Teste Computacional 2 de Algoritmos Numéricos

Resolução de um sistema de duas equações diferencias ordinárias de 1^a ordem via o método de Euler.

1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é implementar o método de Euler para resolver um sistema de EDOs de 1^a ordem assim como resolver um PVI de 2^a ordem.

2 Sistemas de EDOs de 1^a ordem

Sistemas de EDO de 1^a ordem aparecem, com frequência, nas ciências exatas pois são "ferramentas" adequadas para modelar diversos fenômenos do nosso mundo real. Os sistemas mais simples são aqueles formados por duas equações de 1^a ordem.

Seja o sistema de duas equações diferencias, com valores iniciais, tal como o definido abaixo:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(a) = y_{1a} \\ y_2(a) = y_{2a} \end{cases}$$

A solução analítica, em um domínio $D = [a, b]$, é o par de funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que satisfaz às equações diferenciais e às condições iniciais $y_1(a) = y_{1a}$e $y_2(a) = y_{2a}$ em $D = [a, b]$.

A obtenção da solução (solução exata) é, muita vezes, difícil de ser determinada analiticamente mas existem diversos métodos que podem ser usados para obter a solução de forma numérica.

Métodos conhecidos como métodos de Runge Kutta são bastante empregados na prática. Neste trabalho, será usado um dos métodos mais simples: o método de Euler (que é também um método Runge Kutta, porém de 1^a ordem).

3 O método de Euler para duas equações

Quando há duas equacões, as aproximações numéricas para $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são calculadas, sincronizadamente, para $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

Nos métodos de passo simples, a cada passo da discretização do domínio, calcula-se as aproximações para $y_1(x(i + 1))$ e para $y_2(x(i + 1))$ - ou seja, os valores $y_{1,i+1}$ e $y_{2,i+1}$- a partir dos valores numéricos em x_i, isto é, a partir de $y_{1,i}$ e $y_{2,i}$.

O método de Euler é dado por

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i})$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i})$$

Que pode também ser escrito como

$$y_1(i+1) = y_1(i) + h * f_1$$
$$y_2(i+1) = y_2(i) + h * f_2$$

onde
$f_1 = f_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i})$ é a inclinação da função y_1 em x_i,
$f_2 = f_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i})$ é a inclinação da função y_2 em x_i,
$h = (b-a)/m$ e
m é a partição do dominio.

4 Implementações

Implementar o método Euler (escrevendo uma rotina/script tipo "function") própria para resolver um sistema de duas equações. Os dados de entrada do código com a implementação de Euler devem ser $a, b, y_{1a},\ y_{2a},\ f_1,\ f_2$ e m, onde m é o tamanho da partição do domínio. As funções $f_1(x, y_1, y_2)$ e $f_2(x, y_1, y_2)$ devem estar definidas diretamente no programa principal (vide script modelo).

Os valores das soluções numéricas (ou seja, referentes às funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$) devem ser gravados em um dois vetores, um para cada função.

A implementação do programa deve ser tal que resolva os seguintes problemas:

1. **Resolução de um problema de validação.**
   Determinar a solução de

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) = y_2 \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 + y_2 - x^2 \\ y_1(0.0) = 1.0 \\ y_2(0.0) = 0.0 \end{cases}$$

   em $D = [0, 1]$.
   Obs: Estou chamando este problema de "validação" pois para este problema a solução exata será fornecida (na próxima seção) e servirá para você fazer uma verificação/validação do seu código. Lembrando que com esta verificação não se pode afirmar que o código está correto mas serve como um teste.

2. **Resolução do problema 2**
   Determinar a solução de

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) = y_1 + y_2 + 3x \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0.0) = 1.0 \\ y_2(0.0) = -1.0 \end{cases}$$

   em $D = [0, 1]$.

3. **Resolução de circuito RLC em paralelo.**
   Seja um sistema RLC em paralelo, com a configuração abaixo:

Vide figura em anexo.

onde I_1 e I_2 são as correntes (medidas em ampéres) observadas no circuito da esquerda e direita, respectivamente.
V é a tensão da fonte de alimentação e vale $V = 12$ Volts.
R_1 e R_2 são as resistências (medidas em Ohms) e valem $R_1 = 4$ e $R_2 = 6$
L é a indutância do indutor (medida em Henrys) e vale $L = 1$
C é a capacitância do capacitor (medida em Farad) e vale $C = 0.25$.

Utilizando a lei da tensão de Kirchoff, é possível descrever as correntes $I_1(t)$ e $I_2(t)$ via o seguinte modelo matemático:

$$\begin{cases} I_1' = 12 - 4I_1 + 4I_2 \\ I_2' = 4.8 - 1.6I_1 + 1.2I_2 \end{cases}$$

Supondo que todas as cargas e correntes são nulas quando o *switch* é fechado no instante $t = 0$, obter os valores de $I_1(t)$ e $I_2(t)$ para t em $I = [0, t_{final}]$.

5 Menu de entrada e valores de saída

Seu programa deve exibir, na tela, um menu para o usuário, similar ao mostrado abaixo:
Digite uma opção:
1 - Resolver o problema 1 (o exemplo da validação).
2 - Resolver o problema 2.
3 - Resolver o problema do circuito elétrico.
0 - Sair
Escolha:

Após a escolha da opção, o usuário deve fornecer os dados necessários para a resolução do problema (ou seja, a, b, y_{1a}, y_{2a} e m). Fornecidos os dados de entrada, o seu código deve exibir, na tela, a solução numérica do problema escolhido, com a partição estabelecida, incluindo o ponto $x = a$, isto é, para cada $x(i)$ deve se exibir os valores de $y_1(i)$ e $y_2(i)$.
Por exemplo:
Suponha um domínio $D = [1.0, 2.0]$ com $m = 2$ subdivisões e valores fictícios para y_1 e y_2, A saída seria:

```
x= 1.0      y1 = 4.0      y2 = -0.7
x= 1.5      y1 = 3.85     y2 = -0.6
x= 2.0      y1 = 3.73     y2 = -0.5
```

O formato de saída fica a seu critério mas o código deve ter como saída os valores de $y1$ e $y2$ para todos os pontos da partição.

Além disso, com os valores de $y1$ e $y2$, deve-se fazer o gráfico das duas funções, usando o pacote que preferir, podendo, inclusive, usar o comando "plot" do octave.

6 Execuções

1. Determinar a solução do problema de validação, dado abaixo

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) = y_2 \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 + y_2 - x^2 \\ y_1(0.0) = 1.0 \\ y_2(0.0) = 0.0 \end{cases}$$

   em $D = [0.0, 1.0]$, com $m = 5$ e $m = 20$.

   Traçar, em um mesmo par de eixos cartesianos, a solução numérica y_1 obtida com $m = 5$ e a solução exata $y_1, exata$.
   Traçar, em um mesmo par de eixos cartesianos, a solução numérica y_2 obtida com $m = 5$ e a solução exata $y_2, exata$.
   As soluções esperadas (exatas) são:
   $y_{1,exata} = 0.25(e^{2x} + 2x^2 - 2x + 3)$
   $y_{2,exata} = y_1'$

2. Determinar a solução do problema 2, dado abaixo

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) = y_1 + y_2 + 3x \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0.0) = 1.0 \\ y_2(0.0) = -1.0 \end{cases}$$

   em $D = [0.0, 1.0]$ com $m = 20$. Traçar, em um par de eixos cartesianos, as soluções numéricas.

3. Resolução do circuito RLC

   Supondo que todas as cargas e correntes são nulas quando o *switch* é fechado (instante $t_0 = 0.0$), obter os valores de $I_1(t)$ e $I_2(t)$ para t em $I = [0.0, 6.0]$, com $m = 60$.

   Fazer o gráfico das correntes $I_1(t)$ e $I_2(t)$ para t em $I = [t_0 = 0, t_{final} = 6.0min]$.

7 Relatório

Além de me enviar os scripts, será preciso relatar os resultados obtidos. Para fazer este relatório, siga, aproximadamente, os seguintes passos:

1. Introdução: apresentar uma síntese do trabalho (o que se propõe, o que foi feito, objetivos gerais).

2. Método numérico: explicar a ideia do método numérico implementado.

3. Problemas tratados: 1) apresentar (mencionar) o problema da validação, mostrando a sua solução exata; 2) apresentar o problema 2; 3)apresentar o problema do circuito RLC

4. Resultados: apresentar, para cada uma das execuções descritas, as soluções e os gráficos solicitados.

8 Condições de entrega

8.1 Grupo:

Este trabalho deverá ser realizado em grupos de, no máximo, 3 alunos.
OBS: Escreva os nomes dos componentes no código principal do seu programa.