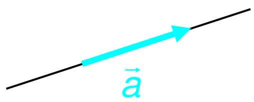
Cálculo Vectorial

Grandezas Escalares e Vectoriais

- Grandezas Escalares:
  - Representam quantidades que ficam bem determinadas por um número;
- Grandezas Vectoriais:
  - Representam quantidades para as quais a indicação de um simples número não é suficiente para as descrever, como por exemplo:
    - Posição, Velocidade, Aceleração, Força, etc.

Vectores

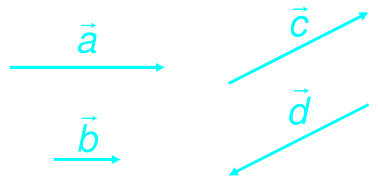
- Um vector representa-se:
  - Analiticamente, por uma letra sobre a qual é desenhada uma seta $\longrightarrow$
  - Graficamente, por um segmento de recta orientado, compreendendo direcção sentido e módulo



Vectores

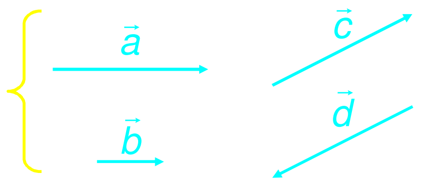
- A direcção do vector é definida pela recta suporte, ou linha de acção, que é colinear com o próprio vector;
- O sentido é o que vai da origem para a extremidade do vector;
- O módulo do vector é o número positivo que mede o comprimento do segmento de recta orientado, representando-se por $|\vec{a}|$ ou a
  - Se o módulo de um vector for igual a zero, o vector diz-se um vector nulo e representa-se por $\vec{0}$

Vectores

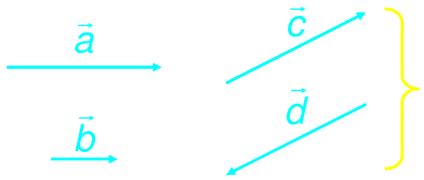


Vectores

Vectores com a mesma direcção e sentido, mas módulos diferentes



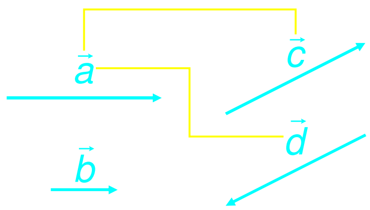
Vectores



Vectores com a mesma direcção e módulo, mas sentidos diferentes (opostos)

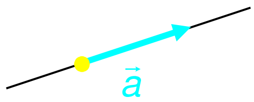
Vectores

Vectores com o mesmo módulo, mas direcções diferentes (logo não se podem relacionar os sentidos)



Vector Ligado

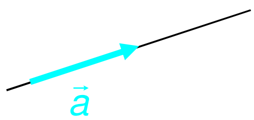
Um vector fica completamente definido desde que se conheça a sua origem (ponto de aplicação), a sua direcção, sentido e módulo.

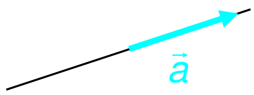


Vector Ligado

Vector Deslizante

Se a origem de um vector puder ser tomada arbitrariamente sobre a sua recta suporte, este fica definido pela direcção, sentido e módulo.

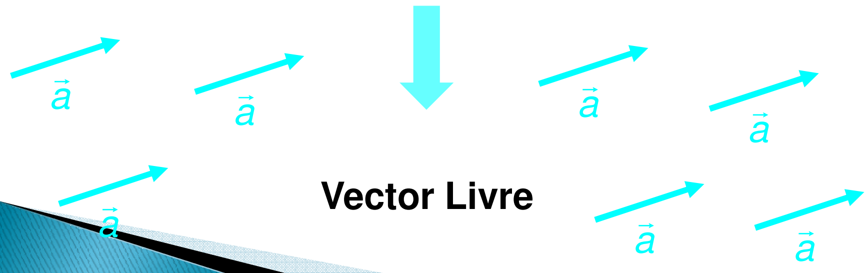




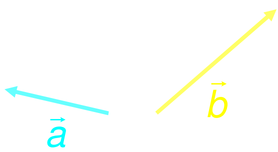
Vector Deslizante

Vector Livre

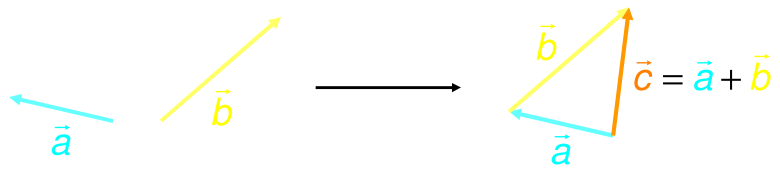
Se a origem de um vector puder ser tomada arbitrariamente no espaço, este fica definido pela direcção, sentido e módulo.



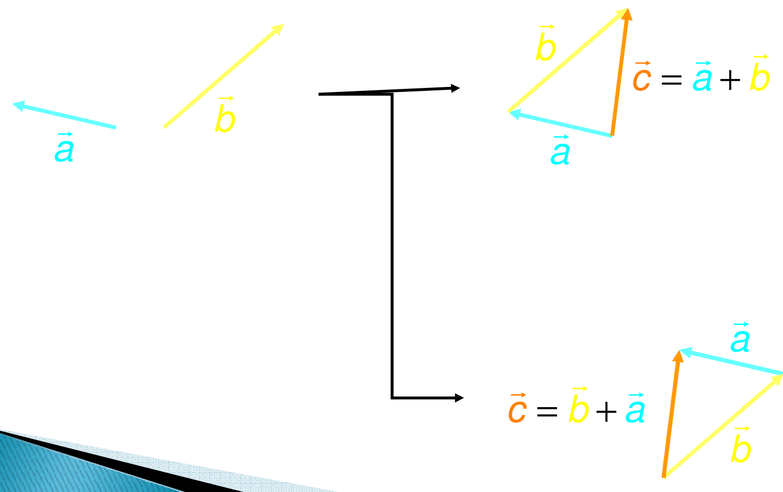
Adição de Vectores Livres



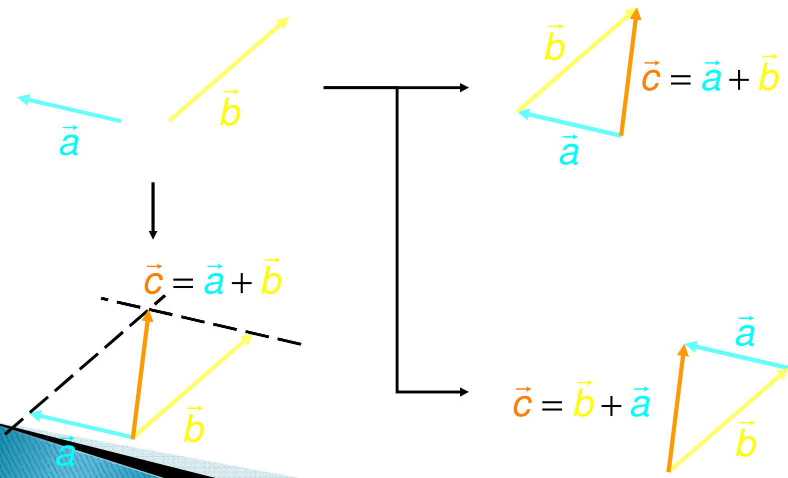
Adição de Vectores Livres



Adição de Vectores Livres



Adição de Vectores Livres

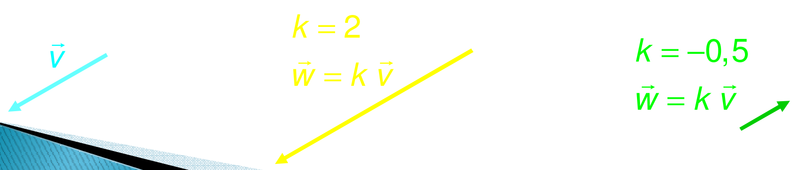


Multiplicação por um Escalar

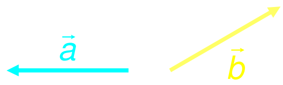
Seja *k* um número real e um vector.

$\vec{w} = k\,\vec{v}$

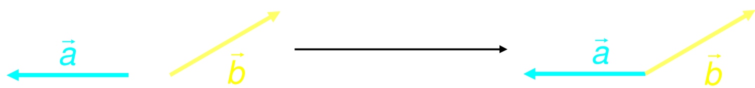
- Mesma direcção de $\vec{v}$
- Mesmo sentido de $\vec{v}$ se $k > 0$
- Sentido oposto ao de $\vec{v}$ se $k < 0$



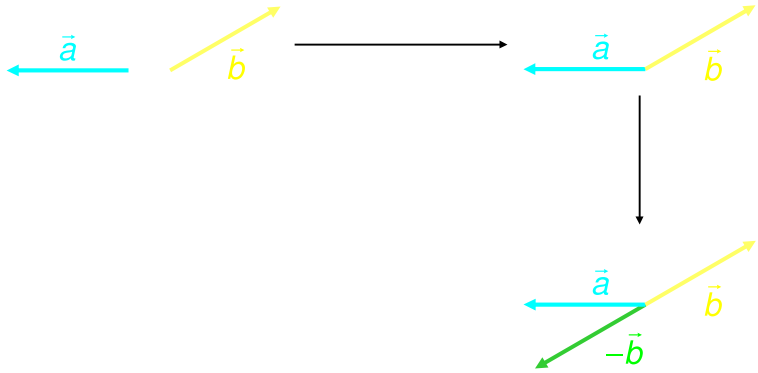
Subtracção de Vectores Livres



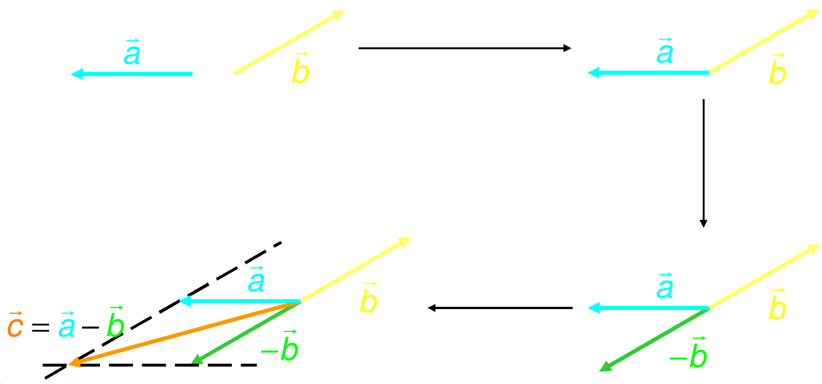
Subtracção de Vectores Livres



Subtracção de Vectores Livres



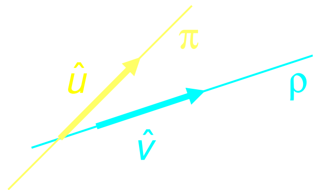
Subtracção de Vectores Livres



Vector Unitário

- Um vector cujo módulo é igual à unidade chama-se vector unitário, ou versor;
- Um versor é utilizado para indicar uma orientação (direcção) e sentido positivo no espaço.

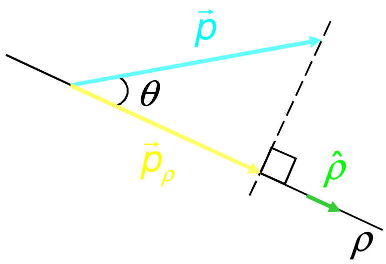
$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$



Projecção de um Vector

$$|\vec{p}_\rho| = |\vec{p}|\,|\cos(\theta)|$$

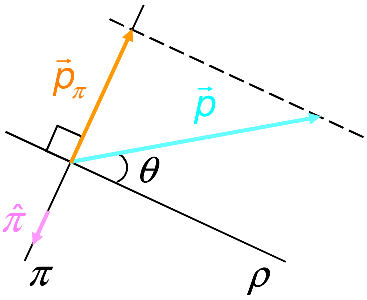
$$\vec{p}_\rho = |\vec{p}_\rho|\,\hat{\rho}$$



Projecção de um Vector

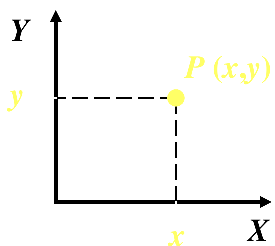
$$\left|\vec{p}_\pi\right| = \left|\vec{p}\right|$$

$$\vec{p}_\pi = -\left|\vec{p}_\pi\right| \hat{\pi}$$



Representação Cartesiana – 2D

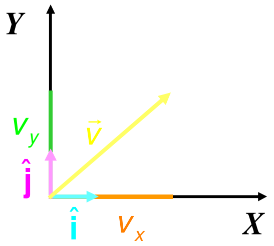
- Um sistema cartesiano a duas dimensões é definido por duas rectas orientadas e perpendiculares entre si;
- A recta vertical designa-se normalmente por eixo dos *YY* e a recta horizontal por eixo dos *XX*;
- Um ponto P fica perfeitamente definido por um par ordenado do tipo (x,y).



Representação Cartesiana – 2D

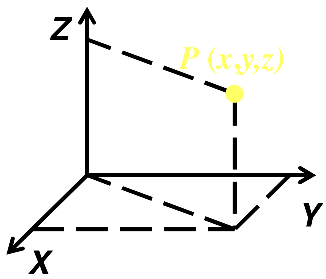
- Os versores das direcções *XX* e *YY* designam-se, normalmente, por $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$
- Um vector com origem em *O* e extremidade em *P*, representa-se analiticamente por

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath}$$



Representação Cartesiana – 3D

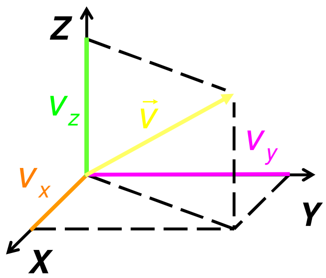
- Um sistema cartesiano a três dimensões é definido por três rectas orientadas e perpendiculares entre si;
- Os eixos designam-se normalmente por eixo dos *XX*, eixo dos *YY* e eixo dos *ZZ;*
- Um ponto *P* fica perfeitamente definido por um conjunto ordenado do tipo (x,y,z).



Representação Cartesiana – 3D

- Os versores das direcções *XX* e *YY* e *ZZ* designam-se, normalmente, por $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$
- Um vector com origem em O e extremidade em P, representa-se analiticamente por

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$



Adição Analítica de Vectores

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

$$\vec{u} = u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\,\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v} + \vec{u} \\ &= w_x\,\hat{\imath} + w_y\,\hat{\jmath} + w_z\,\hat{k} \\ &= (v_x + u_x)\,\hat{\imath} + (v_y + u_y)\,\hat{\jmath} + (v_z + u_z)\,\hat{k}\end{aligned}$$

Subtracção Analítica de Vectores

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

$$\vec{u} = u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\,\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v} - \vec{u} \\ &= w_x\,\hat{\imath} + w_y\,\hat{\jmath} + w_z\,\hat{k} \\ &= (v_x - u_x)\,\hat{\imath} + (v_y - u_y)\,\hat{\jmath} + (v_z - u_z)\,\hat{k}\end{aligned}$$

Multiplicação por um Escalar

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

$$\lambda = \text{escalar}$$

$$\begin{aligned}\vec{w} = \lambda\vec{v} &= w_x\,\hat{\imath} + w_y\,\hat{\jmath} + w_z\,\hat{k} \\ &= \lambda\left(v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}\right) \\ &= \lambda v_x\,\hat{\imath} + \lambda v_y\,\hat{\jmath} + \lambda v_z\,\hat{k}\end{aligned}$$

Módulo de um Vector

Num sistema de eixos ortogonal,
o módulo do vector

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

é dado por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Produto Escalar (ou Interno)

O produto escalar entre os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é um escalar dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u\, v \cos(\vec{u} \sphericalangle \vec{v})$$

Esta operação goza das seguintes propriedades:

Comutativa $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Distributiva em relação à adição $(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Produto Escalar (ou Interno)

Considerando os vectores

$$\vec{u} = u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\,\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

e aplicando a propriedade distributiva do produto escalar em relação à adição, bem como a definição de produto escalar, vem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Produto Escalar (ou Interno)

Consideremos os vectores

$$\vec{u} = u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\,\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

teremos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\hat{k}\right) \cdot \left(v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\hat{k}\right)$$

Produto Escalar (ou Interno)

Aplicando a propriedade distributiva do produto escalar em relação à adição, vem

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(u_x\,\hat{\imath}+u_y\,\hat{\jmath}+u_z\hat{k}\right)\cdot\left(v_x\,\hat{\imath}+v_y\,\hat{\jmath}+v_z\hat{k}\right)\\
&= u_x v_x\,\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}+u_x v_y\,\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}+u_x v_z\,\hat{\imath}\cdot\hat{k}+\\
&\quad + u_y v_x\,\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}+u_y v_y\,\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}+u_y v_z\,\hat{\jmath}\cdot\hat{k}\\
&\quad + u_z v_x\hat{k}\cdot\hat{\imath}+u_z v_y\hat{k}\cdot\hat{\jmath}+u_z v_z\hat{k}\cdot\hat{k}
\end{aligned}
$$

Produto Escalar (ou Interno)

Aplicando a propriedade comutativa do produto escalar e reagrupando os termos, vem

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= u_x v_x\,\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}+u_y v_y\,\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}+u_z v_z\hat{k}\cdot\hat{k}\\
&\quad +\left(u_x v_y+u_y v_x\right)\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}\\
&\quad +\left(u_x v_z+u_z v_x\right)\hat{\imath}\cdot\hat{k}\\
&\quad +\left(u_y v_z+u_z v_y\right)\hat{\jmath}\cdot\hat{k}
\end{aligned}
$$

Produto Escalar (ou Interno)

Tendo em conta a definição

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u\,v\,\cos\left(\vec{u}\sphericalangle\vec{v}\right)$$

e que os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ são perpendiculares entre si, teremos

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}=0 \qquad \hat{\imath}\cdot\hat{k}=0 \qquad \hat{\jmath}\cdot\hat{k}=0$$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}=1 \qquad \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}=1 \qquad \hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

Produto Escalar (ou Interno)

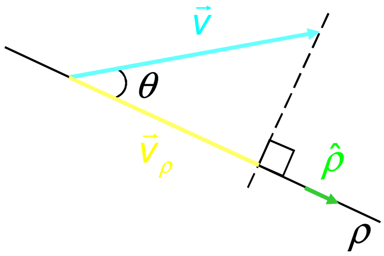
Finalmente vem para o produto escalar

$$\begin{aligned}\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}} &= u_x v_x\,\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + u_y v_y\,\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + u_z v_z\,\hat{k}\cdot\hat{k}\\ &+\cancel{\left(u_x v_y + u_y v_x\right)\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}}\\ &+\cancel{\left(u_x v_z + u_z v_x\right)\hat{\imath}\cdot\hat{k}}\\ &+\cancel{\left(u_y v_z + u_z v_y\right)\hat{\jmath}\cdot\hat{k}}\\ &= u_x v_x\,\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + u_y v_y\,\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + u_z v_z\,\hat{k}\cdot\hat{k}\\ &\boxed{= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}\end{aligned}$$

Produto Escalar (ou Interno)

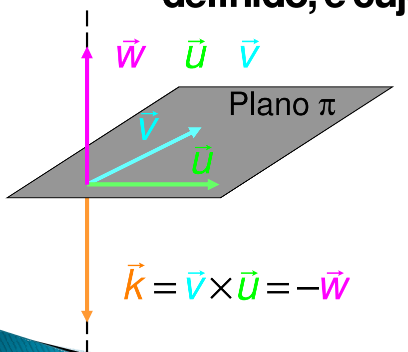
O produto escalar de um vector por um versor é a projecção do vector segundo a direcção definida pelo versor

$$\vec{v}\cdot\hat{\rho} = v\cos(\vec{v}\sphericalangle\hat{\rho})$$
$$= v\cos(\theta)$$
$$= v_{\rho}$$



Produto Vectorial (ou Externo)

O resultado do produto vectorial entre dois vectores u e $\vec{v}$ é um vector perpendicular ao plano por eles definido, e cujo módulo é dado por



$$\vec{k} = \vec{v}\times\vec{u} = -\vec{w}$$

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = u\,v\,\mathrm{sen}(\vec{u}\sphericalangle\vec{v})$$

O sentido do vector resultante do produto vectorial é dado pela regra da mão direita ou pela regra do saca rolhas

Produto Vectorial (ou Externo)

Consideremos os vectores

$$\vec{u} = u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\,\hat{k} \qquad \text{e} \qquad \vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

As componentes analíticas do vector

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

podem ser obtidas da seguinte forma

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \longrightarrow \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

Produto Vectorial (ou Externo)

Cálculo da componente segundo *XX*

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \left(u_y\, v_z - u_z\, v_y\right)\hat{\imath} + \cdots$$

Produto Vectorial (ou Externo)

Cálculo da componente segundo *YY*

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad \vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} = \cdots + \left(u_z\, v_x - u_x\, v_z\right)\hat{\jmath} + \cdots$$

Produto Vectorial (ou Externo)

Cálculo da componente segundo *ZZ*

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad \vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} = \cdots + \left(u_x\, v_y - u_y\, v_x\right)\hat{k}$$

Produto Vectorial (ou Externo)

Somando as componentes segundo os três eixos, teremos

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{u}\times\vec{v}\\ &= \left(u_y\, v_z - u_z\, v_y\right)\hat{\imath}\\ &\quad + \left(u_z\, v_x - u_x\, v_z\right)\hat{\jmath}\\ &\quad + \left(u_x\, v_y - u_y\, v_x\right)\hat{k}\end{aligned}$$

Produto Misto (ou triplo composto)

O produto misto entre os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é definido por $(\vec{u}\times\vec{v})\bullet\vec{w}$, sendo um escalar

$$\begin{aligned}\left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}\right| &= \underbrace{u\, v\, \mathrm{sen}(\vec{u}\sphericalangle\vec{v})}_{\left|(\vec{u}\times\vec{v})\right|}\, w\cos\left[(\vec{u}\times\vec{v})\sphericalangle\vec{w}\right]\\ &= u\, v\, w\, \mathrm{sen}(\vec{u}\sphericalangle\vec{v})\cos\left[(\vec{u}\times\vec{v})\sphericalangle\vec{w}\right]\end{aligned}$$

Produto Misto (ou triplo composto)

Se $\vec{w}$ for um versor $(\vec{w} \equiv \hat{w})$, o resultado do produto misto $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \hat{w}$ é a projecção de $\vec{u} \times \vec{v}$ sobre a recta orientada pelo versor $\hat{w}$