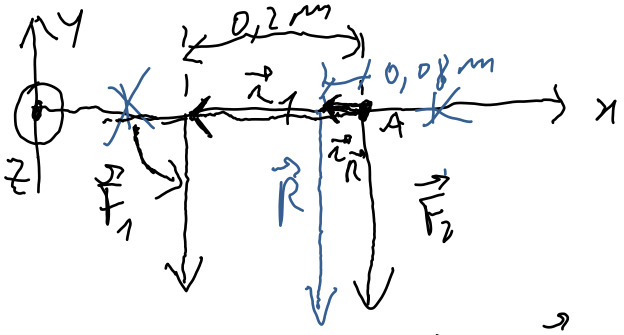
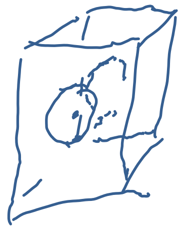
Folha 2.2 – Sistemas de Forças e Binários

Sistemas de Forças Equivalentes – Exercícios resolvidos

1. Duas forças paralelas, com o mesmo sentido, distam 0,2 m entre si. Se uma das forças tem uma intensidade igual a 13 N e a resultante tem uma linha de acção que dista 0,08 m da outra força, calcule as intensidades da resultante e da outra força.



F_1 ~~ou F_2~~ $= 13\, N$



$F_2 = ?$

$R = ?$

$$\vec R = \vec F_1 + \vec F_2$$

$$\vec F_1 = -F_1 \hat j = -13 \hat j \quad ; \quad \vec F_2 = -F_2 \hat j$$

$$\vec R = -13 \hat j - F_2 \hat j \Rightarrow \vec R = -(13 + F_2)\hat j \Rightarrow R = |-(13+F_2)|$$

$$\vec M^i_{1,A} = \vec M_{\vec F_1,A} + \cancel{\vec M_{\vec F_2,A}}^{\vec 0} = \vec r_1 \times \vec F_1 = +b_1 F_1 \hat k =$$

$$= 0,2 \times 13 \hat k = 2,6 \hat k \, (N m)$$

$$\vec M^f_{R,A} = \vec r_R \times \vec R = +b_R R \hat k = 0,08 R \hat k$$

$$\vec M^i_{1,A} = \vec M^f_{\vec R,A} \Leftrightarrow 2,6 \cancel{\hat k} = 0,08 R \cancel{\hat k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{2,6}{0,08} = 32,5\, N}$$

$$R = |-(13+F_2)| \Leftrightarrow 13 + F_2 = R \Rightarrow F_2 = R - 13 \Leftrightarrow \boxed{F_2 = 19,5\, N}$$

2. Para os sistemas de forças e binários representados na **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**.

a) Determine $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ e $\vec{M}_A$ de modo a que os dois sistemas de forças e binários sejam equivalentes.

b) Indique, justificando, se os sistemas de forças e binários admitem eixo central de momentos.

c) Calcule o automomento, e indique qual a redução mínima admitida pelos sistemas de forças e binários.

d) Calcule o eixo central de momentos e indique se é possível aplicar a redução mínima aos sistemas de forças e binários.

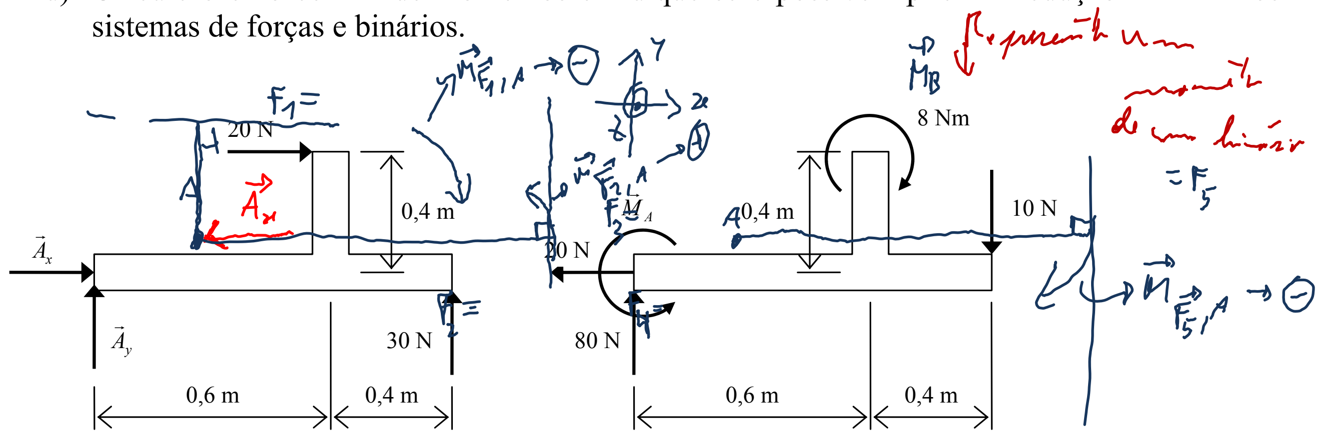


Figura 1

a) $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$; $\vec{M}^1_{1,A} = \vec{M}^2_{1,A}$

$$\begin{cases} xx: A_x + 20 = -20 \\ yy: A_y + 30 = 80 - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = -40 \text{ N} \\ A_y = 40 \text{ N} \end{cases}$$

→ Significa que $\vec{A}_x$ está representado em sentido contrário ao real

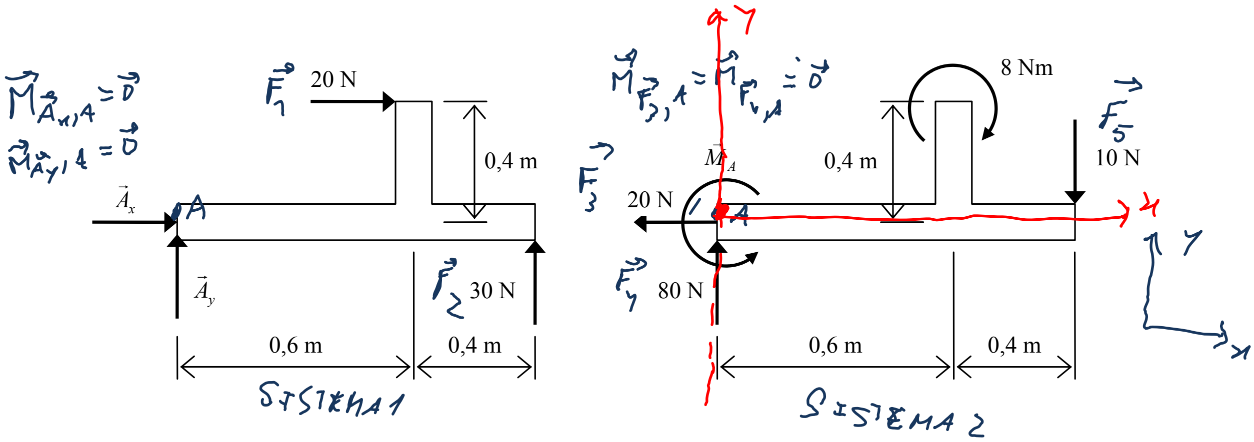
$$\vec{M}^1_{1,A} = \underbrace{\vec{M}_{\vec{A}_x,A}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\vec{A}_y,A}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\vec{F}_1,A}}_{\hat{k}} + \underbrace{\vec{M}_{\vec{F}_2,A}}_{\hat{k}}$$

Todos os momentos têm a direcção de $\hat{k}$

$$\vec{M}^2_{1,A} = \underbrace{\vec{M}_{\vec{F}_3,A}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\vec{F}_4,A}}_{\vec{0}} + \vec{M}_{\vec{F}_5,A} + \vec{M}_A + \vec{M}_B$$

$$\{ \underline{zz}: \underbrace{-0{,}4 F_1 + 1 \times F_2}_{\vec{M}^1_{1,A}} = -1 \times F_5 + M_A - M_B \Rightarrow M_A = -0{,}4 F_1 + F_2 + F_5 + M_B$$

$$\Rightarrow M_A = -0{,}4 \times 20 + 30 + 10 + 8 = 40 \text{ Nm}$$



b) O sistema admite eixo central de momentos se $\vec{R} \neq \vec{0}$

SISTEMA 2 → $\vec{R}_2 \neq \vec{0} = 70\hat{j} - 20\hat{i}$ (N)

O SISTEMA ADMITE eixo central de momentos

c) $A = \vec{M}_{R,O} \cdot \vec{R} = (\_\_\ \hat{k}) \cdot (-20\hat{i} + 70\hat{j}) = 0$

$\vec{R} = -20\hat{i} + 70\hat{j}$

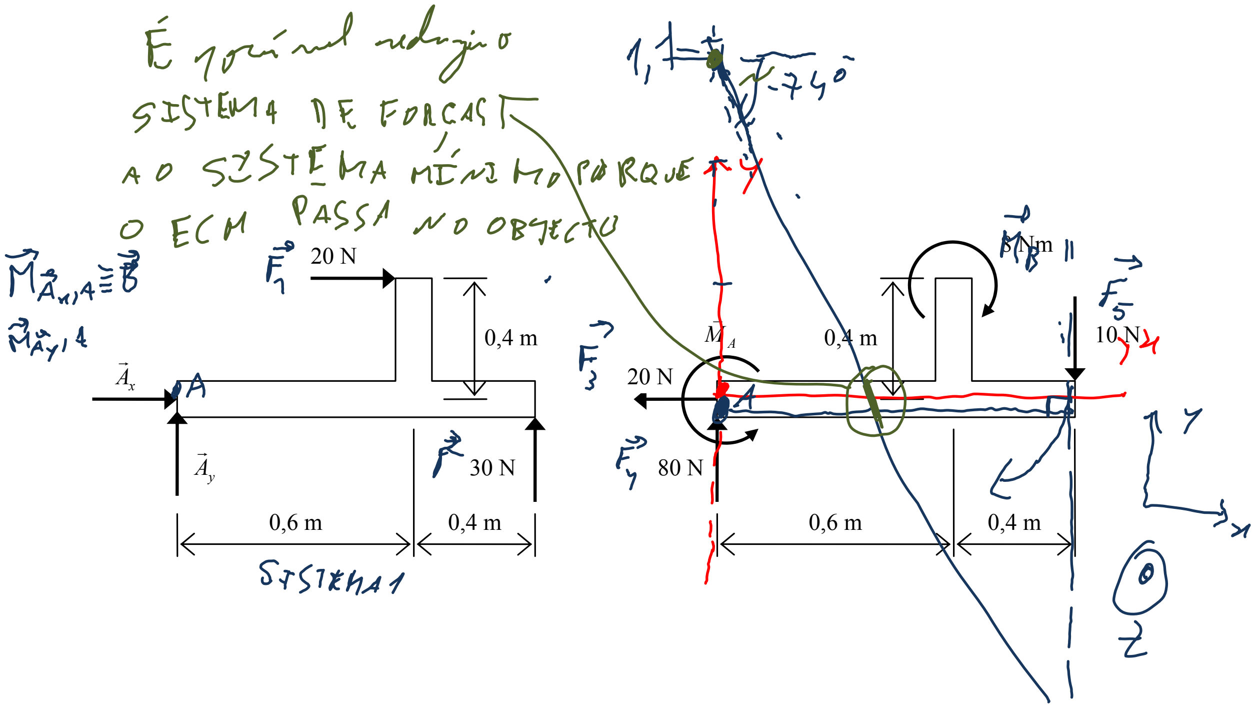
$\vec{M}_{R,O} = \_\_\ \hat{k}$

É um sistema de $\boxed{\vec{R} \neq \vec{0} \text{ e } A = 0}$

⇙

O sistema mínimo é a resultante aplicada no eixo central de momentos

É possível reduzir o sistema de forças ao sistema mínimo porque o ECM passa no objecto



$$\begin{cases} \cancel{M_x} - (y\cancel{R_z} - zR_y) = \cancel{\frac{A}{R^2}R_x} \\ \cancel{M_y} - (zR_x - x\cancel{R_z}) = \cancel{\frac{A}{R^2}R_y} \\ M_z - (xR_y - yR_x) = \cancel{\frac{A}{R^2}R_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} zR_y = 0 \\ -zR_x = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow$$

$$M_z - xR_y + yR_x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = \frac{R_y}{R_x}x - \frac{M_z}{R_x} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{70}{-20}x - \frac{22}{-20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = -3{,}5x + 1{,}1}$$

EIXO CENTRAL DE MOMENTOS

SISTEMA 2

$\vec{M}_A = 40\,\hat{k}\,(N\,m)$

$\vec{M}_B = -8\,\hat{k}\,(N\,m)$

$\vec{M}_{\vec{F}_5,A} = -(0{,}6+0{,}4)F_5\,\hat{k} = -10\,\hat{k}\,(N\,m)$

$\vec{M}_{1,A} = (40 - 8 - 10)\,\hat{k}\,(N\,m) = +22\,\hat{k}\,(N\,m)$

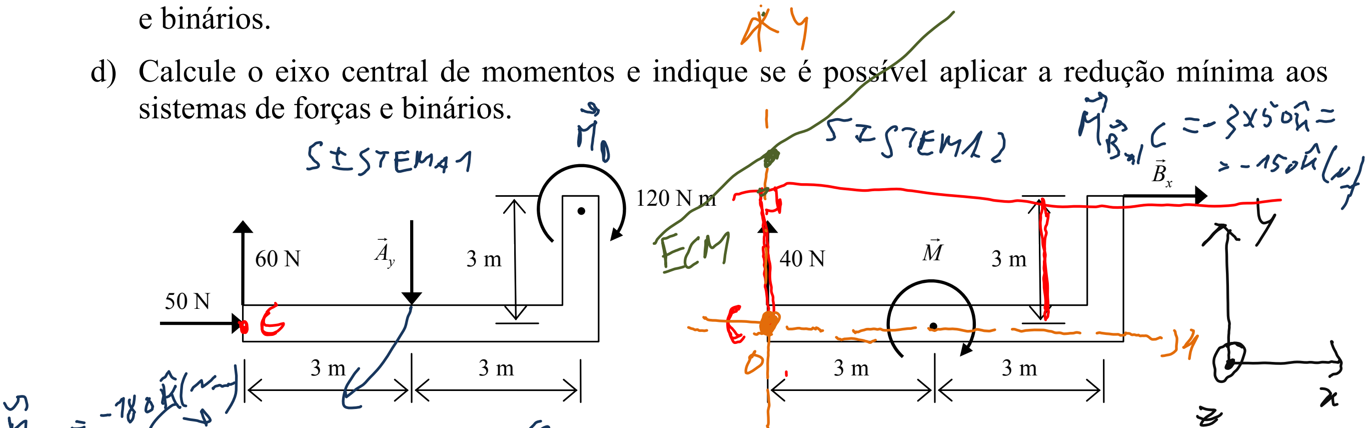
3. Os dois sistemas de forças e binários representados na são equivalentes.

a) Determine A_y, B_x e M.

b) Indique, justificando, se os sistemas de forças e binários admitem eixo central de momentos.

c) Calcule o automomento, e indique qual a redução mínima admitida pelos sistemas de forças e binários.

d) Calcule o eixo central de momentos e indique se é possível aplicar a redução mínima aos sistemas de forças e binários.



$\vec{M}_{1,C} = -180\hat{k}$ (N m)

$\vec{M}_{\vec{A}_y,C} = -3\times 20 = -60$

-180

$\underbrace{-M - 150}_{M^2_{1,C}} \Leftrightarrow \boxed{M = 30\ \text{N m}}$

$A_y = 20$ N

$B_x = 50$ N

a) $A_y = 20$ N $M = 30$ N m

$B_x = 50$ N

b) PARA ADMITIR ECM, $\vec{R} \neq \vec{0}$

DO SISTEMA 2, $\vec{R}$ TEM DE SER $\neq 0$ PORQUE SÓ EXISTEM DUAS FORÇAS, NÃO NULAS E PERPENDICULARES ENTRE SI

c) $A = \vec{R} \cdot \vec{M}_{1,O} = 0$ PORQUE $\vec{R}$ ESTÁ NO PLANO (x,y), LOGO É PERPENDICULAR A $\vec{M}_{1,C}$ QUE TEM A DIRECÇÃO DE z

$\vec{M}_{1,C} = -180\hat{k}\,(N\,m)$

$\vec{R} = 50\hat{\imath} + 40\hat{\jmath}\,(N)$ $\longrightarrow$ A REDUÇÃO MÍNIMA É $\vec{R}$ APLICADA NO ECM

d)

$$\begin{cases} \cancel{M_x} - (\cancel{yR_z} - zR_y) = \cancel{\frac{A}{R^2}R_x} \\ \cancel{M_y} - (zR_x - \cancel{xR_z}) = \cancel{\frac{A}{R^2}}R_y \\ M_z - (xR_y - yR_x) = \cancel{\frac{A}{R^2}R_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = \frac{R_y}{R_x}x - \frac{M_z}{R_x} \end{cases}$$

$$y = \frac{40}{50}x - \frac{-180}{50} \Leftrightarrow y = 0{,}8x + 3{,}6$$

COMO O ECM NÃO PASSA PELO OBJECTO, O SISTEMA NÃO PODE SER REDUZIDO AO SISTEMA MÍNIMO

4. Considere os dois sistemas de forças e binários representados na Figura 2.

a) Determine F e M de modo a os sistemas de forças e binários sejam equivalentes.

b) Indique, justificando, se os sistemas de forças e binários admitem eixo central de momentos.

c) Calcule o automomento, e indique qual a redução mínima admitida pelos sistemas de forças e binários.

d) Calcule o eixo central de momentos e indique se é possível aplicar a redução mínima aos sistemas de forças e binários.

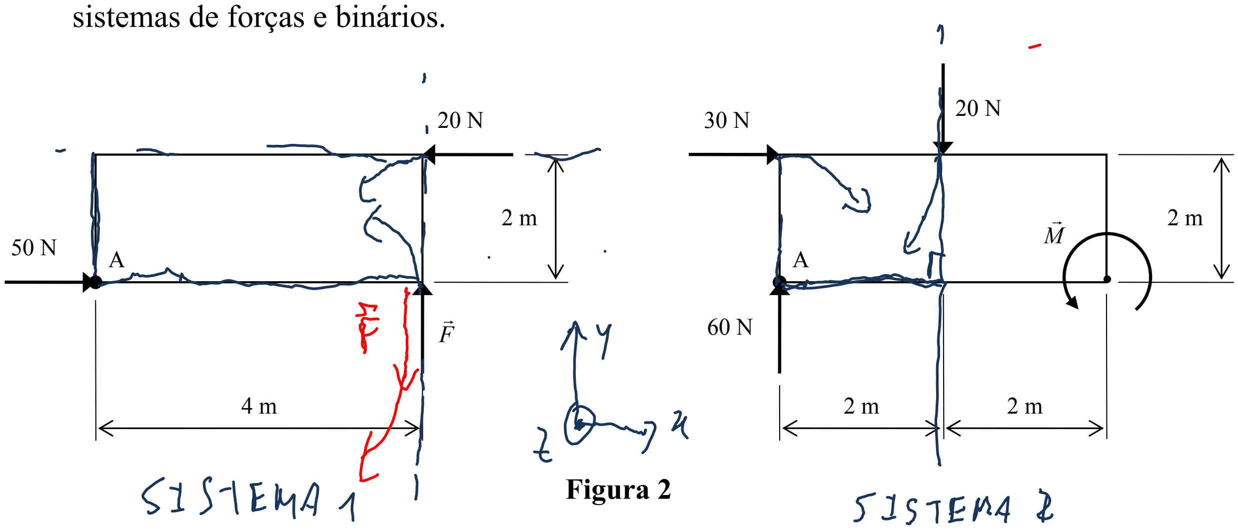


Figura 2

2.a) $\vec{R}^1 = \vec{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} 50 - 20 = 30 \checkmark \\ F = 60 - 20 \end{cases} \Rightarrow \{ F = 40\ N$ $\quad F = -40$

$\vec{M}_{\vec{F},A} = -4 \times (-40)$

$\vec{M}^1_{1,A} = \vec{M}^2_{1,A} \Rightarrow +4F + 2\times 20 = -2\times 30 - 2\times 20 + M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M = 160 + 40 + 60 + 40 \Leftrightarrow M = 300\ Nm$

b) UM SISTEMA DE FORÇAS E BINÁRIOS ADMITE EIXO CENTRAL DE MOMENTOS SE $\vec{R} \neq \vec{0}$

$R_x = 50 - 20 = 30\ N$

$R_y = F = 40\ N$

$\Rightarrow \vec{R} \neq \vec{0} \Rightarrow$ Admite eixo central de momentos

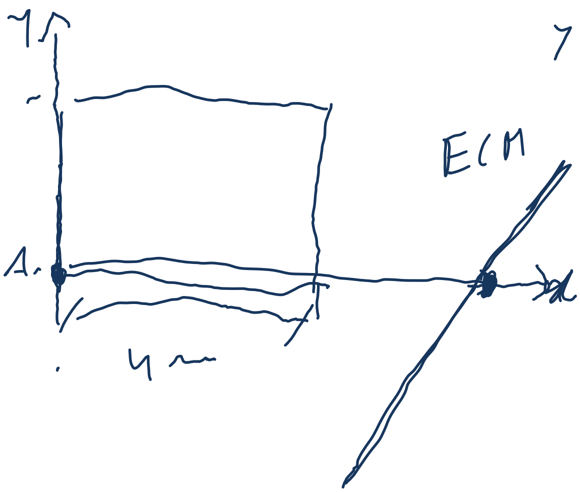
c) $A = \vec{R} \cdot \vec{M}_z = (R_x \hat{\imath} + R_y \hat{\jmath}) \cdot M_z \hat{k} = 0$

Como $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $A = 0 \Rightarrow$ A redução mínima é uma força aplicada sobre o ECM

d)
$$\begin{cases} \cancel{M_x}^{0} - (y \cancel{R_z}^{0} - z R_y) = \dfrac{A}{R^2} \cancel{R_x}^{0} \\ \cancel{M_y}^{0} - (z R_x - x \cancel{R_z}^{0}) = \dfrac{A}{R^2} \cancel{R_y}^{0} \\ M_z - (x R_y - y R_x) = \dfrac{A}{R^2} \cancel{R_z}^{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z R_y = 0 \\ -z R_x = 0 \\ M_z - (x R_y - y R_x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y R_x - x R_y = -M_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = \dfrac{R_y}{R_x} x - \dfrac{M_z}{R_x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = \dfrac{40}{30} x - \dfrac{300}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{3} x - 10 \end{cases}$$



$y = 0 \Rightarrow \dfrac{4}{3} x - 10 = 0 \Rightarrow$

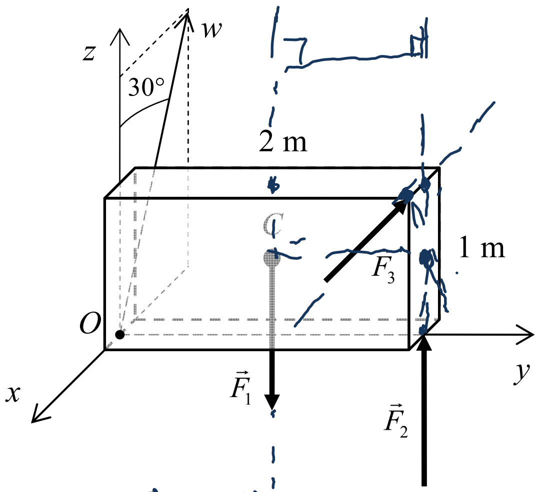
$\Rightarrow x = \dfrac{30}{4}$ m

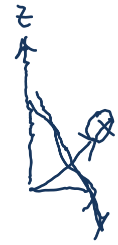
$= 7{,}5$ m

7. Considere o sistema de forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ aplicadas ao corpo sólido, paralelipipédico, representado na Figura 3. A força $\vec{F}_1$ tem uma intensidade de 100 N, direcção paralela ao eixo dos

$\vec{M}_B = 1 \times 100\hat{\imath} = 100\hat{\imath}$ Nm

ZZ, e está aplicada no ponto *C* do sólido, que coincide com o seu centro geométrico. A força $\vec{F}_2$ tem uma intensidade de 100 N, direcção paralela ao eixo dos *ZZ*, e está aplicada a meio da aresta inferior direita do paralelepípedo. A força $\vec{F}_3$ tem uma intensidade de 50 N, direcção paralela ao eixo dos *XX*, e está aplicada no canto superior direito do paralelepípedo. Os eixos *XX*, *YY* e *ZZ* passam na aresta inferior esquerda, a meio da face inferior, e a meio da face esquerda do sólido, respectivamente. O eixo *WW* faz um ângulo de 30° com a parte positiva do eixo dos *ZZ*, e situa-se no plano *XZ*. Indique as forças que constituem um binário e determine o seu vector momento aplicado ao corpo.





b) Calcule a força resultante e o momento resultante do sistema de forças relativamente à origem do referencial $\{x, y, z\}$.

$\vec{R} = \vec{F}_3 = -50\hat{\imath}$ N $\quad \vec{M}_{r,O} = \vec{M}_B + \vec{M}_{F_3,O}$

Figura 3

c) Determine os valores das componentes do momento resultante paralela, $M_r^{\parallel}$, e perpendicular, $M_r^{\perp}$, à força resultante.

d) Determine o automomento e o momento resultante mínimo.

b)

$$\vec{M}_{\vec{F}_3,O} = \begin{array}{c} \\ \vec{r} \rightarrow \\ \vec{F}_3 \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -50 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -50\hat{\jmath} + 100\hat{k} \; (\text{Nm})$$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{M}_B = 100\hat{\imath}$ (Nm)

$\vec{M}_{r,O} = \vec{M}_B + \vec{M}_{\vec{F}_3,O} = 100\hat{\imath} - 50\hat{\jmath} + 100\hat{k}$ (Nm)

$\vec{R} = -50\hat{\imath}$ (N)

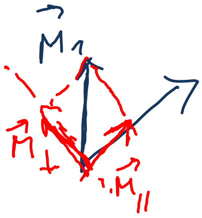
b) $$\vec{M}_{\vec{F}_3,O} = \begin{array}{c} \\ \vec{r} \rightarrow \\ \vec{F}_3 \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -50 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -50\hat{j} + 100\hat{k} \ (N\,m)$$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{M}_B = 100\hat{i} \ (N\,m)$$

$$\vec{M}_{1,O} = \vec{M}_B + \vec{M}_{\vec{F}_3,O} = 100\hat{i} - 50\hat{j} + 100\hat{k} \ (N\,m)$$

$$\vec{R} = -50\hat{i} \ (N)$$

c) 

$$M_{//} = \vec{M}_1 \cdot \hat{R} \qquad \hat{R} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{-50\hat{i}}{50} = -\hat{i}$$

$$= (100\hat{i} - 50\hat{j} + 100\hat{k}) \cdot (-\hat{i}) = 100 \times (-1) = -100 \ N\,m$$

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_{//} + \vec{M}_\perp$$

$$\boxed{|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a + b + 2\vec{a}\cdot\vec{b}}}$$

$$|\vec{M}_1|^2 = \vec{M}_1 \cdot \vec{M}_1 = (\vec{M}_{//} + \vec{M}_\perp) \cdot (\vec{M}_{//} + \vec{M}_\perp) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1^2 = \underbrace{\vec{M}_{//} \cdot \vec{M}_{//}}_{M_{//}^2} + \underbrace{\vec{M}_{//} \cdot \vec{M}_\perp + \vec{M}_\perp \cdot \vec{M}_{//}}_{2\cancel{\vec{M}_{//} \cdot \vec{M}_\perp}\ 0} + \underbrace{\vec{M}_\perp \cdot \vec{M}_\perp}_{M_\perp^2} \Rightarrow M_1^2 = M_{//}^2 + M_\perp^2 \Rightarrow$$

$$M_\perp = \sqrt{M_1^2 - M_{//}^2}$$

$$\overbrace{\vec{M}_1 \cdot \hat{R}}^{-100\,Nm} = M_1 \cos(\theta) \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-100}{150}\right) = 131{,}81^{o}$$

$$M_1 = \sqrt{100^2 + (-50)^2 + 100^2} = 150\ Nm$$

$$|\hat{R}| = 1$$

$$M_{\parallel} = M_1 \cos(\theta)$$

$$M_{\perp} = M_1 \sin(\theta)$$

d) O [illegible] [illegible] mínimo é $M_{\parallel}$

$$\vec{R} = -50\,\hat{\imath}\ (N)$$

$$\vec{M}_1 = 100\,\hat{\imath} - 50\,\hat{\jmath} + 100\,\hat{k}\ (Nm)$$

$$A = \vec{R} \cdot \vec{M}_1 = (-50\,\hat{\imath}) \cdot (100\,\hat{\imath} - 50\,\hat{\jmath} + 100\,\hat{k}) = -5000\ N^2 m$$

$$A = M_{\parallel} R = \underset{\approx}{-100} \times 50 = -5000\ N^2 m$$