

Capítulo 1

1.

(a) $(P \ Q \ \vee \ P10.000)$

Essa concatenação não é uma fórmula.

(b) $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee \neg\neg R)$

Essa concatenação é uma fórmula.

(c) $\neg\neg P$

Essa concatenação é uma fórmula.

(d) $\forall Q$

Essa concatenação não é uma fórmula.

(e) $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow \neg R))$

Essa concatenação é uma fórmula.

Portanto, as fórmulas da Lógica Proposicional são as concatenações (b), (c) e (e).

2.

(a) Não, não existe fórmula sem símbolo de pontuação na Lógica Proposicional. A pontuação é essencial para indicar a estrutura e a organização das fórmulas, como a precedência dos conectivos e a separação entre proposições.

(b) O alfabeto da Lógica Proposicional possui cinco tipos de símbolos: proposições, conectivos lógicos, parênteses, colchetes e chaves. Os símbolos das proposições são letras maiúsculas, como p , q , r , s , etc. Os conectivos lógicos são: negação (\neg), conjunção (\wedge), disjunção (\vee), condicional (\rightarrow) e bicondicional (\leftrightarrow). Os símbolos dos parênteses são "(" e ")", dos colchetes são "[" e "]" e das chaves são "{" e "}".

(c) Não, não é possível ter uma fórmula da Lógica Proposicional com algum conectivo, mas sem símbolo de pontuação. Os conectivos lógicos precisam ser combinados com parênteses para indicar a precedência e a organização das proposições. Se não houver símbolos de pontuação, a fórmula seria ambígua e poderia ser interpretada de diferentes formas.

3.

(a) Comprimento: 11 símbolos.

Subfórmulas:

$(\neg\neg P \vee Q)$

$(P \rightarrow Q)$

$((\neg\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q))$

P

(b) Comprimento: 13 símbolos.

Subfórmulas:

$(Q \rightarrow R)$
 $(P \rightarrow R)$
 $((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$
 $(P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))))$
 $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

(c) Comprimento: 9 símbolos.

Subfórmulas:

$(P \rightarrow \neg P)$
 $(\neg P)$
 $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P)$
 $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$

(d) Comprimento: 5 símbolos.

Subfórmulas:

$(P \rightarrow \neg P)$
 $\neg(P \rightarrow \neg P)$

4.

(a) $(\neg\neg P \leftrightarrow \neg\neg\neg\neg P \wedge P)$

(b) $(\neg P \rightarrow Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q \leftrightarrow \neg\neg R \vee \neg P)$

(c) $P \vee Q \rightarrow P \rightarrow \neg Q$

5.

(a) É possível obter a fórmula da Lógica Proposicional: $(P \vee \neg Q) \rightarrow (R \leftrightarrow \neg R)$.

(b) É possível obter a fórmula da Lógica Proposicional: $Q \rightarrow (\neg P \wedge Q)$.

(c) É possível obter a fórmula da Lógica Proposicional: $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow Q$.

(d) Não é possível obter uma fórmula da Lógica Proposicional com essa concatenação de símbolos, pois a concatenação " $P\neg\neg R$ " não é correta. Para formar uma fórmula, é necessário usar um conectivo lógico para unir proposições, como $P \wedge \neg\neg R$.

6.

(a)

Exercício 3:

$((P \neg\neg Q \vee \leftrightarrow \rightarrow) \wedge P$

Notação polonesa:

$\wedge \leftrightarrow \vee \neg\neg P Q \rightarrow P$

Exercício 4:

(a) $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$

Notação polonesa: $\leftrightarrow \neg \neg P \wedge \neg \rightarrow \neg \neg \vee P Q \neg R \wedge P$

(b) $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg \neg R \vee \neg P))$

Notação polonesa: $\leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee Q R \leftrightarrow \leftrightarrow \wedge P Q \vee \neg \neg R \neg P$

(c) $((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$

Notação polonesa: $\rightarrow \vee P Q \rightarrow P \neg Q$

(b)

As sequências de símbolos que são fórmulas da Lógica Proposicional utilizando notação polonesa são:

$\vee \rightarrow P Q \leftrightarrow R \rightarrow \vee P Q \neg S$

Notação convencional: $((P \vee \neg Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \vee Q \neg S)$

$\rightarrow \neg P Q \vee \rightarrow P Q \rightarrow \neg R R$

Notação convencional: $(P \rightarrow (Q \leftrightarrow (P \vee Q))) \rightarrow (\neg R \rightarrow R)$

$\rightarrow \neg P \neg Q R \vee \vee P Q \vee \neg R \neg P$

Notação convencional: $(\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge R)) \vee ((P \vee Q) \vee (\neg R \wedge \neg P))$

$\leftrightarrow \neg P \vee Q R \leftrightarrow \wedge P Q \vee \neg \neg R \neg P$

Notação convencional: $((\neg P \vee Q) \rightarrow R) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee \neg \neg (R \wedge \neg P))$

7.

(a) Não é possível encontrar uma fórmula H, da Lógica Proposicional, escrita na notação convencional que corresponda a duas fórmulas diferentes escritas na notação polonesa. Isso ocorre porque a notação polonesa é uma notação unívoca, ou seja, a partir de uma sequência de símbolos na notação polonesa é possível determinar única e inequivocamente a fórmula correspondente, sem ambiguidade. Por outro lado, na notação convencional, a ordem dos símbolos pode levar a diferentes interpretações, o que impossibilita que uma mesma sequência de símbolos corresponda a duas fórmulas diferentes.

(b) Também não é possível encontrar uma fórmula H escrita na notação polonesa que corresponda a duas fórmulas diferentes da Lógica Proposicional escritas na notação convencional. Isso ocorre porque a notação polonesa é equivalente à notação convencional, ou seja, toda fórmula da Lógica Proposicional escrita em uma notação pode ser escrita na outra, e vice-versa, sem perda de informação. Dessa forma, se uma sequência de símbolos na notação polonesa corresponde a uma fórmula na notação convencional, não há outra fórmula da notação convencional que corresponda a essa sequência na notação polonesa.

8.

Respostas 5:

(a) $P \neg Q R \rightarrow \neg R \leftrightarrow$

- (b) $Q \rightarrow P \wedge Q \rightarrow$
- (c) $\neg P \vee Q \vee Q \leftrightarrow$
- (d) $\neg \neg P \vee Q \rightarrow \leftrightarrow P \vee \neg \neg R \wedge$

Respostas 6:

- (a) $\neg \neg P \vee Q \vee \leftrightarrow P \vee Q \rightarrow \leftrightarrow \wedge P \vee Q \rightarrow \leftrightarrow$
- (b) $P \vee \neg Q \vee \neg R \vee \leftrightarrow Q \rightarrow \wedge P \vee Q \rightarrow \neg R$
- (c) $P \vee \neg P \rightarrow \leftrightarrow \neg P \vee Q \vee \leftrightarrow$
- (d) $P \vee \neg \rightarrow \neg \neg Q \leftrightarrow \neg R \wedge \neg P \vee Q \rightarrow$

9.

A paridade do número de símbolos de pontuação em uma fórmula da Lógica Proposicional sempre será par. Isso ocorre porque cada símbolo de pontuação, como parênteses, vírgulas ou pontos, é utilizado em pares, um para abrir e outro para fechar uma subfórmula. Portanto, a quantidade total de símbolos de pontuação deve ser um número par.

10.

(a) A paridade de $\text{comp}[H]$ será sempre ímpar, pois a fórmula H não contém o conectivo \neg e, portanto, não há um número par de negações a serem aplicadas.

(b) A relação entre $\text{comp}[H]$ e o número de conectivos de H depende do tipo de conectivos presentes em H . Para os conectivos binários (ou seja, que possuem dois argumentos), como \wedge , \vee , \rightarrow e \leftrightarrow , cada vez que um desses conectivos é aplicado, o número de componentes da fórmula é reduzido em 1. Por exemplo, se H contém n conectivos binários, então $\text{comp}[H]$ será igual a $n + 1$.

Já para os conectivos unários, como \neg , cada vez que é aplicado, o número de componentes da fórmula é mantido ou aumentado em 1, dependendo de onde o conectivo é aplicado. Por exemplo, se H contém m negações, então $\text{comp}[H]$ será igual a $2m + 1$ se a negação é aplicada no começo da fórmula, ou $\text{comp}[H]$ será igual a $2m + 2$ se a negação é aplicada dentro da fórmula.

Portanto, para fórmulas sem o conectivo \neg , o número de componentes da fórmula será sempre um número ímpar, e o número de conectivos binários presentes em H pode ser calculado subtraindo-se 1 do número de componentes da fórmula e dividindo o resultado por 2.

Capítulo 2

1. a) true é um símbolo sintático, que pertence ao alfabeto da Lógica Proposicional e T é um símbolo semântico. c) \rightarrow é um conectivo, que pertence ao alfabeto da Lógica Proposicional e \Rightarrow é um símbolo da metalinguagem. Observe, portanto, que \Rightarrow não pertence à linguagem da Lógica Proposicional.

2. Sintaxe e semântica são duas noções fundamentais na lógica e em outras áreas da matemática. A sintaxe está relacionada à estrutura formal das fórmulas, ou seja, a maneira como os símbolos podem ser combinados de acordo com as regras da linguagem. Por exemplo, a sintaxe da lógica proposicional nos diz quais são os conectivos permitidos, como eles podem

ser combinados com as proposições e com outros conectivos, e como as fórmulas devem ser escritas.

Já a semântica se refere ao significado das fórmulas, ou seja, a maneira como as fórmulas se relacionam com a realidade que elas representam. Na lógica proposicional, a semântica está relacionada à atribuição de valores verdadeiro ou falso às proposições e à determinação do valor verdadeiro ou falso das fórmulas a partir desses valores.

Assim, a diferença entre sintaxe e semântica é fundamental, pois a sintaxe diz respeito à maneira como as fórmulas são escritas, enquanto a semântica está relacionada ao significado das fórmulas e à sua interpretação. Embora a sintaxe seja importante para garantir que as fórmulas sejam escritas de maneira consistente e coerente, é a semântica que permite que as fórmulas sejam utilizadas para representar e raciocinar sobre a realidade.

4. a) Não temos a possibilidade: $I[P] = T$ e $I[Q] = F$. b) $I[Q] = T$ c) $I[H] = T$ d) Nada podemos concluir a respeito de $I[Q]$? e) $I[H] = F$

5. a) $I[(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)] = T$ e nada podemos concluir a respeito de $J[Q]$ e $J[R]$.

6. a) $I[(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)] = T$ b) $I[(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)] = T$ c) Nada se pode concluir a respeito de $I[(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)]$

7.

Supondo $I[P \leftrightarrow Q] = T$:

(a) $I[\neg P \wedge Q] = T \wedge T = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $\neg P \wedge Q$ é verdadeira sob a interpretação I.

(b) $I[P \vee \neg Q] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $P \vee \neg Q$ é verdadeira sob a interpretação I.

(c) $I[Q \rightarrow P] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $Q \rightarrow P$ é verdadeira sob a interpretação I.

(d) $I[(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)$ é verdadeira sob a interpretação I.

(e) $I[(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)$ é verdadeira sob a interpretação I.

Supondo $I[P \leftrightarrow Q] = F$:

(a) $I[\neg P \wedge Q] = F \wedge T = F$. Portanto, sabemos que a fórmula $\neg P \wedge Q$ é falsa sob a interpretação I.

(b) $I[P \vee \neg Q] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $P \vee \neg Q$ é verdadeira sob a interpretação I.

(c) $I[Q \rightarrow P] = F$. Portanto, sabemos que a fórmula $Q \rightarrow P$ é falsa sob a interpretação I.

(d) $I[(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)$ é verdadeira sob a interpretação I.

(e) $I[(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)] = T$. Portanto, sabemos que a fórmula $(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)$ é verdadeira sob a interpretação I.

8. a) $I[H] = F$ b) $I[H] = T$

9.

A afirmação é verdadeira. Cada linha da tabela-verdade corresponde a uma combinação de valores verdade para as proposições que ocorrem em H , e existem infinitas interpretações possíveis para essas proposições. Por exemplo, se H é uma fórmula que contém proposições P e Q , existem infinitas interpretações possíveis para P e Q , como por exemplo $P = \text{"hoje é terça-feira"}$ e $Q = \text{"chove"}$. Para cada combinação de valores verdade para P e Q , teremos uma linha na tabela-verdade correspondente. Portanto, cada linha da tabela-verdade representa uma interpretação diferente para H .

10.

(a) P : José virá à festa, Q : Maria não gostará da festa.

$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

(b) P : a novela será exibida, Q : o programa político será exibido.

$\neg Q \rightarrow P$

(c) P : vai chover, Q : irei para casa, R : ficarei no escritório.

$P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow R$

(d) P : Maria é bonita, Q : Maria é inteligente, R : Maria é sensível, S : Rodrigo ama Maria, T : Rodrigo é feliz.

$(P \wedge Q \wedge R \wedge S) \rightarrow T$

(e) P : sr. Oscar é feliz, Q : sra. Oscar é infeliz.

$(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q)$

(f) P : Maurício virá à festa, Q : Kátia não virá à festa, R : Kátia ficará infeliz.

$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$

12.

(a) Não considera elementos internos da sentença, pois a expressão "Possivelmente" não pode ser representada diretamente na Lógica Proposicional. Podemos considerar uma proposição auxiliar como $P = \text{"Irei ao cinema"}$, e então representar como "Possivelmente P " utilizando um conectivo modal, por exemplo: $\Diamond P$ (lê-se "Possivelmente P ").

(b) Não considera elementos internos da sentença, pois a mudança de estado físico do sujeito não pode ser representada diretamente na Lógica Proposicional. Podemos considerar uma proposição auxiliar como $P = \text{"Eu sou gordo"}$ e outra como $Q = \text{"Eu sou magro"}$, e então representar como $P \rightarrow Q$ (lê-se "Se eu sou gordo, então sou magro").

(c) Não considera elementos internos da sentença, pois a sentença se refere a uma propriedade de um indivíduo em particular, e não a uma proposição geral. Podemos considerar uma proposição auxiliar como $P = \text{"Existe um aluno no curso de Ciência da Computação que é admirado por todos"}$, e representar como P .

(d) Não considera elementos internos da sentença, pois a sentença se refere a uma propriedade de um indivíduo em particular, e não a uma proposição geral. Podemos considerar uma proposição auxiliar como $P =$ "Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega", e representar como P .

(e) Não considera elementos internos da sentença, pois a sentença se refere a uma propriedade de um grupo de indivíduos, e não a uma proposição geral. Podemos considerar uma proposição auxiliar como $P =$ "Existe um aluno de Ciência da Computação que é detestado por seus colegas", e representar como P .

(f) Não considera elementos internos da sentença, pois a sentença se refere a uma propriedade de um grupo de indivíduos, e não a uma proposição geral. Podemos considerar uma proposição auxiliar como $P =$ "Existe pelo menos um político desonesto", e representar como $\Diamond P$.

(g) Podemos considerar duas proposições auxiliares, $P =$ "Irei ao cinema" e $Q =$ "Irei ao teatro", e representar como $P \wedge Q$ (lê-se "Eu irei ao cinema e irei ao teatro").

(h) Não considera elementos internos da sentença, pois a expressão "Quase todo" não pode ser representada diretamente na Lógica Proposicional. Podemos considerar uma proposição auxiliar como $P =$ "Um grande número de políticos é desonesto", e então representar como $\Box P$ (lê-se "Necessariamente P ").

(i) Podemos considerar duas proposições auxiliares, $P =$ "Adalton sempre foi amigo de João Augusto" e $Q =$ "Hoje é um novo dia", e representar como $P \wedge Q$ (lê-se "Adalton sempre foi amigo de João Augusto e hoje é um novo dia").

(j) Podemos considerar uma proposição auxiliar como $P =$ "Existe uma regra que não tem exceção", e representar como $\neg P$ (lê-se "Não é o caso que existe uma regra que não tem exceção").

(k) Não considera elementos internos da sentença, pois a expressão "Quase todo" não pode ser representada diretamente.