Algoritmos Numéricos
Trabalho Computacional 2

Henrique Coutinho Layber

17 de Janeiro de 2023

Introdução

A definição do exercício consiste em implementar o método de Euler (o mesmo que Runge-Kutta de 1ª ordem) para resolver sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de 1ª ordem, sendo assim possível utilizá-lo em solução de Problemas do Valor Inicial (PVIs) de 2ª ordem. O algoritmo foi implementado em Octave e testado com o problema dado na especificação do trabalho. O código fonte está disponível no repositório do GitHub [1].
2

Como o algoritmo funciona

A obtenção de valores exatos é custosa, portanto usamos métodos rápido para aproximar soluções mais rapidamente, ao depender da aplicação, vale mais a pena um valor rápido e "preciso o suficiente". O método de Euler é um dos métodos mais simples para resolver PVIs, porém é um dos mais rápidos, sendo assim, é um método muito útil para se ter em mãos, entretanto, é um método de 1ª ordem, o que significa que ele não é muito preciso, porém, para problemas simples, ele pode ser suficiente. Uma alternativa para o método de Euler é o método de Runge-Kutta de ordem maior, pois trata EDOs de ordem maiores e entretanto são mais precisos que o método de Euler, porém, é mais lentos.
O método de Euler trata-se de continuar a linha tangente à função no ponto específico.

[1] `https://github.com/Henriquelay/AN-TC2`

Problemas

Problema 1

O problema da validação consiste em uma sistema simples onde temos a solução exata.

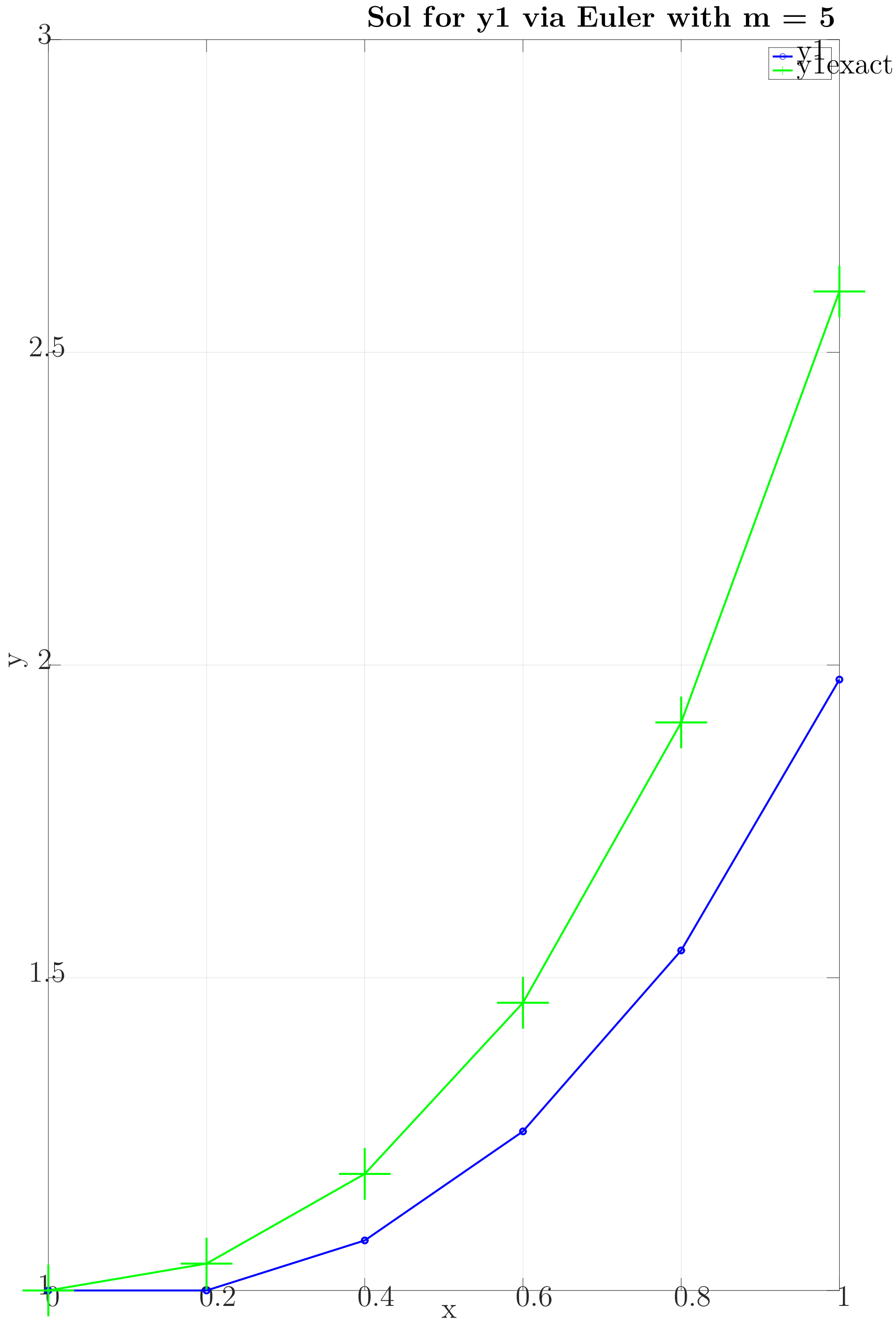
$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) = y_2 \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 + y_2 - x^2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Para $m = 5$, obtivemos o seguinte resultado:

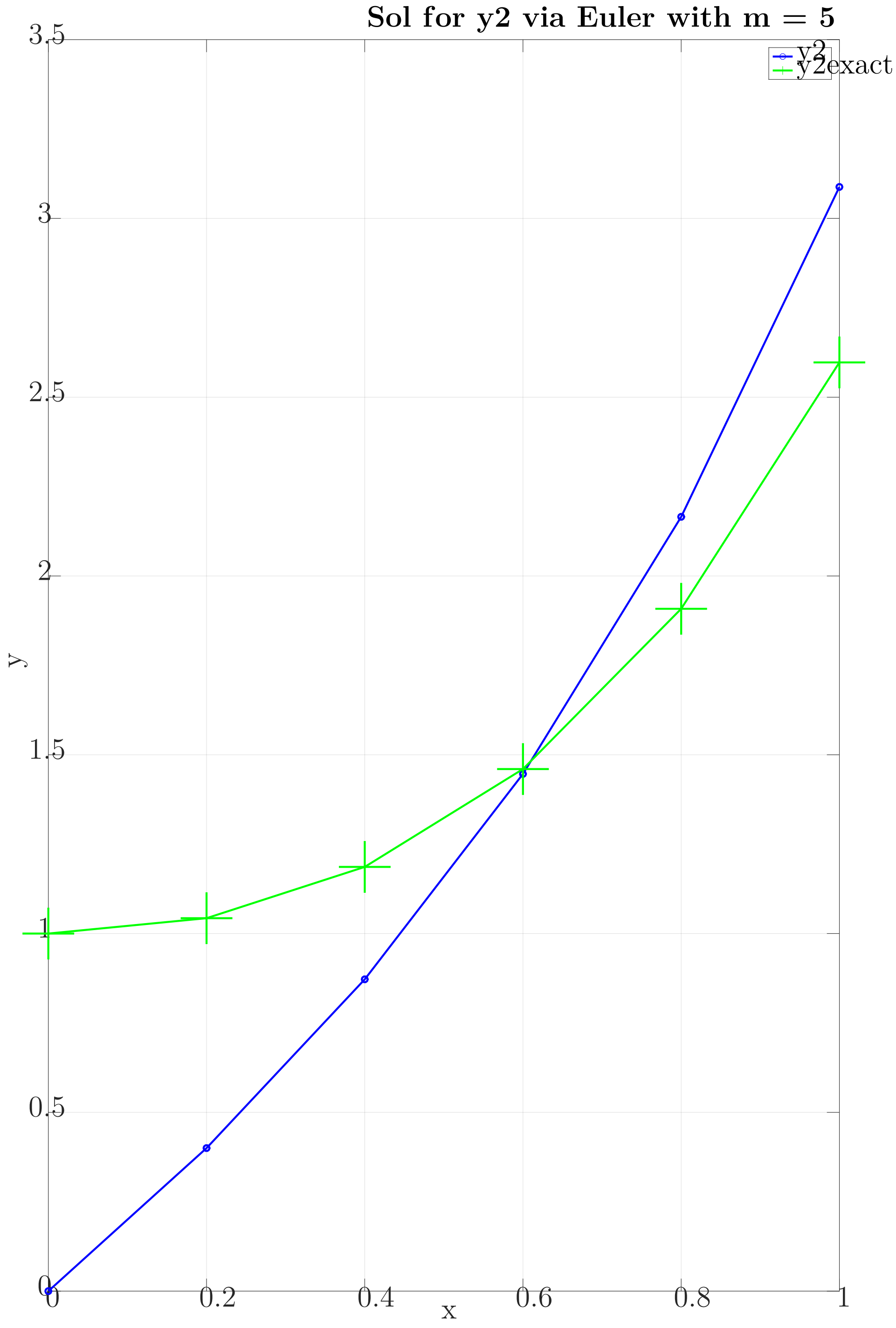
$$y_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0800 \\ 1.2544 \\ 1.5437 \\ 1.9768 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0430 \\ 1.1864 \\ 1.4600 \\ 1.9083 \\ 2.5973 \end{bmatrix} = Y_{1_{exact}}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.4000 \\ 0.8720 \\ 1.4464 \\ 2.1654 \\ 3.0880 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0430 \\ 1.1864 \\ 1.4600 \\ 1.9083 \\ 2.5973 \end{bmatrix} = Y_{2_{exact}}$$

Gráficos:



Sol for y1 via Euler with m = 5
y1
y1exact
y
x
3
2.5
2
1.5
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



Como um teste, troquei o valor de $y_2(a)$ para 1.0, o mesmo que o valor exato, e obtive os resultados:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.2000 \\ 1.5200 \\ 1.9984 \\ 2.6877 \\ 3.6603 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0430 \\ 1.1864 \\ 1.4600 \\ 1.9083 \\ 2.5973 \end{bmatrix} = Y_{1_{exact}}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.6000 \\ 2.3920 \\ 3.4464 \\ 4.8630 \\ 6.7827 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0430 \\ 1.1864 \\ 1.4600 \\ 1.9083 \\ 2.5973 \end{bmatrix} = Y_{2_{exact}}$$

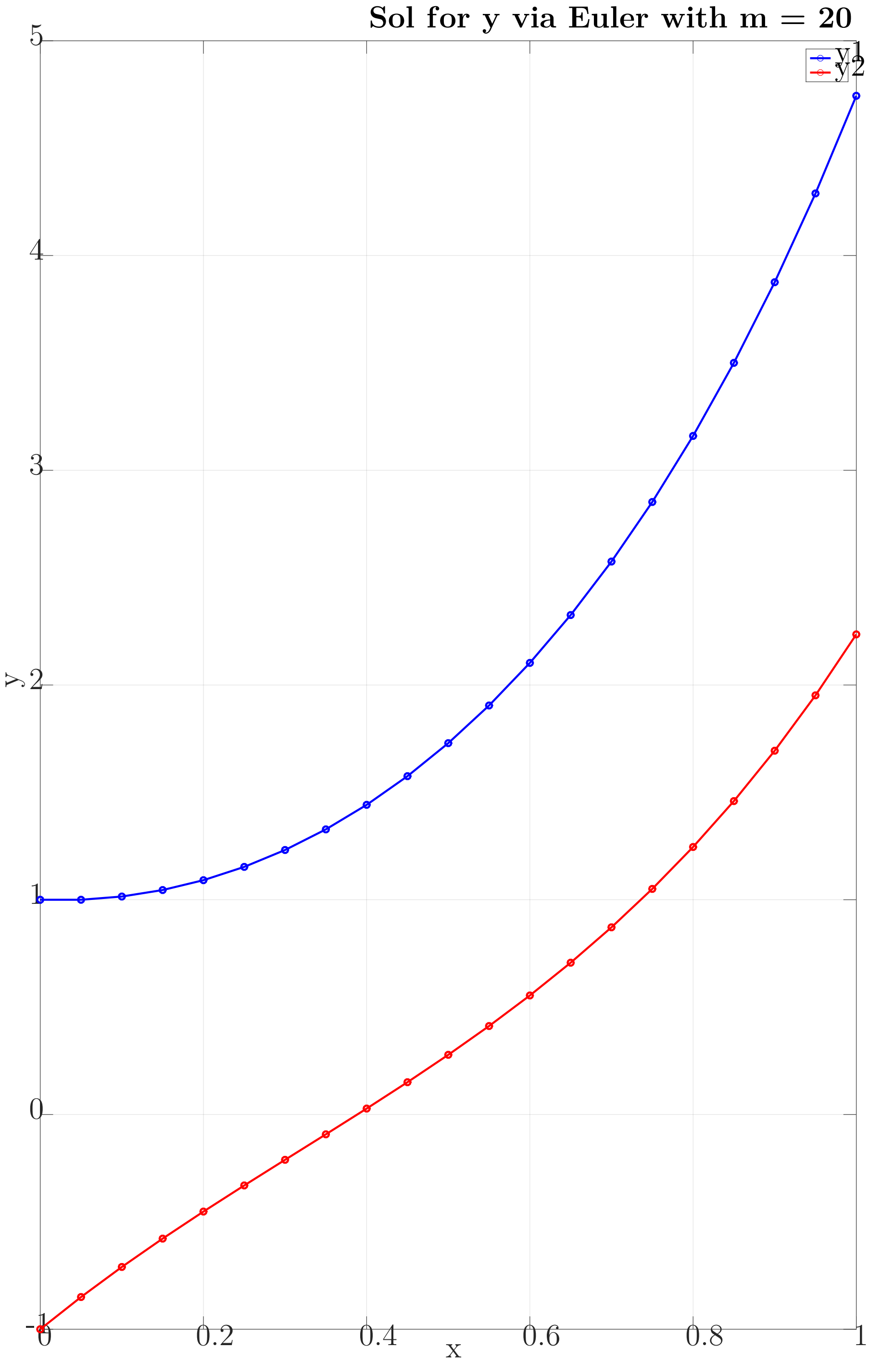
Interessantemente, ao definir o valor inicial $y_2(a)$ como o valor exato, esperamos que o erro seja menor, mas o erro aumentou. Isso acontece porque o método de Euler é um método de 1ª ordem, ou seja, ele não é muito preciso, e a folga que erro para um lado (negativo, pois $y_2(0) = 0$ quando $y_{2_{exact}}(0) = 1$) nos deu margem de erro pra extrapolar o declive da curva, fazendo com que o erro aumentasse quando removemos esse "buffer". Isso foi acaso, e porque já conhecemos a função exata, mas em um cenário onde não conhecemos a função no ponto, ou até mesmo se conhecemos a função no ponto mas não sua curva, não podemos fazer esse tipo de estimativa propositalmente.

Problema 2

O problema 2 consiste em resolver o PVI dado na especificação do trabalho, onde não temos a solução exata.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) = y_1 + y_2 + 3x \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$$

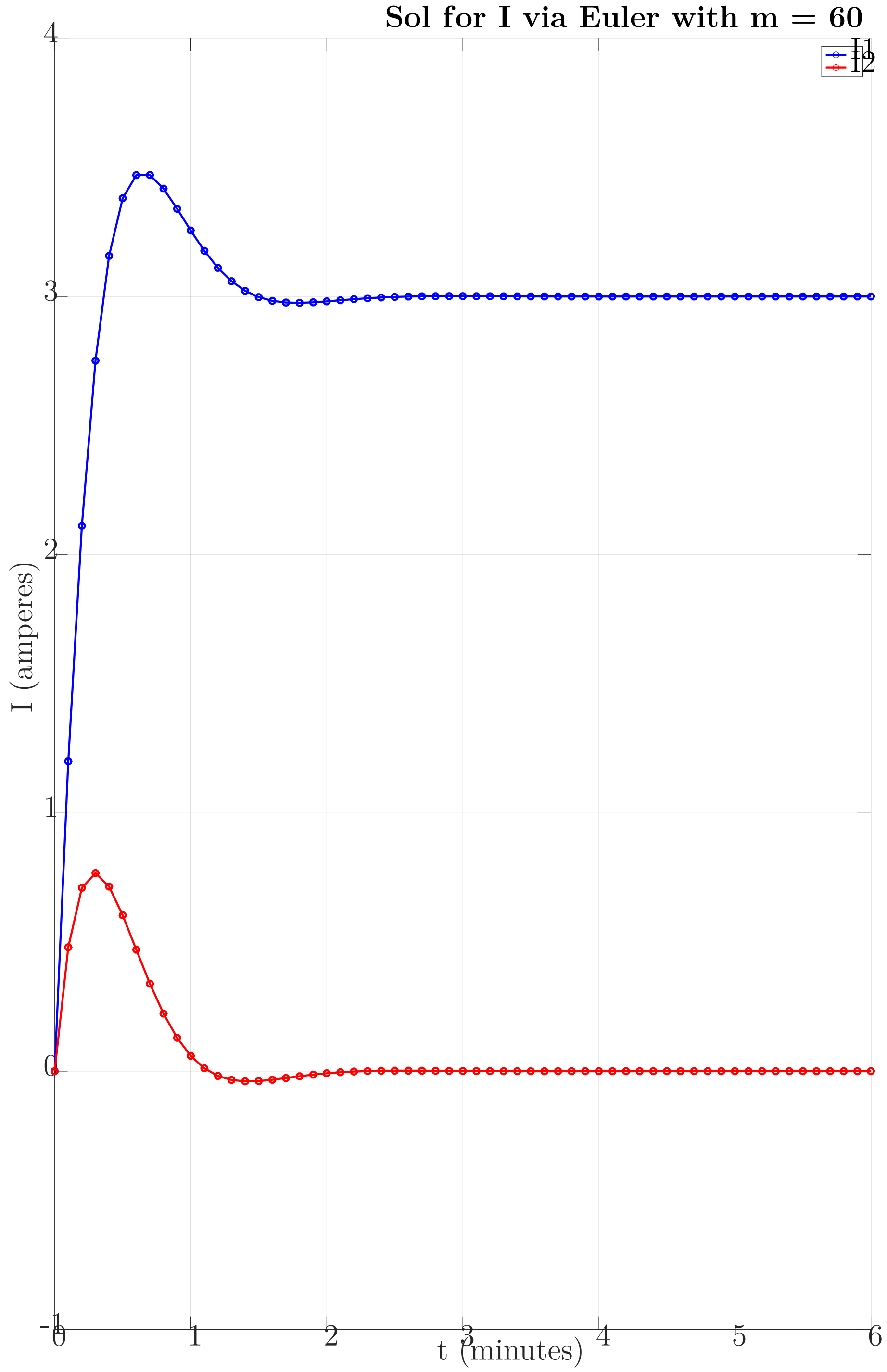
Para $m = 20$, obtivemos o seguinte resultado:



Sol for y via Euler with m = 20
y1
y2
5
4
3
2
1
0
-1
y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

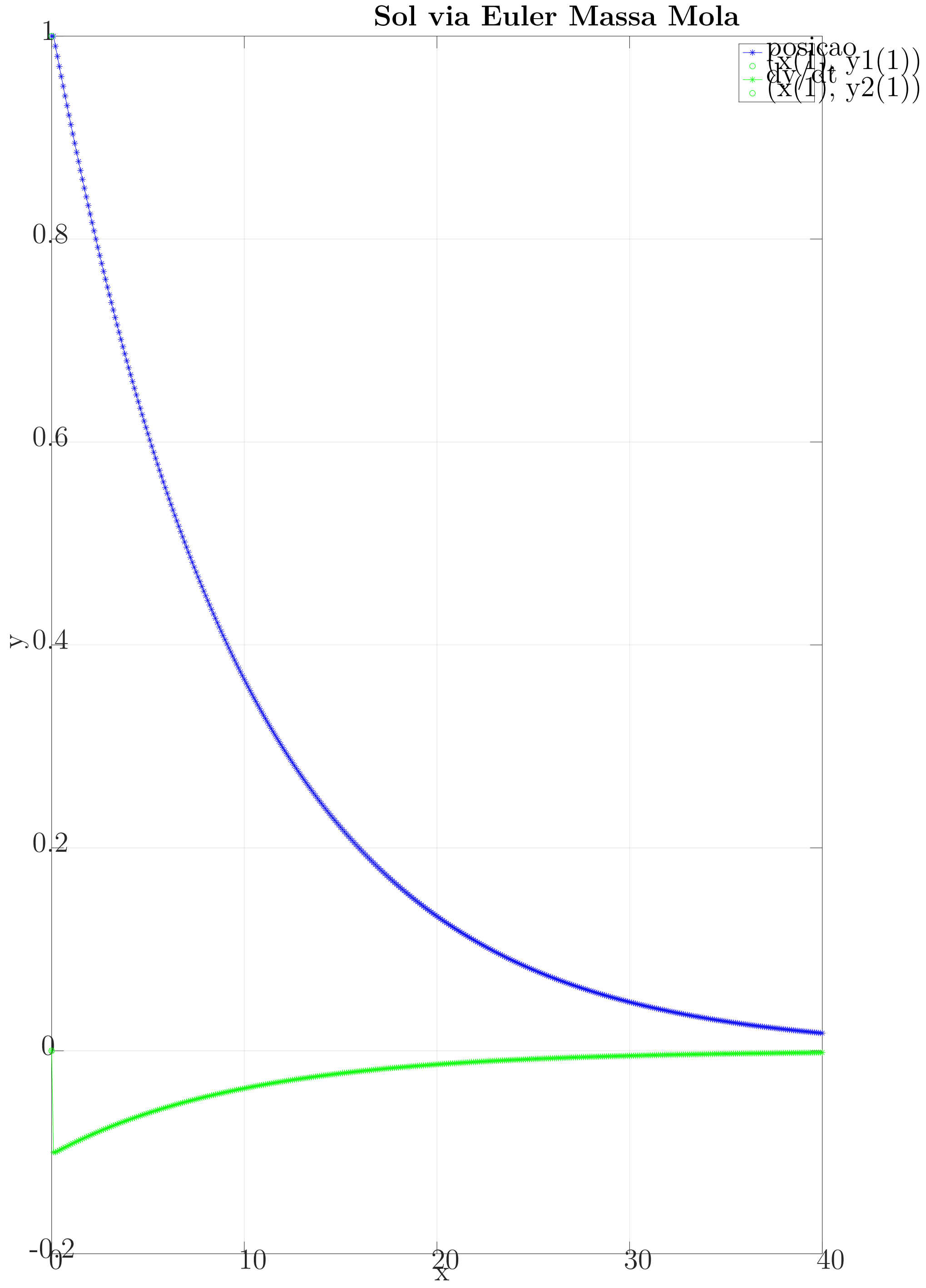
Problema 3

O problema 3 consiste em resolver um circuito RLC, dado o PVI indicado pelas Leis de Kirchhoff, onde não temos a solução exata. Deve-se obter a corrente $I(t)$ no tempo t, onde $t \in [0, 6]$ minutos. Para $m = 60$, obtivemos o seguinte resultado:



Problema 4

O problema 4 é um sistema massa-mola, onde não temos a solução exata. Para $m = 400$, obtivemos o seguinte resultado:



Problema 5

O problema 5 é um sistema de presa-predador , onde não temos a solução exata. Para $m = 240$, obtivemos o seguinte resultado: