{\pi} R(x',\theta)\,d\theta$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

(equação das linhas em y')

Parece-se, mas algo está a mais e o rectângulo é mal definido



Reconstrução por retroprojecção filtrada (FBP)

Curiosa propriedade da transformada inversa em 2D

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega_x,\omega_y)\,e^{-i\omega_x x-i\omega_y y}\,d\omega_x\,d\omega_y$$

Vamos exprimir a transformada inversa em coordenadas (quase) polares

$$\omega_x=\omega\cos\theta;\qquad \omega_y=\omega\sin\theta$$

$$f(x,y)=\int_0^{\pi}\int F(\omega,\theta)\,e^{-i\omega\cos\theta\,x-i\omega\sin\theta\,y}\,|\omega|\,d\omega\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\int F(\omega,\theta)\,e^{-i\omega(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,|\omega|\,d\omega\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\Big(\underbrace{\int F(\omega,\theta)\,|\omega|\,e^{-i\omega x'}\,d\omega}_{R'(x',\theta)}\Big)\,d\theta \qquad x'=x\cos\theta+y\sin\theta$$

Retroprojecção da função *R'(x', θ)*!

Reconstrução por retroprojecção filtrada (FBP)

O que é a função *R'(x', θ)*?

$$R'(x',\theta)=\int \underbrace{F(\omega,\theta)}_{\substack{\text{transformada}\\ \text{das projecções}\\ \text{medidas: } \mathrm{F}(R)}} \underbrace{|\omega|}_{\substack{H(\omega)\\ \text{filtro de Ram-Lak}}} e^{-i\omega x'}\, d\omega$$

basta calcular a transformada inversa e retroprojectar

R' = projecções filtradas

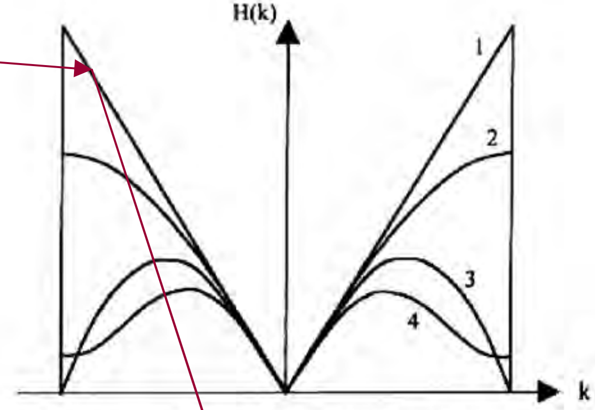


FIGURE B.5. Some common filter functions used for backprojection. 1, Ram–Lak; 2, Shepp
Logan; 3, low-pass cosine; and 4, generalized Hamming.

Pode-se trabalhar apenas no espaço das projecções usando o teorema da convolução

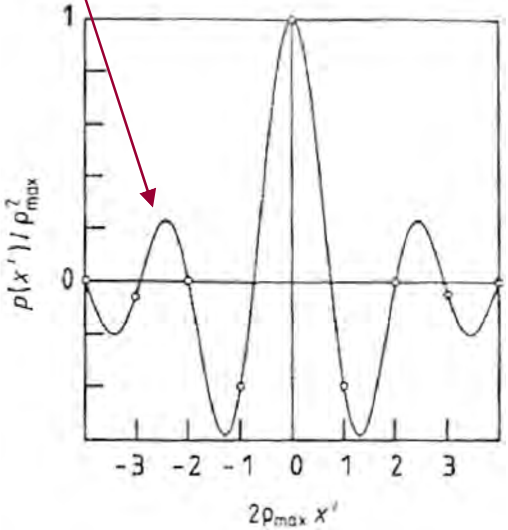
$$R'(x',\theta)=\mathrm{F}^{-1}(F)\otimes\mathrm{F}^{-1}(H)$$

$$\mathrm{F}^{-1}(F)=R(x',\theta)$$ as projecções medidas, a convoluir com

Filtro de Ram-Lak (Ramachandran-Lakshminarayanan)

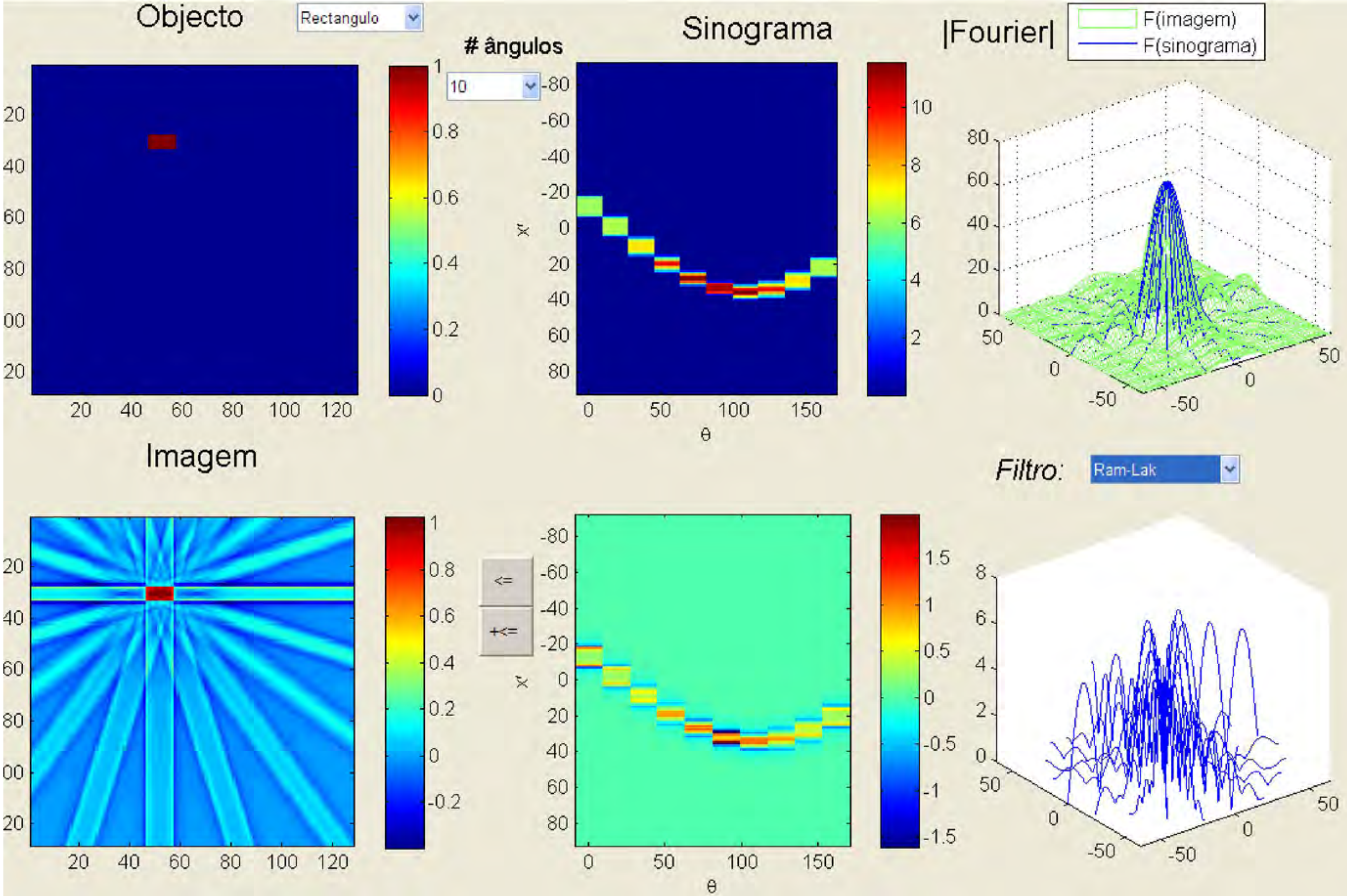
$$\mathrm{F}^{-1}(H)=\omega_{\max}^{2}\left(2\,\mathrm{sinc}(2\omega_{\max}x')-\mathrm{sinc}^{2}(\omega_{\max}x')\right)$$

$$\mathrm{sinc}(x)=\sin(x)/x$$



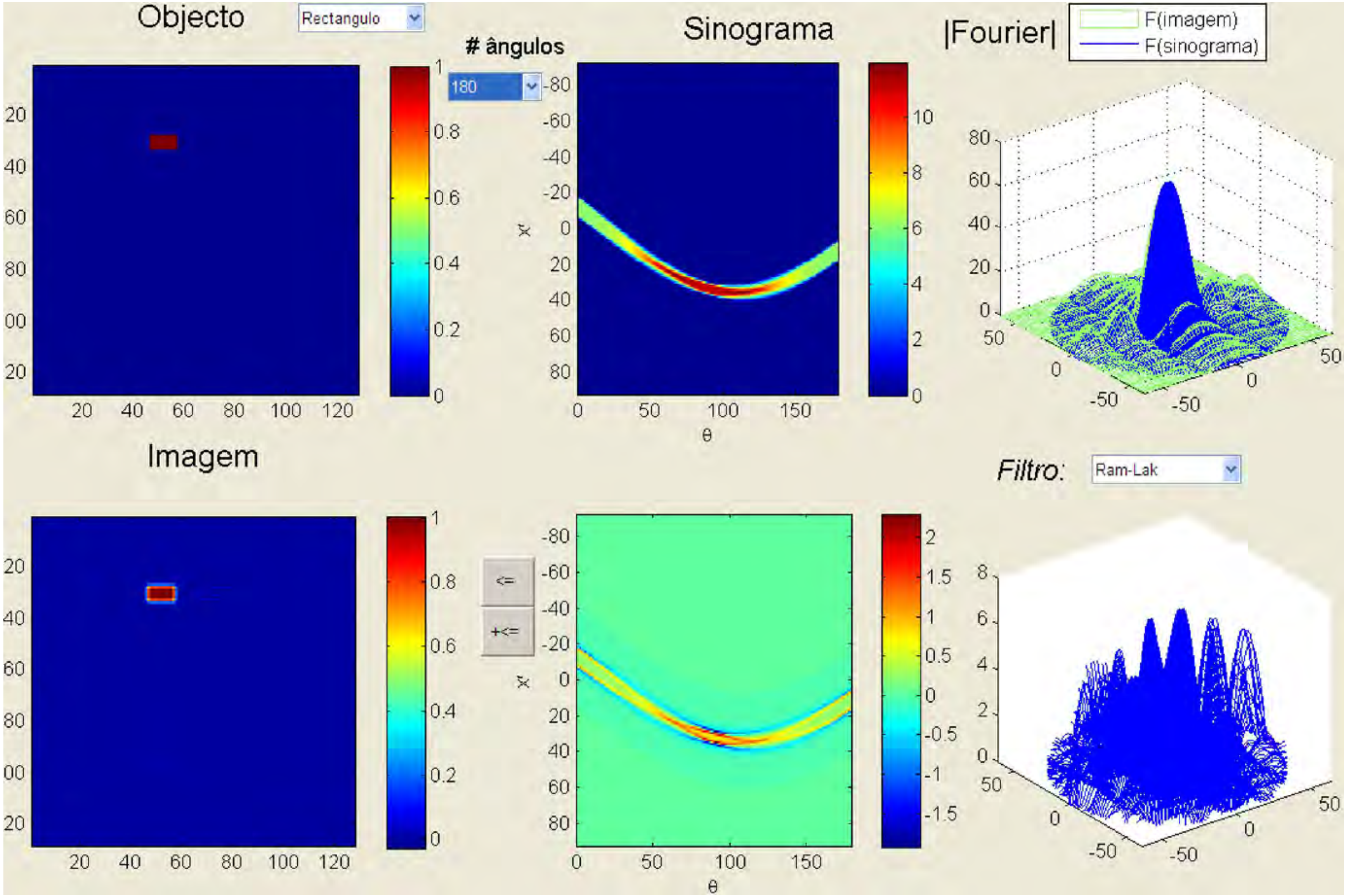
Reconstrução por retroprojecção filtrada (FBP)

Rectângulo muito melhor definido. Ainda está algo a mais.



Reconstrução por retroprojecção filtrada (FBP)

180 projecções: praticamente a perfeição!



O que se mede em TAC?

As projecções de Radon são

$$R(x',\theta) = -\ln\left(\frac{I_\theta(x')}{I_\theta^0(x')}\right) = \int \mu(x',y')\,dy'$$

$$I_\theta(x') = \text{intensidade de raios-X medidos nos detectores}$$

$$I_\theta^0(x') = \text{idem, sem paciente}$$

$$\mu = \text{coeficiente de atenuação linear dos tecidos}$$

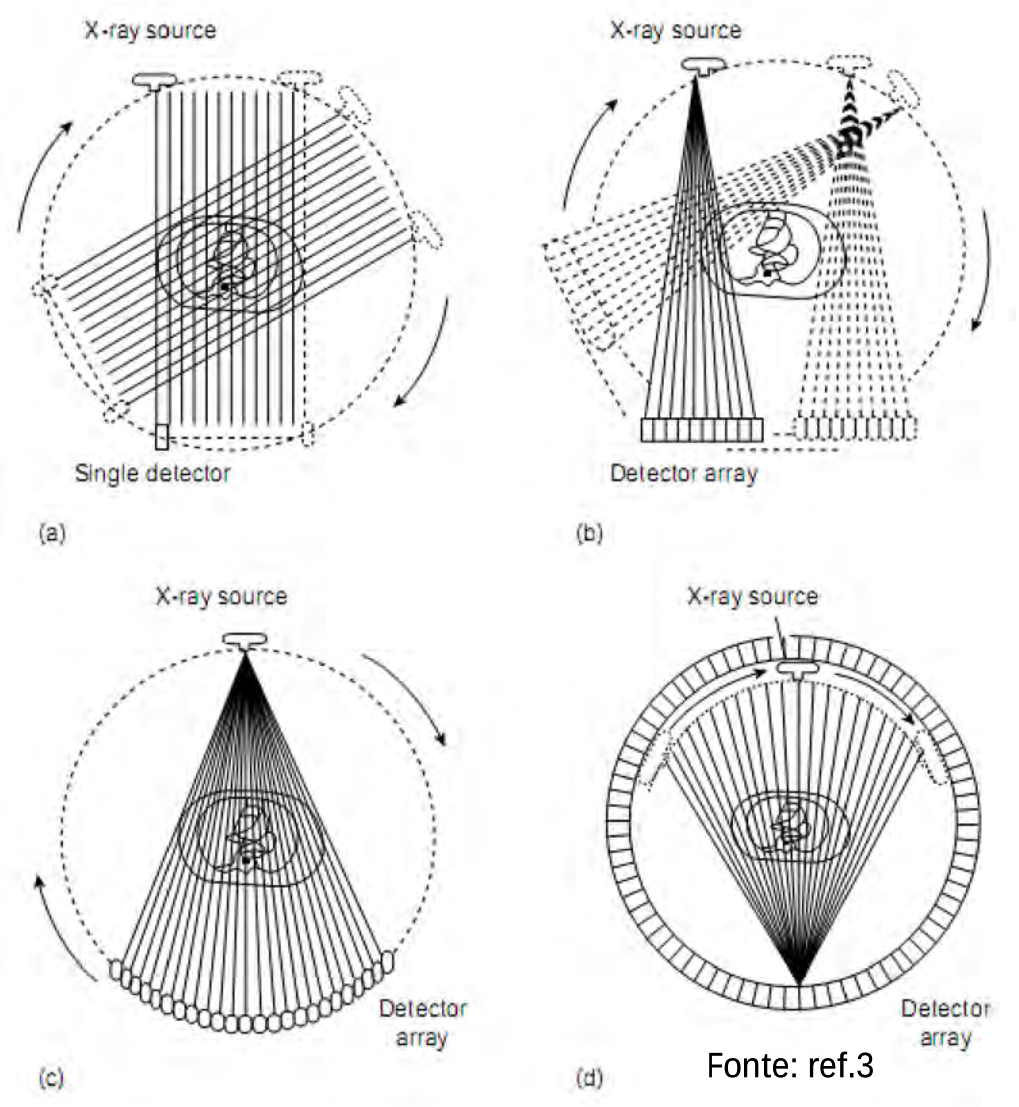
As imagens são apresentadas em termos de "números de Hounsfield"

$$CT = \frac{\mu_{tecido} - \mu_{água}}{\mu_{água}} \times 1000$$

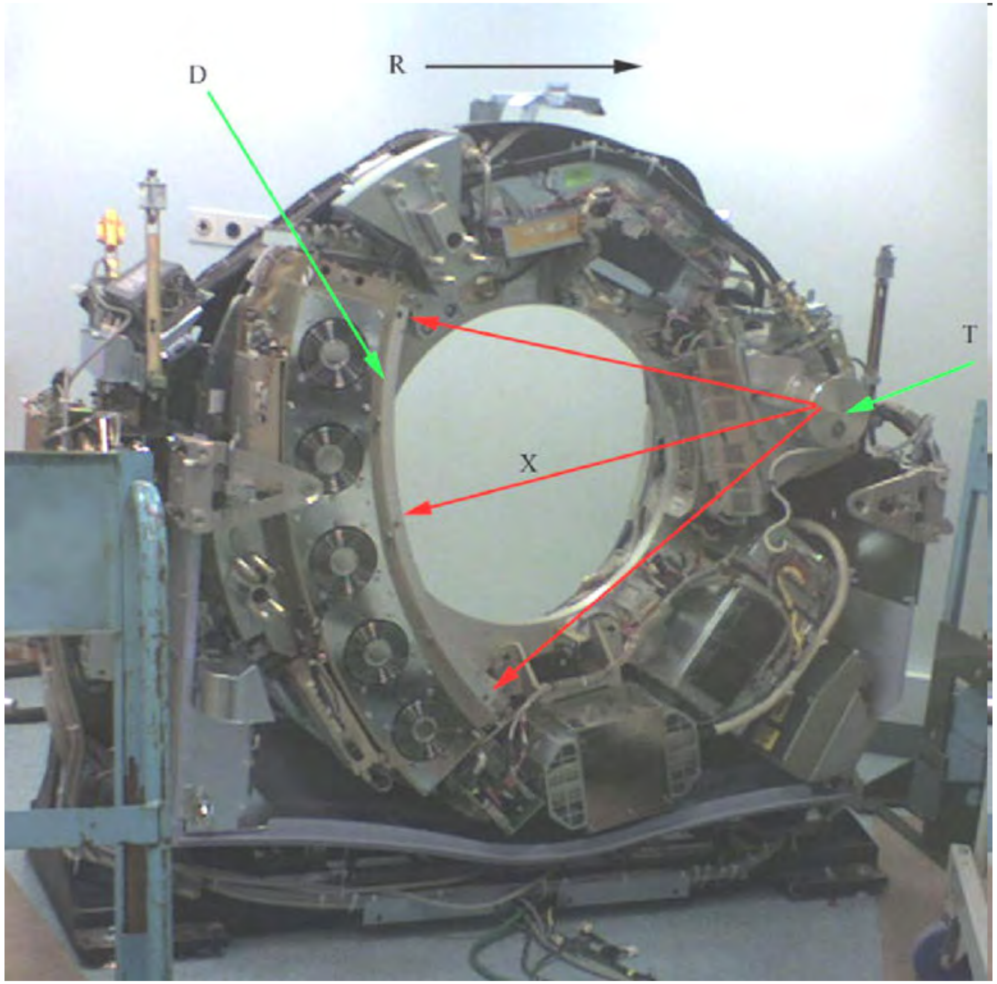
Table 1. Typical CT Number Values Fonte: ref.3

Tissue	CT Number
Air	**−1000**
Fat	−60
Water	**0**
Cerebral spinal fluid	10
Brain edema	20
Brain white matter	30
Brain gray matter	38
Blood	42
Muscle	44
Hemorrhage	80
Dense bone	~1000

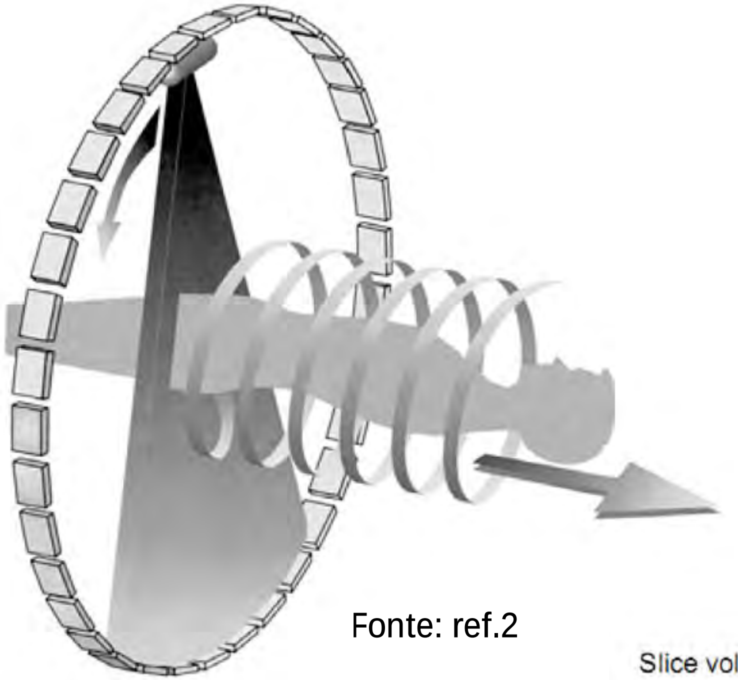
As diversas gerações de tomógrafos (scanners)



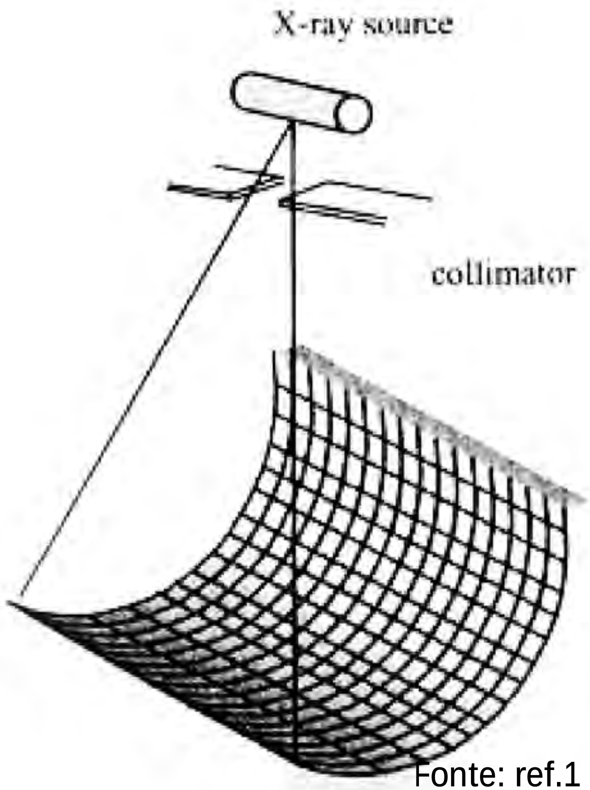
Fonte: ref.3



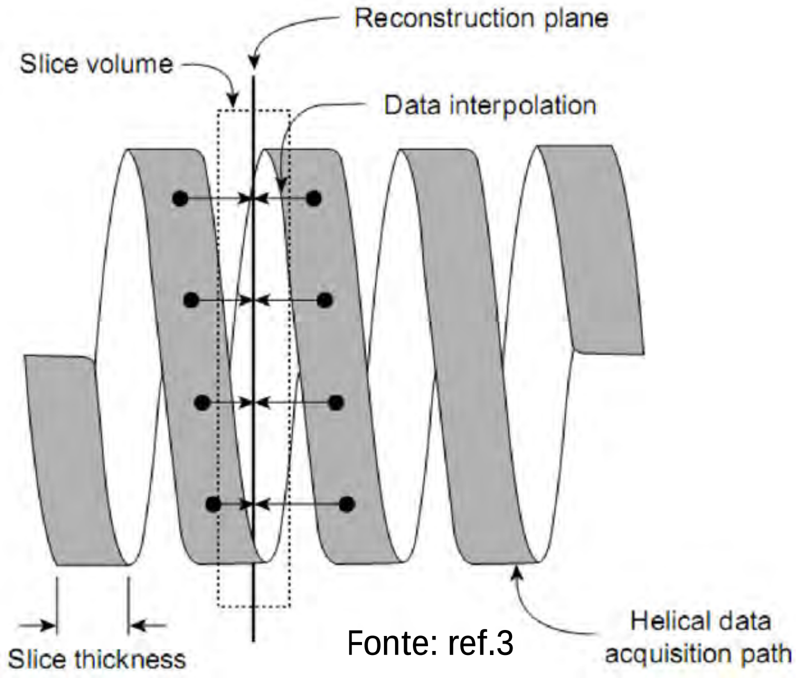
Ultima (4ª) geração: aquisição helicoidal multifatias



Fonte: ref.2



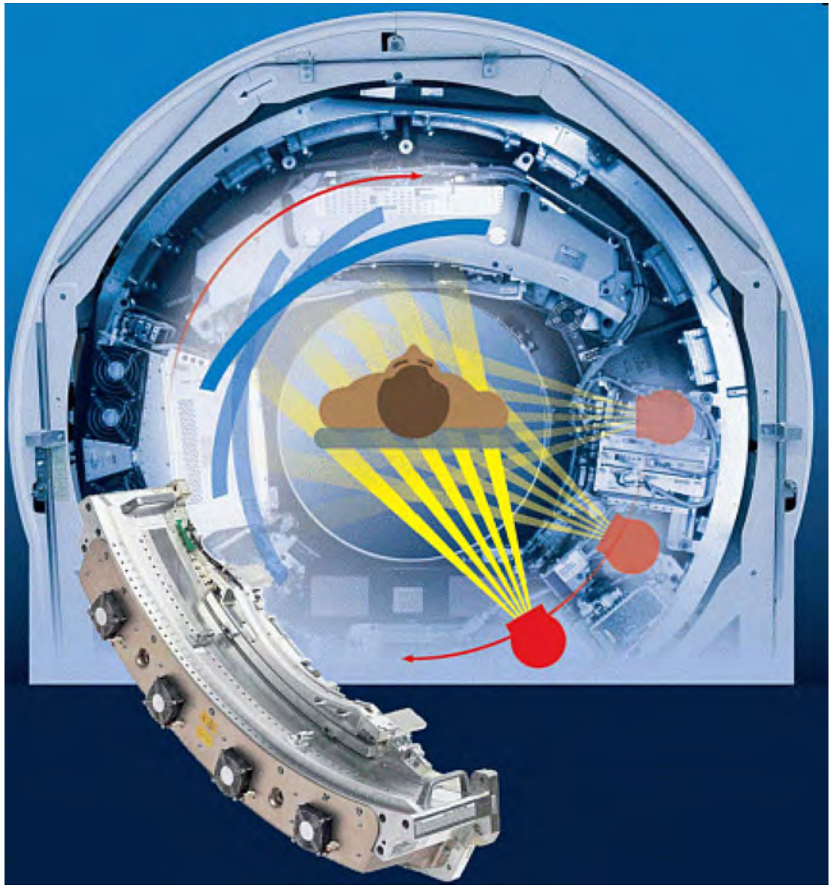
Fonte: ref.1



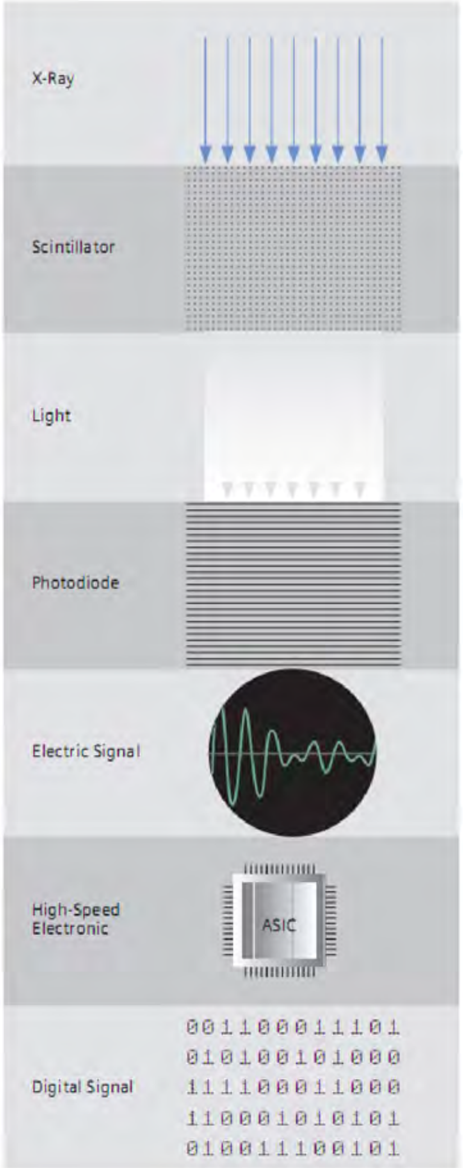
Fonte: ref.3

Detectores

Tecnologia mais moderna: matriz de cintiladores e fotodiodos



Siemens Somatom – 64 fatias



Dose de radiação

TABLE 62.1 Summary of the CT Dose Index (CTDI) Values at Two Positions (Center of the Patient and Near the Skin) as Specified by Four CT Manufacturers for Standard Head and Body Scans. Fonte: ref.2

Manufacturer	Detector	kVp	mA	Scan Time (s)	CTDI, center (mGy)	CTDI, skin (mGy)
A, head	Xenon	120	170	2	50	48
A, body	Xenon	120	170	2	14	25
A, head	Solid state	120	170	2	40	40
A, body	Solid state	120	170	2	11	20
B, head	Solid state	130	80	2	37	41
B, body	Solid state	130	80	2	15	34
C, head	Solid state	120	500	2	39	50
C, body	Solid state	120	290	1	12	28
D, head	Solid state	120	200	2	78	78
D, body	Solid state	120	200	2	9	16

para fotões: Gy=Sv

TABLE 1.3. Effective Dose Equivalent H_E for Clinical X-Ray CT Exams Fonte: ref.1

Clinical exam	H_E (mSv)
Breast	0.05
Chest X-ray	0.03
Skull X-ray	0.15
Abdominal X-ray	1.0
Barium fluoroscopy	5
Head CT	3
Body CT	10

Origem das figuras

1 -Introduction to biomedical imaging, Andrew Webb, Wiley-Interscience, ISBN: 0-471-23766-3.
2- Introduction to biomedical engineering, John D. Enderle, Susan M. Blanchard, Joseph D. Bronzino, Elsevier, Amsterdam, ISBN: 978-0-12-238662-6.
3 - Encyclopedia of medical devices and instrumentation, JG Webster, 1990, John Wiley & Sons, Inc. New York, NY, USA.
4 - Advances in Digital Radiography: Physical Principles and System Overview, Markus Körner et al., RadioGraphics 2007; 27:675–686 ● Published online 10.1148/rg.273065075
5 – Basic Physics of Nuclear Medicine, KieranMaher et al., http://en.wikibooks.org/wiki/Basic_Physics_of_Nuclear_Medicine