

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA I

(Ed. revisada y aumentada)

Alfonso Romero Sarabia

**ÁLGEBRA LINEAL
Y
GEOMETRÍA I**

(Ed. revisada y aumentada)

Alfonso Romero Sarabia

Editado por: Editorial La Madraza
Cno. Bajo S/n. Telf.: 55 20 85
18100 Armilla (Granada)

Impreso por: Copistería La Gioconda
Melchor Almagro, 16
Granada

Depósito Legal - GR-3-1986

A Ana María,
Alfonso Eduardo y
Diego Jesús.

"Se riguroso en tu percepción
y no confundas la matemática
con aquellos que te la muestran.
Ella nunca te defraudará".
Dijo el viejo sabio heleno.

La naturaleza tiene sus leyes;
los científicos le imponemos las
nuestras;
unas y otras coinciden a veces.

Si no tienes un conocimiento
claro y profundo de los conceptos,
¿cómo podrás argumentar con ellos?

P R E F A C I O

Este libro es el primero de dos que sobre fundamentos de Algebra Lineal y Geometría elemental me he propuesto escribir. En el se recoge buena parte del contenido que he explicado, durante varios años, en las asignaturas Algebra Lineal y Geometría y Geometría I, de primer curso de C. Fisicas y C. Matemáticas, respectivamente.

Notará el lector que se ha puesto especial cuidado en la introducción de cada lección, en particular de las definiciones que cada entidad lógica encierra. A veces, se dan ejemplos de una cierta estructura sin haber sido esta definida. No se trata de una sinrazón lógica, mas al contrario, se ha intentado que el lector, tras varios ejemplos introductorios, intuya que de común tienen estos y lleve así a ver natural la definición abstracta de que se trate. Esto tiene a mi entender una doble ventaja. Por un lado, los llamados alumnos experimentales captan mucho mejor los conceptos abstractos desde un proceso inductivo (al fin y al cabo ¡así se hace la Ciencia!), por otro, los alumnos no experimentales (fundamentalmente matemáticos) se desprenden un poco de ese hermetismo y de esa rigurosidad mal entendida que les hace pensar, por ejemplo, "hay que dar primero la definición y justificarla (algunos ni eso) despues". ¿ Cual es el motivo de esta presentación del libro ? Sencillamente, la experiencia me hace pensar que ese "no se hacer problemas aunque me se muy bien la teoría" y similares, tienen como trasfondo el que no se conocen profundamente los conceptos, y por tanto no se saben manejar, mucho menos aplicarlos en problemas no inmediatos. Tambien observará el lector que cada lección tiene un desarrollo

similar desde un punto de vista lógico. Creo que esta sistematización de la presentación de este libro puede ayudar al estudio y a la comprensión global de cada unidad temática. Por ejemplo, el lector capta que el concepto de isomorfismo de grupos, tiene uno similar en la lección de anillos, otro en la de espacios vectoriales, otro en la de espacios vectoriales métricos, etc. Es decir, el ve que tras definir una cierta estructura matemática, hace falta una "herramienta apropiada" que le permita discernir entre dos de tales estructuras.

Las lecciones están escritas de forma tal que los conceptos no lleguen "de sopetón" al lector, ni los teoremas aparezcan por arte de magia. Por eso, no debe extrañar que, a lo largo del texto, se cuestione continuamente al lector mediante preguntas que aparecen de manera natural, ejemplos, interrelaciones, etc. También se ha procurado dar alguna aplicación tras cada resultado demostrado; otras menos inmediatas, donde el lector puede poner de manifiesto su creatividad, están recogidas al final de cada lección mediante una serie de problemas seleccionados. Algunos llevan indicaciones o llamadas para que el lector los relacione con alguna parte del texto donde pueda consultar.

Finalmente quisiera dar las gracias a todos aquellos alumnos míos que mediante sus preguntas en clase y su interés por el contenido del texto me han hecho meditar sobre cuestiones aisladas pero importantes, y desde luego mejorar el manuscrito primitivo. De ellos es también un poco este libro.

El Autor.

Granada, Noviembre de
1.985.

NOTA A LA EDICION REVISADA

La presente versión del libro contiene algunas mejoras y correcciones, muchas de ellas tipográficas, de la anterior. Se ha ampliado el número de problemas hasta 234. Unos dan versiones alternativas o generalizaciones de algún resultado de la lección correspondiente, otros completan a los ya existentes en la primera edición y se dedican a algún aspecto no contemplado en aquellos. Tambien se incluye ahora un apéndice sobre la Cinemática de la Relatividad Especial. En este las ecuaciones de Lorentz se obtienen como ecuaciones de cambio de base, entre cierto tipo de bases de un espacio vectorial métrico concreto, y se explican brevemente algunas notas históricas y varias consecuencias básicas en Relatividad Especial.

Agradezco a mi alumno Antonio López Montes que me dejara sus apuntes de clase, los cuales me han sido de mucha utilidad; a mi colega Francisco J. López Fernández su interés por el contenido del libro, fruto del cual fueron algunas conversaciones con el autor, de las que salieron varias mejoras y correcciones a puntos concretos del anterior texto; a Miguel A. Palacios Iniesta sus observaciones sobre el apéndice, sobre todo desde un punto de vista físico.

El Autor.

Granada, verano de 1.988.

CONTENIDO

Repaso de conceptos fundamentales.

Preliminares.....	1
Relaciones de equivalencia. Conjunto cociente.....	2
Aplicaciones entre conjuntos.....	6
Problemas.....	12

Lección 1^a : Grupos.

Algunos ejemplos introductorios.....	15
Definición de Grupo. Primeras propiedades.....	19
Subgrupos de un grupo.....	23
Grupos cocientes.....	29
Homomorfismos de grupos.....	33
Problemas.....	42

Lección 2^a : Anillos y Cuerpos.

Algunos ejemplos introductorios.....	47
Definición de Anillo. Primeras propiedades.....	49
Subanillos e Ideales. Anillos cocientes.....	52
Homomorfismos de anillos.....	57
Anillos de integridad. Cuerpos.....	63
Problemas.....	67

Lección 3^a : Espacios vectoriales.

Introducción.....	71
Definición de espacio vectorial. Primeras propiedades.....	74
Subespacios vectoriales: suma, intersección. Cocientes....	77
Sistemas de generadores. Dependencia e independencia lineal. Bases. Dimensión.....	85

Cambio de base.....	100
Problemas.....	102
Lección 4^a : Aplicaciones Lineales. Matrices.	
Introducción. Primeras propiedades. Núcleo e Imagen.	
Nulidad y Rango.....	107
Teoremas de isomorfía. Consecuencias sobre dimensiones.....	113
Expresión analítica de una aplicación lineal: matrices.	
Operaciones con aplicaciones lineales y con matrices.....	121
Diversas matrices de una aplicación lineal: matrices equivalentes. Rango de una matriz. Caso particular de un endomorfismo: matrices semejantes.....	143
Problemas.....	152
Lección 5^a : Espacio Dual.	
Introducción. Espacio dual. Base dual.....	158
Cambio de base en el espacio dual.....	162
Teorema de Reflexividad: aplicaciones. Anuladores.....	163
Trasposición de aplicaciones lineales y matrices.	
Rango de la traspuesta de una matriz.....	167
Problemas.....	172
Lección 6^a : Tensores.	
Introducción. Concepto de tensor.....	175
Operaciones con tensores: suma, producto por un escalar, producto tensorial. Relación con los endomorfismos. Base del espacio vectorial de tensores.....	179
Cambio de base. Definición de tensor por coordenadas.....	192
Otros procedimientos para construir tensores: contracción, producto contraido.....	199
Estudio particular de tensores covariantes: tensores simétricos, alternados y hemisimétricos. Matrices simétricas y antisimétricas.....	205

Producto exterior de tensores hemisimétricos. Dimensión del espacio vectorial de tensores hemisimétricos: aplicaciones...	217
Problemas.....	229
Lección 7^a : Determinantes.	
Introducción. Determinante de un endomorfismo.....	234
Determinante de una matriz cuadrada.....	239
Cálculo explícito de la matriz inversa de una matriz regular.	
Cálculo del rango por determinantes: Teorema del Rango.....	249
Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché-Frobenius: aplicaciones.....	252
Orientación en un espacio vectorial real.....	262
Problemas.....	266
Lección 8^a : Diagonalización.	
Introducción.....	271
Valores y vectores propios de un endomorfismo y una matriz cuadrada. Conceptos de endomorfismo diagonalizable y de matriz cuadrada diagonalizable.....	272
Polinomio característico de un endomorfismo y de una matriz cuadrada. El teorema fundamental de diagonalización.....	276
Algunas aplicaciones de la diagonalización.....	285
Problemas.....	287
Lección 9^a : Espacios vectoriales métricos.	
Introducción. Métricas. Métricas euclídeas. Ejemplos.....	292
Formas cuadráticas. Métricas y endomorfismos.....	296
Relación de perpendicularidad. Diversos tipos de métricas....	300
Norma de un vector de un espacio vectorial métrico euclídeo.	
Propiedades. Desigualdad de Schwarz. Ángulo entre dos vectores.....	302
Bases ortonormales. Cambio de base entre bases ortonormales. Matrices ortogonales.....	307

Isometrías.....	314
Orientación en un espacio vectorial euclídeo.	
Angulo orientado. Producto vectorial.....	318
Introducción de una métrica en el dual. Isomorfismos inducidos entre espacios de tensores.....	323
Suplemento ortogonal. Proyección ortogonal.....	331
Endomorfismo adjunto de un endomorfismo. Endomorfismos autoadjuntos: su diagonalización. Consecuencias sobre métricas, formas cuadráticas y matrices simétricas.	
El teorema de Sylvester.....	336
Clasificación de las isometrías de un espacio vectorial euclídeo.....	351
Problemas.....	360
Apéndice : Geometría y Relatividad especial.....	366
Bibliografía.....	378
Indice alfabético.....	379
Lista de símbolos.....	389

REPASO DE CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Preliminares.-

Entenderemos por conjunto toda colección de objetos. Esta definición no es muy precisa, pero, para nuestras necesidades la consideramos suficiente. Un conjunto X puede ser dado por extensión (enumerando todos y cada uno de los objetos que lo componen) y por comprensión (dando una propiedad que identifique de forma precisa cada objeto de X). Cuando x es un objeto de X diremos que es un elemento suyo y pondremos $x \in X$. Dos conjuntos X e Y son iguales cuando tienen los mismos elementos, es decir $x \in X$ si y sólo si $x \in Y$. Dados dos conjuntos A y X , diremos que A es subconjunto de X o que A está contenido en X , $A \subset X$, si todo elemento de A es también elemento de X , es decir $A \subset X$ si y sólo si ($x \in A$ entonces $x \in X$). En lo que sigue representaremos "si y sólo si" por \Leftrightarrow y "entonces" por \Rightarrow como es habitual. Un conjunto X tiene dos tipos de subconjuntos: los propios, que son $A \subset X$, A con algún elemento pero no con todos los de X ($A \neq X$), y los improperios, que son el mismo X y el subconjunto de X que "no tiene ningún elemento" \emptyset (! el vacío!). Este último se introduce por razones lógicas que pondremos de manifiesto más adelante. Es fácil observar que $X = Y$ (X e Y son iguales) $\Leftrightarrow (X \subset Y \text{ y } Y \subset X)$. Al conjunto cuyos elementos son precisamente los subconjuntos de X se le llama el conjunto de las partes de X y se le representa por $\mathcal{P}(X)$. Obsérvese que $A \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X$.

Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se define su intersección $A \cap B$, su unión $A \cup B$ y el complementario en X de A , $X - A$, por

$$A \cap B = \{x \in X / x \in A \text{ y } x \in B\}, A \cup B = \{x \in X / x \in A \text{ o } x \in B\}, X - A = \{x \in X / x \notin A\}.$$

A veces, el complementario de A en X, $X - A$, se lee X "menos" A. Nótese que $A \cap B \in \mathcal{P}(X)$ ya que cuando A y B no tienen ningún elemento común es $A \cap B = \emptyset$. Tambien $A \cup B$ y $X - A$ son subconjuntos de X.

Dados dos conjuntos X e Y definimos su producto cartesiano $X \times Y$ por

$$X \times Y = \{(x, y) / x \in X, y \in Y\}.$$

A cada elemento de $X \times Y$ se le llama par ordenado. Si (x, y) es un par ordenado, se dirá que x es la primera componente del par e y la segunda componente. Esta definición tambien se puede pensar para el caso $X = Y$, así tenemos

$$X \times X = \{(x, y) / x, y \in X\}$$

donde hay que entender que cabe la posibilidad $x = y$; es decir, para cada $x \in X$ tenemos $(x, x) \in X \times X$. No hay que confundir el par ordenado (x, y) , con $x, y \in X$, con el subconjunto $\{x, y\}$ de X.

Relaciones de equivalencia. Conjunto cociente.-

Vamos primeramente a definir lo que es una relación binaria en un conjunto. Dado un conjunto X hacemos $X \times X$. Entonces, decimos que una relación binaria en X es un subconjunto R de $X \times X$, $R \neq \emptyset$, $R \subset X \times X$. Cuando un par (x, y) de $X \times X$ pertenezca a R diremos que x está relacionado con y según R y escribiremos xRy .

Una relación binaria R en X puede verificar alguna de las propiedades siguientes:

1) Propiedad Reflexiva:

$$\forall x \in X \quad (x, x) \in R \quad \text{o} \quad \forall x \in X : xRx,$$

es decir, todo elemento está relacionado consigo mismo.

2) Propiedad Simétrica.-

(Si $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$) o (Si $xRy \Rightarrow yRx$).

3) Propiedad Transitiva.-

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } (x,y) \in R \\ \text{y } (y,z) \in R \end{array} \right\} \Rightarrow (x,z) \in R \quad \text{o} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Si } xRy \\ \text{e } yRz \end{array} \right\} \Rightarrow xRz .$$

4) Propiedad Antisimétrica.-

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } (x,y) \in R \\ \text{y } (y,x) \in R \end{array} \right\} \Rightarrow x = y \quad \text{o} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Si } xRy \\ \text{e } yRx \end{array} \right\} \Rightarrow x = y .$$

Uno piensa que las propiedades 2) y 4) debieran ser incompatibles. Es decir, que de verificarse una de ellas necesariamente la otra no se verifica. Consideremos el conjunto $X = \{1,2,3\}$ y en él la relación binaria dada por

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

entonces R es simétrica y antisimétrica a la vez.

*Una relación binaria que satisfaga las tres primeras propiedades se dice de equivalencia. Si satisface 1), 3) y 4) se llama de orden (parcial). Una relación de orden en la que dos elementos cualesquiera siempre estén relacionados se llama relación de orden total. Nosotros sólo nos vamos a ocupar de las relaciones de equivalencia.

En el conjunto de los enteros naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ la relación "ser menor o igual" es de orden total. La relación de igualdad es de equivalencia. En el plano de la Geometría elemental la relación de equipolencia (dos vectores son equipolentes cuando tienen la misma dirección, sentido y longitud) es una relación de equivalencia.

Sea X un conjunto y \sim una relación de equivalencia en X (la representaremos por \sim para hacer mención que es de este tipo). Para cada $x \in X$ definimos la clase de equivalencia de representante x por

$$C(x) = \{y \in X / y \sim x\},$$

es decir, $C(x)$ es el subconjunto de X formado por todos los elementos relacionados con x . Veamos algunas propiedades de las clases de equivalencia:

Proposición - Si $y \in C(x)$ entonces $C(y) = C(x)$.

Demostración. En efecto, sea $z \in C(y) \Rightarrow z \sim y$, como por hipótesis $y \in C(x)$ ha de ser $y \sim x$ y por la propiedad transitiva $z \sim x$ con lo que $z \in C(x)$. Así hemos probado que $C(y) \subset C(x)$.

Recíprocamente, dado $z \in C(x)$ es $z \sim x$, como $y \sim x$ por ser $y \in C(x)$, por la propiedad simétrica $x \sim y$. Por lo tanto $z \sim y$, lo que prueba $z \in C(y)$. Así $C(x) \subset C(y)$. Uniendo ambas partes $C(x) = C(y)$.

Este resultado nos dice que en cada clase de equivalencia cualquiera de sus elementos puede servir de representante. Es decir, de todos los vectores que son equipolentes a uno dado en el plano, cualquiera de ellos (junto con la relación de equipolencia) nos determina al resto.

Proposición 0.2 - i) $\forall x \in X : x \in C(x)$.

ii) Para $x, y \in X$, si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ entonces $C(x) = C(y)$.

Demostración. i) está claro por la propiedad reflexiva. Supongamos que existe $z \in C(x) \cap C(y)$, entonces $z \sim x$, $z \sim y$ y por lo tanto $x \sim y$. Aplicando la Proposición 0.1 tenemos $C(x) = C(y)$.

Este resultado afirma, en primer lugar, que no hay ninguna clase de equivalencia vacía ($= \emptyset$), y, en segundo, que dos clases de equivalencia distintas (es decir de representantes no relacionados) no pueden tener ningún elemento en común.

Definición 0.3.- Dado un conjunto X una partición suya es una colección de subconjuntos ^{no vacíos} de X disjuntos dos a dos y cuya unión es todo X .

Observemos que una relación de equivalencia en un conjunto nos induce una partición en dicho conjunto por la Proposición 0.2. Recíprocamente, supongamos dada una partición en X , entonces existe una única relación de equivalencia en X tal que, precisamente, las clases de equivalencia son los subconjuntos que integran la partición. En concreto, sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ la mencionada partición. Decimos que dos elementos de X están relacionados si pertenecen al mismo C de \mathcal{C} y que cada elemento de X está relacionado con él mismo. Así, definimos en X la única relación de equivalencia con la propiedad antes enunciada (compruébese los detalles). Es por esto que podemos hablar indistintamente de una relación de equivalencia en un conjunto o de una partición en dicho conjunto.

Definición 0.4.- Dado un conjunto X y en él una relación de equivalencia \sim definimos el conjunto cociente X sobre \sim , X/\sim , como el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de \sim .

Si X es el conjunto de todos los vectores del plano y \sim la relación de equipotencia, entonces X/\sim tiene por elementos las clases de vectores equipotentes. A cada clase se le da el nombre de "vector libre".

Si X es el conjunto de los puntos del plano y \sim es la relación de equivalencia "distar lo mismo de un punto fijo" entonces X/\sim tiene por elementos circunferencias todas ellas con centro en ese punto fijo.

Nótese que siendo X un conjunto y \sim una relación de equivalencia en X , La clase de equivalencia $C(x)$ es a la vez un subconjunto de X y un elemento de X/\sim .

Aplicaciones entre conjuntos.-

Definición 0.5.- Dados dos conjuntos X e Y una aplicación es una forma de hacerle corresponder a cada elemento de X un único elemento de Y . Una aplicación de X en Y se representa por $f : X \rightarrow Y$ y ponemos $x \mapsto y$ o bien $f(x) = y$ si y es el único elemento de Y que corresponde a x mediante f . A $f(x)$ se le suele llamar la imagen mediante f de x .

Se entiende que en esta definición puede ocurrir $X = Y$.

Si \mathbb{N} y \mathbb{Z} son respectivamente los conjuntos de números naturales y enteros, entonces $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = -x$ es una aplicación pero $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $h(x) = \frac{1}{2}x$ no lo es (explicar).

Definición 0.6.- Dada una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se define su grafo o gráfico $G(f)$ como

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y / y = f(x)\} = \{(x, f(x)) / x \in X\}.$$

Según esta definición $G(f)$ es un subconjunto de $X \times Y$. Pero, ¿ todo subconjunto G de $X \times Y$ es el grafo de una aplicación f de X en Y ? La respuesta a esta pregunta es que, en general, no todo subconjunto de $X \times Y$ es el grafo de una aplicación. Para ello uno

se da cuenta que $G(f)$ verifica:

$$\forall x \in X \exists ! y \in Y \text{ con } (x, y) \in G(f)$$

Recíprocamente, dado un subconjunto G de $X \times Y$ que verifique esta propiedad existe una única aplicación $f : X \rightarrow Y$ tal que $G(f) = G$. Como consecuencia podemos dar una aplicación por un subconjunto G de $X \times Y$ tal que

$$\forall x \in X \exists ! y \in Y \text{ con } (x, y) \in G.$$

Dada una aplicación $f : X \rightarrow Y$, al conjunto X se le llama el dominio (de definición) de f , al conjunto Y el codominio de f . Al subconjunto de elementos de Y que son imágenes de alguno de X se le llama la imagen de f y se le representa por $\text{Im } f$, es decir

$$\text{Im } f = \{y \in Y / \exists x \in X : f(x) = y\} = \{f(x) / x \in X\}.$$

Diremos que dos aplicaciones son iguales si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y asocian el mismo elemento del codominio a uno mismo del dominio.

Las aplicaciones $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$, y $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(x) = x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$, son distintas.

Definición 0.7.- Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación y $A \subset X$, entonces se define la imagen (directa) de A , $f_*(A)$, como

$$f_*(A) = \{f(x) / x \in A\}.$$

Si $B \subset Y$, se define la imagen recíproca de B , $f^*(B)$, como

$$f^*(B) = \{x \in X / f(x) \in B\}.$$

Según esta definición tenemos $f_*(A) \subset Y$ y $f^*(B) \subset X$. Además ocurre que $f_*(X) = \text{Im } f$ y $f^*(Y) = X$. Obsérvese que cada aplicación

$f : X \rightarrow Y$ induce aplicaciones

$$f_* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y) \quad f^* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X).$$

Definición 0.8.- Dados conjuntos X , Y y Z y aplicaciones

$f : X \rightarrow Y$ y $h : Y \rightarrow Z$ podemos definir una nueva aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto h(f(x)) \end{aligned}$$

que se llama la composición (o compuesta) de f y h , y se representa por $h \circ f$ (primero se aplica f y luego h).

Por ejemplo, si $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ y

$h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $h(y) = 2y - 3 \quad \forall y \in \mathbb{Z}$, entonces $h \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ está dada por $(h \circ f)(x) = 2x^2 - 3$.

La composición de aplicaciones no es "conmutativa" en el sentido de que aunque se pueda hacer tanto $h \circ f$ como $f \circ h$ (nótese que para que se pueda efectuar $h \circ f$ ha de ser el codominio de f igual al dominio de h) en general $h \circ f \neq f \circ h$ como lo prueba el ejemplo precedente.

Proposición 0.9.- Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow W$ tres aplicaciones, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Demostración En efecto, ambos miembros de esta igualdad son aplicaciones de X en W , veamos que toman el mismo valor en un elemento genérico $x \in X$.

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

La Proposición 0.9 se suele nombrar diciendo que la composición de aplicaciones es "asociativa". Tal resultado lo que nos dice es que para componer tres aplicaciones, componemos dos de ellas y luego la obtenida (en el orden correspondiente) con la otra aplicación.

Hay tres tipos importantes de aplicaciones:

Definición 0.10.- Diremos que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva si elementos distintos de X tienen imágenes distintas en Y . Es decir, si $x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. O equivalentemente si $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$.

Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es sobreyectiva si todo elemento de Y es imagen de alguno de X . Es decir, si $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$. O lo que es lo mismo si $\text{Im } f = Y$.

Diremos que una aplicación es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. De lo anterior es claro que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva si y sólo si

$$\forall y \in Y \quad \exists ! x \in X \quad f(x) = y.$$

La aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (donde \mathbb{R} es el conjunto de los números reales) $f(x) = 2x + 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ es inyectiva y la aplicación $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ no lo es. La aplicación de inclusión de un subconjunto A de X en X , $i : A \rightarrow X, i(x) = x \quad \forall x \in A$ es siempre inyectiva. Además es sobreyectiva si y sólo si $A = X$. En este caso tenemos la aplicación identidad en X , $i_X : X \rightarrow X$ $i_X(x) = x \quad \forall x \in X$, que claramente es biyectiva. La aplicación f de arriba es también sobreyectiva pero g no lo es. Como último ejemplo, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la aplicación de \mathbb{R} en \mathbb{R} $x \mapsto ax + b$ es biyectiva (una de estas es f de arriba).

Definición 0.11.- Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación biyectiva.

Sea $y \in Y$. Como sabemos que $\exists! x \in X : f(x) = y$, el asignar a cada $y \in Y$ el único $x \in X$ tal que $f(x) = y$ nos define una aplicación de Y en X que llamaremos la inversa de f y representamos por f^{-1} . Es decir,

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X, \quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Nótese que f^{-1} que es una aplicación biyectiva como f , está determinada de forma única por f y además cumple

$$f \circ f^{-1} = 1_Y, \quad f^{-1} \circ f = 1_X.$$

¿ Caracterizan estas dos propiedades a f^{-1} ? La respuesta nos la da la siguiente

Proposición 0.12.- i) Sean X e Y dos conjuntos y sean

$$f : X \longrightarrow Y \quad y \quad g : Y \longrightarrow X$$

dos aplicaciones tales que

$$g \circ f = 1_X$$

entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

ii) Si además se tiene

$$f \circ g = 1_Y$$

entonces f y g son biyectivas y $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$.

Demostración. En efecto, supongamos $f(x) = f(x')$ entonces $g(f(x)) = g(f(x'))$ por ser g una aplicación, luego $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ es decir, $x = x'$. Así se prueba i). La afirmación ii) se obtiene cambiando los papeles en i) de f y g , y el hecho de ser $f^{-1} = g$ (g^{-1} se hace igual) resulta de la definición de f^{-1} . Sea $f^{-1}(y) = x$, entonces $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 1_X(x) = x = f^{-1}(y)$, y así se concluye.

Es claro que existen aplicaciones que no son ni inyectivas ni sobreyectivas, ni por supuesto biyectivas. Sin embargo veremos que toda aplicación se puede poner como composición de una inyectiva, una biyectiva y una sobreyectiva.

Proposición 0.13.- Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Se define en X la siguiente relación binaria

$$x, x' \in X, \quad x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Entonces \sim es una relación de equivalencia en X .

Si $p : X \longrightarrow X/\sim$ es la aplicación definida por $p(x) = C(x)$
 $\forall x \in X, b : X/\sim \longrightarrow \text{Im } f$ definida por $b(C(x)) = f(x)$ e $i : \text{Im } f \longrightarrow Y$
es la inclusión de $\text{Im } f$ en Y , se tiene

$$f = i \circ b \circ p$$

además p es sobreyectiva, b biyectiva e i inyectiva.

Se entiende que en el miembro derecho de la descomposición de f se han de componer primero dos de estas aplicaciones y luego el resultado con la restante. Por la Proposición 0.9 no es preciso poner paréntesis.

Demostración. Como $f(x) = f(x)$ es $x \sim x \quad \forall x \in X$. Si $x \sim y$ entonces $f(x) = f(y)$ y por lo tanto $y \sim x$. Por último, si $x \sim y$ e $y \sim z$, $f(x) = f(y) = f(z)$, con lo que $x \sim z$.

Es trivial que i es una aplicación inyectiva. p le hace corresponder a cada elemento de X su clase de equivalencia como elemento de X/\sim , por ello es una aplicación sobreyectiva.

b necesita de un razonamiento más profundo. En efecto, ni siquiera es claro que b sea una aplicación. Para esto, sean $C(x) = C(y)$ entonces $x \sim y$ por la Proposición 0.1, y por como se

define la relación \sim en X se tiene $f(x) = f(y)$, es decir $b(C(x)) = b(C(y))$. Así queda probado que b es una aplicación, que es inyectiva ya que $b(C(x)) = b(C(z)) \Rightarrow f(x) = f(z)$ y de aquí $x \sim z$. Utilizando ahora la Proposición 0.1 tenemos $C(x) = C(z)$. Para ver que es sobreyectiva, si $f(x) \in \text{Im } f$ entonces $b(C(x)) = f(x)$. Así ya hemos probado que b es una aplicación biyectiva. Finalmente es inmediato probar que $f = i_{\circ}b_{\circ}p$.

Corolario 0.14.- Si f es inyectiva entonces p es biyectiva.

Si f es sobreyectiva $i = 1_Y$ es biyectiva y si f es biyectiva p e' i son biyectivas.

PROBLEMAS

- 1.- Se considera en \mathbb{Z} la siguiente relación binaria $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = 3k$. Probar que \sim es una relación de equivalencia en \mathbb{Z} . ¿ En cuantas clases de equivalencia se descompone \mathbb{Z} ?.
- 2.- Decir cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son gráficos de aplicaciones y para los que lo sean decir de cual se trata.

$$G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 16\}, \quad G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = y^2\},$$

$$G_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 7x\}, \quad G_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x + y = 0\}.$$

- 3.- Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones. i) Supongamos que ambas son inyectivas (resp. sobreyectivas) ¿ podemos afirmar que $g \circ f$ es inyectiva (resp. sobreyectiva) ? ii) Supongamos que $g \circ f$ es inyectiva (resp. sobreyectiva) ¿ es f inyectiva (resp. g sobreyectiva) ? iii) Si $g \circ f$ es biyectiva, a partir de lo anterior ¿ que se puede decir de g y de f ?

4.- Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación. Demostrar que f es inyectiva si y sólo si cumple la siguiente propiedad

Si $g, h : X \rightarrow X$ son tales que $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.

Demostrar que f es sobreyectiva si y sólo si $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

5.- Sea A un subconjunto de X . Se consideran las aplicaciones

$$F : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \quad y \quad H : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

definidas por $F(B) = A \cap B$, $H(B) = A \cup B \quad \forall B \in \mathcal{P}(X)$. Determinar $\text{Im } F$, $\text{Im } H$, $F^*(\{A \cap B\})$, $H^*(\{A \cup B\})$ siendo $B \subset X$ fijo pero arbitrario.

6.- Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ dos aplicaciones biyectivas. Probar que $g \circ f$ tambien es biyectiva (ver problema nº 3) y que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

7.- El siguiente razonamiento es erroneo. Sea X un conjunto y sea \mathcal{R} una relación binaria en X simétrica y transitiva. Entonces si $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ por la condición de simetría y como $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x \Rightarrow x \mathcal{R} x \quad \forall x \in X$ por ser una relación transitiva. Así "parece" que hemos demostrado que \mathcal{R} tiene que ser tambien reflexiva. Esto no es cierto (búsquese un contraejemplo) pero ¿ donde está el error ?

8.- Sean X e Y dos conjuntos ^(*) y $X \times Y$ su producto cartesiano. Probar que las aplicaciones (llamadas proyecciones)

$$p : X \times Y \longrightarrow X$$

$$(x, y) \longmapsto x$$

$$q : X \times Y \longrightarrow Y$$

$$(x, y) \longmapsto y$$

son sobreyectivas. ¿ pueden ser alguna vez inyectivas ?

Obtener la descomposición canónica de la Proposición 0.13 para las aplicaciones p y q.

^(*) ambos no vacíos.

9.- Aplicar la Proposición 0.13 (descomposición canónica) a la aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}^*$, donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, dada por $f(x) = x^2 \forall x \in \mathbb{Z}$.

10.- Sean X e Y dos conjuntos, \sim y \sim' relaciones de equivalencia en X e Y respectivamente, y $p : X \longrightarrow X/\sim$, $p' : Y \longrightarrow Y/\sim'$ las proyecciones $p(x) = C(x) \quad \forall x \in X$, $p'(y) = C(y) \quad \forall y \in Y$. Diremos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es compatible con las relaciones \sim y \sim' si $x \sim x' \Rightarrow f(x) \sim' f(x')$. Demostrar que para cada aplicación $f : X \longrightarrow Y$ compatible con \sim y \sim' existe una única aplicación $\hat{f} : X/\sim \longrightarrow Y/\sim'$ tal que $\hat{f} \circ p = p' \circ f$.

Decir quien es \hat{f} cuando $X = Y =$ vectores de un plano, $\sim = \sim' =$ relación de equipotencia y $f(\overrightarrow{AB}) = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

11.- Sea V el conjunto de los polinomios de grado a lo sumo 2 con coeficientes en \mathbb{R} , es decir

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 / a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Se define $D : V \longrightarrow V$ por $D(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x$. Demostrar que D es una aplicación y que no es inyectiva. Sea también $E : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $E(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1 + a_2$ (valoración en $x = 1$). Probar que E es una aplicación sobreyectiva.

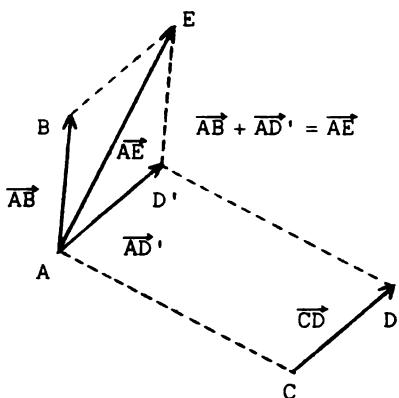
¿Es sobreyectiva $E \circ D$? Aplicar la descomposición canónica establecida en la Proposición 0.13 a D . Dar una interpretación a la aplicación biyectiva "b" que aparece en esta.

12.- Sean X e Y dos conjuntos finitos. Probar que $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ si y solo si existe una aplicación inyectiva $f : X \longrightarrow Y$. Probar que $\text{card}(X) > \text{card}(Y)$ si y solo si existe una aplicación sobreyectiva $f : X \longrightarrow Y$. ($\text{card}(X)$ es el número de elementos o cardinal de X).

LECCION 1^a: GRUPOS.

Algunos ejemplos introductorios.-

1) Sea X el conjunto de los vectores de un plano y sea \sim la relación de equipotencia en X (ver pag. 3). Consideremos el conjunto cociente $V = X/\sim = \{ C(\vec{AB}) / \vec{AB} \in X \}$ a cuyos elementos se les llama "vectores libres". Podemos definir una suma (de vectores libres) en V (¡pero no en X !) como sigue: Dados $\vec{v} = C(\vec{AB})$ y $\vec{w} = C(\vec{CD})$ elegimos en cada clase de equivalencia un representante por ejemplo \vec{AB} y \vec{CD} . Como, en general, no tienen porque tener el mismo origen estos dos vectores, es decir A y C no serán el mismo punto, no podremos sumar uno con otro utilizando la usual regla del paralelogramo. ¿Qué hacemos entonces? Traslademos \vec{CD}



"paralelamente" hasta hacer coincidir el origen C' del nuevo vector así obtenido $\vec{C'D'}$ con A ; es decir, nos estamos moviendo en la clase de equivalencia del vector \vec{CD} cogiendo un representante "apropiado". Ahora sumamos \vec{AB} y \vec{AD}' según la regla del paralelogramo y obtenemos $\vec{AB} + \vec{AD}'$. Entonces por definición es $\vec{v} + \vec{w} = C(\vec{AB} + \vec{AD}')$. Esta forma de definir una suma en V es correcta pues, por un lado, si cambiamos los papeles de \vec{AB} y \vec{CD} obtenemos un vector equipolente

con $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}'$ y, por otro, no importa el representante elegido en estas clases siempre obtenemos un vector equipolente con este, es decir, la misma clase $C(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}')$.

Obsérvese que del hecho de poder sumar vectores en X que tengan origen común y de cómo se define la relación de equipolencia podemos sumar cualesquiera dos vectores libres de V .

Esta suma tiene las siguientes propiedades:

- i) $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} \quad \forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in V$
- ii) $\exists \vec{0} \in V \quad (\vec{0} = C(\overrightarrow{AA}) \quad \forall A \in X) \quad : \quad \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$
- iii) Dado $\vec{v} \in V \quad \exists ! (-\vec{v}) \in V \quad \vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$.
(si $\vec{v} = C(\overrightarrow{AB})$ entonces $-\vec{v} = C(\overrightarrow{BA})$)
- iv) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$

2) Vamos ahora a considerar la siguiente ecuación diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

Esta ecuación diferencial es del mismo tipo de las obtenidas en los movimientos armónicos, donde x es el parámetro tiempo y $f(x)$ la elongación de la partícula que vibra en el instante x . Resolver esta ecuación es ("grosso modo") encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (o definidas en un cierto intervalo) que son derivables dos veces que la cumplan. Si f y h son dos de tales soluciones nos damos cuenta que la función $f + h$ definida por $(f + h)(x) = f(x) + h(x)$ tambien es solución de esta ecuación diferencial. Sea S el conjunto de las soluciones de esta ecuación.

Podemos sumar elementos de S . Además esta suma satisface:

$$i) \quad f + (h + g) = (f + h) + g \quad \forall f, h, g \in S$$

$$ii) \quad \exists f_0 \in S, \text{ definida por } f_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ tal que}$$

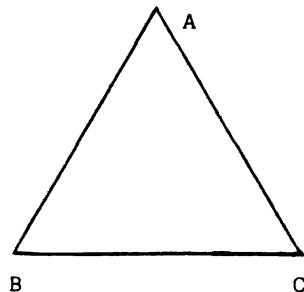
$$f_0 + f = f + f_0 = f \quad \forall f \in S$$

$$iii) \quad \text{Dado } f \in S \quad \exists ! (-f) \in S, \text{ definida por } (-f)(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

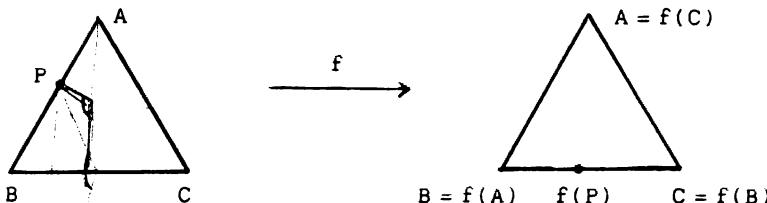
$$\text{tal que } f + (-f) = (-f) + f = f_0$$

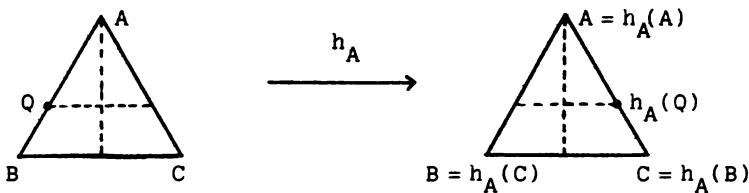
$$iv) \quad f + g = g + f \quad \forall f, g \in S$$

3) Sea X el conjunto de los puntos del borde de un triángulo equilátero $\triangle ABC$. Una "isometría" de X es toda aplicación $f : X \rightarrow X$ que conserve distancias; es decir si P y Q son dos puntos de X a distancia r , $f(P)$ y $f(Q)$ también están a distancia r . Tres isometrías evidentes de X son las rotaciones de 120° , 240° y 360°



(esta última la identidad) en sentido inverso de cómo giran las agujas de un reloj. Vamos a representarlas por f , $f \circ f = f^2$ y $f \circ f \circ f = f^3 = 1_X$. Otras tres isometrías son las simetrías h_A , h_B y h_C con respecto a las tres alturas que pasan respectivamente por A, B y C. Por ejemplo:





Así tenemos un conjunto $G = \{1_X, f, f^2, h_A, h_B, h_C\}$ formado por isometrías de X (es posible comprobar que toda isometría es una de estas). Tomando como operación la composición de aplicaciones resulta que G verifica, formalmente, las propiedades i), ii) e iii) de los ejemplos 1 y 2, pero no la iv). Esta operación viene descrita en la siguiente tabla de Cayley de G

\circ	1_X	f	f^2	h_A	h_B	h_C
1_X	1_X	f	f^2	h_A	h_B	h_C
f	f	f^2	1_X	h_C	h_A	h_B
f^2	f^2	1_X	f	h_B	h_C	h_A
h_A	h_A	h_B	h_C	1_X	f	f^2
h_B	h_B	h_C	h_A	f^2	1_X	f
h_C	h_C	h_A	h_B	f	f^2	1_X

Si queremos saber cual es el resultado de $h_A \circ f$ miraremos la intersección de la fila 4^a con la columna 2^a donde figura h_B , de modo que $h_A \circ f = h_B$.

Observese que en G no da igual el orden en que se "operen" dos elementos , lo cual sucedía en los ejemplos anteriores.

Por otro lado el subconjunto $H = \{1_X, f, f^2\}$ de G satisface las propiedades i), ii), iii) e iv) de los ejemplos anteriores. El subconjunto $K = \{h_A, h_B, h_C\}$ no.

Definición de grupo. Primeras propiedades.-

Los tres ejemplos anteriores tienen en común que en todos ellos hay definida una operación binaria (forma de obtener un elemento a partir de dos dados) que verifica tres propiedades. Pues bien, un conjunto G con una operación binaria ". " que verifica i), ii) e iii) es lo que se llama un grupo. Antes de conocerse la noción abstracta de grupo nadie osaría pensar que los tres ejemplos anteriores se pueden mirar, desde una cierta óptica, de la misma forma: conocer "cosas" sobre grupos (abstractos) nos puede ayudar a saber más sobre los vectores libres de un plano, un mejor conocimiento acerca de "cuantas" soluciones tienen ciertas ecuaciones diferenciales, o bien al estudio de figuras geométricas y de sus "movimientos".

Definición 1.1.- Un grupo ($G, .$) es un conjunto G y una aplicación $G \times G \longrightarrow G$, $(x,y) \longmapsto x.y$ (llamada la operación de G) que verifica las siguientes propiedades:

i) Asociatividad

$$x.(y.z) = (x.y).z \quad \forall x,y,z \in G$$

ii) Existencia de elemento neutro

$$\exists e \in G : e \cdot x = x \cdot e = x \quad \forall x \in G$$

iii) Todo elemento tiene un simétrico

$$\forall x \in G \quad \exists \bar{x} \in G : x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = e.$$

Si además se verifica la propiedad

iv) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in G$

diremos que (G, \cdot) es un grupo conmutativo o abeliano.

El elemento $x \cdot y$ se le llama el producto de x por y en (G, \cdot) .

Nosotros hemos representado la operación en G por " \cdot " por eso la llamamos producto; también la podríamos haber escrito como una suma $(x, y) \longleftrightarrow x + y$. En el primer caso tenemos un grupo multiplicativo y en el segundo aditivo. Como lo de menos es cómo se represente la operación binaria en G , nosotros seguiremos utilizando notación multiplicativa por comodidad.

\mathbb{N} con la suma usual no es un grupo. Si son grupos $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ (\mathbb{Q} el conjunto de los números racionales) $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{C}, +)$ (\mathbb{C} el conjunto de los números complejos) además todos ellos son abelianos. Si $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} - \{0\}$ y " \cdot " la multiplicación usual, entonces (\mathbb{Q}_0, \cdot) , (\mathbb{R}_0, \cdot) y (\mathbb{C}_0, \cdot) son también grupos abelianos. Los ejemplos 1 y 2 son grupos abelianos, el ejemplo 3 es un grupo no abeliano.

Los axiomas i), ii) e iii) de la Definición 1.1 tienen un gran número de consecuencias muy simples que vemos a continuación.

Proposición 1.2.- El elemento neutro de un grupo es único.

Demostración. En efecto, sean $e, e' \in G$ verificando ii) de la Definición 1.1, entonces $e = e \cdot e' = e'$.

Proposición 1.3.- En todo grupo (G, \cdot) se verifican las leyes de simplificación

$$x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z$$

$$y \cdot x = z \cdot x \Rightarrow y = z.$$

Demostración. Demostraremos sólo la primera de estas implicaciones, la otra se hace igual. Si $x \cdot y = x \cdot z$, por el axioma iii) de la Definición 1.1 existe $\bar{x} \in G$ tal que $\bar{x} \cdot x = e$, así

$$\bar{x} \cdot (x \cdot y) = \bar{x} \cdot (x \cdot z)$$

$$(\bar{x} \cdot x) \cdot y = (\bar{x} \cdot x) \cdot z \quad \text{por i)}$$

$$e \cdot y = e \cdot z \Rightarrow y = z \quad \text{por ii}).$$

Proposición 1.4.- Para cada elemento x de un grupo (G, \cdot) su simétrico (dado por iii)) es único.

Demostración. Supongamos que \bar{x} y \tilde{x} satisfacen iii), entonces

$$\bar{x} = \tilde{x} \cdot e = \tilde{x} \cdot (x \cdot \tilde{x}) = (\tilde{x} \cdot x) \cdot \tilde{x} = e \cdot \tilde{x} = \tilde{x}.$$

Proposición 1.5.- El simétrico del elemento neutro e de (G, \cdot) es el propio e . Además,

$$\forall x, y \in G : \bar{x} = x, \quad \bar{x \cdot y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$$

Demostración. Es claro que e es único. También que el simétrico del simétrico de x es el propio x por iii) y la Proposición 1.4.

Finalmente

$$(x.y).(\bar{y}.\bar{x}) = x.(y.\bar{y}).\bar{x} = x.e.\bar{x} = x.\bar{x} = e$$

$$(\bar{y}.\bar{x}).(x.y) = \bar{y}.(\bar{x}.x).y = \bar{y}.e.y = \bar{y}.y = e$$

y ahora se aplica la Proposición 1.4.

Proposición 1.6.- Sean x_0, y_0 dos elementos fijos de G. Entonces cada una de las ecuaciones

$$x.x_0 = y_0 \quad x_0.y = y_0$$

tiene solución única en G. En concreto $x = y_0.\bar{x}_0$, $y = \bar{x}_0.y_0$.

Demostración. Sólo vamos a ver una de las ecuaciones.

Si $x.x_0 = y_0$ tenemos $(x.x_0).\bar{x}_0 = y_0.\bar{x}_0$ donde \bar{x}_0 es el simétrico de x_0 dado por iii). Utilizando ahora la asociatividad i) en el miembro izquierdo tenemos $x.e = y_0.\bar{x}_0$ y se concluye ya que \bar{x}_0 es único por la Proposición 1.4.

Si para cada $x \in G$ definimos aplicaciones

$$f_x : G \longrightarrow G \quad g_x : G \longrightarrow G$$

$$f_x(y) = x.y \quad \forall y \in G \quad g_x(y) = y.x \quad \forall y \in G$$

llamadas respectivamente la multiplicación por la izquierda y por la derecha por x , tenemos como consecuencia inmediata de la Proposición 1.6 (ver tambien la Proposición 1.3)

Corolario 1.7.- $\forall x \in G$ las aplicaciones f_x y g_x son biyectivas.

Nótese que cuando (G, \cdot) es un grupo abeliano $f_x = g_x$ para cualquier $x \in G$. Es claro que tambien es cierto el recíproco.

Subgrupos de un grupo.-

Una forma de tener nuevos grupos a partir de uno dado es ver si algún subconjunto suyo tiene tambien estructura de grupo al considerar en él la restriccción de la operación binaria del grupo. Parece evidente que no todo subconjunto de un grupo será a su vez tambien un grupo en esta forma. Si consideramos el grupo G dado en el ejemplo 3, resulta que $H = \{1_X, f, f^2\}$ con la operación inducida por la de G tambien es un grupo. Por el contrario $K = \{h_A, h_B, h_C\}$ no lo es, ya que, por ejemplo $h_A \circ h_A = 1_X$ que no pertenece a K (ver pag. 18).

Definición 1.8.- Un subconjunto H de un grupo (G, \cdot) se dirá subgrupo de G si H con la misma operación que G es un grupo.

Una condición necesaria para que H sea un subgrupo es que al multiplicar dos elementos de H el resultado tambien pertenezca a H ; en otras palabras, que se pueda restringir la operación binaria de G a H . Esto no pasa en el subconjunto K de G dado arriba.

Todo grupo (G, \cdot) tiene dos subgrupos "impropios" $\{e\}$ y el mismo G . Cualquier otro subgrupo de G se dice "propio".

Si V representa el grupo aditivo de los vectores libres de un plano, entonces todos los vectores libres con una dirección fija forman un subgrupo U de V , que será de la forma $U = \{a\vec{v} / a \in \mathbb{R}\}$ donde $\vec{v} \in V$ es no nulo. Si nos fijamos en el ejemplo 2 (pag. 16) y ponemos $H = \{f \in S / f(0) = 0\}$ entonces H es un subgrupo de S .

Teóricamente para ver si un subconjunto H de un grupo G es un subgrupo suyo hay que comprobar todas las propiedades de la Definición 1.1 para H . Pero el hecho de que $H \subset G$ simplifica esto como lo pone de manifiesto la siguiente

Proposición 1.9.- Un subconjunto H de un grupo $(G,.)$ es un subgrupo suyo si y sólo si

- i) $e \in H$
- ii) $\forall x \in H \quad \bar{x} \in H$
- iii) $\forall x, y \in H : x \cdot y \in H$.

Demostración. Es trivial que siendo H un subgrupo de $(G,.)$ se verifiquen i), ii) e iii). Recíprocamente, si H es un subconjunto de G que verifica las anteriores condiciones, en primer lugar por iii) la operación de G se puede restringir a H , esto es ". ." es una operación binaria en H . La asociatividad se cumple en H pues también se cumple en G y es $H \subset G$. La condición i) nos dice que el elemento neutro del grupo G también lo es para la operación ". ." en H . Por último todo elemento de H tiene simétrico en H por ii).

Corolario 1.10.- Un subconjunto H de un grupo $(G,.)$ es un subgrupo suyo si y sólo si cumple

$$\forall (x, y) \in H \times H \quad x \cdot \bar{y} \in H$$

Demostración. En efecto, la condición necesaria es obvia. Para la suficiente utilicemos la Proposición 1.9. Como $(x, x) \in H \times H$, entonces $e = x \cdot \bar{x} \in H$. Como $(e, x) \in H \times H \Rightarrow e \cdot \bar{x} = \bar{x} \in H$, y por último

para cada $x, y \in H$ tenemos $(x, \bar{y}) \in H \times H \Rightarrow x \cdot \bar{\bar{y}} = x \cdot y \in H$.

Dado un grupo (G, \cdot) y dos subgrupos suyos H y K , $H \cap K$ es tambien un subgroupo de G , pero $H \cup K$, en general, no es un subgroupo. Por ejemplo, sea $G = \mathbb{Z}$ con la suma, "+", como operación binaria, entonces si $H = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$ y $K = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$ resulta que $H \cap K = \{6k / k \in \mathbb{Z}\}$ y por lo tanto un subgroupo de $(\mathbb{Z}, +)$. Ahora $H \cup K$ no es un subgroupo (explicar).

Sea (G, \cdot) un grupo y sea H un subgroupo suyo. A partir de este podemos dar en G dos relaciones binarias como sigue:

$$\underline{x, y \in G}, \quad x \sim y \Leftrightarrow \bar{x} \cdot y \in H$$

$$\underline{x, y \in G}, \quad x \sim' y \Leftrightarrow y \cdot \bar{x} \in H$$

Proposición 1.11 - Las relaciones binarias \sim y \sim' son de equivalencia.

Demostración. Veamos que \sim es de equivalencia, la otra se hace igual. Como $\forall x \in G : \bar{x} \cdot x = e \in H \Rightarrow x \sim x$. Supongamos que $x \sim y$, entonces $\bar{x} \cdot y \in H \Rightarrow \bar{x} \cdot y = \bar{y} \cdot \bar{x} = \bar{y} \cdot x \in H \Rightarrow y \sim x$. Por ultimo si $x \sim y$ e $y \sim z$ entonces $\bar{x} \cdot y \in H$ y por lo tanto $(\bar{x} \cdot y) \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot z \in H$, lo que nos dice que $x \sim z$.

Si $x \in G$ y $C(x)$ y $C'(x)$ representan las clases de equivalencia de x según \sim y \sim' respectivamente, tenemos

$$C(x) = \{y \in G / \bar{y} \cdot x \in H\} = \{y \in G / y = x \cdot h \text{ para algún } h \in H\}$$

$$C'(x) = \{y \in G / x \cdot \bar{y} \in H\} = \{y \in G / y = k \cdot x \text{ para algún } k \in H\}.$$

Obsérvese que $C(x) = (f_x)_*(H)$ y $C'(x) = (g_x)_*(H)$ (ver pag. 22).

Es por ello que se suele representar

$$C(x) = x.H \quad y \quad C'(x) = H.x.$$

Definición 1.12.- Si H es un subgrupo de $(G,.)$ y \sim , \sim' representan las relaciones de equivalencia inducidas por H en G según la Proposición 1.11, entonces a cada clase de equivalencia $x.H$ se le llama la clase "por la izquierda" de x según H . La clase $H.x$ se llama la clase "por la derecha" de x según H . Además los conjuntos cocientes G/\sim y G/\sim' se representan respectivamente por

$$G/H = \{x.H / x \in G\} \quad y \quad H\backslash G = \{H.x / x \in G\}.$$

Nótese que, en general, $H.x \neq x.H$, por ejemplo si G es el grupo definido en el ejemplo 3 (pag. 18) y $H = \{1_X, h_A\}$ entonces $f.H = \{f, h_C\}$ y $H.f = \{f, h_B\}$. En donde también se ve que, en general, ni $H.x$ ni $x.H$ son subgrupos de G . Por último decir que cuando el grupo G es conmutativo las relaciones \sim y \sim' coinciden y por tanto $H.x = x.H \quad \forall x \in G$.

Todo este desarrollo tiene como primera aplicación resolver la siguiente pregunta: Dado un grupo $(G,.)$ con un número finito de elementos ¿puedo encontrar subgrupos de G con un número de elementos arbitrario (menor que el de G)?

Nosotros al número de elementos de un conjunto finito X , en particular de un grupo, lo llamaremos el cardinal de X y escribiremos $\text{card}(X)$.

Proposición 1.13.- Sea (G, \cdot) un grupo finito y sea H un subgrupo suyo. Entonces se cumple

$$\text{card}(G) = \text{card}(H) \cdot \text{card}(G/H).$$

Demostración. Como la aplicación $y \mapsto xy$ de H en xH es biyectiva tenemos $\text{card}(H) = \text{card}(xH)$, $\forall x \in G$ (compruébese). Ahora bien, las clases por la izquierda forman una partición de G (vease pag. 5), y como G es finito ha de ser

$$G = x_1H \cup x_2H \cup \dots \cup x_pH$$

para ciertos $x_j \in G$, y además cada dos de estas clases son disjuntas. Por lo tanto

$$\text{card}(G) = \sum_{i=1}^p \text{card}(x_iH) = p \cdot \text{card}(H).$$

Pero p es claramente el número de elementos de G/H , y eso concluye la prueba.

Teniendo en cuenta que $\text{card}(G/H) = \text{card}(H \setminus G)$, la fórmula de la Proposición 1.13 también se podría escribir

$$\text{card}(G) = \text{card}(H) \cdot \text{card}(H \setminus G).$$

Como consecuencia de la Proposición 1.13 tenemos

Corolario 1.14.- (Teorema de Lagrange).- Dado un grupo finito G , el número de elementos de cualquier subgrupo suyo H divide al número de elementos de G .

Este resultado tiene importantes consecuencias prácticas. A título de ejemplo, si G es el grupo de las isometrías dado

en pag. 18, vemos que G tiene 6 elementos, por tanto no nos ponemos a buscar subgrupos de G con 4 elementos ya que no los hay (4 no divide exactamente a 6).

Definición 1.15. - Sea (G, \cdot) un grupo y $x \in G$. Para $n \in \mathbb{Z}$ se define la potencia de x de exponente n por

$$x^0 = e$$

$$x^{n+1} = x^n \cdot x \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

$$x^n = \overline{(x^{-n})} \quad \text{si } -n \in \mathbb{N} \quad (\text{nótese que } x^{-1} = \bar{x})$$

Sea (G, \cdot) un grupo y $x \in G$. Entonces $H = \{x^n / n \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de G como se comprueba facilmente, por ejemplo a partir del Corolario 1.10. Se le llama a H el subgrupo cíclico generado por x . Pudiera ocurrir que H coincidiese con G , en este caso se dirá que G es un grupo cíclico y que x es un generador de G .

Uno facilmente observa que un grupo cíclico es necesariamente abeliano, así el grupo G del ejemplo 2 no puede ser cíclico. El grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$ es cíclico y 1 es un generador suyo. Nótese que en el caso que la operación del grupo sea aditiva las fórmulas de la Definicón 1.15 se escriben

$$0 \cdot x = 0 \quad (0 \text{ representa el elemento neutro})$$

$$(n+1)x = nx + x \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

$$nx = -(-n)x \quad \text{si } -n \in \mathbb{N} \quad (-x \text{ es el opuesto de } x)$$

de modo que $\mathbb{Z} = \{n1 / n \in \mathbb{Z}\}$. El grupo aditivo de los números reales no es un grupo cíclico (¿ por qué ?).

Sea (G, \cdot) un grupo finito y x un elemento de G . Entonces existe un mínimo entero positivo m tal que $x^m = e$. A este entero m se le llama el orden de x y es el número de elementos del subgrupo cíclico generado por x . Ahora estamos en condiciones de poder establecer otra consecuencia de la Proposición 1.13.

Corolario 1.16.- El orden de todo elemento de un grupo finito (G, \cdot) divide al número de elementos de G .

Como una sencilla aplicación práctica tenemos que en un grupo con un número primo de elementos no existen subgrupos propios, o si se quiere el orden de cada uno de sus elementos es la unidad o bien el cardinal del grupo.

Grupos cocientes.-

Dado un grupo (G, \cdot) y un subgrupo suyo H hemos visto que obtenemos dos conjuntos cocientes G/H y $H\backslash G$. Parece natural preguntarse si es posible dotarles a estos de estructura de grupo. Consideremos por ejemplo $G/H = \{x.H / x \in G\}$. Dados $x.H, y.H \in G/H$ lo primero que tenemos que ver es cómo podemos definir $(x.H) \cdot (y.H)$. Enseguida se le ocurre a uno poner

$$(x.H) \cdot (y.H) = (x.y).H$$

es decir, que el producto de clase se obtenga como la clase del producto de dos de sus representantes. Pero ¿ está bien definida esta ley en G/H ?

Sean $x, x' \in G$ tales que $x.H = x'.H$, entonces $\bar{x}.x' \in H$. Por otro

lado debe ser $(x.H).(y.H) = (x'.H).(y.H)$ es decir $(x.y).H = (x'.y).H$
por tanto $(\bar{x}.y)(x'.y) = \bar{y}.(\bar{x}.x').y = \bar{y}.h.y \in H$ siendo $h = \bar{x}.x'$. Es
claro que si exigimos que H verifique la siguiente condición

$$(N) \quad \forall y \in G \quad \forall h \in H : \bar{y}.h.y \in H$$

esta operación está bien definida en G/H . Recíprocamente, dado $h \in H$ siempre podemos encontrar $x, x' \in G$ tales que $\bar{x}.x' = h$ (ver Proposición 1.6) y si la operación está bien definida tenemos (N).

Definición 1.17. - A un subgrupo H de un grupo (G, \cdot) que verifica (N) lo llamaremos normal.

Otra forma equivalente de ver que H es un subgrupo normal viene dada por la siguiente:

Proposición 1.18. - Un subgrupo H de un grupo (G, \cdot) es normal si y sólo si $\forall x \in G \quad x.H = H.x$.

Demostración. Veamos que si H verifica (N) entonces coinciden, para cada elemento de G , las clases laterales por la izquierda y derecha. En efecto, sea y un elemento de $x.H$, entonces $y = x.h$ para algún $h \in H$. Por (N) tenemos que $x.h.\bar{x} = h_1 \in H$ luego $y = x.h = h_1.x$ que pertenece a $H.x$. Así hemos demostrado $x.H \subset H.x$. La otra inclusión $H.x \subset x.H$ se prueba de igual forma.

Recíprocamente, sean $y \in G$, $h \in H$. Como $y.H = H.y$ existe $k \in H$ con $h.y = y.k$, y por ello $\bar{y}.h.y = \bar{y}.y.k = e.k = k \in H$.

Obsérvese que aunque se ha definido que un subgrupo es normal cuando se puede definir el producto $(x.H).(y.H) = (x.y).H$ por

añadido tenemos que tambien se puede definir en $H \setminus G$, ya que cuando se cumple (N) tenemos $x.H = H.x \forall x \in G$ y $G/H = H \setminus G$.

Como una consecuencia inmediata tenemos que todo subgrupo de un grupo conmutativo es un subgrupo normal suyo.

En el caso del grupo G definido en el ejemplo 3 (pag. 18) resulta que $H = \{1_X, h_A\}$ es un subgrupo de G que no es normal (ver pag. 26) y $K = \{1_X, f, f^2\}$ es un subgrupo normal de G .

Proposición 1.19.- Si H es un subgrupo normal de (G, \cdot) entonces el conjunto cociente G/H es un grupo cuando se le dota de la operación binaria

$$(x.H) \cdot (y.H) = (x \cdot y).H.$$

Demostración. En primer lugar tenemos que por ser H un subgrupo normal de G esta forma de operar clases define una operación binaria en G/H (justamente se dice por ello que H es normal). Ahora vamos a demostrar todos los axiomas de la definición de grupo para G/H utilizando que G tambien los cumple. Esta operación es asociativa:

$$\begin{aligned} ((x.H) \cdot (y.H)) \cdot (z.H) &= ((x \cdot y).H) \cdot (z.H) = ((x \cdot y) \cdot z).H = (x \cdot (y \cdot z)).H = \\ &= (x.H) \cdot ((y \cdot z).H) = (x.H) \cdot ((y.H) \cdot (z.H)), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la propiedad asociativa de " \cdot " en G .

Sea ahora $e.H$ que verifica

$$(e.H) \cdot (x.H) = (e \cdot x).H = x.H = (x.H) \cdot (e.H)$$

para toda clase $x.H$. Así, $e.H = H$ (nótese que $e \in H$) es el elemento

neutro de la operación en G/H . Por último dada una clase $x.H$ de G/H la clase $\bar{x}.H$ verifica:

$$(\bar{x}.H).(x.H) = (x.H).(\bar{x}.H) = e.H$$

con lo que el simétrico de la clase de representante x es justamente la clase de representante \bar{x} . Con lo cual concluimos la demostración.

Corolario 1.20.- Si G es un grupo conmutativo y H es cualquier subgrupo suyo, entonces G/H es un grupo que tambien es conmutativo.

Como ejemplo consideremos el grupo aditivo de los enteros $(\mathbb{Z}, +)$ que es conmutativo. Sea p un entero positivo ($p \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$), entonces los múltiplos en \mathbb{Z} de p forman un subgrupo $p.\mathbb{Z} = \{p.k / k \in \mathbb{Z}\}$. Además la relación de equivalencia (la única) que induce $p.\mathbb{Z}$ en \mathbb{Z} es

$x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = p.k$ ("dar el mismo resto al dividir por p ")
que es conocida con el nombre de relación de congruencia módulo p y se representa por $x \equiv y \pmod{p}$ (ver prob. 1 pag. 12).

Entonces $\mathbb{Z}/p.\mathbb{Z} = \{m + p.\mathbb{Z} / m \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo tambien conmutativo con p elementos $0 + p.\mathbb{Z}$ ($= p.\mathbb{Z}$), $1 + p.\mathbb{Z}$, \dots , $(p-1) + p.\mathbb{Z}$. La suma está definida (ver Proposición 1.19) por

$$(m + p.\mathbb{Z}) + (m' + p.\mathbb{Z}) = (m+m') + p.\mathbb{Z}$$

Nótese que con este ejemplo, acabamos de ver que para cada número natural p existe un grupo conmutativo con p elementos.

Homomorfismos de grupos.-

a) Sea H un subgrupo de G y sea $i : H \longrightarrow G$ la aplicación inclusión de H en G , entonces se verifica $i(x.y) = i(x).i(y)$ para cualesquiera $x, y \in H$.

b) Sea H un subgrupo normal de G y sea $p : G \longrightarrow G/H$ la aplicación que le hace corresponder a cada x su clase $x.H$, es decir $p(x) = x.H \quad \forall x \in G$. Entonces de la Proposición 1.19 tenemos $p(x.y) = p(x).p(y) \quad \forall x, y \in G$. (Suele llamarse a p la proyección de G sobre su cociente por H).

c) Consideremos el grupo aditivo de los números complejos $(\mathbb{C}, +)$, $\mathbb{C} = \{x + iy / x, y \in \mathbb{R}\}$. Sea también el grupo aditivo de los números reales $(\mathbb{R}, +)$. Podemos definir una aplicación $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x + iy) = x$ (la parte real). Entonces, si z, z' son números complejos cualesquiera tenemos $f(z + z') = f(z) + f(z')$.

d) Por último sea \mathbb{R}^+ el conjunto de números reales positivos (estrictamente). Si dotamos a \mathbb{R}^+ del producto usual de números reales como operación binaria resulta ser un grupo conmutativo (un subgrupo del grupo $(\mathbb{R}_0, +)$, ver pag. 20). Sean las aplicaciones $\log_{10} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\exp_{10} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que están definidas por $\log_{10} x$ es el logaritmo decimal del real positivo x , y $\exp_{10} x = 10^x$ y verifican $\log_{10}(x.y) = \log_{10} x + \log_{10} y$, $\exp_{10}(x+y) = \exp_{10} x \cdot \exp_{10} y$.

Todos estos ejemplos son aplicaciones entre dos grupos que "respetan" las respectivas operaciones. Todos son homomor-

fismos en el sentido explicitado en la siguiente

Definición 1.21.— Dados dos grupos (G, \cdot) , (G', \cdot) un homomorfismo de (G, \cdot) en (G', \cdot) es una aplicación $f : G \longrightarrow G'$ que verifica

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in G.$$

Si además f es inyectiva diremos que es un monomorfismo. Si f es sobreyectiva que es un epimorfismo, y si f es biyectiva que es un isomorfismo. Un homomorfismo de un grupo en si mismo se llama endomorfismo y un endomorfismo biyectivo recibe el nombre de automorfismo.

El ejemplo a) de la pag. 33 es un monomorfismo que es un isomorfismo cuando $H = G$. La aplicación p del ejemplo b) es un epimorfismo, además uno observa que la definición del producto en G/H es la única que hace que p sea homomorfismo. En el ejemplo c) tambien encontramos un epimorfismo. En el ejemplo d) se dan dos homomorfismos \log_{10} y \exp_{10} que verifican $\log_{10} \circ \exp_{10} = 1_{\mathbb{R}}$ y $\exp_{10} \circ \log_{10} = 1_{\mathbb{R}^+}$; por la Proposición 0.12 ambas son isomorfismos y uno es el inverso del otro.

Proposición 1.22.— Sean (G, \cdot) , (G', \cdot) y (G'', \cdot) tres grupos y sean $f : G \longrightarrow G'$, $g : G' \longrightarrow G''$ dos homomorfismos. Entonces $g \circ f : G \longrightarrow G''$ es tambien un homomorfismo.

Demostración. $x, y \in G$ tenemos

$$(g \circ f)(x \cdot y) = g(f(x \cdot y)) = g(f(x) \cdot f(y)) = g(f(x)) \cdot g(f(y)) = \\ = (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y).$$

Corolario 1.23.- La composición de dos monomorfismos (epimorfismos) es otro monomorfismo (epimorfismo) (ver prob. 3 pag. 12).

Proposición 1.24.- Sea $f : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos.

Entonces:

- i) $f(e) = e'$ (e y e' son los resp. neutros de G y G')
- ii) $f(\bar{x}) = \bar{f(x)} \quad \forall x \in G$

Demostración. Como $f(e \cdot e) = f(e) \Rightarrow f(e) \cdot f(e) = f(e)$, utilizando ahora la Proposición 1.3 tenemos $f(e) = e'$. Para ii)

$$e' = f(\bar{x} \cdot x) = f(\bar{x}) \cdot f(x) \quad y \quad e' = f(x \cdot \bar{x}) = f(x) \cdot f(\bar{x}), \quad y \quad \text{por la}$$

Proposición 1.4 es $\bar{f(x)} = f(\bar{x})$.

Definición 1.24.- Dado un homomorfismo $f : G \longrightarrow G'$ se define su núcleo, $\text{Ker } f$, por

$$\text{Ker } f = \{x \in G / f(x) = e'\} = f^*(\{e'\}).$$

Proposición 1.26.- $\text{Ker } f$ es un subgrupo normal de G .

Demostración. Sean $x, y \in \text{Ker } f$, entonces

$$f(x \cdot \bar{y}) = f(x) \cdot f(\bar{y}) = f(x) \cdot \bar{f(y)} = e' \cdot \bar{e}' = e' \cdot e' = e'.$$

Por la caracterización dada en el Corolario 1.10 $\text{Ker } f$ es un subgrupo de G . Además es normal ya que si $y \in G$ y $x \in \text{Ker } f$ ocurre

$$f(\bar{y} \cdot x \cdot y) = f(\bar{y}) \cdot f(x) \cdot f(y) = \bar{f(y)} \cdot e' \cdot f(y) = e',$$

lo que prueba que $\bar{y} \cdot x \cdot y \in \text{Ker } f$ y así se concluye.

Obsérvese que para grupos arbitrarios G y G' la aplicación $f : G \longrightarrow G'$ dada por $f(x) = e'$ para cualquier $x \in G$ es un homomorfismo. Se llama el homomorfismo nulo o trivial de G en G' .

Proposición 1.27.- Dado un homomorfismo $f : G \longrightarrow G'$, su imagen $\text{Im } f = \{f(x) / x \in G\}$ es un subgrupo de G' .

Demostración. Si $x', y' \in \text{Im } f \Rightarrow \exists x, y \in G : f(x) = x', f(y) = y'$.

Así, $x' \cdot \bar{y}' = f(x) \cdot \bar{f(y)} = f(x) \cdot f(\bar{y}) = f(x \cdot \bar{y})$, con lo que $x' \cdot \bar{y}' \in \text{Im } f$ y otra vez por el Corolario 1.10, $\text{Im } f$ es un subgrupo de G' .

En el siguiente resultado ponemos de manifiesto como los dos subgrupos (núcleo e imagen) que se pueden definir a partir de cada homomorfismo nos proporcionan un criterio para ver si es una aplicación inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Proposición 1.28.- Dado un homomorfismo $f : G \longrightarrow G'$, tenemos

- i) f es inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{e\}$
- ii) f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \text{Im } f = G'$.

Demostración. ii) es inmediato de la definición de aplicación sobreyectiva. En cuanto a i), es claro que si f es inyectiva el único elemento de G que se aplica en e' es e , es decir $\text{Ker } f = \{e\}$. Si suponemos ahora esto último cierto, sean $x, y \in G$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $f(x) \cdot \bar{f(y)} = e' \Rightarrow f(x \cdot \bar{y}) = e'$, así $x \cdot \bar{y}$ está en el núcleo de f , debe entonces coincidir con e , y $x \cdot \bar{y} = e \Rightarrow x = y$, con lo que f es inyectiva.

Establecimos en la Proposición 0.13 que toda aplicación f se puede descomponer en la forma $i \circ b \circ p$, con i inyectiva, b biyectiva y p sobreyectiva. Podemos plantearnos si será posible un resultado similar ahora; es decir, que si f es un homo-

morfismo ¿ se podrá poner como $i \circ b \circ p$ con i , b y p , respectivamente mono, iso y epimorfismo ?

Proposición 1.29.- Sean $(G, .)$, $(G', .)$ dos grupos y $f : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo. Entonces

$$f = i \circ b \circ p$$

donde $p : G \longrightarrow G/\text{Ker } f$, $p(x) = x \cdot \text{Ker } f \quad \forall x \in G$

$b : G/\text{Ker } f \longrightarrow \text{Im } f$, $b(x \cdot \text{Ker } f) = f(x) \quad \forall x \in G/\text{Ker } f$

$i : \text{Im } f \longrightarrow G'$, $i(y) = y \quad \forall y \in \text{Im } f$

son respectivamente, epimorfismo, isomorfismo y monomorfismo.

Demostración. En primer lugar hay que observar que $G/\text{Ker } f$ es un grupo (cociente) por ser $\text{Ker } f$ un subgrupo normal de G (ver Proposición 1.26). Por otro lado, la relación de equivalencia que origina $\text{Ker } f$ en G es

$$x, x' \in G, \quad x \sim x' \Leftrightarrow \bar{x} \cdot x' \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x) = f(x'),$$

es decir, se trata de la relación de equivalencia originada en G por f , considerada esta "sólo" como aplicación. Entonces podemos aplicar a f el resultado de la Proposición 0.13 y así obtenemos $f = i \circ b \circ p$. Por otro lado p es un epimorfismo e i un monomorfismo como se vió en los ejemplos a) y b) de la pag. 33. Sólo falta ver que b es isomorfismo. En efecto,

$$b((x \cdot \text{Ker } f) \cdot (y \cdot \text{Ker } f)) = b((x \cdot y) \cdot \text{Ker } f) = f(x \cdot y) =$$

$= f(x).f(y) = b(x.Ker f).b(y.Ker f)$, para cualesquiera clases del cociente. Con esto se prueba que b es homomorfismo y cómo ya se sabía que es biyectiva se concluye.

Tenemos que hacer resaltar un hecho contenido en la anterior proposición. Se prueba que para cada homomorfismo $f : G \longrightarrow G'$ tenemos un isomorfismo $b : G/Ker f \longrightarrow Im f$. Este hecho se conoce como el "teorema de isomorfía de grupos".

Para terminar este epígrafe de homomorfismos y con ello la lección primera llamamos la atención sobre la siguiente pregunta: ¿cuando dos grupos (G, \cdot) y (G', \cdot') se pueden considerar "idénticos"? Precisando un poco más, lo que queremos decir es ¿con qué criterio podemos afirmar que dos grupos dados son esencialmente idénticos? Claro está no podemos caer en la simpleza de pensar que cuando $G = G'$ y las operaciones sean iguales. En este caso se trataría del mismo grupo, pero nosotros estamos interesados en un criterio más amplio que este último y más en consonancia con la estructura de grupo. Hagamos un poco de historia. Supongamos que X e Y son dos conjuntos finitos, entonces si tienen el mismo número de elementos se puede definir una aplicación biyectiva de X en Y , y el recíproco también es cierto. De modo que si tenemos una colección de conjuntos todos ellos finitos la relación de equivalencia "tener el mismo número de elementos" es la misma que "hay una aplicación biyectiva entre dos conjuntos". Esto nos sugiere que si \mathcal{C} es una colección de conjun-

tos donde estos tiene un número arbitrario de elementos finito o no, entonces podemos definir en \mathcal{C} la siguiente relación de equivalencia: dados X e Y de \mathcal{C} decimos que son coordinables si existe una aplicación biyectiva $f : X \longrightarrow Y$. Esta relación descompone a \mathcal{C} en clases de equivalencia, en cada una de ellas estarán todos los conjuntos coordinables entre si.

Dos conjuntos coordinables pueden considerarse "idénticos" pues no hay criterio matemático que, sin más herramientas, los distinga. Así, las aplicaciones biyectivas nos proporcionan unas "gafas" con las cuales uno puede decidir cuando son o no idénticos dos conjuntos. Si pensamos ahora en grupos parece evidente que sólo por el hecho de que entre dos grupos haya una aplicación biyectiva sin más no podemos verlos iguales pues estamos olvidando que así no comparamos las correspondientes operaciones binarias. Las "gafas" deben ser ahora de otra manera.

Sea \mathcal{G} una colección de grupos en donde vamos a definir una relación binaria. Si G y G' son grupos de \mathcal{G} , decimos que G es isomorfo con G' , $G \cong G'$, si existe un isomorfismo $f : G \longrightarrow G'$. Esta relación binaria es de equivalencia. En cada clase de equivalencia están los grupos isomorfos con uno dado. Dos grupos isomorfos pueden considerarse "idénticos". Como, en particular, dos grupos isomorfos son coordinables resulta que dos grupos serán indistinguibles como tales si lo son como conjuntos y además las operaciones se comportan

de la misma forma. Veamos unos ejemplos. En primer lugar, consideremos el conjunto de las soluciones complejas de la ecuación $z^4 = 1$, $C = \{1, -1, i, -i\}$. Si dotamos a C del producto de números complejos como operación binaria resulta ^{que} (C,.) un grupo abeliano (un subgrupo de (\mathbb{C}_0, \cdot)). La tabla de Cayley de C es

.	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Sea ahora el grupo cociente $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$. Por simplicidad escribiremos $[m]$ en lugar de $m + 4\mathbb{Z}$ para toda clase de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Su tabla de Cayley es

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

Entonces la aplicación $f : C \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dada por $f(1) = [0]$, $f(-1) = [2]$, $f(i) = [1]$, $f(-i) = [3]$ es un isomorfismo. Así tenemos que los grupos C y $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ son isomorfos. Observese entonces que todas las propiedades que tenga el producto de C tambien tendrá que tenerlas la suma de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Por ejemplo, C es un grupo

comutativo y $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tambien lo es, C es cíclico y un generador suyo es i , $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tambien es cíclico y justamente la imagen de i por f , $[1]$, es un generador suyo. En general si dos grupos G y G' son isomorfos y G cumple una propiedad (P) definida únicamente a partir de su operación binaria, entonces G' cumple también (P) . Esto nos da condiciones necesarias para saber si dos grupos pueden ser isomorfos. Así, si G es comutativo y G' no lo es ya podemos asegurar que no son grupos isomorfos.

Sea ahora $G = \{a, b, c, d\}$ un grupo cuya operación está dada por la siguiente tabla

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

G es comutativo y tiene cuatro elementos como C y $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, no obstante no puede ser isomorfo con C (y por tanto tampoco con $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$). En efecto, $\forall x \in G : x + x = a$, a es el elemento neutro de G claramente, es decir, todo elemento de G es el simétrico de si mismo. Esto no ocurre en C , y como esta propiedad es común a dos grupos que sean isomorfos podemos concluir que G y C no lo son. Tambien podía uno haberse dado cuenta que C es un grupo cíclico y que G no lo es.

PROBLEMAS

1.- Sea X un conjunto y sea $S(X)$ el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas de X en si mismo (cada $\sigma \in S(X)$ se llama una permutación de X). Demostrar que si dotamos a $S(X)$ de la composición como operación binaria " \circ " resulta que $(S(X), \circ)$ es un grupo. Hacer su tabla de Cayley en el caso particular de que $X = \{1, 2, 3\}$.

2.- Demostrar que todo subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ es de la forma $k\mathbb{Z}$ para algún $k \in \mathbb{N}^*$ (entero positivo o nulo, nótese que $0\mathbb{Z} = \{0\}$).

3.- Demostrar que si m y n son enteros positivos, $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ donde d es el mínimo común múltiplo de m y n .

4.- Sean (G, \cdot) y (G', \cdot) dos grupos y consideramos en $G \times G'$ la siguiente operación

$$(x, x') \cdot (y, y') = (x \cdot y, x' \cdot y').$$

Demostrar que $G \times G'$ con esta operación binaria es un grupo y que las aplicaciones $p : G \times G' \longrightarrow G$, $p(x, x') = x$, $q : G \times G' \longrightarrow G'$, $q(x, x') = x'$ son epimorfismos. Encontrar sus núcleos y aplicar el teorema de isomorfía (ver pag. 38 y problema 8 pag. 13). Aplicar al caso particular $G = G' = \mathbb{R}$ y como operación en \mathbb{R} la suma usual. Generalizar a un producto cartesiano de n grupos, aplicarlo también cuando todos ellos son iguales a $(\mathbb{R}, +)$.

5.- Sean $(G, +)$ un grupo abeliano commutativo y H, H' dos subgrupos suyos. Se define la "suma", $H + H'$, de H y H' como

$$H + H' = \{x + x' / x \in H, x' \in H'\}.$$

Nótese que el único requisito sobre el grupo G es que sea abeliano. El que la operación se represente como suma no significa nada. (Piénsese en la descomposición polar de un número complejo en $(\mathbb{C}_0, +)$).

Probar que $H + H'$ es un subgrupo de G . ¿Se puede hacer una definición igual si G no fuese conmutativo? Demostrar tambien que tanto H como H' son subgrupos de $H + H'$, y que, además, si H y H' tambien son subgrupos de K , tambien subgrupo de G , entonces la suma de H y H' es subgrupo de K . Diremos que G es suma de H y H' si $G = H + H'$ (todo elemento de G se pone como suma de uno de H y otro de H'). Demostrar que si este es el caso, $H \cap H' = \{0\}$ es equivalente a que cada elemento de G se escriba de manera única como suma de uno de H y otro de H' . Cuando $G = H + H'$ y $H \cap H' = \{0\}$ se dice que G es suma directa de H y H' y se pone $G = H \oplus H'$. Buscar ejemplos de esta situación. ¿quien es $n \cdot \mathbf{Z} + m \cdot \mathbf{Z}$, $n, m \in \mathbf{N}$, en \mathbf{Z} ?

6.- Demostrar que un grupo (G, \cdot) es conmutativo si y sólo si $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \quad \forall x, y \in G$.

7.- Probar que un grupo (G, \cdot) en el que todo elemento sea el simétrico de si mismo es necesariamente conmutativo.

8.- Sea X un conjunto arbitrario y sea $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las aplicaciones de X en \mathbb{R} . Para $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ se define su suma $f + g$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$. Probar que con esta suma $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ es un grupo abeliano. Si se supone $X = \mathbb{R}$, demostrar que $S \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dado en el ejemplo 2) pag. 16 es un subgrupo suyo.

9.- Sean (G, \cdot) y (G', \cdot) dos grupos y sea $f : G \longrightarrow G'$ un isomorfismo. Probar que $f^{-1} : G' \longrightarrow G$ tambien es un isomorfismo. A partir de esto y de Corolario 1.23, demostrar que, en cada colección de grupos \mathcal{G} , la relación binaria "ser isomorfo con" es de equivalencia. Dar un ejemplo de dos conjuntos que sean coordinables y una estructura de grupo sobre cada uno de ellos de manera que los grupos que resultan no sean isomorfos.

10.- Sea G el conjunto de biyecciones de \mathbb{R}^2 en si mismo

$G = \{1_{\mathbb{R}^2}, f, g, h = f \circ g\}$ donde f es la simetría respecto al eje de abscisas, g respecto al de ordenadas. Demostrar que G es un subgrupo de $S(\mathbb{R}^2)$. ¿Es isomorfo G con $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? ¿Es isomorfo con $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? (ver prob. 4 pag. 42).

11.- Demostrar que dos grupos cualesquiera con tres elementos son isomorfos (por tanto isomorfos con $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$). Demostrar que un grupo con cuatro elementos siempre es conmutativo. Más todavía, probar que si (G, \cdot) tiene 4 elementos, entonces es isomorfo con $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ o bien con $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

12.- Demostrar que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ es un grupo cíclico con n elementos. Demostrar que todo grupo cíclico es isomorfo con $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si tiene n elementos y con $(\mathbb{Z}, +)$ si no tiene un número finito de elementos.

13.- Consideremos los grupos multiplicativos (\mathbb{C}_0, \cdot) y (\mathbb{R}_0, \cdot) , y se $f : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_0$ la aplicación definida por $f(x + iy) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ el módulo del número complejo $x + iy$. Demostrar que f es un homomorfismo de \mathbb{C}_0 en \mathbb{R}_0 . Encontrar para f la descomposición dada en la Proposición 1.29.

14.- Sean (G, \cdot) , (G', \cdot) dos grupos y $f : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos. Sean H un subgrupo de G y H' un subgrupo de G' . Demostrar que $f_*(H)$ y $f^*(H')$ son subgrupos de G' y G respectivamente. Si H es normal en G ¿es $f_*(H)$ normal en G' ? La misma pregunta para $f^*(H')$. Supongamos que $f : G \longrightarrow G'$ sea ahora un isomorfismo de grupos. Si H es un subgrupo normal de G , probar que $f_*(H)$ es un subgrupo normal de G' .

15.- Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales en la indeterminada x . Demostrar que si dotamos a $\mathbb{R}[x]$ de la suma usual "+", entonces $(\mathbb{R}[x], +)$ es un grupo abeliano. Sea $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ la aplicación definida por $D(\sum_{i=0}^n a_i x^i) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$. Demostrar que D es un endomorfismo.

Calcular su núcleo e imagen, y aplicar la Proposición 1.29.

16.- Sea $X = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto con n elementos y $S(X)$ el grupo de todas las permutaciones de X ($S(X)$ tiene $n!$ elementos). Para cada $\sigma \in S(X)$ definimos el número de inversiones de σ , $[\sigma]$, como el número de veces que para $i, j \in X$ sea $i < j$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$. Sea

$G = \{1, -1\}$ el grupo multiplicativo

Definimos una aplicación de $S(X)$ en G dada por $\sigma \mapsto (-1)^{[\sigma]}$

.	1	-1
1	1	-1
[σ]		
-1	-1	1

tura de σ . Demostrar que es un homomorfismo de grupos. Una permutación se dice par si tiene signatura 1 e impar si esta es -1. Probar que las permutaciones pares son un subgrupo de $S(X)$ pero no las impares.

17.- Sea $\sigma \in S(X)$ y pongamos su imagen $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$. Una trasposición de $\sigma(i)$ y $\sigma(i+1)$ es la permutación τ_i de X que lleva $\sigma(i)$ en $\sigma(i+1)$, $\sigma(i+1)$ en $\sigma(i)$ y deja fijos los $n-2$ elementos restantes. Demostrar que componiendo σ con un número k de trasposiciones podemos obtener 1_X . Probar además que si tambien se puede obtener 1_X mediante otras r trasposiciones entonces $(-1)^k = (-1)^r =$ = la signatura de la permutación (Esto nos da un método práctico para el cálculo de la signatura de σ). Particularizar al caso del prob. 1 encontrando la signatura de cada una de las $3! = 6$ permutaciones de tres elementos.

- 18.- Probar que todo subgrupo de un grupo cíclico (G, \cdot) es, con la operación binaria inducida, un grupo cíclico (ver prob. 2, pag. 42).
- 19.- Demostrar que si (G, \cdot) es un grupo cíclico y H es un subgrupo de G , entonces el grupo cociente G/H es cíclico (comparar con pag. 32).
- 20.- Probar que los únicos subgrupos de un grupo finito con un número primo de elementos son los impropios. Utilizar esto para ver que el único homomorfismo de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es el homomorfismo trivial.
- 21.- Probar que un grupo finito con un número primo de elementos es necesariamente cíclico. Dar un ejemplo de un grupo con un número no primo de elementos y que sea cíclico; y otro tambien con cardinal no primo y que no sea cíclico.
- 22.- Sean (G, \cdot) , (G', \cdot) dos grupos y sea $f : G \longrightarrow G'$ una aplicación. Demostrar que f es un homomorfismo si y solo si el grafo de f (pag. 6) es un subgrupo del grupo producto $G \times G'$ (ver prob. 4).
- 23.- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}_0$ la aplicación dada por $f(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$. Demostrar que f es un homomorfismo de $(\mathbb{R}, +)$ en el grupo multiplicativo de los complejos distintos de cero (\mathbb{C}_0, \cdot) cuya imagen es $S^1 = \{ z \in \mathbb{C}_0 / |z| = 1 \}$, siendo $|z|$ el módulo del número complejo z . Aplicar el teorema de isomorfía (pag. 38) a f y concluir que el grupo cociente aditivo \mathbb{R}/\mathbb{Z} es isomorfo al grupo multiplicativo S^1 de los números complejos de módulo uno.
- 24.- Utilizar el problema anterior para probar que, identificando $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con el subgrupo de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ de los pares de números reales de componentes enteras, el grupo cociente $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es isomorfo con el grupo producto $S^1 \times S^1$.
- 25.- Sea (G, \cdot) un grupo y $a \in G$. Se define $\psi_a : G \longrightarrow G$ por $\psi_a(x) = \bar{a} \cdot x \cdot a$ para todo $x \in G$. Demostrar que ψ_a es un automorfismo de G para cada $a \in G$ y que (G, \cdot) es commutativo si y solo si $\psi_a = 1_G$ para todo $a \in G$.

LECCION 2º: ANILLOS Y CUERPOS.

Hasta ahora hemos estudiado conjuntos con una sola operación binaria sujeta a una serie de propiedades que nosotros definimos como los axiomas de grupo. Sin embargo sabemos que en casos tan sencillos como en \mathbb{Z} , además de una suma también hay una multiplicación, de modo que también cumple ella algunas propiedades aisladamente y otras conjuntamente con la suma. Hablando con poca precisión estas son las situaciones que vamos a considerar ahora. Comencemos con

Algunos ejemplos introductorios.-

1) Consideraremos el grupo aditivo de los enteros $(\mathbb{Z}, +)$. Sabemos que en \mathbb{Z} existe además una multiplicación $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(n, m) \longmapsto n \cdot m$ que cumple las siguientes propiedades:

$$\text{i}) \quad (n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p) \quad \forall n, m, p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii}) \quad \exists 1 \in \mathbb{Z} \quad m \cdot 1 = 1 \cdot m = m \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

y además se relaciona con la suma mediante

$$\text{iii}) \quad m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$$

$$(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p \quad \forall n, m, p \in \mathbb{Z}.$$

Estas mismas propiedades satisfacen el producto de números reales frente a la suma y el producto de números complejos también con la suma usual de estos.

2) Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales. Sabemos por el prob. 15 pag. 45 que dotado de una suma (término a término) es un grupo abeliano. Definimos un producto en $\mathbb{R}[x]$ como sigue: si $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ ($x^0 = 1$), $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, son dos polinomios ponemos

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \quad \text{siendo } c_k = \sum_{r=0}^k a_r b_{k-r}$$

Compruébese que este producto verifica las mismas propiedades i), ii) e iii) del ejemplo precedente.

3) Sea $p \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0 + p\mathbb{Z}, 1 + p\mathbb{Z}, \dots, (p-1) + p\mathbb{Z}\}$. Sabemos que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ cuando lo dotamos de la suma $(m + p\mathbb{Z}) + (n + p\mathbb{Z}) = (m + n) + p\mathbb{Z}$ se convierte en un grupo abeliano (ver pag. 32). Definimos ahora un producto de forma natural por

$$(m + p\mathbb{Z}) \cdot (n + p\mathbb{Z}) = (m \cdot n) + p\mathbb{Z}.$$

¿ Es correcta esta definición ? Como ya es usual se define la operación en el cociente mediante la elección de representantes de clases, habrá que ver que elijamos los representantes que sean obtenemos la misma clase. Sean entonces $m_1 = m + p \cdot k$, $n_1 = n + p \cdot k'$, $k, k' \in \mathbb{Z}$. Tenemos $m_1 \cdot n_1 = m \cdot n + p \cdot (m \cdot k' + n \cdot k + p \cdot k \cdot k')$, con lo que las clases de $m \cdot n$ y $m_1 \cdot n_1$ coinciden y por ello está bien definido este producto de clases.

Ahora, a partir de las propiedades i), ii) e iii) del ejemplo 1) podemos demostrar sin mucha dificultad que también se verifican estas para las operaciones suma y producto en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Definición de Anillo. Primeras propiedades.-

Los tres ejemplos anteriores son anillos en el sentido que precisa la siguiente

Definición 2.1.- Un anillo R es un conjunto con dos operaciones binarias "+" y ". " llamadas suma y producto (o adicción y multiplicación respectivamente) tales que

i) $(R, +)$ es un grupo abeliano.

ii) El producto es asociativo

$$a.(b.c) = (a.b).c \quad \forall a, b, c \in R$$

iii) Tiene elemento neutro

$$\exists 1 \in R : a.1 = 1.a = a \quad \forall a \in R$$

iv) El producto es distributivo respecto a la suma

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

$$(a+b).c = a.c + b.c \quad \forall a, b, c \in R$$

Un anillo $(R, +, .)$ se dice commutativo si su producto lo es (la suma siempre es comutativa), es decir si

v) $a.b = b.a \quad \forall a, b \in R.$

Como en un anillo hay "dos" elementos neutros (uno para cada operación) se acostumbra, siguiendo la notación del ejemplo 1), a poner 0 al elemento neutro de "+" y 1 al de ". ". Sin embargo puede ocurrir, en algún caso que $0 = 1$, como ocurre con el ejemplo más sencillo de anillo $R = \{0\}$ con suma y producto definidos de la única forma posible $0+0=0$ y $0.0=0$. Este anillo recibe el nombre de trivial.

Los axiomas de la Definición 2.1 tienen algunas consecuencias muy útiles a la hora de efectuar "cálculos" con elementos de un anillo. En primer lugar hay que hacer notar que puesto que un anillo es en particular un grupo abeliano respecto a la suma, todas las propiedades que conocemos para grupos (Proposiciones 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6) son ahora válidas para $(R, +)$.

Proposición 2.2 .- La unidad (elemento neutro de ".") de un anillo es única.

Demostración. En efecto, sean $1, 1' \in R$ verificando iii) de la Definición 2.1, entonces $1 = 1 \cdot 1' = 1'$.

Proposición 2.3.- i) $\forall a \in R : a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

ii) $\forall a, b \in R : (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = - (a \cdot b)$

iii) Si R no es el anillo trivial (ver pag. 48) entonces la unidad de R no coincide con el cero.

Demostración. Como $a + 0 = a \Rightarrow a \cdot (a + 0) = a \cdot a + a \cdot 0 = a \cdot a$ por la distributividad. i) se sigue ahora aplicando la Proposición 1.3 (leyes simplificativas en un grupo). La otra igualdad de i) es análoga. Probemos ahora que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Por i) tenemos que $0 = 0 \cdot b \quad \forall b \in R$, pero $0 \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$ de donde se concluye. Tambien la otra igualdad de ii) es similar. Por último si $1 = 0$ entonces $\forall a \in R : a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$ por i) y entonces $R = \{0\}$.

En un grupo se puede definir la potencia de exponente entero de cualquiera de sus elementos (ver Definición 1.15). En un

anillo para el producto sólo se pueden definir potencias de exponente entero no negativo, pues un elemento de un anillo no tiene porque tener simétrico respecto al producto (inverso, el simétrico respecto a la suma suele llamarse opuesto).

Definición 2.4.- Sea $(R, +)$ un anillo y $a \in R$. Para $n \in \mathbb{N}^*$ se define la potencia de a de exponente n por

$$a^0 = 1$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a$$

Proposición 2.5.- Si $a \in R$ y $n \in \mathbb{N}^*$ tenemos

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Demostración. Sólo vamos a ver la primera de estas dos igualdades. Para ello vamos a utilizar el siguiente "principio de inducción"

Un subconjunto S de \mathbb{N}^* tal que $0 \in S$ y siempre que $n \in S$ se tenga $n+1 \in S$ es necesariamente igual a \mathbb{N}^* .

Fijemos $n \in \mathbb{N}^*$ y veamos que $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$. En efecto, para $m = 0$ es cierta esta fórmula utilizando la Definición 2.4. Sea S el subconjunto de los $m \in \mathbb{N}^*$ tales que se cumple la anterior igualdad. Acabamos de ver que $0 \in S$. Supongamos que $m \in S$ y tratemos de probar que $m+1 \in S$.

$$a^n \cdot a^{m+1} = a^n \cdot (a^m \cdot a) = (a^n \cdot a^m) \cdot a = a^{n+m} \cdot a = a^{n+m+1}.$$

En cuanto a la relación de las "potencias" en el grupo $(R, +)$ con las que establecimos arriba para " \cdot " tenemos:

Proposición 2.6.- $\forall a, b \in R$ y $\forall n \in \mathbb{Z}$ se verifica

$$n(a.b) = (na).b = a.(nb).$$

Demostración. Veamos que $n(a.b) = (na).b$. La otra identidad se hace de forma análoga. En efecto, para $n = 0$ el miembro izquierdo es el cero de R por la definición de "potencias" (en notación aditiva). El miembro derecho es el producto $0.b$, donde 0 es el cero de R , utilizando i) de la Proposición 2.3 se concluye.

Ahora veremos que esta fórmula es válida $\forall n \in \mathbb{N}$; si esto está probado y n es un entero negativo tenemos $n(a.b) = -(-n)(a.b) = -((-n)a).b$ ya que $-n \in \mathbb{N}$, pero $-((-n)a).b = (-1).((-n)a).b = (-(-n)a).b = (na).b$ utilizando ii) de la Proposición 2.3.

Supongamos ahora que para $n \in \mathbb{N}^*$ se cumpla $n(a.b) = (na).b$ entonces $(n+1)(a.b) = n(a.b) + a.b = (na).b + a.b = (na+a).b = (n+1)a.b$.

Subanillos e ideales. Anillos cocientes.-

Definición 2.7.- Un subconjunto S de un anillo $(R, +, \cdot)$ es un subanillo de R si con las mismas operaciones de R es S un anillo.

Por ejemplo, \mathbb{Z} es un subanillo del anillo de los números racionales $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. \mathbb{Q} es un subanillo del anillo de los números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Del mismo modo que en la Proposición 1.9 podemos establecer la siguiente:

Proposición 2.8.- Un subconjunto S de un anillo $(R, +, \cdot)$ es un subanillo suyo si y sólo si

- i) $1 \in S$
- ii) $\forall a, b \in S : a \cdot b \in S$
- iii) $\forall a, b \in S : a - b \in S \quad (a - b = a + (-b)) \text{ por definición}$

La última condición quiere decir que S es un subgrupo de $(R, +)$ (ver Corolario 1.10). Las otras dos nos aseguran que el producto es una operación binaria en S y que la unidad de R también lo es de S .

La demostración se hará como ejercicio consultando si se quiere el resultado análogo para subgrupos (ver pag. 24).

Uno quisiera ahora que, puesto que si S es un subanillo de $(R, +, \cdot)$ también es, en particular, un subgrupo de $(R, +)$, que el grupo cociente $(R/S, +)$ (ver Proposición 1.19) diera lugar a un anillo. La multiplicación en R/S debería estar definida a partir de la de R del modo $(a + S) \cdot (b + S) = a \cdot b + S$; claro que para que fuese correcta esta definición, si $a + S = a_1 + S$ entonces habría de ser $a \cdot b + S = a_1 \cdot b + S$; pero esto es equivalente a $a \cdot b - a_1 \cdot b \in S \Rightarrow (a - a_1) \cdot b \in S$. Desde luego $a - a_1 \in S$ pero b no tiene por qué pertenecer a S (a menos que $b + S$ sea la clase nula en el cociente). De esto, parece que necesitamos que se verifique la propiedad $\forall c \in S \quad \forall b \in R \quad c \cdot b \in S$ y también $b \cdot c \in S$. Pero no todo subanillo cumple esta propiedad como uno observa con un ejemplo, más todavía, si $(R, +, \cdot)$ es un anillo y S es un subanillo suyo que verifica tal propiedad, como $1 \in S$ tendríamos que

$\forall b \in R$ $b = b \cdot 1$, y en consecuencia $b \in S$, entonces $S = R$. No podemos por tanto esperar que el grupo cociente $(R/S, +)$ tenga estructura de anillo de manera natural.

Fijémonos en el ejemplo 3) de la introducción de este tema. $p\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ pero no es un subanillo suyo. Sin embargo $p\mathbb{Z}$ verifica que al multiplicar cualquier entero por un elemento suyo (un múltiplo de p) vuelve a dar un elemento suyo. Por otro lado ya hemos dicho que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un anillo, justamente con su suma usual y un producto natural: producto de clases = clase del producto. Esto nos hace pensar si esta situación sería generalizable y aparece entonces el concepto de ideal de un anillo como un subgrupo del grupo aditivo del anillo que verifica las condiciones precisas para poder construir a partir de él y del anillo un anillo cociente.

Definición 2.9.- Un ideal A de un anillo $(R, +, \cdot)$ es un subgrupo de $(R, +)$ que verifica la condición

$$\forall a \in A \text{ y } \forall b \in R : a \cdot b \in A \text{ y } b \cdot a \in A$$

Teniendo en cuenta el Corolario 1.10 podemos enunciar

Porposición 2.10.- Un subconjunto A de un anillo $(R, +, \cdot)$ es un ideal suyo si y sólo si verifica

i) $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 - a_2 \in A$

ii) $\forall a \in A \text{ y } \forall b \in R \quad a \cdot b \in A \text{ y } b \cdot a \in A.$

En un anillo R siempre existen dos 'ideales impropios' $A = \{0\}$ y $A = R$. Por otro lado, como hemos visto arriba, el único ideal

que es a la vez subanillo es $A = R$. Un ideal A de R que no sea impropio se dirá propio.

Proposición 2.11.- Sea A un ideal de un anillo $(R, +, \cdot)$. Consideramos en $R/A = \{r + A / r \in R\}$ las operaciones

$$(r + A) + (s + A) = (r + s) + A$$
$$(r + A) \cdot (s + A) = r \cdot s + A.$$

Entonces $(R/A, +, \cdot)$ es un anillo. Además, si R es conmutativo también lo es R/A .

Demostración. Por la Proposición 1.19 tenemos que $(R/A, +)$ es un grupo abeliano. Veamos que el producto en R/A está bien definido. En efecto, supongamos $r + A = r_1 + A$ y $s + A = s_1 + A$ entonces tenemos $r - r_1 \in A$ y $s - s_1 \in A$ y debemos ver $r \cdot s - r_1 \cdot s_1 \in A$. Para ello si es $r = r_1 + a$ y $s = s_1 + b$ con $a, b \in A$

$$r \cdot s = r_1 \cdot s_1 + r_1 \cdot b + a \cdot s_1 + a \cdot b \text{ lo que implica}$$

$$r \cdot s - r_1 \cdot s_1 = r_1 \cdot b + a \cdot s_1 + a \cdot b \text{ que es un elemento de } A.$$

Esta multiplicación en R/A es asociativa

$$\begin{aligned} ((r + A) \cdot (s + A)) \cdot (t + A) &= (r \cdot s + A) \cdot (t + A) = (r \cdot s) \cdot t + A = \\ &= r \cdot (s \cdot t) + A = (r + A) \cdot (s \cdot t + A) = (r + A) \cdot ((s + A) \cdot (t + A)) \end{aligned}$$

donde sólo hemos utilizado la definición del producto en R/A y que la multiplicación en R es asociativa.

Además si 1 es la unidad de R tenemos

$$(1 + A) \cdot (r + A) = 1 \cdot r + A = r + A$$

$$(r + A) \cdot (1 + A) = r \cdot 1 + A = r + A,$$

lo que implica que $1 + A$ es la unidad de R/A .

Por último tambien se verifican las dos propiedades distributivas

$$(r + A) \cdot [(s + A) + (t + A)] = (r + A) \cdot ((s + t) + A) = r \cdot (s + t) + A = \\ = r \cdot s + r \cdot t + A = (r \cdot s + A) + (r \cdot t + A) = (r + A) \cdot (s + A) + (r + A) \cdot (t + A).$$

$$[(r + A) + (s + A)] \cdot (t + A) = ((r + s) + A) \cdot (t + A) = (r + s) \cdot t + A = \\ = r \cdot s + s \cdot t + A = (r \cdot s + A) + (s \cdot t + A) = (r + A) \cdot (t + A) + (s + A) \cdot (t + A).$$

Expliquese como ejercicio cada uno de los pasos anteriores.

Si R es conmutativo tenemos

$$(r + A) \cdot (s + A) = r \cdot s + A = s \cdot r + A = (s + A) \cdot (r + A).$$

Particularizando el ejemplo 3) para $p = 4$, tenemos que el producto en $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3]\}$ viene dado por (ver pag. 40 para la suma)

.	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]
[2]	[2]	[0]	[2]
[3]	[3]	[2]	[1]

No es preciso poner los productos por la clase $[0]$ ya que por la Proposición 2.3 (i) : $[a] \cdot [0] = [0] \cdot [a] = [0]$ para todo $[a]$. Nótese que $[2] \cdot [2] = [0]$ y $[2] \neq [0]$, así que en un anillo pueden existir elementos no nulos que multiplicados den cero. Esta propiedad no pasa en todo anillo, por ejemplo no pasa en el anillo de los números enteros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Homomorfismos de anillos.-

- a) Sea S un subanillo de un anillo $(R, +, \cdot)$ y sea $i : S \rightarrow R$ la aplicación inclusión de S en R , entonces i verifica $i(a+b) = i(a) + i(b)$, $i(a.b) = i(a).i(b)$, $i(1) = 1 \quad \forall a, b \in S$.
- b) Sea A un ideal de un anillo $(R, +, \cdot)$ y sea p la aplicación $p : R \rightarrow R/A$, $p(r) = r + A \quad \forall r \in R$ entonces (ver Proposición 2.11) se verifica $p(r+s) = p(r) + p(s)$, $p(r.s) = p(r).p(s)$, $p(1) = 1 + A \quad \forall r, s \in R$ y donde 1 es la unidad de R .
- c) Considérese la aplicación $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(z) = \text{Real } z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (ver ejemplo c) pag. 33) entonces f verifica $f(z+z') = f(z) + f(z') \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}$ pero $f(z.z') \neq f(z).f(z')$.
- d) Para cada anillo R' podemos definir $f : \mathbb{Z} \rightarrow R'$ mediante $f(n) = n 1'$ siendo $1'$ la unidad de R' y donde se entiende que $n 1'$ es la "potencia" en el grupo $(R', +)$ de $1'$ y "exponente" $n \in \mathbb{Z}$ (ver pag. 28). Entonces f es una aplicación y cumple $f(n+m) = f(n) + f(m)$, $f(n.m) = f(n).f(m)$, $f(1) = 1'$ $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ (compruébese).

Los ejemplos a), b) y d) nos muestran aplicaciones entre anillos que respetan las operaciones. Todos son homomorfismos de anillos según la siguiente definición. El ejemplo c) es una aplicación que es un homomorfismo "de grupos" entre $(\mathbb{C}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$, pero no "de anillos" entre $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Definición 2.12.- Dados dos anillos $(R, +, \cdot)$ y $(R', +, \cdot)$, un homomorfismo (de anillos) es una aplicación $f : R \rightarrow R'$ que verifica las tres siguientes condiciones:

- i) $f(r+s) = f(r) + f(s)$
- ii) $f(r.s) = f(r).f(s)$
- iii) $f(1) = 1'$

para todos $r, s \in R$, donde 1 y $1'$ son las respectivas unidades de R y R' .

Un homomorfismo inyectivo se dirá monomorfismo, un homomorfismo sobreíectivo se dirá epimorfismo y un homomorfismo biyectivo, isomorfismo. Un homomorfismo de un anillo en sí mismo se dirá endomorfismo; un endomorfismo biyectivo se llama automorfismo.

Es conveniente cuando uno habla de homomorfismo ponerle el apellido "de grupos" o bien "de anillos", según se trate, para que no haya ambigüedad de notación, como pudiera ocurrir en el ejemplo c) de la pag. anterior.

El ejemplo a) es un monomorfismo de anillos. El ejemplo b) es un epimorfismo de anillos. El ejemplo c) es un epimorfismo de grupos pero no de anillos. Por último, el ejemplo d) es un homomorfismo de anillos que, en general no es de ningún tipo especial, pues esto dependerá de quien sea R' (como veremos más adelante).

Obsérvese que un homomorfismo de anillos es en particular un homomorfismo (de grupos) entre los correspondientes grupos aditivos. Así que todas las propiedades anteriores para homomorfismos de grupos son ahora también válidas. De hecho van a ser aplicadas en algunos resultados a continuación.

Proposición 2.13.- Sean $(R, +, \cdot)$, $(R', +, \cdot)$, $(R'', +, \cdot)$ anillos y
 $f : R \longrightarrow R'$, $g : R' \longrightarrow R''$ dos homomorfismos de anillos.
Entonces $g \circ f : R \longrightarrow R''$ es un homomorfismo de anillos.

Demostración. Por la Proposición 1.22 tenemos que $g \circ f$ verifica
 i) de la Definición 2.12. Además,

$$(g \circ f)(r \cdot s) = g(f(r \cdot s)) = g(f(r) \cdot f(s)) = g(f(r)) \cdot g(f(s)) = \\ = (g \circ f)(r) \cdot (g \circ f)(s) \quad \forall r, s \in R$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1') = 1''$$

donde 1 , $1'$ y $1''$ son las respectivas unidades de R , R' y R'' .
 Así se concluye la prueba.

Corolario 2.14.- La composición de dos monomorfismos de anillos (epimorfismos de anillos) es otro monomorfismo (epimorfismo).
La composición de dos isomorfismos es otro isomorfismo.

La Proposición 1.24 se puede escribir ahora

Proposición 2.15.- Sea $f : R \longrightarrow R'$ un homomorfismo de anillos.
Entonces:

- i) $f(0) = 0'$ (0 y $0'$ los resp. "ceros" de R y R')
- ii) $f(-r) = -f(r) \quad \forall r \in R$

Definición 2.16.- Dado un homomorfismo $f : R \longrightarrow R'$, definimos su núcleo, $\text{Ker } f$, como

$$\text{Ker } f = \{a \in R / f(a) = 0'\} = f^*(\{0'\}).$$

Es decir, el núcleo de un homomorfismo de anillos es el mismo que el núcleo de este considerado sólo como homomorfismo entre

los correspondientes grupos aditivos. En la Proposición 1.26 probamos que el núcleo de un homomorfismo de grupos era un subgrupo normal del grupo dominio, ahora para el núcleo de un homomorfismo de anillos tenemos

Proposición 2.17.- $\text{Ker } f$ es un ideal de R .

Demostración. $\text{Ker } f$ es un subgrupo de $(R, +)$ como ya hemos razonado. Además, si $a \in \text{Ker } f$ y $r \in R$ se verifica

$$f(a.r) = f(a).f(r) = 0'.f(r) = 0'$$

$$f(r.a) = f(r).f(a) = f(r).0' = 0'$$

por i) de la Proposición 2.3, con lo cual $a.r$ y $r.a$ pertenecen a $\text{Ker } f$.

Proposición 2.18.- Dado un homomorfismo de anillos $f : R \longrightarrow R'$, su imagen $\text{Im } f$ (como aplicación) es un subanillo de R' .

Demostración. En primer lugar tenemos que $\text{Im } f$ es un subgrupo de $(R', +)$ (ver Proposición 1.27). Como $f(1) = 1'$ tenemos $1' \in \text{Im } f$. Finalmente, dados $r', s' \in \text{Im } f$ existen $r, s \in R$ tales que $f(r) = r'$, $f(s) = s'$ y por tanto $r'.s' = f(r).f(s) = f(r.s) \in \text{Im } f$. Aplicando ahora la caracterización de la Proposición 2.8, $\text{Im } f$ es un subanillo de R' .

Análogamente a la Proposición 1.28 podemos enunciar

Proposición 2.19.- Dado un homomorfismo de anillos $f : R \longrightarrow R'$, tenemos

i) f es inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$

ii) f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \text{Im } f = R'$.

Proposición 2.20.- Sean $(R, +, \cdot)$, $(R', +, \cdot)$ dos anillos y
 $f : R \longrightarrow R'$ un homomorfismo entre ellos. Entonces

$$f = i \circ b \circ p$$

donde $p : R \longrightarrow R/\text{Ker } f$, $p(r) = r + \text{Ker } f \quad \forall r \in R$

$b : R/\text{Ker } f \longrightarrow \text{Im } f$, $b(r + \text{Ker } f) = f(r) \quad \forall r \in R$

$i : \text{Im } f \longrightarrow R'$, $i(r') = r' \quad \forall r' \in \text{Im } f$

son respectivamente, epimorfismo, isomorfismo y monomorfismo.

Demostración. Aplicando la Proposición 1.29 a f considerado como homomorfismo entre los grupos $(R, +)$ y $(R', +)$, tenemos que $f = i \circ b \circ p$, donde las aplicaciones en que se descompone f son homomorfismos de grupos entre los grupos aditivos correspondientes y que i es inyectiva, b biyectiva y p sobreyectiva. Por otro lado, en los ejemplos a) y b) de la pag. 57 se ve que i y p son homomorfismos de anillos. Ahora sólo falta ver que b verifica ii) e iii) de la Definición 2.12. En efecto,

$$\begin{aligned} b((r + \text{Ker } f).(s + \text{Ker } f)) &= b(r.r' + \text{Ker } f) = f(r.r') = \\ &= f(r).f(r') = b(r + \text{Ker } f).b(r' + \text{Ker } f) \\ b(1 + \text{Ker } f) &= f(1) = 1'. \end{aligned}$$

Nosotros podríamos hacer ahora una discusión similar a la hecha para grupos en las pag. 38 y 39. Así, dados dos anillos $(R, +, \cdot)$ y $(R', +, \cdot)$, decimos que R es isomorfo a R' , $R \cong R'$, si existe $f : R \longrightarrow R'$ que es un isomorfismo de anillos. En toda colección de anillos \mathcal{R} se define de esta forma una relación de

equivalencia, la relación "ser isomorfo con" entre los anillos de \mathcal{R} . El resultado anterior nos dice que el anillo cociente $R/\text{Ker } f$ y el subanillo $\text{Im } f$ de R' son isomorfos como anillos. Este hecho se conoce con el nombre de "el teorema de isomorfía de anillos".

Para acabar es epígrafe vamos a ver que a cada anillo se le puede asociar un número natural, llamado su característica, que tiene bastante utilidad a la hora de "distinguir" anillos.

Dado un anillo $(R', +, \cdot)$ podemos definir un homomorfismo de anillos $f : \mathbb{Z} \longrightarrow R'$ mediante $f(n) = n \cdot 1'$, donde $1'$ es la unidad de R' (ver ejemplo d) en pag. 57). Su núcleo $\text{Ker } f = \{n \in \mathbb{Z} / f(n) = 0'\} = \{n \in \mathbb{Z} / n \cdot 1' = 0'\}$ es un ideal de \mathbb{Z} por la Proposición 2.17. Pero todo ideal de \mathbb{Z} es de la forma $p\mathbb{Z}$ con $p \in \mathbb{N}^*$ (ver problema 12 pag. 69). De modo que o bien f es un monomorfismo ($p = 0$) o bien f no lo es ($p > 0$). Ahora damos la siguiente

Definición 2.21.— Dado un anillo $(R', +, \cdot)$ al entero no negativo p establecido en la discusión anterior lo llamaremos la característica de R' .

Nótese que si R' tiene característica $p > 0$ eso quiere decir que p es el mínimo entero positivo tal que la unidad $1'$ de R' sumada consigo misma p veces es igual al cero $0'$ de R' , y que cuando tal entero positivo no existe R' tiene característica 0.

El anillo de los números enteros tiene característica 0.
El anillo $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tiene característica p .

Como $\text{Im } f$ es un subanillo de R' isomorfo con $\mathbb{Z}/\text{Ker } f$, tenemos que R' tiene característica 0 si y sólo si $\text{Im } f \cong \mathbb{Z}$, y R' tiene característica p si y sólo si $\text{Im } f \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($p > 0$). Dicho de otro modo, que R' tiene característica 0 quiere decir que R' contiene un subanillo isomorfo con \mathbb{Z} , y que tiene característica $p > 0$ que contiene un subanillo isomorfo con $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Si dos anillos son isomorfos entonces tienen la misma característica. Así este número que hemos asociado a cada anillo nos va a servir para distinguir entre dos anillos dados. Por ejemplo, de lo anterior se deduce que si R y R' son dos anillos con distinta característica nunca pueden ser isomorfos. Por otro lado, dos anillos con igual característica no tienen porque ser isomorfos, por ejemplo, la característica del anillo de los números enteros es 0 y la del anillo de los racionales también 0, sin embargo estos dos anillos no son isomorfos ya que todo número racional no nulo tiene inverso para el producto (\mathbb{Q} es un cuerpo en el sentido que diremos más adelante) y esta propiedad, que se conserva por isomorfismos de anillos, no la posee \mathbb{Z} .

Anillos de integridad. Cuerpos.-

Consideremos el anillo $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Una propiedad conocida suya es la siguiente:

Si $n, m \in \mathbb{Z}$ son tales que $n \cdot m = 0$ entonces $n = 0$ o $m = 0$.

No todos los anillos verifican esta propiedad, por ejemplo, en $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tenemos $[2] \neq [0]$ y $[2] \cdot [2] = [0]$ (ver pag. 56).

Estos ejemplos dan pie a la siguiente

Definición 2.22.- Dos elementos a y b de un anillo $(R, +, \cdot)$ se dicen divisores de cero cuando:

$$a \cdot b = 0 \quad o \quad b \cdot a = 0$$

y $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Un anillo conmutativo sin divisores de cero se llama un anillo de integridad.

Un anillo conmutativo R , no trivial, es un anillo de integridad si y sólo si se verifica:

$$a \cdot b = 0, \quad a, b \in R, \text{ implica } a = 0 \quad o \quad b = 0.$$

El anillo de los números enteros es un anillo de integridad, mientras que el anillo $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tiene divisores de cero.

En el caso de que tengamos un anillo conmutativo, la definición 2.22 se escribe más sencilla. Sería un buen ejercicio para qué valores de p tiene el anillo de los enteros módulo p (ver pag. 48) divisores de cero.

El conjunto de todas las aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, con la suma definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y con el producto $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es un anillo, (ver prob. 4, pag. 68, donde podemos tomar $X = \mathbb{R}$) con divisores de cero. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 0$ cuando $x \geq 0$ y $f(x) = x$ cuando $x < 0$; $g(x) = x$ cuando $x \geq 0$, $g(x) = 0$ cuando $x < 0$. Notemos que $f \cdot g$ es el cero del anillo conmutativo $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, por tanto f y g son divisores de cero en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Anillos no conmutativos con divisores de cero se darán en pag. 140.

Si dos anillos son isomorfos, y uno de ellos tiene divisores de cero, entonces necesariamente tambien tiene el otro divisores de cero. Podemos decir por tanto que "no tener divisores de cero" es una propiedad que se conserva por isomorfismos de anillos.

En la pag. anterior razonamos que el anillo de los enteros y el de los racionales no son isomorfos. Sin embargo ambos son anillos de integridad.

Una caracterización para que un anillo conmutativo sea de integridad se da en la siguiente

Proposición 2.23.- Un anillo conmutativo (no trivial) R es un anillo de integridad si y sólo si verifica la siguiente ley de simplificación

$$a, b, c \in R, a \neq 0, a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c.$$

Demostración. Si R es de integridad $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a \cdot (b - c) = 0$ y como $a \neq 0$ ha de ser $b - c = 0$, es decir $b = c$. Recíprocamente, sean $c, d \in R$ tales que $c \cdot d = 0$ y, por ejemplo, con $c \neq 0$. Podemos poner $c \cdot d = c \cdot 0$, y por la ley de simplificación $d = 0$.

Definición 2.24.- Sea $(K, +, \cdot)$ un anillo no trivial que verifica la siguiente condición

$$\forall a \in K, a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \in K \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

entonces se dice que $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo. De otro modo, un cuerpo K es un anillo en el que $(K - \{0\}, \cdot)$ es un grupo. Un cuerpo se dirá conmutativo si este grupo multiplicativo lo es (si es un anillo conmutativo).

Los números enteros no son un cuerpo. Si lo son los racionales $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, los reales $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y los complejos $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Además, uno observa aquí que \mathbb{Q} es un subanillo de \mathbb{R} , por eso se dice que es un subcuerpo suyo según la siguiente:

Definición 2.25.- Dado un cuerpo $(K, +, \cdot)$, un subcuerpo suyo es un subanillo F que también es un cuerpo.

Proposición 2.26.- Un subconjunto F de un cuerpo $(K, +, \cdot)$ es un subcuerpo suyo si y sólo si cumple

i) $\forall a, b \in F : a - b \in F$

ii) $\forall a, b \in F - \{0\} : a \cdot b^{-1} \in F$.

Vamos a hacer ahora algunas observaciones. Todo cuerpo conmutativo es un anillo de integridad, como se deduce de la Proposición 2.23; $a.b = a.c$, $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$ y entonces $a^{-1} \cdot (a.b) = a^{-1} \cdot (a.c) \Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$, es decir $b = c$. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo de integridad y no es un cuerpo. Por otro lado, es facil ver que todo subanillo de un anillo de integridad es tambien un anillo de integridad, pero no todo subanillo de un cuerpo es tambien un cuerpo. \mathbb{Z} es un subanillo del cuerpo \mathbb{Q} y él no es un cuerpo.

Con respecto a los ideales de un cuerpo tenemos

Proposición 2.27.- Un anillo conmutativo $(R, +, \cdot)$ no trivial es un cuerpo si y sólo si sus únicos ideales son los impropios $\{0\}$ y R .

Demostración. Si R es un cuerpo y A es un ideal suyo distinto de $\{0\}$ entonces $\exists a \in A$ con $a \neq 0$, pero este elemento a tiene inverso a^{-1} y así $1 = a \cdot a^{-1} \in A$. Esto lleva a que $\forall r \in R : r = r \cdot 1 \in A$ y entonces $A = R$. Supongamos ahora que R no tiene ideales propios. Sea $a \in R$ $a \neq 0$ y ponemos $A = \{a \cdot b / b \in R\}$ que es un ideal de R . Como $a \in A$ resulta que $A \neq \{0\}$, por tanto $A = R$. Esto demuestra que $1 \in A$, y por como se ha definido A tenemos que $\exists b \in R$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$, entonces $b = a^{-1}$ y como a es arbitrario tenemos que todo elemento de $R - \{0\}$ tiene inverso.

Definición 2.28.- Si $(K, +, \cdot)$ y $(K', +, \cdot)$ son dos cuerpos, un homomorfismo de K en K' es una aplicación $f : K \longrightarrow K'$ que es un homomorfismo de anillos.

La inclusión $i : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de cuerpos "inyectivo", es decir, un monomorfismo. Este caso no es ais-

lado como lo muestra la siguiente

Proposición 2.29.- Sean $(K, +, \cdot)$, $(K', +, \cdot)$ dos cuerpos conmutativos y $f : K \longrightarrow K'$ un homomorfismo, entonces f es inyectiva.

Demostración. Sea $\text{Ker } f$ el núcleo de f , que sabemos por la Proposición 2.17 que es un ideal de K . Ahora bien, según la Proposición 2.27, $\text{Ker } f = \{0\}$ en cuyo caso f es inyectiva o bien $\text{Ker } f = K$, pero esto último no se puede dar ya que en este caso $f(1) = 0' = 1'$, y en consecuencia K' no sería un cuerpo (el anillo trivial no es un cuerpo).

Corolario 2.30.- Un homomorfismo entre dos cuerpos conmutativos es biyectivo si y sólo si es sobreyectivo.

Para terminar el tema notemos que la descomposición de la Proposición 2.20 se puede aplicar sin más a un homomorfismo entre dos cuerpos conmutativos K y K' , pero presenta una particularidad. Como $f : K \longrightarrow K'$ es siempre un monomorfismo, entonces la proyección $p : K \longrightarrow K/\text{Ker } f = K/\{0\}$ es un isomorfismo. ($K/\{0\}$ es un cuerpo isomorfo a K) e $\text{Im } f$ es un subcuerpo de K' . El correspondiente teorema de isomorfía se enuncia diciendo que K es isomorfo a $\text{Im } f$ (ver pag. 62).

PROBLEMAS

- 1.- Encontrar todos los subanillos e ideales del anillo de los números enteros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
- 2.- Sea $R = \{m + n\sqrt{2} / m, n \in \mathbb{Z}\}$. Demostrar que R es un subanillo de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. ¿Es R un anillo de integridad?

3.- Sean $(R, +, \cdot)$, $(R', +, \cdot)$ dos anillos. Consideramos en $R \times R'$ las dos siguientes operaciones

$$(r, r') + (s, s') = (r + s, r' + s')$$

$$(r, r').(s, s') = (r.s, r'.s').$$

Demostrar que con ellas $R \times R'$ es un anillo y que las aplicaciones $p : R \times R' \longrightarrow R$, $p(r, r') = r$ y $p' : R \times R' \longrightarrow R'$, $p'(r, r') = r'$ son epimorfismos de anillos. Generalizar a un producto de n anillos y dotar, según esto, a \mathbb{R}^n de estructura de anillo (ver prob. 4, pag. 42).

4.- Demostrar que el conjunto de todas las aplicaciones de un conjunto X en un anillo R , $\mathfrak{A}(X, R)$ es un anillo cuando en él se definen las operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \forall x \in X$$

para $f, g \in \mathfrak{A}(X, R)$ ¿ Es siempre $\mathfrak{A}(X, R)$ un anillo de integridad ? (ver prob. 8, pag. 43).

5.- Sea $(G, +)$ un grupo abeliano y sea $\text{End}(G)$ el conjunto de todos los endomorfismos del grupo $(G, +)$. Demostrar que $\text{End}(G)$ es un anillo para la suma y composición de aplicaciones, esto es

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in G$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in G.$$

Encontrar un grupo abeliano concreto tal que el anillo así construido a partir de él no sea commutativo.

6.- Se considera el anillo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ construido según el problema 3 anterior. Demostrar que este anillo es isomorfo como tal con $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

7.- Sean $(R, +, \cdot)$, $(R', +, \cdot)$ dos anillos y $f : R \longrightarrow R'$ un homomorfismo de anillos. Si S es un subanillo de R probar que $f_*(S)$ es un subanillo de R' . Si S' es un subanillo de R' probar que $f^*(S')$ es un subanillo de R , ¿ se pueden establecer análogos resultados para ideales ?

8.- Demostrar que todo subanillo de un cuerpo comunitativo es un anillo de integridad (ver pag. 66).

9.- Demostrar que todo anillo de integridad finito es un cuerpo. Aplicar esto para demostrar que el anillo $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un cuerpo si y sólo si p es primo. Poner ejemplos.

10.- Definamos en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ las dos siguientes operaciones

$$(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$$

$$(m, n) \cdot (m', n') = (m \cdot m' + 2 \cdot n \cdot n', m \cdot n' + n \cdot m').$$

Probar que con ellas $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es un anillo. ¿ Es isomorfo al anillo R del prob. 2, pag. 67 ? Si consideramos tambien en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la estructura de anillo "producto" del prob. 3, pag. 68 , ¿ es este anillo isomorfo con el definido aquí ?

11.- Demostrar que dos anillos que tengan dos elementos son siempre isomorfos.

12.- Un anillo comunitativo $(R, +, \cdot)$ se dice principal si todo ideal suyo es de la forma $a.R = \{a.r / r \in R\}$ para algún $a \in R$. Demostrar que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo principal (ver prob. 1 pag. 67). Demostrar que el anillo de polinomios con coeficientes reales $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ es tambien principal. Dar un ejemplo de un anillo comunitativo que no sea principal.

13.- Demostrar que hay un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Demostrar que no puede existir ningún homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

14.- (Ejemplo de un cuerpo no conmutativo). Sea \mathbb{C} el cuerpo de los números complejos. Definimos un conjunto \mathbb{H} a partir de él por $\mathbb{H} = \{z + j w / z, w \in \mathbb{C}\}$ donde j no pertenece a \mathbb{C} . (\mathbb{H} es coordinable con $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$). En \mathbb{H} definimos una suma y un producto por

$$(z_1 + j z_2) + (w_1 + j w_2) = (z_1 + w_1) + j(z_2 + w_2)$$
$$(z_1 + j z_2) \cdot (w_1 + j w_2) = (z_1 \cdot w_1 - \bar{z}_2 \cdot w_2) + j(\bar{z}_1 \cdot w_2 + z_2 \cdot w_1)$$

donde $z_1 + w_1$ y $z_1 \cdot w_1$ es la suma y el producto usual en \mathbb{C} de z_1 y w_1 , y para cada $z \in \mathbb{C}$, \bar{z} es el complejo conjugado de z . (En particular $j \cdot j = -1$, $z \cdot j = j \cdot \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$). Demostrar que \mathbb{H} con estas operaciones es un cuerpo no conmutativo y que \mathbb{C} se puede considerar como el subcuerpo de \mathbb{H} formado por $z + j 0, z \in \mathbb{C}$. (\mathbb{H} se llama el cuerpo de los cuaternios de Hamilton).

15.- Dotar a \mathbb{R}^2 con una suma y un producto de tal forma que sea un anillo isomorfo a \mathbb{C} (y por tanto un cuerpo) mediante la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, f(x,y) = x + iy \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. ¿ Cómo se puede distinguir esta estructura de anillo sobre \mathbb{R}^2 de la dada en el prob. 3, pag. 68 ?

16.- Sea R un anillo conmutativo y sea $A \neq R$ un ideal de R . Diremos que A es primo si cumple $a \cdot b \in A \Rightarrow a \in A \text{ o } b \in A$. Demostrar que en \mathbb{Z} un ideal es primo si y sólo si es de la forma $p\mathbb{Z}$ siendo p precisamente un número primo. Probar que A es primo si y sólo si el anillo cociente R/A es de integridad. Diremos que $A \neq R$ es maximal si no está propiamente contenido en ningún otro ideal de R . Probar que un ideal A es maximal si y sólo si R/A es un cuerpo.

LECCION 3^a: ESPACIOS VECTORIALES.

Introducción.-

1) Sea V el conjunto de los vectores libres de un plano; es decir, el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de la relación de equipotencia entre los vectores de un plano. Uno puede sumar vectores libres utilizando representantes con "origen común" de cada clase. En concreto, si $\vec{v} = C(\vec{AB})$, $\vec{u} = C(\vec{CD})$, $\vec{v} + \vec{u}$ se obtiene como la clase de la suma de dos vectores, uno en cada clase, con origen común. Esta suma "+" de vectores libres está así bien definida y con ella V es un grupo abeliano. Además se puede definir una multiplicación de números reales por vectores libres, representada $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, $(a, \vec{v}) \longmapsto a \cdot \vec{v}$, como sigue: si se supone $\vec{v} = C(\vec{AB})$, entonces $a \cdot \vec{v} = C(a \cdot \vec{AB})$, donde $a \cdot \vec{AB}$ es el producto del número real a por el vector del plano \vec{AB} ($a \cdot \vec{AB}$ es el único vector que con origen en A tiene longitud $|a| \cdot \text{longitud } \vec{AB}$, siendo $|a|$ el valor absoluto de a , la misma dirección que \vec{AB} y sentido igual si $a > 0$, opuesto si $a < 0$; y si $a = 0$ entonces $a \cdot \vec{AB} = \vec{AA}$ es el vector cero "en A "). Esta ley cumple las siguientes propiedades:

- i) $a \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{u}$
- ii) $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$
- iii) $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$
- iv) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

para cualesquiera $\vec{v}, \vec{u} \in V$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Nótese que en estas propiedades están involucradas las operaciones "suma de vectores libres", "suma de números reales", "producto de números reales" y "producto de números reales por vectores".

2) Sean \vec{e}_1 y \vec{e}_2 dos vectores libres, ambos no nulos y con distinta dirección. Entonces (compruébese) $\forall \vec{v} \in V \exists !(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$:
 $\vec{v} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$; es decir, la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$ definida por $f(a_1, a_2) = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$ es biyectiva. Mediante esta biyección podemos trasladar la "suma de vectores libres" y el "producto de números reales por vectores libres de V " a una suma de pares de números reales y un producto de números reales por pares mediante

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = f^{-1}(f(a_1, a_2) + f(b_1, b_2))$$

$$a \cdot (a_1, a_2) = f^{-1}(a \cdot f(a_1, a_2))$$

de donde

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$a \cdot (a_1, a_2) = (a \cdot a_1, a \cdot a_2)$$

lo cual implica que esta definición de suma y producto por números reales en \mathbb{R}^2 no depende de la elección concreta de \vec{e}_1 , \vec{e}_2 (con tal que verifiquen las propiedades arriba indicadas). Con esta suma podemos ver que \mathbb{R}^2 es un grupo abeliano; en efecto, es claro que "+" es una operación binaria en \mathbb{R}^2 , además la asociatividad se verifica "componente a componente" por tener esta propiedad la suma en \mathbb{R} . El elemento neutro es $(0,0)$, y el simétrico de (a_1, a_2) es $(-a_1, -a_2)$, respectivamente se llaman el "cero", y el "opuesto" (del par (a_1, a_2)). Por último decir que la propiedad conmutativa se cumple en \mathbb{R}^2 porque la suma es conmutativa en \mathbb{R} (explíquese los detalles). Además la multiplicación por escalares verifica formalmente las propiedades i), ii), iii) e iv) de la página anterior. De esta forma hemos pasado de un ejemplo geométrico a uno algebraico (los pares ordenados de números reales son una representación algebraica de los vectores libres de un plano).

Uno observa enseguida que estas operaciones en \mathbb{R}^2 se pueden fácilmente generalizar a \mathbb{R}^n poniendo:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$$

$$a \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a \cdot a_1, a \cdot a_2, \dots, a \cdot a_n).$$

Así, $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo abeliano y este producto de escalares por listas ordenadas de n números reales satisface i), ii), iii) e iv) como en el caso $n = 2$. Cuando se hacen estas verificaciones, se va uno dando cuenta que si en lugar de si en lugar de \mathbb{R} se toma \mathbb{C} (el cuerpo de los números complejos) podemos hacer todas estas afirmaciones para \mathbb{C}^n , más todavía, las operaciones descritas arriba para listas de n elementos de un cuerpo K y el producto de "números" de K por listas dotan a K^n de estructura de grupo abeliano y la multiplicación $K \times K^n \longrightarrow K^n$ verifica las mismas propiedades que antes. Hagamos notar que este natural n que aparece aquí bien pudiera ser 1; en este caso se confunden "suma de listas de 1 elemento" con la suma del cuerpo K y "producto de números de K por listas" con el producto del cuerpo K .

3) Consideremos ahora la ecuación diferencial típica de los movimientos armónicos

$$f''(x) + f(x) = 0$$

donde la "elongación" f es una función dos veces derivable del "parámetro tiempo" x de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Sea S el conjunto de todas las aplicaciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivables 2 veces y que verifican esta ecuación. Podemos sumar elementos de S poniendo $\forall f, g \in S : (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Con esta suma S es un grupo abeliano, en efecto, se trata de un subgrupo del grupo de todas las aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que es claramente abeliano. Además, podemos multi-

plicar números reales por elementos de S como sigue: para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada $f \in S$, ponemos $a.f$ como la aplicación de \mathbb{R} en \mathbb{R} definida por $(a.f)(x) = a.f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$; es decir, se define este producto utilizando el producto usual de números reales. Es un fácil ejercicio comprobar que $a.f \in S \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ y } \forall f \in S$. Además, utilizando las propiedades de la suma y el producto usuales de números reales, uno puede demostrar que de nuevo se verifican ahora propiedades análogas a i), ii), iii) e iv) del primer o segundo ejemplos.

Definición de espacio vectorial. Primeras propiedades.-

Los tres ejemplos anteriores tienen en común que en todos hay definida una operación binaria "suma" respecto de la cual tienen estructura de grupo abeliano. Además se pueden multiplicar números de un cuerpo por elementos del grupo abeliano, verificando esta multiplicación propiedades formalmente idénticas en todos los casos y que nos explicitan relaciones entre las cuatro siguientes operaciones: las dos del cuerpo, la suma del grupo abeliano y la multiplicación de números del cuerpo por elementos del grupo abeliano. La abstracción de todas estas propiedades da lugar a lo que entenderemos por un "espacio vectorial sobre un cuerpo".

Definición 3.1.- Un espacio vectorial sobre un cuerpo $(K, +, \cdot)$ es un grupo abeliano $(V, +)$ junto con una aplicación $K \times V \longrightarrow V$, $(a, x) \longmapsto a.x$, que verifica las siguientes propiedades:

- i) $a.(x + y) = a.x + a.y$
- ii) $(a + b).x = a.x + b.x$
- iii) $(a.b).x = a.(b.x)$
- iv) $1.x = x$

para cualesquiera $a, b \in K$ y $x, y \in V$, y donde 1 es la unidad de K .

Debido al primer ejemplo de la introducción, a los elementos de V se les llama vectores y a los de K escalares; con ello, a la suma en V se le dice suma de vectores, a la suma y producto en K respectivamente suma de escalares y producto de escalares. A la aplicación $K \times V \longrightarrow V$ (que no es una ley de composición interna) se le llama la multiplicación de escalares por vectores.

Las propiedades i) e ii) se llaman distributivas; la iii) se llama pseudoasociativa y la iv) modular. Todas juntas nos dan las relaciones que hay entre las cuatro operaciones que encierra esta definición.

Nosotros supondremos, aunque para lo anterior no es preciso, que el cuerpo de escalares es siempre commutativo. En el caso de que $K = \mathbb{R}$ se dirá que se trata de un espacio vectorial real; en el caso $K = \mathbb{C}$ de un espacio vectorial complejo.

Es preciso que apuntemos que en la definición de espacio vectorial sobre K es muy importante el cuerpo K . No tiene sentido decir el espacio vectorial V , omitiendo quien es K , pues muchos grupos abelianos $(V,+)$ pueden ser espacios vectoriales sobre distintos cuerpos "de diversa forma" y por tanto, con distintas propiedades. Por ejemplo, el grupo aditivo de los números complejos $(\mathbb{C},+)$ es, de manera natural, un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , y considerando los números reales como complejos de parte imaginaria nula, también se puede contemplar como un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . En el primer caso el espacio vectorial resultante tiene la propiedad de que elegidos dos vectores arbitrarios siempre existe un escalar (complejo) que multiplicado por uno de ellos nos da el otro. Si tomamos ahora los vectores $1 + 0i$, $0 + 1i$ resulta que no existe ningún escalar real que multiplicado por uno nos de como resultado el otro. Esta propiedad claramente distingue estos dos espacios vecto-

riales. Por todo ello, para explicitar bien el cuerpo pondremos $V(K)$ si V es un espacio vectorial sobre K .

En los ejemplos precedentes tenemos que, si K es un cuerpo, K^n es un espacio vectorial sobre K (incluso si $n = 1$). Ahora bien, si K' es un subcuerpo de K es claro que K^n tambien es un espacio vectorial sobre K' . Esto generaliza las anteriores consideraciones sobre los espacios vectoriales $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Más aún, si V es un espacio vectorial sobre K y K' es un subcuerpo de K , entonces V tambien es un espacio vectorial (\neq distinto!) sobre K' . Como consecuencia, si V es un espacio vectorial complejo tambien es un espacio vectorial real y la multiplicación de un escalar real a por un vector $x \in V$ está definida por $a.x = (a + 0i).x$. Podriamos tambien preguntarnos cuando un espacio vectorial real puede ser considerado como complejo. La respuesta más adelante.

Como todo espacio vectorial sobre un cuerpo es, en particular, un grupo abeliano respecto a la "suma de vectores", resulta que todas las propiedades conocidas para estos se trasladan sin más a la suma de vectores. Por ejemplo, el vector cero es único (como neutro de la suma), para cada vector x , su opuesto $-x$ está univocamente determinado por aquel, etc. Además, como consecuencias de la Definición 3.1 tambien tenemos:

Proposición 3.2.- Sea V un espacio vectorial sobre K , entonces se verifican

- i) $0.x = 0, a.0 = 0 \quad \forall x \in V, \forall a \in K$.
- ii) Si $a.x = 0$ entonces $a = 0$ o $x = 0$
- iii) $(-a).x = -a.x = a.(-x) \quad \forall a \in K, \forall x \in V$.

Demostración. Se tiene $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x$ por ii) de la Definición 3.1, pero esta igualdad implica $0.x = 0$ utilizando la ley simplificativa del grupo $(V, +)$. Por otro lado $a.0 = a.(0+0) = a.0+a.0$

por i) de la misma definición. De donde $a \cdot 0 = 0$. Para ii) consideremos $a \cdot x = 0$ y $a \neq 0$, entonces $\exists a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$; así, $a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot 0 = 0$ y por el axioma iii) de la definición 3.1, $a^{-1} \cdot (a \cdot x) = (a^{-1} \cdot a) \cdot x = 0$, de donde $1 \cdot x = 0$, y por la propiedad modular $x = 0$. Finalmente, teniendo en cuenta que $0 = a + (-a)$ resulta $0 = 0 \cdot x = (a + (-a)) \cdot x = a \cdot x + (-a) \cdot x$, lo que implica $(-a) \cdot x = -a \cdot x$. El resto se hará como ejercicio.

Subespacios vectoriales: suma, intersección y cocientes.-

Definición 3.3.- Sea V un espacio vectorial sobre K . Un subconjunto U de V se dirá que es un subespacio vectorial de $V(K)$ si al restringir las operaciones de $V(K)$ a U resulta ser U un espacio vectorial sobre K . En otras palabras, $U \subset V$ es un subespacio vectorial suyo si y sólo si U es un subgrupo del grupo abeliano $(V, +)$ y se cumple que $\forall a \in K$ y $\forall x \in U : a \cdot x \in U$.

Un espacio vectorial $V(K)$ siempre tiene dos subespacios "improperios" $U = \{0\}$ y $U = V$. Otro subespacio cualquiera de $V(K)$ se dirá "propio".

Si consideramos como V los vectores libres de un plano y U está formado por aquellos vectores libres con una dirección fija, resulta ser U un subespacio de V . Si $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ y $U = \{z \in \mathbb{C} / \text{Real}(z) = 0\}$ entonces U es un subespacio de $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, (nótese que U no es un subespacio de $\mathbb{C}(\mathbb{C})$).

Proposición 3.4.- Un subconjunto U de un espacio vectorial $V(K)$ es un subespacio suyo si y sólo si

$$1. \quad \forall x, y \in U \quad x + (-y) \in U$$

$$2. \quad \forall a \in K \text{ y } \forall x \in U \quad a \cdot x \in U$$

La demostración es sencilla si uno se da cuenta que 1. es equivalente a que U sea un subgrupo de $(V, +)$.

Como consecuencia de refundir 1. y 2. tenemos

Corolario 3.5.- Un subconjunto U de un espacio vectorial V(K) es un subespacio suyo si y sólo si

$$\forall a, b \in K, \forall x, y \in U : a.x + b.y \in U$$

Demostración.- Está claro que si U es un subespacio vectorial de V(K) se cumple esta condición. Recíprocamente, si tomamos $a = 1$, $b = -1$, tenemos $x + (-y) \in U$, y si tomamos $a \in K$ cualquiera y $b = 0$, resulta $a.x \in U$. Ahora por la Proposición 3.4 se concluye que U es un subespacio vectorial de V(K).

Proposición 3.6.- Sean U y W dos subespacios vectoriales de V(K).

Entonces: i) su intersección $U \cap W$ es un subespacio de V(K).

ii) su suma $U + W = \{x + y / x \in U, y \in W\}$ es un subespacio de V(K).

Demostración.- En efecto, si $x, y \in U \cap W$ y $a, b \in K$ entonces el vector $a.x + b.y$ pertenece tanto a U como a W y por tanto a $U \cap W$. Sean $x_1 + y_1, x_2 + y_2$, con $x_i \in U, y_i \in W$ $i = 1, 2$, dos vectores de $U + W$, y sean $a, b \in K$, entonces

$$a.(x_1 + y_1) + b.(x_2 + y_2) = a.x_1 + b.x_2 + a.y_1 + b.y_2$$
 que es un vector de $U + W$, por el Corolario 3.5 tenemos que $U + W$ es un subespacio de V(K).

Observemos que como fácilmente se comprueba la unión de dos subespacios no es "en general" un subespacio. (Compruébese con algún contraejemplo). Hay que comentar también que la notación $U + W$ "suma de U y W" viene impuesta por cómo son los vectores de este subespacio. Además $U \cap W$ es un subespacio vectorial tanto de U como de W que está caracterizado por la propiedad siguiente: Si U' es otro subespacio de V(K) incluido en U y W entonces $U' \subset U \cap W$. Esto se nombra diciendo que $U \cap W$ es el "mayor" de los subespacios de V(K) que están contenidos a la vez en U y W. ($U \cap W$ tiene por lo menos al vector cero pues este está en todo subespacio, de modo

decir que dos subespacios vectoriales son "disjuntos" es una solemne barbaridad). Como ya se imagina uno la suma de dos subespacios va a cumplir aquí el mismo papel que la unión de dos subconjuntos de un cierto conjunto. En efecto, tanto U como W son subespacios de $U + W$, para ello basta observar que, por ejemplo, U se puede mirar como los vectores de $U + W$ de la forma $x + 0$, $x \in U$. Además, $U + W$ es el subespacio de $V(K)$ "menor" que contiene a U y a W , en el sentido de que si U' es otro subespacio de $V(K)$ que contiene a U y a W , entonces $U + W \subset U'$.

La anterior proposición se puede generalizar poniendo

Proposición 3.7.- Si U_1, U_2, \dots, U_k son k subespacios de $V(K)$, entonces: i) su intersección $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ es un subespacio de $V(K)$.

ii) su suma $U_1 + U_2 + \dots + U_k = \{x_1 + x_2 + \dots + x_k / x_i \in U_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ es un subespacio de $V(K)$.

La demostración se deja como ejercicio.

Incluso se puede definir la intersección de un número cualquiera (finito o no) de subespacios de $V(K)$, que también es un subespacio de $V(K)$.

Lo que nos proponemos a continuación es buscar nuevas formas de dar subespacios de un espacio vectorial. Para ello consideraremos $U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a + b + c = 0\}$ que, como se comprobará es un subespacio de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Observemos que cada vector de U se puede poner $(a, b, -a-b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios. De aquí,

$$(a, b, -a-b) = a.(1, 0, -1) + b.(0, 1, -1)$$

es decir, un vector de \mathbb{R}^3 pertenece a U si y sólo si es de la forma $a.x + b.y$ con $x = (1, 0, -1)$, $y = (0, 1, -1)$. De paso así vemos que el conjunto de todos los vectores de \mathbb{R}^3 de la forma $a.x + b.y$ (es decir U) es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Esto motiva la siguiente

Definición 3.8.- Sea $H = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ un subconjunto de m vectores de un espacio vectorial $V(K)$. Definimos

$$L(H) = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \cdot x_i \mid a_i \in K, i=1,2,\dots,m \right\}$$

es decir, cada elemento de $L(H)$ se obtiene a partir de los de H multiplicando cada uno por un escalar y luego sumando estos m vectores. A cada una de estas sumas se le llama una combinación lineal de los vectores de H . A partir del Corolario 3.5 podemos fácilmente probar que $L(H)$ es un subespacio vectorial; se le llama el subespacio vectorial de $V(K)$ generado (por combinaciones lineales) por H .

Esta definición nos da una forma fácil de construcción de ejemplos de subespacios vectoriales de $V(K)$.

Uno puede tambien dar la definición de subespacio vectorial generado por un conjunto no finito de vectores diciendo que si este es el caso para H , $L(H)$ tiene por elementos las combinaciones lineales de cualesquiera de los subconjuntos finitos de H . Además, con esta definición resulta que sea o no finito H , es $L(H)$ un subespacio vectorial de $V(K)$. Por ejemplo, tenemos que según lo anterior $L(V) = V$.

Es claro que H es un subconjunto de $L(H)$ y que $L(H)$ es el "menor" subespacio de $V(K)$ que contiene a H , en el sentido de que si U contiene a H , necesariamente ocurre $L(H) \subset U$. Además,

Proposición 3.9.- a) Si $H \subset H'$ entonces $L(H) \subset L(H')$.

b) $L(H) = H$ si y sólo si H es un subespacio de $V(K)$.

c) Si U_1, U_2, \dots, U_m son subespacios de $V(K)$ tales que $U_i = L(H_i)$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ entonces $U_1 + U_2 + \dots + U_m = L(H)$, con $H = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m$.

Demostración. En efecto, como $H' \subset L(H') \Rightarrow H \subset L(H')$. $L(H')$ es un subespacio que contiene a H y por lo tanto $L(H) \subset L(H')$

Si H es un subespacio vectorial de $V(K)$, el "menor" de $V(K)$ que

lo contiene es el propio H , pero eso quiere decir que $L(H) = H$. El recíproco es trivial.

Por último, es claro que $L(H) \subset U_1 + U_2 + \dots + U_m$ con $H = H_1 \cup \dots \cup H_m$. Si x es un vector de $U_1 + U_2 + \dots + U_m$ lo podremos poner como una suma de m vectores cada uno perteneciendo a un U_i y por tanto cada uno combinación lineal de los vectores de H_i ; así, x es combinación lineal de los vectores de H .

$$\text{Sean } U_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 / a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$$

$$U_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 / a_3 = 0\},$$

que son dos subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3 . Fijémonos que todo vector de U_1 es de la forma $(a, b, -a-b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y con ello $U_1 = L(\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\})$ (ver pag. 79). También es fácil ver que todo vector de U_2 es de la forma $(a, b, 0)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, con lo que $U_2 = L(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$. Nótese que $U_1 \cap U_2 = L(\{(1, -1, 0)\})$; así, no podemos afirmar lo análogo a c) de la Proposición 3.9 para la intersección de subespacios. No obstante, si U_1, U_2, \dots, U_m son tales que $U_i = L(H_i)$ $i = 1, 2, \dots, m$, se encuentra que $L(H) \subset U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_m$ donde $H = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m$ se supone no vacío.

Nos damos cuenta en este ejemplo que todo vector de \mathbb{R}^3 se puede poner como suma de uno de U_1 y uno de U_2 , es decir que $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$, en efecto,

$$(a_1, a_2, a_3) = 0 \cdot (1, 0, -1) + (-a_3) \cdot (0, 1, -1) + \\ + a_1 \cdot (1, 0, 0) + (a_2 + a_3) \cdot (0, 1, 0),$$

pero esta forma de poner cada vector como suma de uno de U_1 y otro de U_2 no es única ya que también

$$(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{2} a_1 \cdot (1, 0, -1) + (-\frac{1}{2} a_1 - a_3) \cdot (0, 1, -1) + \\ + \frac{1}{2} a_1 \cdot (1, 0, 0) + (a_2 + \frac{1}{2} a_1 + a_3) \cdot (0, 1, 0).$$

Cambiemos U_1 por $U'_1 = L(\{(0,0,1)\})$, entonces $\mathbb{R}^3 = U'_1 + U_2$ pero en este caso, cada vector de \mathbb{R}^3 se escribe de forma única como suma de uno de U'_1 y uno de U_2 . Tambien observamos que $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ y que $U'_1 \cap U_2 = \{0\}$. Despues de esto enunciamos la siguiente

Proposición 3.10.- Supongamos que U y W son dos subespacios vectoriales de $V(K)$ tales que $V = U + W$. Entonces, son equivalentes:

- i) $\forall z \in V \quad \exists !(x,y) \in U \times W \quad z = x + y$
- ii) $U \cap W = \{0\}$.

Demostración. Veamos que i) \Rightarrow ii). Si $z \in U \cap W$, por i) z se pone de forma única como suma de un vector de U y otro de W , pero tenemos $z = z + 0 = 0 + z$, y por la unicidad ha de ser $z = 0$. Para ver que ii) \Rightarrow i) supongamos un vector $z \in V$ tal que $z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ con $x_i \in U$, $y_i \in W$, $i = 1, 2$. Entonces $y_2 - y_1 = x_1 - x_2 \in U \cap W = \{0\}$, lo que implica $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ y así se concluye la prueba.

Definición 3.11.- Sean V un espacio vectorial sobre K y U, W dos subespacios suyos tales que $V = U + W$ y $U \cap W = \{0\}$ (o bien i) de la Proposición 3.10), entonces diremos que V es suma directa de U y W y pondremos $V = U \oplus W$; es decir, es $V = U \oplus W$ cuando cada vector de V se escribe de manera única como suma de uno de U y otro de W .

En los ejemplos de arriba tenemos que \mathbb{R}^3 es suma directa de U'_1 y U_2 , y que es suma no directa de U_1 y U_2 .

Ahora parece lógico hacerse la siguiente pregunta: ¿ como se puede generalizar la suma directa a m sumandos ? Sean U_1, U_2, \dots, U_m una familia de m subespacios vectoriales de $V(K)$. Uno piensa que puede establecer un resultado similar al dado en la Proposición 3.10 diciendo que cuando $V = U_1 + U_2 + \dots + U_m$, el hecho de que todo vector $z \in V$ se ponga de forma única como $z = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ con $x_i \in U_i$ va a ser equivalente con que $U_i \cap U_j = \{0\}$ con $i \neq j$. Pero esto es falso co-

mo lo pone de manifiesto el tomar $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = L((1,0,0), (0,0,1))$,
 $U_2 = L((0,1,0))$ y $U_3 = L((0,1,1))$, (ver prob. 13, pag.104).

Tenemos el siguiente resultado, generalización de la Proposición 3.10, que se probará como ejercicio

Proposición 3.12.- Sean U_1, U_2, \dots, U_m subespacios vectoriales de $V(K)$ tales que $V = U_1 + U_2 + \dots + U_m$. Entonces, son equivalentes:

- i)' $\forall z \in V \exists! (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m : z = x_1 + x_2 + \dots + x_m$.
- ii)' $\forall j \in \{1, 2, \dots, m-1\} : (U_1 + \dots + U_j) \cap U_{j+1} = \{0\}$.

Nótese que la condición ii)' es mucho más fuerte que suponer $U_i \cap U_j = \{0\}$, $i \neq j$, basta observar que $U_i \cap U_j$ con $i < j$ está contenido en $(U_1 + \dots + U_{j-1}) \cap U_j$. Por ejemplo, para $m=3$ la condición ii)' se pone $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, $(U_1 + U_2) \cap U_3 = \{0\}$.

Definición 3.23.- Sea V un espacio vectorial sobre K y U_1, U_2, \dots, U_m subespacios vectoriales de V tales que $V = U_1 + U_2 + \dots + U_m$ y se cumple ii)' (o bien i)') de la Proposición 3.12, entonces diremos que V es suma directa de los subespacios U_1, U_2, \dots, U_m , $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$.

Seguimos con nuestro inicial propósito de obtener ejemplos de espacios vectoriales. Veremos ahora como, a partir de un espacio vectorial y un subespacio suyo, podemos construir un nuevo espacio vectorial. Así que sea $V(K)$ y U un subespacio suyo. En particular V es un grupo abeliano y U un subgrupo suyo. Entonces podemos construir el grupo cociente $V/U = \{x + U / x \in V\}$ (ver Proposición 1.19) cuya suma es

$$(x + U) + (y + U) = (x + y) + U.$$

Sería deseable que V/U fuese un espacio vectorial sobre K y que la multiplicación de escalares por "clases" se hiciese a través de la de escalares por vectores de V , en el mismo sentido que como se define la suma de clases.

Definimos entonces para $a \in K$ y $x + U \in V/U$

$$a.(x + U) = a.x + U$$

y podemos establecer

Proposición 3.24.- Con estas operaciones V/U es un espacio vectorial sobre K .

Demostración. En efecto, veamos que $(a, x + U) \mapsto a.x + U$ nos define una aplicación de $K \times V/U$ en V/U . Sean $x + U = y + U$, entonces ha de ser $a.x + U = a.y + U$, pero esto es consecuencia de que $x - y \in U$ y $a.(x - y) = a.x - a.y \in U$. Además tenemos

$$\begin{aligned} a.((x + U) + (y + U)) &= a.((x + y) + U) = a.(x + y) + U = (a.x + a.y) + U = \\ &= (a.x + U) + (a.y + U) = a.(x + U) + a.(y + U). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b).(x + U) &= ((a + b).x) + U = (a.x + b.x) + U = (a.x + U) + (b.x + U) = \\ &= a.(x + U) + b.(x + U). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a.b).(x + U) &= ((a.b).x) + U = (a.(b.x)) + U = a.((b.x) + U) = \\ &= a.(b.(x + U)). \end{aligned}$$

$$1.(x + U) = 1.x + U = x + U.$$

Con lo que se concluye la prueba.

En los casos "límites" $U = \{0\}$ y $U = V$ tenemos sendas aplicaciones biyectivas $V \longrightarrow V/\{0\}$ y $V^0 \longrightarrow V/V$

$$\begin{array}{ccc} x \longmapsto x + \{0\} & & 0 \longmapsto 0 + V \end{array}$$

donde $V^0 = \{0\}$ es el espacio vectorial trivial sobre K (su suma está definida por $0 + 0 = 0$, y el producto de un escalar por 0, $a.0 = 0$, es decir, de la única forma posible).

Sistemas de generadores. Dependencia e independencia lineal.

Bases. Dimensión.-

Definición 3.25.- Dado un espacio vectorial $V(K)$, cuando tengamos un subconjunto H de V tal que $L(H) = V$ diremos que H es un sistema de generadores o un conjunto generador de V .

Como $L(V) = V$ (ver pag. 80) resulta que trivialmente V es un sistema de generadores de V . Obviamente este caso por trivial es desecharable; así, interesa que H sea lo "más pequeño" posible, y claro está que sea finito. Pero ¿qué ventaja se aprecia en el hecho de que sea $V = L(H)$ con H finito? Por ejemplo, en la pag. 79 con sólo dos vectores (y las operaciones de espacio vectorial) podemos conocer todos los vectores de $U = \{(a,b,c) / a + b + c = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Cuando un espacio vectorial $V(K)$ admite un sistema de generadores finito diremos que es finitamente generado.

Supongamos que H es un sistema de generadores de $V(K)$ y que U es un subespacio vectorial suyo. Entonces

$$\tilde{H} = \{x + U / x \in H\}$$

es un sistema de generadores de V/U . En efecto, consideremos una clase $x + U$, entonces $\exists \{x_1, \dots, x_m\} \subset H$ y $\exists \{a_1, \dots, a_m\} \subset K$ tales que $x = \sum_{i=1}^m a_i \cdot x_i$, y por ello

$$x + U = \left(\sum_{i=1}^m a_i \cdot x_i \right) + U = \sum_{i=1}^m (a_i \cdot x_i + U) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot (x_i + U)$$

que demuestra lo dicho. En particular así se prueba que si $V(K)$ es finitamente generado también lo es V/U , y además podemos decir que el número de generadores encontrado para V/U es menor o igual que el que tiene $V(K)$.

Que $V(K)$ sea finitamente generado "depende mucho de K ". En efecto, supongamos el espacio vectorial $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ que es finitamente generado pues $\mathbb{R} = L(\{1\})$. Según discusiones anteriores (ver pag. 76) tambien podemos considerar \mathbb{R} como un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números racionales \mathbb{Q} . Sin embargo $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ no es finitamente generado (ver prob. 8 pag. 103).

Sea $V(\mathbb{C})$ un espacio vectorial finitamente generado (por ejemplo V puede ser el propio \mathbb{C}) entonces $V(\mathbb{R})$ tambien es finitamente generado. Para ello sea $H = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ un conjunto de generadores de $V(\mathbb{C})$; para cada $x \in V$ podemos poner $x = \sum_{j=1}^m a_j \cdot x_j$ con $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Por otro lado si $a_j = r_j + s_j i$ para todo $j = 1, 2, \dots, m$ tenemos

$$x = \sum_{j=1}^m a_j \cdot x_j = \sum_{j=1}^m r_j \cdot x_j + \sum_{j=1}^m s_j \cdot (i \cdot x_j)$$

lo que prueba que $H' = \{x_1, x_2, \dots, x_m, i \cdot x_1, i \cdot x_2, \dots, i \cdot x_m\}$ es un sistema de generadores de $V(\mathbb{R})$.

Finalmente añadir que no todo espacio vectorial es finitamente generado. En efecto, sea $V = \mathbb{R}[x]$ y $K = \mathbb{R}$, que es un espacio vectorial con la suma usual de polinomios (ver pag. 48) y el producto de un escalar por un polinomio definido tambien de manera usual (monomio a monomio) (compruébese tal extremo). Afirmamos que $\mathbb{R}[x](\mathbb{R})$ no es finitamente generado. Para ello supongamos que $H = \{p_1(x), \dots, p_m(x)\}$ sea un sistema de generadores de $\mathbb{R}[x](\mathbb{R})$ y sea m_j el grado de cada polinomio $p_j(x)$ de H , $j = 1, 2, \dots, m$. Tomemos el máximo n de estos grados y el polinomio $q(x) = x^{n+1}$. Entonces, si $q(x)$ se pone como una combinación lineal de los polinomios de H del tipo $x^{n+1} = \sum_{j=1}^m a_j \cdot p_j(x)$ con $a_j \in \mathbb{R}$. Pero esta igualdad es imposible ya que el grado del polinomio de la izquierda es $n+1$ y el de la derecha es me-

nor o igual que n , lo cual es absurdo. Así $\mathbb{R}[x](\mathbb{R})$ no es finitamente generado.

$\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ es finitamente generado ya que $\mathbb{R}^3 = L(\{e_1, e_2, e_3\})$ donde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Nótese que este sistema de generadores de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tiene además la propiedad de que todo vector se expresa de forma única como una combinación lineal de e_1, e_2, e_3 , en otras palabras que $\mathbb{R}^3 = L(\{e_1\}) \oplus L(\{e_2\}) \oplus L(\{e_3\})$. En particular, el vector cero $(0, 0, 0)$ de \mathbb{R}^3 se expresa de forma única como $0.e_1 + 0.e_2 + 0.e_3$. Dicho de otro modo, si $a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 = 0$ entonces $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Esta propiedad añadida al concepto de sistema de generadores nos dice que aquellos conjuntos de vectores que generan un espacio vectorial y cumplen esto son los óptimos. Conviene pues el estudio preliminar de tal cuestión.

Definición 3.26.— Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $H = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset V$. Diremos que H es linealmente independiente si cumple

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_m \cdot x_m = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0,$$

es decir, si el vector $0 \in L(H)$ tiene una única expresión como combinación lineal de los vectores de H .

Diremos que H es linealmente dependiente si no es linealmente independiente; es decir, si podemos encontrar escalares $a_i \in K$ no todos nulos con

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_m \cdot x_m = 0$$

Es claro de esta definición que si $0 \in H$ entonces H es dependiente.

La dependencia e independencia lineal de vectores está muy ligada al "cuerpo". Lo que se afirma en la pag. 75 puede ahora reformularse diciendo que en $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ cualesquiera dos vectores son linealmente dependientes, mientras que en $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ los vectores $1 + 0i$ y $0 + 1i$ son linealmente independientes. Observemos que en $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ se tiene

$$0 + 1i = (0 + 1i) \cdot (1 + 0i)$$

↑ ↑ ↑
vector escalar vector

Vemos que $H = \{1 + 0i, 0 + 1i\}$ es un conjunto de vectores dependiente del espacio vectorial y que cada uno de ellos es un escalar por el otro. Estos dos extremos son equivalentes y se generaliza esta situación en la siguiente

Proposición 3.27.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sea ($m \geq 2$)
 $H = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset V$. Entonces H es linealmente dependiente si y sólo si podemos poner un vector de H como combinación lineal del resto.

Demostración. Supongamos primero que H es linealmente dependiente, entonces existen $a_j \in K$, $j = 1, 2, \dots, m$, no todos nulos tales que $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_i \cdot x_i + \dots + a_m \cdot x_m = 0$. Pongamos por ejemplo que $a_i \neq 0$ tomando su inverso a_i^{-1} en K tenemos

$$a_i^{-1} \cdot (a_1 \cdot x_1) + \dots + a_i^{-1} \cdot (a_i \cdot x_i) + \dots + a_i^{-1} \cdot (a_m \cdot x_m) = 0$$

lo que implica

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m b_j \cdot x_j \quad \text{donde } b_j = -a_i^{-1} \cdot a_j \quad (j \neq i)$$

Recíprocamente, supongamos $x_i \in L(H - \{x_i\})$. Entonces sería $x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m c_j \cdot x_j$ con $c_j \in K$, $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$. Y por ello

$$c_1 \cdot x_1 + \dots + (-1) \cdot x_i + \dots + c_m \cdot x_m = 0$$

y como $-1 \neq 0$ tenemos que H es linealmente dependiente.

Las siguientes propiedades resultan de manera inmediata de la Definición 3.26.

Proposición 3.28.- a) $\{x\}$ es linealmente independiente $\Leftrightarrow x \neq 0$.
b) Si $H = \{x_1, \dots, x_m\} \subset H' = \{x_1, \dots, x_m, \dots, x_n\}$ entonces: si H es linealmente dependiente tambien lo es H' . Si H' es linealmente independiente tambien lo es H .

Las nociones de dependencia e independencia lineal se han definido sólo para conjuntos finitos de vectores, pero se puede generalizar a un conjunto cualquiera $H \subset V$ como sigue:

Definición 3.29. - Sea V un espacio vectorial sobre K y sea H un subconjunto finito o no de V . Diremos que H es linealmente independiente si todo subconjunto suyo finito es linealmente independiente (en el sentido de la Definición 3.26). En caso de que H no sea linealmente independiente diremos que es linealmente dependiente; esto ocurre cuando existe un subconjunto finito de H linealmente dependiente.

Volvamos al caso $V = \mathbb{R}[x]$, $K = \mathbb{R}$ y sea $H = \{1 = x^0, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ Entonces puede comprobarse que el conjunto (no finito) H es linealmente independiente. Además uno observa que $L(H) = \mathbb{R}[x]$ y que todo polinomio se pone de forma única como una combinación lineal de los de H . (Obsérvese la analogía de propiedades con $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$ y $H = \{e_1, e_2, e_3\}$ en pag. 87).

Proposición 3.30. - Sean V un espacio vectorial sobre K y H, H' dos subconjuntos de V con $H \subset H'$. Entonces:

Si H es linealmente dependiente tambien lo es H' .

Si H' es linealmente independiente tambien lo es H .

Llegamos así a la siguiente:

Definición 3.31. - Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $\mathcal{B} \subset V$ tal que \mathcal{B} es linealmente independiente y $L(\mathcal{B}) = V$, entonces diremos que \mathcal{B} es una base de $V(K)$.

Arriba acabamos de ver que $\mathcal{B} = H = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ es una base de $\mathbb{R}[x](\mathbb{R})$. También sabemos que $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. En general, $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$

es una base de $K^n(K)$. Para $n=1$ tenemos que $\mathbf{B} = \{x\}$ con $x \neq 0$ es una base de $K(K)$. De esta forma podemos tener una base en $C(C)$, sin embargo $\mathbf{B} = \{1+0i, 0+1i\}$ es una base de $C(R)$ (ver pag. 87).

Consideraremos en lo sucesivo que todos nuestros espacios vectoriales son finitamente generados. Nos podemos hacer las siguientes preguntas:

¿ Posee todo espacio vectorial finitamente generado una base ?

Si la respuesta a la anterior pregunta es afirmativa, tienen todas las bases de un mismo espacio vectorial finitamente generado el mismo número de vectores ?

Dado un subespacio vectorial U de $V(K)$ ¿Existe alguna relación entre las bases de U y las de V ?

Notemos que conocer una base de un espacio vectorial concreto es bueno ya que con sólo un número finito de vectores y las operaciones de espacio vectorial determinamos todos los vectores de este espacio vectorial (de ahí el nombre de base).

Ataquemos primeramente el problema de la existencia de bases.

Proposición 3.32.- Todo espacio vectorial finitamente generado tiene una base.

Demostración. Sea $V(K)$ un espacio vectorial finitamente generado y sea $H = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ un sistema generador suyo. Entonces pueden ocurrir dos cosas: si H es linealmente independiente ya tenemos que es una base. Si H no es linealmente independiente existe un vector de H que debe ser combinación lineal del resto (ver Prop. 3.27). No hay pérdida de generalidad si suponemos que se trata de x_m . Sea entonces $H' = H - \{x_m\}$ y veamos que H' tambien es un sistema generador.

En efecto, sea $x \in V$. Como $L(H) = V$ tenemos $x = \sum_{j=1}^m a_j \cdot x_j$ con $a_j \in K$, $j = 1, 2, \dots, m$. Por otro lado, $x_m = \sum_{i=1}^{m-1} c_i \cdot x_i$. Así,

$$x = \sum_{j=1}^{m-1} a_j \cdot x_j + a_m \cdot \left(\sum_{i=1}^{m-1} c_i \cdot x_i \right) = \sum_{k=1}^{m-1} d_k \cdot x_k \text{ con } d_k = a_k + a_m \cdot c_k, k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Así probamos que $L(H') = V$. Ahora repetimos esta disjunción con H' . En un número finito de pasos quitamos $x_m, x_{m-1}, \dots, x_{n+1}$ de H . El subconjunto de H restante es una base de $V(K)$.

Nótese que en esta demostración está contenido el siguiente hecho: si quitamos de un sistema generador un subconjunto suyo formado por vectores que dependen linealmente del resto, el subconjunto así obtenido sigue siendo un sistema generador.

Contestemos ahora a la segunda de las preguntas de la pag. 90.

Proposición 3.33.- Supongamos que un espacio vectorial sobre K tiene una base formada por n vectores, entonces cualesquiera $n+p$, $p \in N$, vectores de $V(K)$ son linealmente dependientes.

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 3.28 basta con que veamos que $n+1$ vectores cualesquiera son linealmente dependientes. Hagamos la prueba por inducción sobre n . Supongamos que $V(K)$ es un espacio vectorial que tiene una base con un sólo vector $\emptyset = \{x\}, x \neq 0$, entonces si $H = \{y, z\} \subset V$ tendremos $y = a \cdot x, z = b \cdot x$ para algunos $a, b \in K$. O bien $a, b \neq 0$ en cuyo caso $b \cdot y - a \cdot z = 0$ y H es linealmente dependiente, o alguno de estos dos escalares es cero y entonces, como H tiene el vector cero sería linealmente dependiente. En cualquier caso para $n=1$ es cierto el resultado de la Proposición. Hagamos ahora la hipótesis de inducción para $n-1$ que se enuncia diciendo que en cada espacio vectorial con una base de $n-1$ vectores todo conjunto de n vectores es linealmente dependiente. Sea entonces $V(K)$ un espacio

vectorial que tiene una base $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ y sea $H = \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}\}$ un subconjunto de V con $n+1$ vectores. Podemos suponer que $y_{n+1} \neq 0$ ya que si $y_{n+1} = 0$, H sería linealmente dependiente y no habría nada que demostrar. Sea $U = L(\{y_{n+1}\})$ y V/U el espacio vectorial cociente de V sobre U (ver pag. 84). Por la discusión de la pag. 85 sabemos que $\{x_1 + U, \dots, x_n + U\}$ es un sistema de generadores de V/U . Pero no es linealmente independiente, ya que $y_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ por ser β una base de V ; además, no todos los escalares a_i son nulos por ser $y_{n+1} \neq 0$. Entonces

$$0 + U = y_{n+1} + U = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + U = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (x_i + U)$$

lo que implica que $\{x_1 + U, \dots, x_n + U\}$ es linealmente dependiente. Supongamos por comodidad que $a_n \neq 0$ (esto no resta generalidad a lo que sigue) y vamos a probar que $\{x_1 + U, \dots, x_{n-1} + U\}$ es una base de V/U . Que es un sistema de generadores se sigue de la demostración del Teorema 3.32. Si tuviésemos $\sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot (x_i + U) = 0 + U$ entonces $\sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot x_i = c \cdot y_{n+1}$ para algún $c \in K$, y entonces

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n-1} (c \cdot a_i) \cdot x_i + (c \cdot a_n) \cdot x_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (c \cdot a_i - c_i) \cdot x_i + (c \cdot a_n) \cdot x_n = 0$$

y por la independencia lineal de β $c \cdot a_n = 0$, $c \cdot a_i - c_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Pero $a_n \neq 0$, con lo que $c = 0$, y esto implica $c_i = 0$ para todo i .

Según nuestra hipótesis de inducción $\{y_1 + U, \dots, y_n + U\}$ es linealmente dependiente. Existen escalares b_i , $i = 1, \dots, n$, no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^n b_i \cdot (y_i + U) = 0 + U$, pero esto implica $\sum_{i=1}^n b_i \cdot y_i = b \cdot y_{n+1}$, con lo que H es linealmente dependiente.

A partir de esta Proposición podemos probar el siguiente

Teorema 3.34.- (Teorema de la Base) Dos bases de un mismo espacio vectorial (finitamente generado) tienen el mismo número de vectores.

Demostración. Sean B y B' dos bases de $V(K)$ con n y m vectores respectivamente. Si m fuese mayor que n , B' no sería independiente por la Proposición 3.33. De modo que $m \leq n$. Análogamente $n \leq m$, y por tanto $n = m$.
(*) No es estrictamente necesario ver independencia lineal.

El Teorema de la Base nos dice: que a cada espacio vectorial le vamos a poder asignar un número natural: el número de vectores de "una" de sus bases.

Definición 3.35.- Si V es un espacio vectorial sobre K finitamente generado, al número de vectores de una de sus bases le llamaremos la dimensión de $V(K)$ y pondremos $\dim_K V$. Si V^0 es el espacio vectorial trivial sobre $K, \{0\}$, pondremos por definición $\dim_K V^0 = 0$.

Como veremos en el Tema siguiente este número $\dim_K V$ nos va a servir para distinguir entre espacios vectoriales desde una óptica que ya precisaremos.

Después de esto, a partir de resultados en la pag. 89 y 90 podemos decir que $\dim_K K^n = n$, en particular la dimensión del espacio vectorial $K(K)$ es 1, de modo que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ pero $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Por último decir que si V es un espacio vectorial complejo con dimensión n , entonces su dimensión considerado como un espacio vectorial real es $2n$. En estos ejemplos vuelve a ponerse de manifiesto la importancia que el cuerpo de escalares tiene cuando se habla de un espacio vectorial. No tiene pues sentido decir la dimensión de V , en su lugar hay que hablar de la dimensión de $V(K)$, es por eso de la notación $\dim_K V$.

Proposición 3.36.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sea

$\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base de $V(K)$. Entonces si $x \in V$ se expresa

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i \text{ necesariamente } b_i = a_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Si β es un sistema generador de $V(K)$ que tiene la anterior propiedad entonces β es una base.

Demostración. Si $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \cdot x_i = 0$

como β es linealmente independiente $\Rightarrow a_i = b_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

La otra afirmación, que se puede considerar como un recíproco parcial de la primera, es inmediata pues aplicada al vector cero lo que nos dice es que este se puede poner solamente $0 = \sum_{i=1}^n 0 \cdot x_i$.

Obsérvese que la Proposición 3.36 caracteriza a una base $\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ por la propiedad $V = L(\{x_1\}) \oplus L(\{x_2\}) \oplus \dots \oplus L(\{x_n\})$.

Esta proposición parece querer decirnos que mediante una base podemos dar en un espacio vectorial $V(K)$ una "determinación numérica" de cada vector: asignarle a cada $x \in V$ los n números a_1, a_2, \dots, a_n tales que $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ siendo $\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ la base en cuestión. Pero esto encierra cierta ambigüedad como ponemos ahora de manifiesto. En el ejemplo 2 de la introducción, pag. 72, lo que estabamos haciendo era tomar una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ del plano de los vectores libres V . Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2 = b \cdot \vec{e}_2 + a \cdot \vec{e}_1$, así el par de números reales que se le asigna a este vector no está claro cuál es a menos que se asigne de principio un orden a los vectores de esta base. También dados $(1, 2)$ no sabe uno si estamos hablando del vector $\vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2$ o bien de $\vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_1$. Esta dificultad se salva también dando un orden a los vectores de β . Así, $(1, 2)$ representa al vector $\vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2$ en (\vec{e}_1, \vec{e}_2) y a $\vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_1$ en (\vec{e}_2, \vec{e}_1) . Conviene formalizar esto mediante la siguiente:

Definición 3.37. - Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n y sea $\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base suya. A cada lista ordenada obtenida con los vectores de β la llamaremos una base ordenada. Por ejemplo $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una de las $n!$ bases ordenadas inducidas por la misma base de V . A la lista ordenada de escalares (a_1, a_2, \dots, a_n) le llamaremos las coordenadas de $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ en B .

Con es nueva terminología la Proposición 3.36 nos dice

$$\forall x \in V \quad \exists! (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n \quad x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$$

que en lenguaje de aplicaciones se traduce en el hecho de que si $V(K)$ es un espacio vectorial con $\dim_K V = n$, cada base ordenada $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nos da una aplicación biyectiva

$$b_B : K^n \longrightarrow V$$
$$b_B(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i,$$

en particular $b_B(e_i) = x_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, donde $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

dicho de otro modo, x_i tiene coordenadas $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ en la base ordenada $B = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$.

A la base $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ se le suele llamar la base usual de $K^n(K)$, y a la ordenación de β (e_1, e_2, \dots, e_n) la base ordenada usual de $K^n(K)$. Nótese que en la base ordenada usual de $K^n(K)$ el vector (a_1, a_2, \dots, a_n) tiene coordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) , por tanto hay que tener mucho cuidado pues en esta se "confunden" vectores y coordenadas, además es la única con tal propiedad. Por último resaltar: que la biyección b_B lleva un vector de $K^n(K)$ que tenga coordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) en la base usual en el único vector de $V(K)$ que tiene estas coordenadas en la base ordenada B de V .

Después de estas puntualizaciones veamos algunos resultados más sobre bases.

Proposición 3.38.- Sea V un espacio vectorial sobre K con $\dim_K V = n$. Entonces un sistema de generadores con n vectores es necesariamente una base de $V(K)$.

Demostración. Si no fuese así, como en la Proposición 3.32, del sistema generador sacaríamos una base con menor número de vectores que la dimensión de V , lo cual es absurdo según el Teorema 3.34.

Consideremos $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ y el subespacio vectorial $U = \{(a_1, a_2, a_3) / a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$. Es fácil ver que $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ es una base de U (en lo sucesivo utilizaremos bases o bases ordenadas según convenga, y se entenderá que, salvo mención expresa, esta no está ordenada). ¿Existe una base de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ que contenga la anterior base de U ? La respuesta es que sí, por ejemplo $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 0, 1)\}$ y $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 0)\}$ son bases de \mathbb{R}^3 que contienen a la base que tenemos en U . Así este problema (ver pag. 90) parece que tiene solución (no única por supuesto). En general tenemos

Teorema 3.39.- (Ampliación de la base) Sea V un espacio vectorial sobre K con $\dim_K V = n$ y sea $H = \{x_1, \dots, x_m\}$, $m < n$, un conjunto de vectores linealmente independiente (H es una base de $L(H)$). Entonces, existen $x_{m+1}, \dots, x_n \in V$ tales que $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ es una base de $V(K)$.

Demostración.- Como H no es una base de V tenemos $L(H) \neq V$. Por tanto existe $x_{m+1} \in V$, $x_{m+1} \notin L(H)$. Si tomamos $H' = H \cup \{x_{m+1}\}$ resulta que H' es linealmente independiente. En efecto, si $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_m \cdot x_m + a_{m+1} \cdot x_{m+1} = 0$ entonces $a_{m+1} = 0$, ya que $a_{m+1} \neq 0$ implicaría $x_{m+1} \in L(H)$. Así tenemos $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_m \cdot x_m = 0$ de donde $a_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ pues H es un conjunto linealmente independiente.

Pueden ahora ocurrir dos casos: si $L(H') = V$ entonces H' es una base de V y ya no hay nada que probar. Si $L(H') \neq V$ repetimos el proceso anterior. En un número finito de pasos encontramos una base de V .

Proposición 3.40.- Sea V un espacio vectorial sobre K con $\dim_K V = n$. Entonces un conjunto de vectores linealmente independiente con n vectores es necesariamente una base de $V(K)$.

Demostración. Si no fuese así, utilizando un argumento como en el Teorema precedente podríamos ir añadiendo vectores hasta obtener una base de V con más vectores que su dimensión, lo cual es absurdo.

Uniendo los resultados de las Proposiciones 3.38 y 3.40 tenemos que para un espacio vectorial $V(K)$ con $\dim_K V = n$ son equivalentes:

- 1.- $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una base de V .
- 2.- $\{x_i\}$ es un sistema generador de V .
- 3.- $\{x_i\}$ es linealmente independiente.

Sea U un subespacio vectorial de un espacio $V(K)$ finitamente generado. Veamos que U también es finitamente generado (como espacio vectorial sobre K). Supongamos $U \neq V$. El máximo número de vectores de U que son independientes es $m < n = \dim_K V$, por la Proposición 3.40. Sea $H = \{x_1, \dots, x_m\} \subset U$ linealmente independiente. Veamos que $L(H) = U$. En efecto, si fuese $L(H) \neq U$ existiría $x_{m+1} \in U$, $x_{m+1} \notin L(H)$, lo que implicaría que $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ es linealmente independiente, en contra de lo supuesto. Así H es una base de U . Tenemos por tanto $\dim_K W \leq \dim_K V$ para todo subespacio W de V , y se da la igualdad si y sólo si $W = V$. Podemos ahora reformular el Teorema 3.39: diciendo que cada base de un subespacio de V se puede ampliar con más vectores hasta formar una base de V (de ahí el nombre de "ampliación de la base").

Como consecuencia del Teorema 3.39 dado un subespacio U de $V(K)$, es posible encontrar otro subespacio U' de V tal que $V = U \oplus U'$. Se dice que U' es un subespacio suplementario de U en V . En efecto, si $\{x_1, \dots, x_m\}$ es una base de U podemos encontrar $x_{m+1}, \dots, x_n \in V$ que la completan a una base de V . Basta entonces tomar $U' = L(\{x_{m+1}, \dots, x_n\})$. Nótese que de la prueba del Teorema 3.39 se ve que para cada U , U' no es único.

Por último veamos como podemos a partir de una base de U' construir una base del espacio vectorial cociente V/U . En primer lugar elegimos una base $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ de un suplementario U' de U .

Llamemos

$$\{x_{m+1} + U, \dots, x_n + U\}$$

y vamos a demostrar que esta es una base de V/U . Sea $x + U$ cualquier clase del cociente. Podremos poner $x = y + z$ con $y \in U$, $z \in U'$, donde

$$z = \sum_{i=1}^{n-m} a_{m+i} \cdot x_{m+i}, \text{ entonces}$$

$$x + U = (y + z) + U = z + U = \sum_{i=1}^{n-m} a_{m+i} \cdot x_{m+i} + U = \sum_{i=1}^{n-m} a_{m+i} \cdot (x_{m+i} + U)$$

con lo que $L(\Phi') = V/U$. Veamos ahora que es linealmente independiente. Si

$$0 + U = \sum_{j=1}^{n-m} b_{m+j} \cdot (x_{m+j} + U) = \sum_{j=1}^{n-m} b_{m+j} \cdot x_{m+j} + U$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{n-m} b_{m+j} \cdot x_{m+j} \in U \quad \text{y tambien pertenece a } U', \text{ pero } U \cap U' = \{0\}$$

con lo que tendriamos una combinación lineal de la base de U' igualada a cero, esto implica que $b_{m+j} = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n-m\}$.

Como consecuencia tenemos que $\dim_K V/U = \dim_K U'$ y por tanto

$$\dim_K V/U = \dim_K V - \dim_K U$$

donde hemos utilizado que $\dim_K V = \dim_K U + \dim_K U'$ si $V = U \oplus U'$.

Nótese que $\dim_K V/U \leq \dim_K V$ para cualquier subespacio U de V , dándose la igualdad si y sólo si $U = \{0\}$.

Proposición 3.41.- Sean U y W dos subespacios vectoriales de $V(K)$.

Entonces

$$\dim_K(U + W) + \dim_K(U \cap W) = \dim_K U + \dim_K W.$$

Demostración. En efecto, sea $\{x_1, \dots, x_m\}$ una base de $U \cap W$ (si fuese $U \cap W = \{0\}$ este paso no se daría y la prueba comienza en el siguiente). Aplicando el Teorema de ampliación de la base encontramos $x'_{m+1}, \dots, x'_n \in U$ tales que $\{x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots, x'_n\}$ es una base de U y $x''_{m+1}, \dots, x''_p \in W$ tales que $\{x_1, \dots, x_m, x''_{m+1}, \dots, x''_p\}$ es una base de W . Así tenemos que $U = (U \cap W) \oplus U'$, $W = (U \cap W) \oplus W'$ siendo $U' = L(\{x'_{m+1}, \dots, x'_n\})$ y $W' = L(\{x''_{m+1}, \dots, x''_p\})$. $\{x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots, x'_n, x''_{m+1}, \dots, x''_p\}$ es claramente un sistema de generadores del subespacio $U + W$. Veamos que

también es linealmente independiente. Si se tuviese

$$\sum_{i=1}^m a_i \cdot x_i + \sum_{j=m+1}^n b_j \cdot x'_j + \sum_{k=m+1}^p c_k \cdot x''_k = 0$$

entonces

$$\sum_{k=m+1}^p c_k \cdot x''_k = - \sum_{i=1}^m a_i \cdot x_i - \sum_{j=m+1}^n b_j \cdot x'_j \in U$$

pero el miembro izquierdo de esta igualdad es un vector de W , con lo que este vector estaría en $U \cap W$ y también en W' , pero $(U \cap W) \cap W' = \{0\}$ con lo cual $c_k = 0 \quad \forall k \in \{m+1, \dots, p\}$. Así

$$\sum_{i=1}^m a_i \cdot x_i + \sum_{j=m+1}^n b_j \cdot x'_j = 0$$

lo que implica $a_i = 0, b_j = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{m+1, \dots, n\}$.

Con esto se concluye que $\{x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots, x'_n, x''_{m+1}, \dots, x''_p\}$ es una base de $U + W$ y con ello la demostración.

Corolario 3.42.- Sean U y W dos subespacios vectoriales de $V(K)$ tales que $V = U + W$. Entonces

$$V = U \oplus W \Leftrightarrow \dim_K V = \dim_K U + \dim_K W.$$

Demostración. Es claro que se verifica la condición necesaria (ver pag. 98). La suficiente lo que afirma en realidad es que si la dimensión de $U + W$ se obtiene como la suma de las dimensiones de U y de W entonces $U \cap W = \{0\}$, pero esto es consecuencia de la fórmula de la Proposición 3.41, que en estas condiciones implica $\dim_K(U \cap W) = 0$.

Podemos generalizar estos resultados a más de dos subespacios. Por ejemplo se puede probar (se hará como ejercicio) que si U_1, U_2, U_3 son subespacios vectoriales de $V(K)$ se cumple:

$$\begin{aligned} \dim_K(U_1 + U_2 + U_3) + \dim_K(U_1 + U_2) \cap U_3 + \dim_K(U_1 \cap U_2) &= \\ &= \dim_K U_1 + \dim_K U_2 + \dim_K U_3. \end{aligned}$$

En general para k subespacios U_1, U_2, \dots, U_k de $V(K)$ tenemos:

$$\dim_K \left(\sum_{i=1}^k U_i \right) + \sum_{j=1}^{k-1} \dim_K (U_1 + \dots + U_j) \cap U_{j+1} = \\ = \sum_{j=1}^k \dim_K U_j.$$

Cambio de base.-

Consideremos primeramente un ejemplo. Sea V el espacio vectorial de los polinomios con grado ≤ 2 y coeficientes reales (es un subespacio del espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[x]$). V tiene dimensión 3 como fácilmente se comprueba. Sea $B = (p_1(x), p_2(x), p_3(x))$, con $p_1(x) = 1 + 0x + 0x^2$, $p_2(x) = 0 + x + 0x^2$, $p_3(x) = 0 + 0x + x^2$ que es una base ordenada de V , en esta el polinomio $a + bx + cx^2$ tiene justamente coordenadas (a, b, c) . Consideremos otra base ordenada $B' = (q_1(x), q_2(x), q_3(x))$ donde $q_1(x) = p_1(x)$, $q_2(x) = p_1(x) + p_2(x)$, $q_3(x) = p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)$.

Dado cualquier polinomio $p(x)$ este tendrá unas determinadas coordenadas tanto en B como en B' , llamémosles $(a_1, a_2, a_3), (a'_1, a'_2, a'_3)$ respectivamente. Lo que nos preguntamos es si conocidas las coordenadas de $p(x)$ en B y las de los vectores de B' también en B (tales como damos los $q_j(x)$) podemos conocer las coordenadas de $p(x)$ en B' .

Uno enseguida se da cuenta que esto se puede hacer del siguiente modo

$$p(x) = a'_1 \cdot q_1(x) + a'_2 \cdot q_2(x) + a'_3 \cdot q_3(x) = \\ = a'_1 \cdot p_1(x) + a'_2 \cdot (p_1(x) + p_2(x)) + a'_3 \cdot (p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)) = \\ = a_1 \cdot p_1(x) + a_2 \cdot p_2(x) + a_3 \cdot p_3(x), \text{ y por tanto} \\ a_1 = a'_1 + a'_2 + a'_3, \quad a_2 = a'_2 + a'_3, \quad a_3 = a'_3.$$

Todo esto es general. En efecto, sean $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ dos bases ordenadas (para poder hablar de coordenadas de vectores) del espacio vectorial $V(K)$. Dado $x \in V$, tenemos:

$x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = \sum_{j=1}^n a'_j \cdot x'_j$, lo que nos preguntamos es la relación que hay entre las coordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) y $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ de x en B y B' respectivamente.

Ponemos cada vector de B' en combinación lineal de B

$$x'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Es decir, los vectores de B' nos determinan $n \cdot n$ escalares de K , a_{ij} , que van a hacer el papel de "diccionario" que traspasa el "nombre" (a_1, a_2, \dots, a_n) de x en B al "nombre" de este mismo x , $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$, en B' y a la inversa.

Tenemos

$$\sum_{j=1}^n a'_j \cdot x'_j = \sum_{j=1}^n a'_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot a'_j \right) \cdot x_i = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i.$$

Utilizando ahora la unicidad para las coordenadas de x en B (ver Prop. 3.36 y pag. 95) tenemos:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot a'_j = a_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

A estas fórmulas se las conoce con el nombre de las ecuaciones del cambio de base. Obsérvese que el papel de B y B' es claramente intercambiable, en este caso los a_{ij} se definirían de manera análoga poniendo cada x_i en combinación lineal de B' .

Hay que hacer observar que como de bases ordenadas se trata, pudiera ocurrir que ambas se originaran de la misma base de $V(K)$. Entonces las coordenadas de un mismo vector sólo difieren en el orden de colocación de los escalares. Las fórmulas del cambio lo que hacen en este caso es "reordenar" estas listas de escalares.

PROBLEMAS

1.- Sea V un espacio vectorial sobre K . A partir de los axiomas (ver pag. 74) probar las siguientes identidades:

$$a.(b.x + c.y) = (a.b).x + (a.c).y \quad \forall a, b, c \in K; \forall x, y \in V$$

$$a.(x + (-y)) = a.x + (-a.y) \quad \forall a \in K, \forall x, y \in V.$$

2.- Sea $(V, +)$ un grupo (en principio no se supone más). Si hay definida una ley $K \times V \longrightarrow V$, $(a, x) \longmapsto a.x$, siendo K un cuerpo, que verifica los axiomas i), ii), iii) e iv) de la pag 74. probar que la suma "+" en V es conmutativa. (La conmutatividad de la suma de vectores puede deducirse de los otros axiomas de espacio vectorial).

3.- En \mathbb{R}^3 consideramos la suma usual y el producto de escalares por ternas dado por

$$a.(a_1, a_2, a_3) = (a.a_1, a.a_2, 3.a.a_3)$$

¿ Es \mathbb{R}^3 un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con estas operaciones ?

4.- Demostrar que el conjunto de todas las aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} cuando se define la suma de elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y el producto de escalares reales por funciones mediante

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(a.f)(x) = a.f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$. (Utilizar prob. 8 pag. 43). Demostrar tambien que el espacio vectorial del ejemplo 3 de la introduccion del tema (ver pag. 73) es un subespacio vectorial suyo. Demostrar que el espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no es finitamente generado (utilizar pag. 86 y el hecho de que si un espacio vectorial admite un subespacio que no es finitamente generado, este tampoco lo es). Probar que para cada entero $n \geq 1$ existe un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con dimension n .

5.- Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K .

En $V \times V'$ definimos

$$(x, x') + (y, y') = (x + y, x' + y')$$

$$a.(x, x') = (a.x, a.x')$$

donde $a \in K$. Demostrar que $V \times V'$, con estas operaciones, es un espacio vectorial sobre K . (utilizar prob. 4, pag. 42). Si H es un sistema de generadores de V y H' es un sistema de generadores de V' , probar que $\{(x, 0') / x \in H\} \cup \{(0, x') / x' \in H'\}$ es un sistema de generadores de $V \times V'$. A partir de esto probar que si V y V' son finitamente generados, tambien lo es $V \times V'$. Por ultimo demostrar que en este caso $\dim_K(V \times V') = \dim_K V + \dim_K V'$.

6.- ¿ Cuales de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 son subespacios vectoriales suyos ?

$$U_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 / a_1 + a_2 + 2.a_3 = 0\}$$

$$U_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 / a_1^2 = a_2\}$$

$$U_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 / a_1 + a_2 = 0 \text{ y } a_1 - a_3 = 0\}.$$

7.- Sea V un espacio vectorial complejo finitamente generado. Consideremos V sobre \mathbb{R} , que tambien es finitamente generado (ver pag. 86). Probar que $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$. Aplicar esto a $V = \mathbb{C}^n$.

8.- Considérese \mathbb{R} como espacio vectorial sobre el cuerpo de los números racionales \mathbb{Q} . Demostrar que $\{3, \sqrt{2}\}$ es linealmente independiente. Probar que este mismo conjunto, considerado en el espacio $\mathbb{R}(\mathbb{R})$, es linealmente dependiente. Probar tambien que el espacio $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ no es finitamente generado (Suponer que fuera y contradecir que \mathbb{R} no es numerable).

9.- Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Supongamos que $\{x, y, z\} \subset V$ es linealmente independiente. Probar que $\{x, x+y, x+y-z\}$ es tambien linealmente independiente, y que el reciproco es asimismo cierto.

- 10.- Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Demostrar que todo subespacio vectorial de V con dimensión 1 (recta vectorial) tiene un número finito de vectores ¿ cuantos ? Supongamos que $\dim_K V = n$ ¿ se puede afirmar que V tiene un número finito de vectores ?
 ¿ Cuantas bases posee el espacio $K^3(K)$?
- 11.- Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial dado en el prob. 4, pag. 102. Se consideran $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2 \cdot x$, $h(x) = 3^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ¿ Es $\{f, g, h\}$ linealmente independiente ?
- 12.- Sean $U = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(-x) = f(x)\}$ y $U' = \{g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / g(-x) = -g(x)\}$. Demostrar que U y U' son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (de las funciones "pares" e "impares" respectivamente). Demostrar además que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U \oplus U'$. Dada $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(x) = x^2 + 2 \cdot x + 1$, encontrar las dos únicas $h \in U$, $g \in U'$ tales que $f = h + g$.
- 13.- En $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ consideraremos los subespacios $U_1 = L(\{e_1, e_3\})$, $U_2 = L(\{e_2\})$ y $U_3 = L(\{e_2 + e_3\})$ siendo e_1, e_2, e_3 los vectores de la base usual de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ en pag. 89. Demostrar que $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$, y que además $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$. Sin embargo ver que esta suma no es directa.
- 14.- Sea V un espacio vectorial sobre K con $\dim_K V = n$. Sea U un subespacio suyo con $\dim_K U = n$. Probar que necesariamente $U = V$.
- 15.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $\Phi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base suya. Consideremos $y \in V$ que se pondrá $y = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i$ con $b_i \in K$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Probar que $\Phi_j = (\Phi - \{x_j\}) \cup \{y\}$ es una base de V si y sólo si el escalar b_j es no nulo.
- 16.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sean $H, H' \subset V$. Encontrar una condición necesaria y suficiente (sobre H y H') para que $L(H) = L(H')$. En el caso particular de $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$ y $H = \{(1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$, $H' = \{(2, 1, 0), (0, -\frac{1}{2}, 1)\}$, probar que $L(H) = L(H')$.

17.- Determinar una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dado por

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 / a_1 = a_2 - 3a_3, a_3 = a_4\}$$

y completarla hasta una base de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Calcular tambien un subespacio suplementario de U y una base del espacio cociente V/U .

18.- Consideremos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$

$$U = L(\{(1, 2)\}), \quad U' = L(\{(0, 1)\}), \quad U'' = L(\{(2, 0)\}).$$

Probar que $U \neq U'$ y que $\mathbb{R}^2 = U \oplus U' = U \oplus U''$. Sacar consecuencias.

19.- Se considera en $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ los subespacios $U = \{(a, b, c) / a+b+c = 0\}$ y $W = L(\{(1, 2, 3)\})$. Demostrar que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

20.- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sean U_1 y U_2 dos subespacios de $V(K)$. Si $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ es una base de U_1 y $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_p\}$ una base de U_2 , entonces demostrar que

$$V = U_1 + U_2 \iff L(\{x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_p\}) = V$$

$$V = U_1 \oplus U_2 \iff \{x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_p\} \text{ es una base de } V.$$

21.- Sea $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ y $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base ordenada de \mathbb{R}^3 como en el problema 13, pag. 104. Se considera el vector $x = e_1 + e_2 + e_3$. Encontrar una base B' en la que x tenga coordenadas $(1, 0, 0)$. La misma pregunta con coordenadas $(-1, 0, 1)$.

22.- Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] / \text{grado}(p(x)) \leq 2\}$. Demostrar que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$. Se consideran $B = (1, x, x^2)$, $B' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$. Demostrar que son bases y encontrar las ecuaciones del cambio de base.

23.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $H = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ tal que $L(H) = V$ y ademas que cumple la propiedad que al quitarle uno cualquiera de sus vectores el subconjunto de H que resulta ya no es un sistema de generadores. Probar que entonces H es una base.

- 24.- Sea V un espacio vectorial sobre K . Demostrar, usando sólo las definiciones, que si $\{x_1, \dots, x_m\}$ es un subconjunto de V linealmente independiente e $\{y_1, \dots, y_n\}$ es un sistema generador de V , entonces $m \leq n$. Utilizar esto para dar otra prueba del Teorema 3.34.
- 25.- Sea S un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}[x](\mathbb{R})$, de manera que no hay en S dos polinomios de igual grado. Probar que S es linealmente independiente. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios de grado $\leq n$. Si $\beta = \{p_1(x), \dots, p_{n+1}(x)\} \subset V$ con grado $p_j(x) = j - 1$, $1 \leq j \leq n+1$, probar que β es una base de V .
- 26.- Sea el espacio vectorial $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] / \text{grado } p(x) \leq 3\}$. Probar que $U = \{p(x) \in V / p'(1) = 0\}$ es un subespacio de V . Encontrar una base de V/U y en ella calcular las coordenadas de $(1+x) + U$.
- 27.- Sean V un espacio vectorial sobre K , $B = (x_1, \dots, x_n)$ una base de V y x el vector de V de coordenadas $(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$ en B . Encontrar un subespacio U de V y una base B' de V/U de manera que $x + U$ tenga coordenadas (a_1, \dots, a_m) en B' .
- 28.- Sean U y W dos subespacios de un espacio vectorial $V(K)$. Probar que una condición suficiente para que exista $x \in U \cap W$, $x \neq 0$, es que $\dim_K U + \dim_K W > \dim_K V$.
- 29.- Sean U y W subespacios de un espacio vectorial $V(K)$ tales que $U \cap W = \{0\}$. Probar que $V = U \oplus W$ si y sólo si $\dim_K V = \dim_K U + \dim_K W$ (ver Corolario 3.42).

LECCION 4^a: APLICACIONES LINEALES. MATRICES.

Introducción. Primeras propiedades. Núcleo e imagen. Nulidad y Rango

- 1) Sea V un espacio vectorial sobre K y sea U un subespacio suyo. Entonces la aplicación inclusión de U en V , $i : U \longrightarrow V$ verifica $i(x+y) = i(x) + i(y)$, $i(a.x) = a.i(x) \quad \forall x, y \in U, \forall a \in K$.
 - 2) Sea $p : V \longrightarrow V/U$ la aplicación que le hace corresponder a cada vector $x \in V$ su clase según U , $x+U$ (la proyección de V sobre V/U). Entonces p verifica $p(x+y) = p(x) + p(y)$, $p(a.x) = a.p(x), \forall x, y \in V, \forall a \in K$. Esto no es más que escribir "de otra manera" las operaciones de V/U descritas en la pag. 84
 - 3) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \bar{z}$ (conjugado de z). Entonces f verifica $f(z+z') = f(z) + f(z')$ $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $f(a.z) = a.f(z) \quad \forall a \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, pero $f(a.z) = \bar{a}.f(z)$ si $a \in \mathbb{C}$ en lugar de ser $a \in \mathbb{R}$.
 - 4) Sea V el espacio vectorial de las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} dos veces derivables y $\mathcal{G}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el de todas las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} (ver prob. 4, pag. 102) (el primero es claramente un subespacio del segundo). La aplicación $D : V \longrightarrow \mathcal{G}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definida por $D(f) = f'' + f$ siendo f'' la segunda derivada de f , verifica $D(f+g) = D(f) + D(g) \quad \forall f, g \in V$, $D(a.f) = a.D(f) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall f \in V$.
 - 5) Sea $a \in K$ y $f_a : V \longrightarrow V$ (V es un espacio vectorial sobre K) la aplicación definida por $f_a(x) = a.x \quad \forall x \in V$, entonces se comprueba que $f_a(x+y) = f_a(x) + f_a(y)$, $f_a(b.x) = b.f_a(x) \quad \forall x, y \in V, \forall b \in K$ (que siempre estamos considerando conmutativo).
- En todos estos ejemplos aparecen aplicaciones entre dos espacios vectoriales que "respetan" las respectivas operaciones. Por ello se

dicen lineales en el sentido de la siguiente

Definición 4.1.- Dados dos espacios vectoriales $V(K)$, $V'(K)$ entenderemos por una aplicación lineal (u homomorfismo de espacios vectoriales) de $V(K)$ en $V'(K)$ toda aplicación $f : V \longrightarrow V'$ que verifique las dos siguientes condiciones:

$$\text{i) } f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in V$$

$$\text{ii) } f(ax) = a.f(x) \quad \forall a \in K, \forall x \in V.$$

Nótese que en la condición ii) se apunta explícitamente que ambos espacios vectoriales lo sean sobre el mismo cuerpo, de otro modo esto no tendría sentido.

Si además de lineal f es inyectiva diremos que es una aplicación lineal inyectiva o monomorfismo de espacios vectoriales (conviene poner la coletilla "de espacios vectoriales" para evitar una posible confusión con un homomorfismo entre otro tipo de estructuras). Si f es sobreyectiva diremos que es una aplicación lineal sobreyectiva o un epimorfismo de espacios vectoriales. Si f es biyectiva se dirá aplicación lineal biyectiva o isomorfismo de espacios vectoriales. Una aplicación lineal de $V(K)$ en si mismo se dice endomorfismo de V . Un endomorfismo biyectivo se llama automorfismo de $V(K)$ o transformación de $V(K)$.

En el ejemplo 1) se nos presenta una aplicación lineal inyectiva, 2) es una aplicación lineal sobreyectiva. En el ejemplo 3) se pone de manifiesto el papel relevante del cuerpo K , pues la aplicación $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$, es lineal de $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ en si mismo pero no de $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ en si mismo. Además, también de este ejemplo sacamos la conclusión de que decir que una aplicación $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo "a secas" puede conducirnos a un error, pues no sabemos si queremos decir del grupo $(\mathbb{C}, +)$ en si mismo, del cuerpo \mathbb{C} en si mismo,

del espacio vectorial $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ en si mismo, etc. Por eso lo del apellido "de grupos", "de anillos", "de espacios vectoriales". La aplicación del ejemplo 4) tambien es lineal. Por último en el ejemplo 5) tenemos un automorfismo de $V(K)$ cuando $a \neq 0$. Si $a = 0$ tenemos la aplicación $V \longrightarrow V$, $x \longmapsto 0$, que es trivialmente lineal.

Hay que hacer notar que la condición i) de la Definición 4.1 nos dice que una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ es también, en particular, un homomorfismo entre los grupos $(V, +)$ y $(V', +)$, de modo que todo lo sabido de homomorfismos de grupos se traspasa sin más a las aplicaciones lineales (ver por ejemplo 1 en la Prop. 4.3 abajo). Así cuando hablamos del núcleo de una aplicación lineal nos estaremos refiriendo al núcleo de tal aplicación considerada solo como homomorfismo de grupos, etc.

Proposición 4.2.- Sean $V(K)$ y $V'(K)$ dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación. Entonces, f es lineal si y sólo si cumple

$$f(a.x + b.y) = a.f(x) + b.f(y) \quad \forall a, b \in K, \forall x, y \in V.$$

Demostración. En efecto, si f es lineal tenemos

$$f(a.x + b.y) = f(a.x) + f(b.y) = a.f(x) + b.f(y).$$

Recíprocamente, i) de la Definición 4.1 se obtiene de esto tomando $a = b = 1$, e ii) tomando $a \in K$ cualquiera y $b = 0$ (ver Prop. 3.2, pag. 76).

Proposición 4.3.- Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal de $V(K)$ en $V'(K)$. Entonces:

$$1. f(0) = 0', f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in V$$

$$2. f\left(\sum_{i=1}^m a_i \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot f(x_i), \quad a_i \in K, x_i \in V \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

$$3. \text{Ker } f = \{x \in V / f(x) = 0'\} \text{ es un subespacio vectorial de } V.$$

Además, f es inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$.

4. $\text{Im } f = \{f(x) / x \in V\}$ es un subespacio de V' . Además f es sobre-
yectiva $\Leftrightarrow \text{Im } f = V'$.

Demostración. 1. es una consecuencia inmediata de que f es un homomorfismo del grupo $(V, +)$ en el grupo $(V', +)$ (ver Prop. 1.24, pag. 35).
2. se obtiene generalizando la Proposición 4.2 por inducción sobre el número de sumandos. La segunda afirmación de 3. y también de 4. ya las conocemos (ver Prop. 1.28, pag. 36). Teniendo en cuenta que $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ son subgrupos respectivamente de $(V, +)$ y $(V', +)$ (por Prop. 1.26 y 1.27) sólo hay que demostrar

$$\forall a \in K, \quad \forall x \in \text{Ker } f \quad a \cdot x \in \text{Ker } f$$

$$\forall a \in K, \quad \forall y \in \text{Im } f : a \cdot y \in \text{Im } f.$$

En efecto, $f(a \cdot x) = a \cdot f(x) = a \cdot 0' = 0'$ por la Prop. 3.2, pag. 76. Dado $y \in \text{Im } f \exists x \in V : f(x) = y$, entonces $a \cdot y = a \cdot f(x) = f(a \cdot x) \in \text{Im } f$.

En 3. y 4. de la Proposición 4.3 se afirma que $f^*(\{0'\}) (= \text{Ker } f)$ y $f_*(V) (= \text{Im } f)$ son subespacios de V y V' respectivamente. Ahora generalizamos estos hechos mediante:

Proposición 4.4.- Sean $V(K)$, $V'(K)$ dos espacios vectoriales y sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces:

a) Si U' es un subespacio vectorial de V' $\Rightarrow f^*(U')$ es un subespacio vectorial de V .

b) Si U es un subespacio vectorial de V $\Rightarrow f_*(U)$ es un subespacio vectorial de V' .

Se demostrará como ejercicio.

Definición 4.5.- Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ es constum-
bre llamar a $\dim_K \text{Ker } f$ la nulidad de f , $\text{nulidad}(f)$, y a $\dim_K \text{Im } f$ el
rango de f , $\text{rango}(f)$. Obsérvese que $0 \leq \text{nulidad}(f) \leq \dim_K V$, y que
 $0 \leq \text{rango}(f) \leq \dim_K V'$. Además

f es inyectiva $\Leftrightarrow \text{nulidad}(f) = 0$

f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \text{rango}(f) = \dim_K V'$

f es la aplicación "nula" $(f(x) = 0' \forall x \in V) \Leftrightarrow \text{nulidad}(f) = \dim_K V$

$\Leftrightarrow \text{rango}(f) = 0.$

Nosotros sabemos que si $V(K)$ es un espacio vectorial con $\dim_K V = n$ y $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una base ordenada suya, podemos definir una aplicación $b_B : K^n \longrightarrow V$, mediante $b_B(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$.

Afirmamos que b_B es lineal. En efecto,

$$\begin{aligned} b_B((a_1, a_2, \dots, a_n) + (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)) &= b_B(a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \dots, a_n + a'_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i \cdot x_i + a'_i \cdot x_i) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^n a'_i \cdot x_i = b_B(a_1, a_2, \dots, a_n) + \\ &+ b_B(a'_1, a'_2, \dots, a'_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_B(a \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n)) &= b_B(a \cdot a_1, a \cdot a_2, \dots, a \cdot a_n) = \sum_{i=1}^n (a \cdot a_i) \cdot x_i \\ \sum_{i=1}^n a \cdot (a_i \cdot x_i) &= a \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \right) = a \cdot b_B(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

De modo que b_B es un isomorfismo de $K^n(K)$ en $V(K)$ ya que b_B es claramente biyectiva (ver pag. 95). Que su núcleo es el cero de $K^n(K)$ es decir que los vectores de B son independientes y que su imagen es "todo" V , que forman un sistema generador.

Proposición 4.6.- Sean $V(K)$, $V'(K)$ y $V''(K)$ espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$, $g : V' \longrightarrow V''$ aplicaciones lineales. Entonces $g \circ f : V \longrightarrow V''$ tambien es una aplicación lineal.

Demostración. La condición i) de la Definición 4.1 la satisface $g \circ f$ automáticamente por ser esta aplicación un homomorfismo del grupo $(V, +)$ en el grupo $(V'', +)$ (ver Prop. 1.22, pag. 34). En cuanto a ii) tenemos

$$(g \circ f)(a \cdot x) = g(f(a \cdot x)) = g(a \cdot f(x)) = a \cdot g(f(x)) = a \cdot (g \circ f)(x)$$

$$\forall x \in V, \forall a \in K.$$

Una consecuencia inmediata es que si f es inyectiva (sobreyectiva) y g es inyectiva (sobreyectiva) entonces $g \circ f$ es inyectiva (sobreyectiva). Así, la composición de dos isomorfismos de espacios vectoriales es otro isomorfismo. Además tenemos que si $f : V \longrightarrow V'$ es un isomorfismo, su inversa $f^{-1} : V' \longrightarrow V$ es también lineal y por tanto también un isomorfismo.

Sean $V(K)$ y $V'(K)$ dos espacios vectoriales con $\dim_K V = \dim_K V' = n$ y sean $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ bases ordenadas de V y V' respectivamente. Entonces tenemos isomorfismos:

$$b_B : K^n \longrightarrow V \quad \text{y} \quad b'_B : K^n \longrightarrow V'$$

definidos como en la página anterior. Según lo que acabamos de decir $b_B^{-1} : V \longrightarrow K^n$ es un isomorfismo. Entonces

$$b'_B \circ b_B^{-1} : V \longrightarrow V'$$

es también un isomorfismo. Nótese que está definido como sigue:

Dado $x \in V$ $\exists! (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$ con $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = x$, entonces $b'_B \circ b_B^{-1}(x)$ es el único vector de V' con coordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) en B' , es decir $b'_B \circ b_B^{-1}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x'_i$. De modo que si V y V' son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo y con la misma dimensión, hemos probado que es posible encontrar un isomorfismo de $V(K)$ en $V'(K)$. Nos podríamos plantear el recíproco: Supongamos que $V(K)$ y $V'(K)$ son espacios vectoriales y que $f : V \longrightarrow V'$ es un isomorfismo ¿podremos asegurar que tienen la misma dimensión? La respuesta en el epígrafe siguiente.

Análogamente a la descomposición que obtuvimos para un homomorfismo de grupos (ver Prop. 1.29, pag. 37) podemos ahora establecer el siguiente resultado

Proposición 4.7.- (Descomposición canónica de una aplicación lineal)

Sean $V(K)$, $V'(K)$ espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces

$$f = i \circ b \circ p$$

donde $p : V \longrightarrow V/\text{Ker } f$, $p(x) = x + \text{Ker } f \quad \forall x \in V$

$b : V/\text{Ker } f \longrightarrow \text{Im } f$, $b(x + \text{Ker } f) = f(x) \quad \forall (x + \text{Ker } f) \in V/\text{Ker } f$

$i : \text{Im } f \longrightarrow V'$, $i(y) = y \quad \forall y \in \text{Im } f$

son aplicaciones lineales, respectivamente sobreyectiva, biyectiva e inyectiva.

Demostración. En primer lugar observemos que $V/\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ son espacios vectoriales sobre K (ver Prop. 3.24, pag. 84 y pag. 110). Esta descomposición de f es cierta sin más que mirar esta aplicación como un homomorfismo del grupo $(V, +)$ en el grupo $(V', +)$ (ver Prop. 1.29, pag. 37). Por otro lado sabemos que p e i son lineales de los ejemplos 2 y 1, respectivamente, en pag. 107. Así que sólo queda por comprobar que b verifica la condición ii) de la definición de aplicación lineal. En efecto:

$$b(a.(x + \text{Ker } f)) = b(a.x + \text{Ker } f) = f(a.x) = a.f(x) = a.b(x + \text{Ker } f).$$

Lo que concluye la demostración.

Teoremas de isomorfía. Consecuencias sobre dimensiones.-

Lo mismo que ocurría en "grupos" uno puede ahora plantearse cuando dos espacios vectoriales son "idénticos" desde el punto de vista de la teoría que estamos desarrollando. Así, dada una colección \mathcal{V}_K de espacios vectoriales, podemos definir en \mathcal{V}_K la siguiente relación binaria: si $V(K)$ y $V'(K)$ son dos espacios vectoriales de \mathcal{V}_K (naturalmente todos los espacios de \mathcal{V}_K están construidos sobre el mismo cuerpo K) diremos que V es isomorfo con V' , $V \cong V'$,

si existe un isomorfismo $f : V \longrightarrow V'$. Esta relación binaria resulta ser de equivalencia (compruébese). En cada clase de esta relación de equivalencia están todos los espacios isomorfos entre si. Desde el punto de vista del estudio de espacios vectoriales todos los espacios de una de estas clases son identicos (la única herramienta que tenemos para distinguirlos es el concepto de isomorfismo de espacios vectoriales). Si V y V' son espacios vectoriales isomorfos, podemos decir que las operaciones de ambos se comportan del mismo modo, aunque los vectores sean de naturaleza muy distinta como elementos de distintos conjuntos. Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ son isomorfos ya que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(a_1, a_2) = a_1 + a_2 i$ es lineal y biyectiva. Por eso muchas veces se representan los números complejos $a_1 + a_2 i$ mediante pares ordenados de números reales (a_1, a_2) . Este "representar" una cosa por otra al que el alumno estará acostumbrado del bachillerato no es más que utilizar encubiertamente el concepto de isomorfismo. En nuestro lenguaje diríamos que podemos considerar indistintamente $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ o $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ pues son isomorfos.

Decir que dos espacios vectoriales son isomorfos es establecer un resultado de "isomorfía". Nosotros sabemos que, según la discusión de la pag. 112, si $V(K)$ y $V'(K)$ son dos espacios vectoriales con la misma dimensión entonces son isomorfos, simbólicamente

$$\dim_K V = \dim_K V' \Rightarrow V \cong V'.$$

Este resultado, aunque simple es interesante pues nos da otra utilidad (de distinto tipo a las conocidas hasta ahora) de la dimensión de un espacio vectorial (finitamente generado). Es natural entonces preguntarse qué ocurre con el recíproco, es decir, si dos espacios vectoriales son isomorfos ¿ tendrán la misma dimensión ? La respuesta será afirmativa, y lo probaremos en la pag. 118

Nótese que en la Proposición 4.7, pag. 113, tambien se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 4.8.- Sean $V(K)$, $V'(K)$ espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces

$$V/\text{Ker } f \cong \text{Im } f.$$

Este Teorema tiene varias consecuencias que damos a continuación. Se le conoce con el nombre de "el primer Teorema de isomorfía".

Teorema 4.9.- (Segundo Teorema de isomorfía) Sean U y W dos subespacios vectoriales de $V(K)$. Entonces se verifica

$$(U + W)/W \cong U/(U \cap W).$$

Demostración. Vamos a tratar de caer en el primer Teorema de isomorfía. Para ello definamos la aplicación $g : U \longrightarrow (U + W)/W$ por $g(x) = x + W$, $\forall x \in U$. Como g es la composición de las aplicaciones

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow U + W & y \quad U + W &\longrightarrow (U + W)/W \\ x &\longmapsto x + 0 = x & y + z &\longmapsto (y + z) + W = y + W \end{aligned}$$

resulta ser lineal. Además, g es sobreyectiva y su núcleo es

$$\text{Ker } g = \{x \in U / g(x) = 0 + W\} = \{x \in U / x \in W\} = U \cap W.$$

Ahora, por el primer Teorema de isomorfía tenemos $U/\text{Ker } g \cong \text{Im } g$ que no es otra cosa que el resultado anunciado.

Teorema 4.10.- (Tercer Teorema de isomorfía) Sean U y W dos subespacios vectoriales de $V(K)$ tales que $U \subset W$. Entonces

$$(V/U) / (W/U) \cong (V/W).$$

Demostración. Consideraremos la aplicación $q : V/U \longrightarrow V/W$ definida por $q(x + U) = x + W$. Obsérvese que si $x + U = x' + U \Rightarrow x - x' \in U$, y como $U \subset W$ resulta $x - x' \in W$, es decir $x + W = x' + W$, lo que nos dice que esta definición es correcta. Además q es lineal ya que

$$\begin{aligned}
q((x+U)+(x'+U)) &= q((x+x')+U) = (x+x')+W = \\
&= (x+W)+(x'+W) = q(x+U)+q(x'+U). \\
q(a.(x+U)) &= q(a.x+U) = a.x+W = a.(x+W) = a.q(x+U).
\end{aligned}$$

Y es claramente sobreyectiva. Calculemos su núcleo

$$\text{Ker } q = \{x+U / q(x+U) = 0+W\} = \{x+U / x \in W\} = W/U.$$

Por el primer teorema de isomorfía tenemos $(V/U)/\text{Ker } q \cong \text{Im } q$, que es lo que se quería probar.

Teorema 4.11.- Sean $V(K)$, $V'(K)$ espacios vectoriales y $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ una base de $V(K)$, $(x'_1, \dots, x'_n) \in V' \times \dots \times V'$. Entonces

$$\exists ! f : V \longrightarrow V' \text{ lineal tal que } f(x_i) = x'_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Además,

f es inyectiva $\Leftrightarrow f_*(\beta)$ es linealmente independiente.

f es sobreyectiva $\Leftrightarrow f_*(\beta)$ genera a V' .

f es biyectiva $\Leftrightarrow f_*(\beta)$ es una base de V' .

Este resultado nos dice que conocidas las imágenes de los vectores que forman una base de $V(K)$ queda completamente determinada la aplicación lineal (es decir, la imagen de cualquier otro vector). Además, el carácter de f viene dado por condiciones de independencia y generador sobre el conjunto de las imágenes de los vectores de una base de $V(K)$.

Demostración. Supongamos que f existe y sea $g : V \longrightarrow V'$ lineal cumpliendo también que $g(x_i) = x'_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Vamos a probar que $f = g$, con lo que f será única con estas condiciones. En efecto,

Sea $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ cualquier vector de V . Entonces

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot g(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i\right) = f(x).$$

Para ver la existencia vamos a definir f . Dado $x \in V$ sabemos que

$x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ con $a_i \in K \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces ponemos

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i'$$

Como

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \cdot x_i' = \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i \cdot x_i' + b_i \cdot x_i') = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i' + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i' = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i\right) + f\left(\sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(a \cdot (\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i)) &= f\left(\sum_{i=1}^n a \cdot (a_i \cdot x_i)\right) = f\left(\sum_{i=1}^n (a \cdot a_i) \cdot x_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (a \cdot a_i) \cdot x_i' = \sum_{i=1}^n a \cdot (a_i \cdot x_i') = a \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i'\right) = a \cdot f\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i\right) \end{aligned}$$

tenemos que f es lineal, y además como

$$x_j = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} \cdot x_i \quad \text{con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \Rightarrow f(x_j) = x_j' \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Para ver el carácter de f según sea $f_*(\beta)$ utilizaremos la Proposición 4.3. Supongamos primeramente que $\text{Ker } f = \{0\}$, y sea $a_1 \cdot x_1' + \dots + a_n \cdot x_n' = 0'$. Esto quiere decir que $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n$ pertenece al núcleo de f , por lo tanto $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n = 0$, y como β es linealmente independiente $a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, lo que prueba que $f_*(\beta)$ es linealmente independiente. Recíprocamente, sea $x \in \text{Ker } f$, $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$, entonces $0' = f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i'$, y como ahora suponemos que $f_*(\beta)$ es linealmente independiente tenemos $a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Es decir $x = 0$ y en consecuencia f es inyectiva.

Si observamos que $L(f_*(\beta)) = \text{Im } f$, entonces $L(f_*(\beta)) = V'$ si y sólo si f es sobreyectiva. Finalmente, uniendo ambos resultados tenemos que f es biyectiva si y sólo si $f_*(\beta)$ es una base de V' .

Es necesario hacer notar que pudiera ocurrir en las hipótesis del Teorema 4.11, que algún x_i' coincidiese con otro x_j' . Es decir, no afirmamos que todas las imágenes de los vectores de B

tengan necesariamente que ser distintos vectores de V' . Como ilustración a esto supongamos $x_i' = 0' \forall i \in \{1, \dots, n\}$. El Teorema 4.11 afirma entonces que hay una única aplicación lineal $f_0 : V \longrightarrow V'$ tal que $f(x_i) = 0' \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Esta aplicación lineal verifica $f_0(x) = 0' \forall x \in V$ y se llama la aplicación lineal "nula" de V en V' . Nótese además que toda $f : V \longrightarrow V'$ lineal se construye usando el Teorema 4.11.

Teorema 4.12.- Sean V y V' espacios vectoriales sobre K . Entonces

$$V \cong V' \Leftrightarrow \dim_K V = \dim_K V'.$$

Demostración. Ya sabemos por la discusión en la pag. 112 que si dos espacios vectoriales tienen la misma dimensión son isomorfos. Recíprocamente, si V y V' son isomorfos existirá $f : V \longrightarrow V'$ lineal y biyectiva. Entonces, si $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de V por el Teorema 4.11 tenemos que $f_*(\beta) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ es una base de V' , por tanto V y V' tienen dimensión n .

Veamos ahora algunas consecuencias de este Teorema.

Corolario 4.13.- Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces

$$\dim_K V = \text{nulidad}(f) + \text{rango}(f).$$

Demostración. Según el primer Teorema de isomorfía (Teorema 4.8) $V/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$, entonces $\dim_K V/\text{Ker } f = \dim_K \text{Im } f = \text{rango}(f)$ por el Teorema 4.12. Pero sabemos que la dimensión de un espacio vectorial cociente se obtiene (ver pag. 98) como la diferencia de las dimensiones entre la del espacio y del subespacio. Entonces $\dim_K V/\text{Ker } f = \dim_K V - \dim_K \text{Ker } f = \dim_K V - \text{nulidad}(f) = \text{rango}(f)$.

Obsérvese que como consecuencia de este Corolario tenemos $0 < \text{rango}(f) < \min\{\dim_K V, \dim_K V'\}$ (ver Definición 4.5).

Razonamientos similares a partir del segundo y tercer Teoremas de isomorfía (Teoremas 4.9 y 4.10) nos permiten establecer:

Corolario 4.14.- Sean U y W dos subespacios de V(K). Entonces

$$\dim_K(U + W) + \dim_K(U \cap W) = \dim_K U + \dim_K W.$$

Notemos que esta fórmula ya la conociamos deducida de otra manera en la Proposición 3.41, pag. 98.

Corolario 4.15.- Sean U y W dos subespacios vectoriales de V(K) tales que U ⊥ W. Entonces

$$\dim_K V/U = \dim_K V/W + \dim_K W/U.$$

La demostración se deja como ejercicio.

La fórmula obtenida en el Corolario 4.13 es muy útil como lo pone de manifiesto el siguiente resultado ideal para utilizarlo en supuestos prácticos.

Proposición 4.16.- Sean V(K), V'(K) espacios vectoriales con la misma dimensión n, y f : V → V' una aplicación lineal. Entonces son equivalentes:

- a) f es biyectiva
- b) f es inyectiva
- c) f es sobreyectiva
- d) nulidad(f) = 0
- e) rango(f) = n.

Demostración. Utilizando $\dim_K V = \text{nulidad}(f) + \text{rango}(f)$, está claro que d) y e) son equivalentes. Por otro lado, por la Proposición 4.3, pag. 109, b) \Leftrightarrow d) y c) \Leftrightarrow e). De modo que sólo resta probar que a) es equivalente con cualquiera de las otras 4 condiciones. Es claro que a) \Rightarrow b). Si ocurre ahora b) tenemos que $\text{Im } f$ es un subespacio de V' con dimensión igual a n, por tanto $\text{Im } f = V'$ y f es sobreyectiva, y como ya era inyectiva tenemos a).

Para finalizar este epígrafe queremos hacer algunas observaciones. En primer lugar que a la vista del resultado del Teorema 4.11

la discusión de la pag. 112 puede generalizarse como sigue:

Sean $V(K)$ y $V'(K)$ espacios vectoriales isomorfos. Sea

$f : V \longrightarrow V'$ un isomorfismo de V en V' . Si $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una base ordenada de V entonces $B' = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ es una base ordenada de V' . Uno puede ahora comprobar que si un vector $x \in V$ tiene coordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) en B entonces $f(x)$ tiene coordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) en B' .

Además podemos construir "muchos" isomorfismos de V en V' (*) (siendo estos espacios isomorfos). En efecto, para cada base ordenada $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de V y cada base ordenada $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ de V' , poniendo $x_i \longleftrightarrow x'_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos un isomorfismo de V en V' . De modo que parece conveniente cuando estemos trabajando con un espacio vectorial y otro isomorfo con él, no perder de vista "como" identificamos uno con otro, es decir el isomorfismo que estamos utilizando.

El Teorema 4.11 nos da también la posibilidad de construir isomorfismos de V en si mismo. En efecto, basta aplicarlo con $V' = V$. Por ejemplo, supongamos que $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B' = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ son dos bases ordenadas de V , entonces poniendo $x_i \longleftrightarrow y_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, definimos un automorfismo de $V(K)$. Si $B = B'$ $x_i \longleftrightarrow x_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nos define la identidad en V . Más todavía si $B = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ y $B' = (x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$, si ponemos $x_1 \longleftrightarrow x_2, x_2 \longleftrightarrow x_1, x_i \longleftrightarrow x_i \quad \forall i \in \{3, \dots, n\}$ tenemos un automorfismo de $V(K)$. Este lleva el vector de V que tiene coordenadas $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ en B al vector de V que tiene coordenadas $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ en B' . Es decir el vector $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ en el vector $a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_1 + \sum_{j=3}^n a_j \cdot x_j$.

(*) Un isomorfismo que sólo depende de la naturaleza de V y V' se dice natural (no utiliza bases ni otro elemento extra fuera de V y V' para su definición). En este caso, V y V' se dicen naturalmente isomorfos.

Expresión analítica de una aplicación lineal: matrices. Operaciones con aplicaciones lineales y con matrices.-

Sean $V(K)$, $V'(K)$ espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Fijemos dos bases ordenadas $B = (x_1, \dots, x_n)$ en V y $B' = (x'_1, \dots, x'_m)$ en V' . Entonces según el Teorema 4.11, la aplicación f está completamente determinada (y de forma única) por las coordenadas de los vectores $f(x_i)$, $i=1, \dots, n$, en B' . Pongamos entonces

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x'_i$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Esta aplicación lineal con la ayuda de B y B' nos proporciona $m \cdot n$ escalares de K , que a su vez determinan unívocamente a f , como decimos arriba.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in V, \quad x = \sum_{j=1}^n a_j \cdot x_j, \text{ entonces } f(x) &= \sum_{j=1}^n a_j \cdot f(x_j) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot x'_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot a_j \right) \cdot x'_i, \text{ de modo que si } f(x) \text{ se pone} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^m a'_i \cdot x'_i \quad \text{entonces} \quad a'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot a_j \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Estas m ecuaciones que nos determinan las coordenadas en B' de la imagen de cada vector de V mediante f , conocidas las coordenadas de éste en B y las coordenadas de las imágenes de los vectores de B en la base B' , reciben el nombre de las ecuaciones analíticas de f con respecto a las bases ordenadas B de V y B' de V' .

Por ejemplo las ecuaciones analíticas de $\lambda_V : V \longrightarrow V$ con respecto a una base ordenada B (tomada tanto en el V dominio como en el V codominio) son

$$a'_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \cdot a_j \quad \text{donde } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Es decir, $a'_i = a_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Sin embargo la aplicación $f_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tomando como base ordenada $B = (e_1, e_2)$ en el dominio y $B' = (u_1, u_2)$, $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_1 - e_2$ en el codominio, tiene por ecuaciones analíticas

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot a_2 \\ a'_2 &= \frac{1}{2} \cdot a_1 - \frac{1}{2} \cdot a_2 \end{aligned}$$

Esto nos indica que, si bien fijadas bases ordenadas B en V y B' en V' las ecuaciones analíticas son únicas para una aplicación lineal dada f , al variar las bases ordenadas en el dominio o codominio tambien cambian las ecuaciones analíticas de f . Para hablar con propiedad no debemos olvidar nunca qué bases ordenadas en V y V' estamos considerando para establecer esta expresión "por coordenadas" de f . Entonces estos $m \cdot n$ escalares a_{ij} determinan a f fijada una base ordenada en el dominio y otra en el codominio, del mismo modo que las coordenadas en una base ordenada a un vector. Son como "las coordenadas" de f como precisaremos más adelante.

Definición 4.17.- Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ y dadas $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ bases ordenadas de V y V' respectivamente, se define la matriz de f respecto de las bases B de V y B' de V' , $M(f, B, B')$, por

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde los elementos de este rectángulo de escalares de K vienen dados por

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot x'_i \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Si a las lineas de escalares horizontales les llamamos filas y a las vecticales columnas, resulta que el escalar a_{ij} se encuentra justamente en la intersección de la fila i -ésima con la columna j -ésima.

Es decir en la intersección de la fila i -ésima y la columna j -ésima de $M(f, B, B')$ se encuentra la coordenada i -ésima de $f(x_j)$ en B' .

Definición 4.18. - Sea K un cuerpo (que recordemos siempre es commutativo). Entenderemos por una matriz de m filas y n columnas con elementos en K (abreviadamente de orden mxn sobre K) un rectángulo de escalares de K de la forma

$$A = \begin{pmatrix} & & & & & \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & & \\ & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & & \end{pmatrix}$$

donde a_{ij} representa el elemento de A que se encuentra en la intersección de la fila i -ésima con la columna j -ésima. Dos matrices de orden mxn son iguales si tienen el mismo escalar en la intersección de la fila i -ésima y la columna j -ésima, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Sea $\mathcal{M}_{mxn}(K)$ el conjunto de las matrices de orden mxn sobre K . Si V y V' son espacios vectoriales sobre K con $\dim_K V = n$ y $\dim_K V' = m$ la aplicación

$$\begin{aligned} F_{B, B'} : \text{Hom}_K(V, V') &\longrightarrow \mathcal{M}_{mxn}(K) \\ f &\longmapsto M(f, B, B') \end{aligned}$$

es biyectiva. En efecto, esto no es más que volver a aplicar el Teorema 4.11. Si $f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$ son tales que $M(f, B, B') = M(g, B, B')$ eso quiere decir que f y g coinciden sobre los vectores de la base B , por la unicidad $f = g$. De modo que $F_{B, B'}$ es inyectiva. Para ver que es sobreyectiva tomemos $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}(K)$. Cada columna de A me define un vector al tomar por coordenadas los escalares de esta respecto de B' . Así tenemos n vectores de V' $y_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot x_i^j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ (seguimos con la notación de la página precedente). Utilizando la existencia en el Teorema 4.11, si f es la única aplicación lineal de V en V' con $f(x_j) = y_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$, entonces $F_{B, B'}(f) = A$.

Otra forma de ver lo anterior es construir una aplicación

$$G_{B,B'} : \mathcal{M}_{m \times n}(K) \longrightarrow \text{Hom}_K(V, V')$$

definiendo, para cada matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ sobre K , $G_{B,B'}(A)$ como la única aplicación lineal de V en V' tal que las coordenadas de la imagen de cada x_j de B en la base B' vengan dadas justamente por la columna j -ésima de A . Entonces $G_{B,B'}$ es una aplicación y verifica

$$F_{B,B'} \circ G_{B,B'} = 1_{\mathcal{M}_{m \times n}(K)} \text{ y } G_{B,B'} \circ F_{B,B'} = 1_{\text{Hom}_K(V, V')}$$

por lo que según la Proposición 0.12, pag. 10, resulta que ambas son biyectivas y una la inversa de la otra.

Dicho de otro modo lo que acabamos de ver es que cada matriz de orden $m \times n$ sobre K es la matriz de una única aplicación lineal de V en V' fijadas bases ordenadas B en V y B' en V' .

Vamos ahora a estudiar que estructura algebraica tiene el conjunto $\text{Hom}_K(V, V')$. A partir de la biyección $F_{B,B'}$ podriamos "trasladar" esta estructura (en el mismo sentido en que en la pag. 72 trasladamos operaciones de vectores libre a pares ordenados de números reales) al conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Claro está que las operaciones que pasemos a este conjunto en principio podrían depender de quienes fueran B y B' . Pero veremos que no ocurre así.

Proposición 4.19.- Sean $V(K)$, $V'(K)$ espacios vectoriales y sea $\text{Hom}_K(V, V')$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en V' . Si definimos una suma y un producto por escalares en $\text{Hom}_K(V, V')$ por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in V$$

$$(a.f)(x) = a.f(x) \quad \forall x \in V$$

siendo $f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$ y $a \in K$, tenemos que $\text{Hom}_K(V, V')$ es un espacio vectorial sobre K .

Demostración. Sean $f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$, y vamos a ver que $f + g \in \text{Hom}_K(V, V')$.

$$(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) =$$

$$= f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = (f + g)(x) + (f + g)(y)$$

$$(f + g)(b.x) = f(b.x) + g(b.x) = b.f(x) + b.g(x) = b.(f + g)(x)$$

$\forall x, y \in V, \forall b \in K$. Con lo que la suma es una operación binaria en $\text{Hom}_K(V, V')$.

Además cumple

$$f + (g + h) = (f + g) + h \quad \forall f, g, h \in \text{Hom}_K(V, V')$$

ya que

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = [f + (g + h)](x) \quad \forall x \in V. \end{aligned}$$

(Conviene que se vayan analizando los pasos de cada una de las pruebas observando cual es el motivo que permite pasar de un miembro a otro).

La aplicación lineal nula (ver pag. 118) $f_0 : V \longrightarrow V'$, definida por $f_0(x) = 0'$ $\forall x \in V$ es el elemento neutro de la suma por ser

$$(f + f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x) + 0' = f(x)$$

$$(f_0 + f)(x) = f_0(x) + f(x) = 0' + f(x) = f(x) \quad \forall x \in V, \text{ que se expresa}$$

$$f + f_0 = f_0 + f = f \quad \forall f \in \text{Hom}_K(V, V').$$

Dado $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ se define su opuesta $-f$, por $(-f)(x) = -f(x)$ $\forall x \in V$, que es una aplicación lineal de V en V' (compruébese) y cumple

$$f + (-f) = (-f) + f = f_0 \quad \forall f \in \text{Hom}_K(V, V') \text{ ya que}$$

$$[f + (-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0'$$

$$[(-f) + f](x) = (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0' \quad \forall x \in V.$$

Además esta suma verifica la propiedad conmutativa

$$f + g = g + f \quad \forall f, g \in \text{Hom}_K(V, V') \text{ ya que}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x) \quad \forall x \in V.$$

Con lo que acabamos de probar que esta suma convierte a $\text{Hom}_K(V, V')$ en un grupo abeliano. Vamos a ver ahora la multiplicación de escalares por aplicaciones lineales.

Sea $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ y sea $a \in K$, entonces $a.f \in \text{Hom}_K(V, V')$. En efecto,

$$\begin{aligned} (a.f)(x+y) &= a.f(x+y) = a.(f(x)+f(y)) = a.f(x)+a.f(y) = \\ &= (a.f)(x)+(a.f)(y), \\ (a.f)(bx) &= a.f(bx) = a.(bf(x)) = (ab).f(x) = (ba).f(x) = \\ &= b.(a.f(x)) = b.(a.f)(x), \end{aligned}$$

$\forall x, y \in V, \forall b \in K$. Además tenemos

$$\begin{aligned} [a.(f+g)](x) &= a.(f+g)(x) = a.(f(x)+g(x)) = a.f(x)+a.g(x) = \\ &= (a.f)(x)+(a.g)(x) = (a.f+a.g)(x) \quad \forall x \in V, \text{ luego} \\ a.(f+g) &= a.f+a.g \quad \forall f, g \in \text{Hom}_K(V, V'), \quad \forall a \in K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(a+b).f](x) &= (a+b).f(x) = a.f(x)+b.f(x) = (a.f)(x)+(b.f)(x) = \\ &= (a.f+b.f)(x) \quad \forall x \in V, \text{ luego} \\ (a+b).f &= a.f+b.f \quad \forall f \in \text{Hom}_K(V, V'), \quad \forall a, b \in K. \end{aligned}$$

$$[(a.b).f](x) = (a.b).f(x) = a.(b.f(x)) = a.[(b.f)(x)] = [a.(b.f)](x)$$

$\forall x \in V$, luego

$$(a.b).f = a.(b.f) \quad \forall f \in \text{Hom}_K(V, V'), \quad \forall a, b \in K. \text{ Finalmente}$$

$$(1.f)(x) = 1.f(x) = f(x) \quad \forall x \in V, \text{ luego}$$

$$1.f = f \quad \forall f \in \text{Hom}_K(V, V'), \text{ donde } 1 \text{ es la unidad de } K.$$

Así concluimos que $\text{Hom}_K(V, V')$ es un espacio vectorial sobre K .

Supongamos ahora que $V(K)$ y $V'(K)$ son espacios vectoriales finitamente generados. Parece natural preguntarse si $\text{Hom}_K(V, V')$ es entonces finitamente generado, y si este es el caso si hay alguna relación entre las dimensiones de V , V' y $\text{Hom}_K(V, V')$. Sobre esto tenemos

Proposición 4.20.- Sean $V(K)$, $V'(K)$ espacios vectoriales finitamente generados, entonces $\text{Hom}_K(V, V')$ es finitamente generado y

$$\dim_K \text{Hom}_K(V, V') = \dim_K V \cdot \dim_K V'.$$

Demostración. Sean $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\beta' = \{x'_1, \dots, x'_m\}$ bases de V y V' respectivamente. A partir de ellas vamos a construir una base de $\text{Hom}_K(V, V')$ con $m \cdot n$ elementos, con ello tendremos las dos afirmaciones de la Proposición a un mismo tiempo. En efecto, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y cada $j \in \{1, \dots, n\}$ sea f_{ij} la única aplicación lineal de V en V' definida por

$$f_{ij}(x_k) = \delta_{jk} \cdot x'_i \quad \text{donde } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Es decir, f_{ij} lleva en 0' todos los vectores de la base β a excepción de x_j que tiene por imagen x'_i . O dicho de otro modo

$$f_{ij}(a_1 \cdot x_1 + \dots + a_j \cdot x_j + \dots + a_n \cdot x_n) = a_j \cdot x'_i$$

Estos $m \cdot n$ homomorfismos de V en V' , que hemos construido con la ayuda del Teorema 4.11, constituyen una base de $\text{Hom}_K(V, V')$ como comprobamos a continuación.

Consideremos una combinación lineal de $\{f_{ij} / i=1, \dots, m; j=1, \dots, n\}$ igualada al "cero" del espacio vectorial $\text{Hom}_K(V, V')$

$$\sum_{i,j} b_{ij} \cdot f_{ij} = f_0$$

(ya se entiende como varian los índices de este sumatorio). Entonces

$$\sum_{i,j} b_{ij} \cdot f_{ij}(x_k) = f_0(x_k) = 0'$$

para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Pero utilizando en esta fórmula la definición de los f_{ij} tenemos

$$0' = \sum_{i,j} b_{ij} \cdot f_{ij}(x_k) = \sum_{i,j} b_{ij} \cdot \delta_{jk} \cdot x'_i = \sum_{i=1}^m b_{ik} \cdot x'_i$$

que es una combinación lineal de los vectores de la base Φ' igualada a cero, como estos son independientes ocurre que $b_{ik} = 0$ para todo i y cada k fijo, pero como k es tambien arbitrario ocurre que $b_{ik} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$ y $\forall k \in \{1, \dots, n\}$. Con lo que se prueba la independencia lineal. Veamos que es un sistema generador.

Sea $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ y sea $M(f, B, B')$ la matriz de f en las bases ordenadas $B = (x_1, \dots, x_n)$ de V y $B' = (x'_1, \dots, x'_m)$ de V' (ver Definición 4.17, pag. 122). $M(f, B, B')$ será una matriz de m filas y n columnas tendrá por tanto $m \cdot n$ escalares a_{ij} . Entonces

$$f = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot f_{ij}$$

lo cual comprobaremos viendo que ambos miembros dan el mismo vector de V' al aplicarlo a $x_k, \forall k \in \{1, \dots, n\}$. Por un lado

$$f(x_k) = \sum_{i=1}^m a_{ik} \cdot x'_i$$

y por otro

$$\sum_{i,j} a_{ij} \cdot f_{ij}(x_k) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \delta_{jk} \cdot x'_i = \sum_{i=1}^m a_{ik} \cdot x'_i.$$

De modo que ya tenemos que $\{f_{ij} / i=1, \dots, m; j=1, \dots, n\}$ es una base de $\text{Hom}_K(V, V')$. Además, si consideramos la base ordenada

$$(f_{11}, \dots, f_{m1}, f_{12}, \dots, f_{m2}, \dots, f_{1n}, \dots, f_{mn}) \text{ de } \text{Hom}_K(V, V')$$

resulta que las coordenadas de f en esta son

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn})$$

donde a_{ij} es el elemento que se encuentra en la intersección de la fila i -ésima y la columna j -ésima de $M(f, B, B')$. En otras palabras estas coordenadas vienen dadas por la matriz de f en B y B' . A esto nos referiamos en la página 122 cuando hablamos de que intuitivamente los elementos a_{ij} de la expresión analítica de una aplicación lineal o lo que es lo mismo, de su matriz en ciertas bases ordenadas

serian como las "coordenadas" de f en cierta base.

Volvamos ahora a $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$, pero antes consideremos el siguiente resultado que ya se utilizó en un caso particular en el ejemplo 2 de la pag. 72.

Proposición 4.21.- Sea V un espacio vectorial sobre K . Sea X un conjunto y $F : X \longrightarrow V$ una aplicación biyectiva. Si definimos una suma en X y un producto de escalares de K por elementos de X mediante

$$x + y = F^{-1}(F(x) + F(y)) \quad y \quad a \cdot x = F^{-1}(a \cdot F(x))$$

$\forall x, y \in X, \forall a \in K$, entonces X es un espacio vectorial sobre K , F un isomorfismo de espacios vectoriales y además, esta definición de las operaciones de X es única con la propiedad de que F sea un isomorfismo.

La demostración se hará como ejercicio.

Hablando de manera informal, la Proposición 4.21 lo que nos dice es que mediante una biyección se pueden trasladar las operaciones de V a X . En principio, para diferentes biyecciones de X en V tendremos diferentes formas de ser X un espacio vectorial pues en la definición de las operaciones de X es pieza fundamental la aplicación biyectiva considerada.

Si V y V' son espacios vectoriales sobre K con $\dim_K V = n$ y $\dim_K V' = m$, cada par de bases ordenadas B de V y B' de V' nos definían una aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} F_{B,B'} : \text{Hom}_K(V, V') &\longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(K) \\ f &\longmapsto M(f, B, B') \end{aligned}$$

Entonces le podemos aplicar la Proposición 4.21 a la biyección $F_{B,B'}^{-1} = G_{B,B'}$ con lo que existe una única suma de matrices y un único producto de escalares por matrices que hacen que $F_{B,B'}$ sea un isomor-

fismo de espacios vectoriales. Claro está que si tomamos unas nuevas bases ordenadas \tilde{B} en V y \tilde{B}' en V' mediante $F_{\tilde{B}, \tilde{B}'}$, se podrían definir otras operaciones que no sabemos si tendrán o no que ver con las definidas por $F_{B, B'}$. Luego veremos que estas operaciones en $M_{m \times n}(K)$ no dependen de las bases ordenadas B de V y B' de V' que tomemos para definirlas. Antes necesitamos ver qué relación existe entre $M(f, B, B')$, $M(g, B, B')$ y $M(f + g, B, B')$ para $f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$; y qué relación existe entre $M(a.f, B, B')$ y $M(f, B, B')$ para $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ y $a \in K$.

Proposición 4.22.- Sean V y V' espacios vectoriales sobre K , $B = (x_1, \dots, x_n)$ y $B' = (x'_1, \dots, x'_m)$ bases ordenadas de V y V' respectivamente, $f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$ y $a \in K$. Si

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot x'_i \quad y \quad g(x_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot x'_i \quad \text{para cada } j \in \{1, \dots, n\},$$

entonces

$$(f + g)(x_j) = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) \cdot x'_i \quad y \quad (a.f)(x_j) = \sum_{i=1}^m (a \cdot a_{ij}) \cdot x'_i$$

La demostración es simplemente aplicar las definiciones de suma de aplicaciones lineales y producto de un escalar por una aplicación lineal dadas en la Proposición 4.19.

Observemos que la Proposición 4.22 nos dice que el elemento que se encuentra en la intersección de la fila i -ésima y la columna j -ésima de $M(f + g, B, B')$ se obtiene sumando los dos que se encuentran en este mismo lugar en $M(f, B, B')$ y $M(g, B, B')$; y que el elemento intersección de la fila i -ésima y de la columna j -ésima de $M(a.f, B, B')$ se obtiene multiplicando por el escalar a el que se encuentra en este mismo lugar en $M(f, B, B')$.

Esto nos da pie a dar la siguiente

Definición 4.23. - Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ y $a \in K$. Definimos $A + B$ y $a \cdot A$ como sigue:

Si V y V' son dos espacios vectoriales sobre K con $\dim_K V = n$ y $\dim_K V' = m$, y B, B' son bases ordenadas de V y V' respectivamente, sabemos que $\exists! f \in \text{Hom}_K(V, V') : M(f, B, B') = A$

$$\exists! g \in \text{Hom}_K(V, V') : M(g, B, B') = B.$$

Entonces

$$A + B = M(f + g, B, B') \quad y \quad a \cdot A = M(a \cdot f, B, B').$$

Pero según la Proposición 4.22, si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ tenemos

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{array} \right) = \\ & = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mj} + b_{mj} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{array} \right) \quad y \\ & a \cdot \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} a \cdot a_{11} & \dots & a \cdot a_{1j} & \dots & a \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a \cdot a_{i1} & \dots & a \cdot a_{ij} & \dots & a \cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a \cdot a_{m1} & \dots & a \cdot a_{mj} & \dots & a \cdot a_{mn} \end{array} \right) \end{aligned}$$

De modo inmediato se deduce que estas operaciones son intrísecas a $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$, es decir, no dependen de las bases elegidas B y B' en V y V' respectivamente, ni por supuesto de V y V' con tal que tengan $\dim_K V = n$ y $\dim_K V' = m$.

Proposición 4.24.- Con estas operaciones el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre K con dimensión $m.n$. Es decir:

$$(A+B)+C = A+(B+C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

$\exists 0 \in \mathcal{M}_{m \times n}(K) \quad (0 = M(f_0, B, B')),$ siendo f_0 la aplicación lineal nula de V en V' , ver pag. 118) :

$$: 0 + A = A + 0 = A \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K) \quad \exists (-A) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K) \quad A + (-A) = (-A) + A = 0$$

(Si $A = M(f, B, B')$ es $-A = M(-f, B, B')$)

$$A + B = B + A \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K).$$

$$a.(A+B) = a.A + a.B \quad \forall a \in K, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

$$(a+b).A = a.A + b.A \quad \forall a, b \in K, \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

$$(a.b).A = a.(b.A) \quad \forall a, b \in K, \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

$$1.A = A \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K).$$

La demostración de todas estas propiedades se hará como ejercicio.

Obsérvese que si antes se ha probado la Proposición 4.21, estas se deducen de forma inmediata como una aplicación de este resultado.

Como la aplicación $F_{B, B'}$, dada en la pag. 123, es un isomorfismo, entonces $\dim_K \mathcal{M}_{m \times n}(K) = \dim_K \text{Hom}_K(V, V') = \dim_K V \cdot \dim_K V' = m.n$. Además, el Teorema 4.11 nos da una forma de calcular una base de $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$. En efecto, si $\{f_{ij}\}$ es la base de $\text{Hom}_K(V, V')$ establecida en la demostración de la Proposición 4.20, pag. 127, tenemos que $(F_{B, B'})_*\{\{f_{ij}\}\}$ es una base de $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$, en concreto se trata de la base formada por las matrices $E_{ij} = M(f_{ij}, B, B')$, cada E_{ij} tiene ceros en todos los lugares salvo en la intersección de la fila i -ésima con la columna j -ésima donde está la unidad de K , 1.

Nótese que esta base de $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$ generaliza a la base usual de $K^n(K)$ (ver pag. 89), no obstante $K^n(K)$ es igual a $\mathcal{M}_{1 \times n}(K)$. Es claro además que las operaciones de $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$ pueden considerarse como una gene-

ralización de las de $K^n(K)$, mirando cada matriz de orden $m \times n$ como m vectores de $K^n(K)$ colocados superpuestos. Podíamos entonces haber definido la suma de matrices y el producto de escalares por matrices a partir de las operaciones de espacio vectorial de $K^n(K)$. De todas formas parece más clara esta manera de definir estas operaciones. Además de la definición se saca la razón por la cual se suman matrices de esta manera y se hace el producto de un escalar por una matriz como en la pag. 131. Por otro lado, tras la preparación inicial a la Definición 4.23, las propiedades de estas operaciones resultan de inmediato.

Como es natural al elemento neutro para la suma en $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$, 0 , se le llama la matriz nula de orden $m \times n$ (sobre K). Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, a su simétrica en el grupo $(\mathcal{M}_{m \times n}(K), +)$, $-A$, se le llama la matriz opuesta de A , y se obtiene de aquella tomando en la intersección de la fila i -ésima con la columna j -ésima el opuesto del elemento que ocupa este mismo lugar en A .

Vamos a ver ahora, con vistas a definir un "producto" entre matrices, que conocidas las matrices de dos aplicaciones lineales que se puedan componer también conocemos la matriz de la composición.

Proposición 4.25.- Sean $V(K)$, $V'(K)$ y $V''(K)$ espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$, $g : V' \longrightarrow V''$ aplicaciones lineales. Sean $B = (x_1, \dots, x_n)$, $B' = (x'_1, \dots, x'_m)$, $B'' = (x''_1, \dots, x''_p)$ bases ordenadas de V , V' y V'' respectivamente. Si tenemos

$$g(x'_k) = \sum_{i=1}^p a_{ik} \cdot x''_i \quad \text{y} \quad f(x_j) = \sum_{k=1}^m b_{kj} \cdot x'_k$$

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}$$

entonces

$$(g \circ f)(x_j) = \sum_{i=1}^p c_{ij} \cdot x_i'' \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Demostración. En primer lugar para la aplicación lineal $g \circ f$ tendremos

$$(g \circ f)(x_j) = \sum_{i=1}^p c_{ij} \cdot x_i''.$$

Pero utilizando la definición de composición de aplicaciones

$$(g \circ f)(x_j) = g(f(x_j)) = g\left(\sum_{k=1}^m b_{kj} \cdot x_k'\right) = \sum_{k=1}^m b_{kj} \cdot g(x_k') = \sum_{k=1}^m b_{kj} \cdot \left(\sum_{i=1}^p a_{ik} \cdot x_i''\right) = \\ = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}\right) \cdot x_i''. \text{ Por la unicidad se concluye la prueba.}$$

Siguiendo con las notaciones de la Proposición anterior podemos dar la siguiente

Definición 4.26.- Sean $A \in \mathcal{M}_{p \times m}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Definimos el producto $A \cdot B$ (en este orden) como sigue:

Si V , V' y V'' son espacios vectoriales sobre K con dimensiones respectivas n , m y p , y B , B' y B'' son bases ordenadas también de cada uno de ellos, entonces sabemos que

$$\exists ! f \in \text{Hom}_K(V, V') \quad M(f, B, B') = B$$

$$\exists ! g \in \text{Hom}_K(V', V'') : M(g, B', B'') = A.$$

Ponemos

$$A \cdot B = M(g \circ f, B, B'').$$

Pero según la Proposición 4.25, si $A = (a_{ij})_{p \times m}$, $B = (b_{kl})_{m \times n}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pk} & \dots & a_{pm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} \sum_{h=1}^m a_{1h} \cdot b_{h1} & \dots & \sum_{h=1}^m a_{1h} \cdot b_{hj} & \dots & \sum_{h=1}^m a_{1h} \cdot b_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{h=1}^m a_{ih} \cdot b_{h1} & \dots & \sum_{h=1}^m a_{ih} \cdot b_{hj} & \dots & \sum_{h=1}^m a_{ih} \cdot b_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{h=1}^m a_{ph} \cdot b_{h1} & \dots & \sum_{h=1}^m a_{ph} \cdot b_{hj} & \dots & \sum_{h=1}^m a_{ph} \cdot b_{hn} \end{array} \right)$$

Es claro que esta forma de multiplicar matrices no depende de las bases elegidas B , B' y B'' (ni por supuesto de V , V' y V'' con tal que tengan las dimensiones apropiadas). Además el hecho de que no se puedan multiplicar dos matrices cualesquiera viene de que tampoco se pueden componer siempre dos aplicaciones. Nótese que, en general, aunque pueda efectuarse $A \cdot B$ por ser el número de columnas de A igual al número de filas de B , no tiene que poderse hacer $B \cdot A$. Además, caso de que pudieran hacerse los dos productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$ no coincidirán en general estas dos matrices por no cumplirse la propiedad de commutatividad para la composición de aplicaciones. (Naturalmente, dos matrices son iguales si tienen el mismo número de filas, el mismo número de columnas y el mismo escalar en la intersección de la fila i -ésima con la columna j -ésima).

Identificando matrices 1×1 sobre K con escalares de manera natural, la conclusión de la Proposición 4.25 se puede escribir

$$c_{ij} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{im}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$$

Es decir, el elemento de $A \cdot B$ que se encuentra en la intersección de la fila i -ésima con la columna j -ésima se obtiene multiplicando la matriz $1 \times m$ que se obtiene con la fila i -ésima de A por la matriz $m \times 1$ que se obtiene de la columna j -ésima de B .

Debido a que la composición de aplicaciones es asociativa (ver Prop. 0.9, pag. 8) tenemos que si $A \in \mathcal{M}_{p \times m}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ y $C \in \mathcal{M}_{n \times q}(K)$ entonces

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Por I_n se notará la matriz que tiene por elemento en la intersección de la fila i -ésima con la columna j -ésima $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, que se llama la matriz identidad de orden $n \times n$. Cuando una matriz es cuadrada, es decir cuando su número de filas y de columnas coincide, en lugar de decir "de orden $n \times n$ " se acostumbra nombrarla por "de orden n ", así se indica de paso que es cuadrada. Nosotros seguiremos este convenio. En una matriz cuadrada los elementos que se encuentran en la fila i -ésima y en la columna i -ésima se dice que forman la diagonal de dicha matriz. Según esto I_n es la matriz cuadrada de orden n que tiene ceros en todos los lugares a excepción de los de la diagonal que son todos unos. Pues bien, si I_m e I_n son respectivamente las matrices identidad de orden m y n se tiene

$$I_m \cdot A = A \cdot I_n = A \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

Esto se puede probar directamente de la Definición 4.26 o bien observando que $I_m = M(1_V, B', B')$, $I_n = M(1_V, B, B)$ donde V y V' son espacios vectoriales sobre K con dimensiones n y m respectivamente y B , B' dos bases ordenadas una de cada.

Proposición 4.27.- Sean V , V' y V'' espacios vectoriales sobre K y sean $f, h \in \text{Hom}_K(V, V')$, $g, q \in \text{Hom}_K(V', V'')$. Entonces

$$g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$$

$$(g + q) \circ f = g \circ f + q \circ f.$$

Demostración. Sólo faremos una de estas igualdades, la otra se comprobará como ejercicio.

$$[g \circ (f + h)](x) = g((f + h)(x)) = g(f(x) + h(x)) = g(f(x)) + g(h(x)) =$$

$= (g \circ f)(x) + (g \circ h)(x) = [(g \circ f) + (g \circ h)](x)$ $\forall x \in V$. Lo que prueba la primera de las dos igualdades.

Como consecuencia tenemos que si $A, B \in \mathcal{M}_{p \times m}(K)$ y $C, D \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ se verifica

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$A \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D.$$

Una vez obtenidas estas propiedades para el producto de matrices, vamos a ver algunas aplicaciones sencillas que ponen de manifiesto su importancia sobre todo desde el punto de vista de la simplificación en el cálculo. También faremos una observación sobre el cambio de base al interpretarlo como una aplicación lineal.

Supongamos un sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \right\}$$

donde los escalares a_{ij} y b_k se toman en un cuerpo (comunitativo) K y x_1, \dots, x_n son las incógnitas. Resolver este sistema es encontrar todos los conjuntos de n escalares de K que puestos en el lugar de los x_i satisfacen las m ecuaciones. Este problema, que trataremos ampliamente en la lección 7^a, es "a priori" complicado pues es claro que la primera dificultad que uno se encuentra es tener que trabajar con m ecuaciones a la vez, lo cual dificulta muchas cosas, una de ellas tan fundamental como el saber si "hay o no algún conjunto de n escalares que verifiquen las m ecuaciones".

Como un "buen planteo" facilita mucho la resolución de un problema vamos ahora a ver que mediante las operaciones anteriormente introducidas entre matrices el sistema de arriba se puede escribir mucho más sencillamente: con una sola ecuación matricial.

Llamando

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

el sistema de la pag. 137 se escribe matricialmente como

$$A \cdot X = B .$$

que es una expresión mucho más sencilla que la anterior.

Recordemos que si $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ son dos bases ordenadas de un espacio vectorial $V(K)$ y $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ son las coordenadas de x'_j en B $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, las ecuaciones del cambio de base eran (ver pag. 101)

$$a_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a'_k$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},$$

donde (a_1, a_2, \dots, a_n) y $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ representan las coordenadas de un mismo vector de V en B y B' . Si ponemos

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad a' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

las n ecuaciones del cambio de base se escriben

$$a = C \cdot a'$$

Sean $V(K)$ y $V'(K)$ espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Fijadas bases ordenadas $B = (y_1, \dots, y_n)$ de V y $B' = (y'_1, \dots, y'_m)$ en V' las ecuaciones analíticas de f en B y B' venían dadas por (ver pag. 121)

$$a'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot a_j$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\},$$

donde $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ son las coordenadas de $f(y_j)$ en B' $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, (a_1, a_2, \dots, a_n) las coordenadas de un vector de V en B y $(a'_1, a'_2, \dots, a'_m)$ las de su imagen respecto a B' . Si ponemos

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \alpha' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} \quad y \quad M = M(f, B, B')$$

la ecuación matricial de f respecto a B y B' es

$$\alpha' = M \cdot \alpha$$

Al comparar la ecuación matricial del cambio de base con esta nos damos cuenta que podemos contemplar un cambio de base "como una aplicación lineal". En efecto, $M(1_V, B', B)$ es justamente la matriz M que aparece en la expresión matricial del cambio de base; ya sabíamos que $M(1_V, B, B) = I_n$, siendo $n = \dim_K V$, de modo que una misma aplicación lineal puede estar representada por diferentes matrices cambiando las bases en el dominio y codominio. Esta afirmación es similar a decir que un mismo vector de un espacio vectorial tiene diferentes coordenadas respecto a diferentes bases (Recuérdese que $M(f, B, B')$ nos da las coordenadas en cierta base de $\text{Hom}_K(V, V')$ obtenida a partir de B y B' , ver pag. 128).

Particularizando la suma y el producto de matrices al caso en que estas sean cuadradas tenemos

Proposición 4.28.- i) Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $\text{End}_K V = \text{Hom}_K(V, V)$ el conjunto de todos los endomorfismos de $V(K)$. Con las operaciones suma y composición

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in V,$$

siendo $f, g \in \text{End}_K V$, tenemos que $\text{End}_K V$ es un anillo.

ii) Sea $\mathcal{M}_n(K)$ el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n sobre K . Con las operaciones suma y producto de matrices

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A \cdot B = (c_{ij}) \quad \text{con } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

siendo $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ pertenecientes a $\mathcal{M}_n(K)$, tenemos que $\mathcal{M}_n(K)$ es un anillo.

iii) Si V es un espacio vectorial sobre K con dimensión n y B es una base ordenada suya, la aplicación $F_B : \text{End}_K V \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$ definida por $F_B(f) = M(f, B)$, donde $M(f, B)$ representa a $M(f, B, B)$ por brevedad ($F_B(f) = F_{B, B}(f) \quad \forall f \in \text{End}_K V$), es un isomorfismo de anillos.

Demostración. Los apartados i) e ii) ya han sido probados de una forma más general. Veamos iii). Es claro que F_B es una aplicación biyectiva, además

$$F_B(f+g) = M(f+g, B) = M(f, B) + M(g, B) = F_B(f) + F_B(g)$$

$$F_B(f \circ g) = M(f \circ g, B) = M(f, B) \cdot M(g, B)$$

$$F_B(1_V) = M(1_V, B) = I_n$$

con lo que se prueba la Proposición.

Obsérvese que $\text{End}_K V$ no es un cuerpo ya que los únicos endomorfismos que tiene inverso son los isomorfismos. Por el isomorfismo de anillos F_B podemos afirmar lo mismo para $\mathcal{M}_n(K)$, por ejemplo para $n = 2$, $K = \mathbb{R}$ la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa para el producto ya que la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(a_1, a_2) = (a_1 - a_2, -a_1 + a_2)$ tiene rango 1 y por tanto no es biyectiva y $M(f, B)$, siendo $B = (e_1, e_2)$ la base usual de \mathbb{R}^2 , es justamente la matriz anterior. Más todavía, el anillo $\text{End}_K V$ (y por lo tanto también el anillo $\mathcal{M}_n(K)$) tiene divisores de cero (ver Def. 2.22, pag. 64 para el caso de un anillo abstracto). Si $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la aplicación lineal definida por $g(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1 + a_2)$ no es la aplicación lineal nula, al igual que f arriba, pero $g \circ f = f \circ g$.

Proposición 4.29.- i) Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $\text{Aut}_K V = \{ f \in \text{End}_K V / f \text{ es biyectiva} \}$ el conjunto de todos los automorfismos de $V(K)$. Si consideramos en $\text{Aut}_K V$ la operación binaria composición "•". entonces $(\text{Aut}_K V, \circ)$ es un grupo.

ii) Sea $\text{Gl}(n, K) = \{ A \in \mathcal{M}_n(K) / \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K) : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \}$ el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n sobre K que tienen inversa para el producto. Si consideramos en $\text{Gl}(n, K)$ el producto usual de matrices "•" como operación binaria, entonces $(\text{Gl}(n, K), \circ)$ es un grupo, el grupo lineal general sobre K de orden n , cada matriz suya se dice "regular".

iii) Si $V(K)$ tiene dimensión n y B es una base ordenada suya, entonces $F_B(f) \in \text{Gl}(n, K) \Leftrightarrow f \in \text{Aut}_K V$, es más, la aplicación

$$\begin{aligned}\tilde{F}_B : \text{Aut}_K V &\longrightarrow \text{Gl}(n, K) \\ f &\longmapsto M(f, B)\end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Dado un anillo $(R, +, \cdot)$ se define $\text{inv}(R) = \{ r \in R / \exists s \in R : r \cdot s = s \cdot r = 1 \}$ el conjunto de los elementos de R que tienen inverso para el producto de R (s se llama el inverso de r y se representa por r^{-1}). Es claro que $\text{inv}(R)$ es un grupo con el producto (no conmutativo si R es un anillo no conmutativo). Teniendo en cuenta que $\text{Aut}_K V = \text{inv}(\text{End}_K V)$ y $\text{Gl}(n, K) = \text{inv}(\mathcal{M}_n(K))$, lo que acabamos de decir prueba i) e ii).

Por otro lado si R y R' son anillos y $h : R \longrightarrow R'$ es un isomorfismo de anillos (ver Def. 2.12, pag. 58) se comprueba inmediatamente que $\text{inv}(R') = h_*(\text{inv}(R))$, es decir un elemento de R tiene inverso para el producto si y sólo si su imagen mediante h verifica esto mismo en R' . Nosotros ahora tomamos el isomorfismo de anillos (ver pag. 140)

$$\begin{aligned}F_B : \text{End}_K V &\longrightarrow \mathcal{M}_n(K) \\ f &\longmapsto M(f, B)\end{aligned}$$

con lo cual tenemos $(F_B)_*(\text{Aut}_K V) = \text{Gl}(n, K)$. Así \tilde{F}_B de iii) es un isomorfismo de grupos y esto acaba la demostración.

Como \tilde{F}_B es un homomorfismo de grupos tenemos $\tilde{F}_B(f^{-1}) = \tilde{F}_B(f)^{-1}$, es decir

$$M(f^{-1}, B) = M(f, B)^{-1}$$

para cualquier automorfismo f de $V(K)$. Esto nos da una forma "teórica" de cálculo de la matriz inversa de una matriz regular (en la lección 7^a se dará su cálculo explícito). En efecto, sea $A \in GL(n, K)$, entonces por la Proposición 4.29, fijada una base ordenada B de V existe un único automorfismo f de V tal que $M(f, B) = A$ (Nótese que iii) de esta proposición viene a decirnos que una matriz cuadrada es regular si y sólo si es la matriz de un automorfismo en una base ordenada). Entonces si calculamos f^{-1} , que también es un automorfismo de V , es $A^{-1} = M(f^{-1}, B)$.

Las matrices regulares ya nos habían aparecido cuando hablábamos de cambio de base. En efecto, sean B y B' bases ordenadas de un espacio vectorial $V(K)$, entonces la ecuación matricial del cambio de base venía dada por (ver pag. 138)

$$\alpha = C \cdot \alpha'$$

donde α y α' son las matrices "columnas" de las coordenadas en B y B' respectivamente de un mismo vector. Cambiando los papeles de B y B' tendríamos la ecuación matricial del cambio inverso

$$\alpha' = B \cdot \alpha$$

De estas dos ecuaciones tendríamos

$$\alpha = C \cdot \alpha' = (C \cdot B) \cdot \alpha$$

$$\alpha' = B \cdot \alpha = (B \cdot C) \cdot \alpha'$$

para cualesquiera $\alpha, \alpha' \in \mathcal{M}_{nx1}(K)$. Tomemos como α y α' las matrices de $\mathcal{M}_{nx1}(K)$ que constituyen su base "natural" (ver pag. 132) que las podemos representar por E_i , $i=1, \dots, n$, donde cada E_i tiene ceros todos sus elementos salvo el que se encuentra en la fila i -ésima (y en la única columna) que es igual a 1. Entonces obtenemos

$$E_i = (C \cdot B) \cdot E_i$$

$$E_i = (B \cdot C) \cdot E_i$$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Pero esto implica

$$C \cdot B = B \cdot C = I_n,$$

de modo que $C = B^{-1}$, lo que prueba que C es regular y que su matriz inversa se puede obtener como la matriz del cambio inverso al que nos define C . Otra forma de ver esto consiste en poner $C = M(1_V, B', B)$ y $B = M(1_V, B, B')$, entonces

$$C \cdot B = M(1_V, B', B) \cdot M(1_V, B, B') = M(1_V \circ 1_V = 1_V, B', B') = I_n$$

$$B \cdot C = M(1_V, B, B') \cdot M(1_V, B', B) = M(1_V \circ 1_V = 1_V, B, B) = I_n.$$

Por último, si $P \in GL(n, K)$ y $B = (x_1, \dots, x_n)$ es una base ordenada de $V(K)$ afirmamos que existe una única base ordenada $B' = (x'_1, \dots, x'_n)$ de $V(K)$ tal que P es la matriz del cambio de base de B' a B , es decir tal que $A = P \cdot A'$ es la ecuación matricial del cambio de base como en la pag. anterior. En efecto, basta con tomar cada x'_j como el único vector de V que respecto de B tiene por coordenadas los elementos de la columna j -ésima de P (compruébese). Entonces, por lo de arriba, P^{-1} se obtiene calculando el cambio de base inverso.

Diversas matrices de una aplicación lineal: matrices equivalentes.

Rango de una matriz. Caso particular de un endomorfismo: matrices semejantes.-

Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ y dadas bases ordenadas B y B' de V y V' respectivamente tenemos definida $M(f, B, B')$. Recor-demos que $M(f, B, B')$ nos da las "coordenadas" de f en cierta base ordenada del espacio vectorial $\text{Hom}_K(V, V')$ (ver pag. 128). Si tomamos otras dos bases ordenadas en V y V' , \tilde{B} y \tilde{B}' tendremos $M(f, \tilde{B}, \tilde{B}')$.

¿ Que relación hay entre $M(f, B, B')$ y $M(f, \tilde{B}, \tilde{B}')$?, o lo que es lo mismo, si fijamos en $\text{Hom}_K(V, V')$ dos bases ordenadas, cada una obtenida de B , B' y de \tilde{B} , \tilde{B}' ¿ que relación hay entre las correspondientes coordenadas de la aplicación lineal f ?

Proposición 4.30.- Sean V y V' espacios vectoriales sobre K , B y \tilde{B} bases ordenadas de V , B' y \tilde{B}' bases ordenadas de V' y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces

$$M(f, \tilde{B}, \tilde{B}') = Q^{-1} \cdot M(f, B, B') \cdot P$$

donde $P = M(1_V, \tilde{B}, B)$ y $Q = M(1_{V'}, \tilde{B}', B')$ son las correspondientes matrices de cambio de base en V y V' .

Demostración. Teniendo en cuenta como se puede considerar un cambio de base como la aplicación identidad pero "con diferentes bases" en el dominio y codominio (ver pag. 139) tenemos el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccccc} & 1_V & & f & & 1_{V'} & \\ V & \xrightarrow{\quad} & V & \xrightarrow{\quad} & V' & \xrightarrow{\quad} & V' \\ & \tilde{B} & & B & & B' & \\ & & & B' & & \tilde{B}' & \end{array}$$

y como $f = 1_{V'} \circ f \circ 1_V$ utilizando la Proposición 4.25 tenemos

$$\begin{aligned} M(f, \tilde{B}, \tilde{B}') &= M(1_{V'}, f \circ 1_V, \tilde{B}, \tilde{B}') = M(1_{V'}, f, B, \tilde{B}').M(1_V, \tilde{B}, B) = \\ &= M(1_{V'}, B', \tilde{B}').M(f, B, B').M(1_V, \tilde{B}, B). \end{aligned}$$

Esta Proposición motiva la siguiente

Definición 4.31.- Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. diremos que A es equivalente a B si $\exists P \in \text{Gl}(n, K)$ y $\exists Q \in \text{Gl}(m, K)$ verificando

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

de esta forma definimos una relación binaria en $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$, que es reflexiva ya que tomando $I_n \in \text{Gl}(n, K)$ e $I_m \in \text{Gl}(m, K)$ resulta $A = I_m^{-1} \cdot A \cdot I_n$ $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Tambien es simétrica pues si A es equivalente a B entonces $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$ para $P \in \text{Gl}(n, K)$ y $Q \in \text{Gl}(m, K)$. Pero esto implica $A = Q \cdot B \cdot P^{-1} = (Q^{-1})^{-1} \cdot B \cdot P^{-1}$ y $Q^{-1} \in \text{Gl}(m, K)$, $P^{-1} \in \text{Gl}(n, K)$. Por último tambien se verifica la propiedad transitiva. En efecto, sean A, B, C matrices $m \times n$ sobre K . Si A es equivalente a B entonces $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$ con $P \in \text{Gl}(n, K)$ y $Q \in \text{Gl}(m, K)$. Si B es equivalente a C entonces $C = S^{-1} \cdot B \cdot R$ con $R \in \text{Gl}(n, K)$ y $S \in \text{Gl}(m, K)$, uniendo ambas igualdades resulta

$= (Q.S)^{-1} \cdot A \cdot (P.R)$, y como $Q \in GL(m, K)$, $P \in GL(n, K)$ esto prueba que A es equivalente a C . De modo que así tenemos una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$, la relación "ser equivalente con"

En la Proposición 4.30 se ha probado que matrices que representan a una misma aplicación lineal respecto a distintas bases (del dominio y codominio) son equivalentes. Recíprocamente, supongamos ahora que A y B son matrices de orden $m \times n$ sobre K equivalentes, vamos a ver que, en el sentido que se precisa ahora, ambas representan a la misma aplicación lineal. Fijemos en primer lugar bases ordenadas B en $V(K)$, $\dim_K V = n$, y B' en $V'(K)$, $\dim_K V' = m$. Según los resultados de la página 123 existe una única aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ tal que $M(f, B, B') = A$. Por otro lado, como A y B son equivalentes existirían $P \in GL(n, K)$ y $Q \in GL(m, K)$ tales que $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$. Sean \tilde{B} y \tilde{B}' las únicas bases de V y V' determinadas por $M(1_V, \tilde{B}, B) = P$ y $M(1_{V'}, \tilde{B}', B') = Q$, es decir, lo que estamos ahora aplicando es que, fijada una base, cada matriz regular es la matriz de cambio de base entre esta y una única definida a partir de la matriz regular como en la pag. 143.

Entonces

$$\begin{aligned} Q^{-1} \cdot M(f, B, B') \cdot P &= M(1_{V'}, \tilde{B}', B')^{-1} \cdot M(f, B, B') \cdot M(1_{V'}, \tilde{B}, B) = \\ &= M(1_{V'}^{-1} = 1_{V'}, \tilde{B}', \tilde{B}') \cdot M(f, B, B') \cdot M(1_{V'}, \tilde{B}, B) = M(f, \tilde{B}, \tilde{B}'), \text{ lo que prueba} \end{aligned}$$

que

$$M(f, \tilde{B}, \tilde{B}') = B.$$

Acabamos de ver que dada una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales, si fijamos una base en el dominio y otra en el codominio obtenemos una matriz que junto con todas sus equivalentes nos representa dicha aplicación lineal. De entre todas estas matrices sería conveniente poder encontrar una "lo más sencilla posible", eligiendo bases convenientes. Eso es lo que hacemos en la siguiente

Proposición 4.32.- Sean V y V' espacios vectoriales sobre K con $\dim_K V = n$, $\dim_K V' = m$, y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces existen bases ordenadas B de V y B' de V' tales que

$$M(f, B, B') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} r \\ n-r \\ m-r \end{array} \right\}$$

donde r es el rango de f . (Para abreviar pondremos $M(f, B, B') = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$)

donde I_r es la matriz identidad de orden r y los "ceros"

son matrices rectangulares, cada una con orden conveniente, con todos sus elementos nulos).

Nótese que puede ser $r=0$, en ese caso f es la aplicación nula de V en V' ($f=f_0$, $f_0(x)=0' \forall x \in V$) y $M(f, B, B')$ tiene todos sus elementos nulos no importa cuales sean las bases B y B' .

Demostración. Tomamos en V una base ordenada $B = (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ de tal forma que $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ sea una base de $\text{Ker } f$ (esto siempre se puede lograr por el Teorema de "ampliación de la base" en pag. 96).^(*) Sabemos que $L(\{f(x_1), \dots, f(x_r)\}) = \text{Im } f$ y como $\dim_K \text{Im } f = \dim_K V - \dim_K \text{Ker } f = n - (n - r) = r$, tenemos que este sistema generador de $\text{Im } f$ tambien es una base de $\text{Im } f$. De nuevo por el Teorema de ampliación de la base existen $x'_{r+1}, \dots, x'_m \in V'$ tales unidos a la anterior base de $\text{Im } f$ nos dan una base de V' . A partir de ella consideraremos la base ordenada $B' = (x'_1, \dots, x'_r, x'_{r+1}, \dots, x'_m)$ donde hemos puesto $x'_j = f(x_j) \forall j \in \{1, \dots, r\}$.

^(*) Si fuese $\text{Ker } f = \{0\}$, B se toma como cualquier base de V .

De la forma en que se construyen B y B' tenemos $M(f, B, B') = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
con $r = \text{rango}(f)$.

De este resultado combinado con lo anterior tenemos

Proposición 4.33.- i) Toda matriz de orden $m \times n$ sobre K es equivalente a una de la forma $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para algún r

ii) Dos matrices del mismo orden $m \times n$ son equivalentes si y sólo si ambas lo son a la misma matriz $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposición 4.34.- Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ y sean V, V' espacios vectoriales sobre K con $\dim_K V = n$, $\dim_K V' = m$. Supongamos que B, \tilde{B} son bases ordenadas de V y B' , \tilde{B}' bases ordenadas de V' y $f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$ definidos por

$$M(f, B, B') = A = M(g, \tilde{B}, \tilde{B}').$$

Entonces

$$\text{rango}(f) = \text{rango}(g).$$

Demostración. Sean $h : V \longrightarrow V$ y $h' : V' \longrightarrow V'$ las aplicaciones lineales definidas por $M(h, B, B) = I_n$ y $M(h', B', \tilde{B}') = I_m$. Claramente h y h' son automorfismos de V y V' respectivamente. Además

$$\begin{aligned} M(h' \circ f \circ h, B, \tilde{B}') &= M(h', B', \tilde{B}').M(f, B, B').M(h, B, B) = I_m.M(f, B, B').I_n = \\ &= M(f, B, B') = A = M(g, \tilde{B}, \tilde{B}'), \text{ con lo que} \end{aligned}$$

$$h' \circ f \circ h = g.$$

Observemos ahora que $\text{rango}(f) = \dim_K \text{Im } f = \dim_K h'_*(\text{Im } f)$ por ser h' un automorfismo (compruébese), pero $h'_*(\text{Im } f) = \text{Im } (h' \circ f)$. Por otro lado $\text{rango}(g) = \dim_K \text{Im } g = \dim_K \text{Im } (g \circ h^{-1})$ (ver prob. 7, pag. 153). Pero $h' \circ f = g \circ h^{-1}$, por lo tanto $\dim_K \text{Im } (h' \circ f) = \dim_K \text{Im } (g \circ h^{-1})$ y ello nos lleva a que f y g tienen el mismo rango.

Este resultado nos permite dar la siguiente

Definición 4.35. - Sea A una matriz de orden $m \times n$ sobre K . Definimos su rango, $\text{rango}(A)$, como sigue:

Elegimos espacios vectoriales $V(K)$ y $V'(K)$ de tal forma que $\dim_K V = n$ y $\dim_K V' = m$, y en cada uno de ellos una base ordenada, B en V y B' en V' . De esta forma obtenemos una única aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ verificando $M(f, B, B') = A$. Como el rango de todas las aplicaciones lineales de V en V' así obtenidas es el mismo por la Proposición 4.34, a este número común lo llamaremos el rango de A . En otras palabras, $\text{rango}(A) = \text{rango}(f)$ donde $M(f, B, B') = A$.

Por ejemplo, el rango de la matriz nula $m \times n$ es cero, y el reciproco también es válido, es decir, si una matriz $m \times n$ tiene rango cero entonces esta es necesariamente la matriz nula. El rango de la matriz identidad de orden n es justamente n , y el rango de la matriz $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es r . Además, la Proposición 4.33 se puede ahora reenunciar diciendo

Proposición 4.36. - i) Toda matriz A de orden $m \times n$ es equivalente a una de la forma $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde $r = \text{rango}(A)$.

ii) Dos matrices del mismo orden $m \times n$ son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

De la Definición 4.35 se deduce inmediatamente que dada $B \in \mathcal{M}_n(K)$, es regular si y sólo si $\text{rango}(B) = n$. Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, $P \in \text{Gl}(n, K)$ y $Q \in \text{Gl}(m, K)$ entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A \cdot P) = \text{rango}(Q \cdot A)$ (ver prob. 7, pag. 153).

Obsérvese que, también por la definición del rango de una matriz, se cumple $0 \leq \text{rango}(A) \leq \min\{n, m\}$, para toda $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ (ver Corolario 4.13) y que si f_A es la aplicación lineal de K^n en K^m tal que $M(f_A, B, B') = A$ (ver problema 5 de esta lección), como $\text{rango}(A) = \text{rango}(f_A)$ tenemos que el rango de A es el número máximo de columnas independientes de la matriz A .

Particularizando la Proposición 4.30, pag. 144, al caso $V' = V$,
 $B = B'$ y $\tilde{B} = \tilde{B}'$ tenemos

Proposición 4.37.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sean B y \tilde{B} dos bases ordenadas de V . Si $f : V \rightarrow V$ es cualquier endomorfismo de V tenemos

$$M(f, \tilde{B}) = P^{-1} \cdot M(f, B) \cdot P$$

donde $P = M(1_V, \tilde{B}, B)$ es la matriz de cambio de base.

Definición 4.38.- Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Diremos que A es semejante a B si $\exists P \in GL(n, K) : B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Esta relación binaria en $\mathcal{M}_n(K)$ es de equivalencia ya que cualquier matriz cuadrada A es semejante consigo misma pues $A = I_n^{-1} \cdot A \cdot I_n$. Si A es semejante a B entonces $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ con $P \in GL(n, K)$, pero esto implica $A = P \cdot B \cdot P^{-1} = (P^{-1})^{-1} \cdot B \cdot P^{-1}$, con lo que B es semejante a A . Finalmente, si A es semejante a B y B es semejante a C , existirán $P, Q \in GL(n, K)$ tales que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ y $C = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$, pero de estas dos igualdades se prueba $C = (P \cdot Q)^{-1} \cdot A \cdot (P \cdot Q)$, y como $P, Q \in GL(n, K)$ tenemos que A es semejante a C .

La relación de semejanza en $\mathcal{M}_n(K)$ es "más fuerte" que la de equivalencia. En efecto, comparando las Definiciones 4.31 y 4.38 enseguida se da uno cuenta que dos matrices cuadradas que son semejantes también son equivalentes. El recíproco no es cierto como pone de manifiesto el siguiente ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son matrices equivalentes ya que ambas tienen rango dos, pero no son semejantes ya que si existiese regular como en la Definición 4.38 se tendría

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow P_{21} = P_{22} = 0$$

con lo que $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ seria una matriz regular, lo cual es imposible.

Obsérvese que en la Proposición 4.37 se ha probado que $M(f, B)$ y $M(\tilde{f}, \tilde{B})$ son matrices semejantes. Recíprocamente, supongamos ahora que A y B son dos matrices cuadradas de orden n semejantes, y sea P la matriz regular de orden n tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Sea $f : V \longrightarrow V$ ($\dim_K V = n$) el único endomorfismo de $V(K)$ tal que para una base ordenada B de V cumple $M(f, B) = A$. Tomemos \tilde{B} como la única base ordenada de V tal que $M(1_V, \tilde{B}, B) = P$ (ver pag. 143), entonces

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P = M(1_V, \tilde{B}, B)^{-1} \cdot M(f, B) \cdot M(1_V, \tilde{B}, B) = M(f, \tilde{B}).$$

(Compárese con la discusión de la pag. 145).

En el ejemplo anterior podemos decir que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, al no ser semejantes, no pueden ser respectivamente $M(f, B)$ y $M(\tilde{f}, \tilde{B})$ con B y \tilde{B} bases ordenadas de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal, pero $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(g, B, B')$ siendo g el endomorfismo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ $g(a_1, a_2) = (2.a_1, 2.a_2)$ y también $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(g, \tilde{B}, \tilde{B}')$ siendo $B = (e_1, e_2)$, $B' = (2.e_1, 2.e_2)$, $\tilde{B} = B$, $\tilde{B}' = (2.e_1, -2.e_2)$.

Sabemos que dos matrices son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. No podemos obtener una caracterización para que dos matrices cuadradas sean semejantes de este mismo tipo. Sabemos que si dos matrices son semejantes han de tener el mismo rango, pero el ejemplo de arriba demuestra que esta condición necesita alguna otra adicional para implicar que dos matrices cuadradas son semejantes. No obstante, podemos tomar como caracterización de que dos matrices son semejantes el hecho explicado arriba de que ambas definen el mismo endomorfismo (en el sentido anterior) de un espacio vectorial de dimensión el orden de estas matrices.

Como aplicación veamos que "la semejanza de matrices" es útil a la hora de resolver algunas ecuaciones matriciales (donde las incógnitas son matrices). Nos proponemos calcular todas las matrices reales de orden dos, X , tales que $X^2 = I_2$. Resolver este problema poniendo la anterior ecuación matricial como cuatro ecuaciones "cuadráticas" en los cuatro elementos de X no parece muy posible, al menos obtener de esta forma todas las soluciones. Observemos que si $X = X_0$ es una solución entonces $P \in GL(2, \mathbb{R})$, entonces $P^{-1} \cdot X_0 \cdot P$ es también una solución; es decir, cualquier matriz semejante a una que sea solución también es solución. Por otro lado, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal que verifica $f \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$ y B es cualquier base ordenada de \mathbb{R}^2 entonces $M(f, B) \cdot M(f, B) = M(f \circ f, B) = M(1_{\mathbb{R}^2}, B) = I_2$. De modo que $M(f, B)$ también es solución de la ecuación $X^2 = I_2$. Uniendo ambas cosas tenemos que el conjunto de las soluciones de esta ecuación es $\{ M(f, B) / f \in \text{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \text{ que verifica } f \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}, y B \text{ cualquier base ordenada de } \mathbb{R}^2(\mathbb{R}) \}$.

Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ que verifique $f \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$, entonces f es biyectiva y además $f^{-1} = f$. Si U y W son los subespacios de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ dados por $U = \{x \in V / f(x) = x\}$ y $W = \{x \in V / f(x) = -x\}$ entonces se tiene $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ (ver prob. 9, pag. 154). Si $f = 1_{\mathbb{R}^2}$ entonces $U = \mathbb{R}^2$ y $W = \{0\}$. Si $f = -1_{\mathbb{R}^2}$ entonces $U = \{0\}$ y $W = \mathbb{R}^2$. Si eliminamos estos casos "límites" nos queda $\dim_{\mathbb{R}} U = \dim_{\mathbb{R}} W = 1$. Tomando $x \in U$, $x \neq 0$, $y \in W$, $y \neq 0$, tenemos que $B = (x, y)$ es una base ordenada de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ (ver prob. 20, pag. 105) y como $f(x) = x$, $f(y) = -y$, tenemos que $M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Obsérvese que si en lugar de B se toma $B' = (y, x)$ entonces

$M(f, B') = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que evidentemente es semejante a $M(f, B)$. Así que las soluciones de la ecuación $X^2 = I_2$ son las siguientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot P \quad \forall P \in GL(2, \mathbb{R}).$$

PROBLEMAS

1.- Sean V y V' espacios vectoriales sobre K , y sea $V \times V'$ el espacio vectorial producto (ver prob. 5, pag. 103) construido a partir de estos. Demostrar que las aplicaciones $p : V \times V' \longrightarrow V$, $p(x, x') = x$, y $p' : V \times V' \longrightarrow V'$, $p'(x, x') = x'$ son epimorfismos de espacios vectoriales (compare con prob. 4, pag. 42). Aplicarles a p y p' el primer Teorema de isomorfía. Demostrar tambien que las aplicaciones $i : V \longrightarrow V \times V'$, $i(x) = (x, 0')$, e $i' : V' \longrightarrow V \times V'$, $i'(x') = (0, x')$ son monomorfismos de espacios vectoriales y que $V \times V' = \text{Im } i \oplus \text{Im } i'$.

2.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $g \in \text{End}_K V$ que verifica $g \circ g = g$. Demostrar que $V = \text{Ker } g \oplus \text{Im } g$. Aplicar esto para demostrar que $\mathbb{C} = U \oplus W$ siendo U y W los subespacios vectoriales de $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ dados por $U = \{z \in \mathbb{C} / \text{Imag}(z) = 0\}$ y $W = \{z \in \mathbb{C} / \text{Real}(z) = 0\}$, donde para cada $z \in \mathbb{C}$ $\text{Real}(z)$ e $\text{Imag}(z)$ representan la parte real e imaginaria de z . Tomando $V \times V'$ en lugar de V , probar $V \times V' = \text{Im } i \oplus \text{Im } i'$ (de otra forma al problema precedente) considerando el endomorfismo de $V \times V'$ g dado por $g(x, x') = (x, 0')$.

3.- Sea V un espacio vectorial real que admite un endomorfismo j que verifica $j \circ j = -1_V$. Probar que si $V(\mathbb{R})$ es finitamente generado entonces $\dim_{\mathbb{R}} V$ es par y que definiendo $\mathbb{C} \times V \longrightarrow V$ mediante

$$(a + bi) \cdot x = a \cdot x + b \cdot j(x)$$

para cualquier número complejo $a + bi$, y $x \in V$, resulta ser V un espacio vectorial complejo (Esto puede considerarse como una respuesta al problema planteado en la pag. 76 , ver tambien prob. 7, pag. 103).

4.- Encontrar un automorfismo f de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ de manera que $f_*(U) = U'$ siendo U y U' los subespacios de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ $U = \{(a, b, 0) / a, b \in \mathbb{R}\}$ y $U' = \{(0, c, d) / c, d \in \mathbb{R}\}$. ¿ Es posible encontrar más de un automorfismo en estas condiciones ?.

5.- Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Definimos una aplicación $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ por $(a_1, a_2, \dots, a_n) \longmapsto (a'_1, a'_2, \dots, a'_m)$ donde $\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $A = (a_{ij})$. Demostrar que f_A es lineal. Demostrar tambien que $M(f_A, B, B') = A$, siendo B y B' las bases ordenadas usuales de \mathbb{K}^n y \mathbb{K}^m respectivamente (ver pag. 95). Por último comprobar que esta expresión matricial que define a f_A es justamente la ecuación matricial en las anteriores bases ordenadas.

6.- Sea $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$h(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 + a_3 - a_4, a_2 + a_4, a_1 + a_2 + a_3).$$

Hallar su ecuación matricial respecto de las bases ordenadas

$B = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, $x_1 = (-1, 0, 0, 0)$, $x_2 = (1, -1, 0, 0)$, $x_3 = (1, 1, -1, 0)$, $x_4 = (1, 1, 1, -1)$; y $B' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, $x'_1 = (0, 1, 1)$, $x'_2 = (1, 0, 1)$, $x'_3 = (1, 1, 0)$. Encontrar, si ello es posible, una base \tilde{B} de \mathbb{R}^4 y otra \tilde{B}' de \mathbb{R}^3 de tal forma que

$$M(h, \tilde{B}, \tilde{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de h .

¿ Es h sobreyectiva ?

7.- Sean $f, g : V \longrightarrow V'$ aplicaciones lineales. Probar que $\text{rango}(f+g) \leq \text{rango}(f) + \text{rango}(g)$. Buscar algún ejemplo en que se de la igualdad.

Sean ahora $f : V \longrightarrow V'$ y $h : V' \longrightarrow V''$ aplicaciones lineales. Demostrar que $\text{rango}(h \circ f) \leq \min\{\text{rango}(h), \text{rango}(f)\}$. Supongamos que h fuese un isomorfismo, probar entonces que $\text{rango}(h \circ f) = \text{rango}(f)$.

Si suponemos que f es isomorfismo y h cualquiera probar que $\text{rango}(h \circ f) = \text{rango}(h)$. Utilizando la definición de rango de una matriz establecer los resultados correspondientes a los anteriores para matrices.

8.- Se consideran los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$. Demostrar que existe un monomorfismo (resp. epimorfismo) de espacios vectoriales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m si y solo si $n \leq m$ (resp. $n \geq m$). Generalizar.

9.- Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre K , donde K es un cuerpo conmutativo y con característica $\neq 2$ (ver pag. 62), que verifica la propiedad $f \circ f = 1_V$. Demostrar que f es un automorfismo de $V(K)$ y que $V = U \oplus W$ siendo $U = \{x \in V / f(x) = x\}$ y $W = \{x \in V / f(x) = -x\}$ (comprobar previamente que U y W son subespacios de V). Utilizar el problema 2, pag. 152, construyendo a partir de f un endomorfismo g de $V(K)$ de modo que $g \circ g = g$ y aplicar a g el resultado de dicho problema. Particularizar al caso $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ y $f(a,b) = (a,-b)$.

10.- Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] / \text{grado}(p(x)) \leq 2\}$. Se define para cada número real r una aplicación $f_r : V \longrightarrow V$ mediante $f_r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + a_1 x + r \cdot a_2 x^2$. Demostrar que $\forall r \in \mathbb{R}$, f_r es lineal y para qué valores de r es f_r un automorfismo?

11.- Se consideran los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$ y, a partir de ellos, su espacio producto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (ver prob. 5, pag. 103). Probar que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y \mathbb{R}^{n+m} son espacios vectoriales isomorfos.

12.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ se definen los subespacios vectoriales $U = L(\{(1,1,1)\})$ y $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a + b + c = 0\}$. Se pide: i) Encontrar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Ker } f = U$ e $\text{Im } f = W$. ii) Encontrar la ecuación matricial de f respecto de la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. iii) Elegir una base ordenada B' en $\mathbb{R}^3/\text{Ker } f$ y con respecto a esta y la usual B de \mathbb{R}^3 encontrar la ecuación matricial de la aplicación lineal $\mathbb{R}^3/\text{Ker } f \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x + \text{Ker } f \longmapsto f(x)$.

13.- Considerando matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, probar mediante contraejemplos que, en general, no son ciertas las igualdades

$$(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2, \quad (A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2.$$

14.- Supongamos que A es una matriz cuadrada de orden n sobre K que verifica la ecuación $A^2 + A + I_n = 0$. Probar que A es regular.

15.- Sea $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Demostrar que C es un subanillo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Probar también que C es un cuerpo isomorfo al de los números complejos.

16.- Dada una matriz cuadrada A se define su traza, $\text{traza}(A)$, como la suma de los elementos de su diagonal, es decir $\text{traza}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ siendo $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas de orden n sobre K y $a \in K$ se verifican

$$\text{traza}(A + B) = \text{traza}(A) + \text{traza}(B), \quad \text{traza}(a \cdot A) = a \cdot \text{traza}(A)$$

$$\text{traza}(A \cdot B) = \text{traza}(B \cdot A).$$

Probar que dos matrices semejantes tienen la misma traza y que el recíproco es falso; más aún que si dos matrices tienen el mismo rango y la misma traza no tienen porque ser semejantes (ver pag. 150).

A partir de esto definir la traza de un endomorfismo. Calcular la traza del endomorfismo f de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ dado por $f(a, b) = (a + b, a - b)$.

17.- Para cada matriz regular P de orden n , se considera la aplicación $\mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$ dada por $A \longrightarrow P^{-1} \cdot A \cdot P$. Probar que es un automorfismo del espacio vectorial $\mathcal{M}_n(K)$. Demostrar que también es un automorfismo del "anillo" $\mathcal{M}_n(K)$.

18.- Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre K tal que $A \cdot B = B \cdot A$ para cualquier otra matriz cuadrada B . Probar que existe $a \in K$ tal que $A = a \cdot I_n$.

19.- (Multiplicación de matrices por cajas) Sean $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ donde hemos dividido cada matriz en "cajas" con los siguientes órdenes: A es de orden $m \times n$, B de $m \times n'$, C de $m' \times n$, D de $m' \times n'$; E de orden $n \times p$, F de $n \times p'$, G de $n' \times p$, H de $n' \times p'$. Probar que entonces el producto $M \cdot N$ se puede obtener

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} A \cdot E + B \cdot G & A \cdot F + B \cdot H \\ C \cdot E + D \cdot G & C \cdot F + D \cdot H \end{pmatrix}$$

20.- Demuéstrese que el conjunto $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\}$ es un grupo cuando se le dota del producto de matrices como operación binaria (es un subgrupo de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$) y que es isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.

21.- Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre K . Diremos que A es triangular superior si todos los escalares a_{ij} de A con $i < j$ son nulos, que A es triangular inferior si todos los a_{ij} de A con $i > j$ son nulos y que A es diagonal si todos los a_{ij} de A con $i \neq j$ son nulos. Sean \mathcal{Z}_o , \mathcal{Z}^o y \mathcal{D} los subconjuntos de $\mathcal{M}_n(K)$ de matrices triangulares superiores, triangulares inferiores y diagonales. Demostrar que los tres son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n(K)$ y que $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{Z}_o + \mathcal{Z}^o + \mathcal{D}$. ¿Es esta suma directa? Estudiar el comportamiento de estos tres conjuntos de matrices cuadradas frente al producto.

22.- Sean A y B matrices cuadradas de orden n sobre K semejantes. Supongamos que A es regular, probar que entonces B tambien lo es. Si A verifica $a.A^2 + b.A + c.I_n = 0$, con $a, b, c \in K$, entonces B tambien verifica $a.B^2 + b.B + c.I_n = 0$.

23.- Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre K . Probar que $A^2 = I_n$ si y sólo si $(A - I_n).(A + I_n) = 0$. Si tomamos $B \in \mathcal{M}_n(K)$ tal que $B^2 = B$, probar que $A = 2.B - I_n$ verifica $A^2 = I_n$.

24.- Hallar todas las matrices reales X de orden 2 tales que $X^2 = X$. Hallar todas las matrices reales Y de orden 2 tales que $Y^2 = 2.Y$. (Utilícese un procedimiento análogo al de la pag. 151 y los problemas 2, pag. 152 y 9, pag. 154).

25.- Sea V un espacio vectorial real de dimensión 2 y $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ que cumple $f \circ f = f_o$, siendo f_o el endomorfismo nulo de $V(\mathbb{R})$. Demostrar que o bien $f = f_o$ o si $f \neq f_o$ es posible encontrar una base ordenada B de $V(\mathbb{R})$ tal que $M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Indicación: si $f(x) \neq 0$, entonces $\{f(x), x\}$ es linealmente independiente). Generalizar a mayores dimensiones. A partir de esto, encontrar todas las matrices cuadradas reales de orden 2, X , tales que $X.X = 0$.

26.- Sean V y V' espacios vectoriales sobre K y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación. Probar que f es lineal si y sólo si su grafo $G(f)$ (Def. 0.6) es un subespacio del espacio vectorial producto $V \times V'$ (ver prob. 22, pag. 46 y prob. 1 de esta lección). Calcular $\dim_K G(f)$.

27.- Sea V un espacio vectorial real con dimensión par. Probar que existe $j \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ tal que $j \circ j = -1_V$. ¿Qué añade esto a lo obtenido en el problema 3?

28.- Encontrar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ que cumplen $A^2 = -I_{2n}$. (Ver prob. 3 y 27).

29.- a) Sea V un espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ que cumple $f \circ f = f$. Probar que $\text{traza}(f) = \text{rango}(f)$. b) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = A$. Demostrar que $\text{traza}(A) = \text{rango}(A)$.

30.- Encontrar, si es posible, $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}^4$ tal que $\text{Im } f = L(\{e_1 - e_2, e_1 + e_4\})$ y que cumpla $f \circ f = f$ y $\text{traza}(f) = 2$.

31.- Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ fija, se considera la aplicación $F : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$ definida por $F(X) = A \cdot X$ para toda $X \in \mathcal{M}_n(K)$. Probar que F es lineal y encontrar una base B de $\mathcal{M}_n(K)$ de manera que

$$M(F, B) = \begin{pmatrix} A & & & \\ & \ddots & & \\ & & A & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}_{n^2 \times n^2}$$

Demostrar que $\text{traza}(F) = n \cdot \text{traza}(A)$.

32.- a) Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f \in \text{End}_{\mathbb{C}} V$ que cumple $f \circ f = -1_V$. Demostrar que $U = \{x \in V / f(x) = i \cdot x\}$ y $W = \{x \in V / f(x) = -i \cdot x\}$ son subespacios vectoriales de V y que cumple $V = U \oplus W$. (Indicación. aplicar el resultado del prob. 9 al endomorfismo $i.f$).

b) Hallar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ que cumplen $A^2 = -I_3$.

LECCION 5^a : ESPACIO DUAL.

Introducción. Espacio dual. Base dual.-

Definición 5.1.- Sea V un espacio vectorial sobre K . Una forma lineal sobre $V(K)$ es una aplicación lineal de V en K . El conjunto de todas las formas lineales φ, ψ, γ , etc. sobre $V(K)$ lo representaremos por V^* . Debido a que $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ (ver pag. 123) resulta que V^* es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo K que V . A V^* se le llama el espacio dual de V .

Si V es el espacio vectorial de todas las funciones derivables de \mathbb{R} en \mathbb{R} y $a \in \mathbb{R}$, entonces la aplicación $V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f \mapsto f'(a)$ es una forma lineal sobre $V(\mathbb{R})$.

Las aplicaciones $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\varphi_1(z) = \text{Real}(z)$, $\varphi_2(z) = \text{Im}(z)$ son formas lineales sobre $\mathbb{C}(\mathbb{R})$. Nótese que $\dim_{\mathbb{R}} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R}) = 2$ y como estas formas lineales son independientes resulta que constituyen una base de $\mathbb{C}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$.

El cuerpo K tiene un papel importante en la anterior definición, pues \mathbb{C} , considerado como espacio vectorial real, tiene por dual $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ y si lo consideramos espacio vectorial complejo su dual es $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Las dos aplicaciones anteriores consideradas de \mathbb{C} en \mathbb{C} , ni siquiera son lineales. Obsérvese que si tomamos $e_1 = 1 + 0i$, $e_2 = 0 + 1i$ entonces $\{e_1, e_2\}$ es una base de $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ y la base de $\mathbb{C}(\mathbb{R})^*$ $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ verifica $\varphi_1(a_1 e_1 + a_2 e_2) = a_1$ y $\varphi_2(a_1 e_1 + a_2 e_2) = a_2$, con lo que $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ $i, j \in \{1, 2\}$.

Como por el Teorema 4.11, pag 116, esta última condición determina de forma única quienes son φ_1 y φ_2 resulta que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ depende univocamente de $\{e_1, e_2\}$. Esta construcción se generaliza en la siguiente:

Proposición 5.2.- Dada una base $\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de V existe una única base $\beta^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ en V^* cumpliendo $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Demostración.- Como sabemos que $\dim_K V^* = \dim_K V$ utilizando la pro-

posición 3.38 hay que demostrar que $L(\beta^*) = V^*$. Así, sea $\varphi \in V^*$ y $a_i = \varphi(x_i)$ entonces

$$(\varphi - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i)(x_j) = \varphi(x_j) - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x_j) = a_j - \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j - a_j = 0$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i.$$

Ya tenemos que β^* es una base de V^* . Supongamos $\beta_1 = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ verificando la misma propiedad que β^* , es decir $\psi_i(x_j) = \delta_{ij}$

entonces

$$\psi_i(x_j) = \delta_{ij} = \varphi_i(x_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \psi_i = \varphi_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Con lo que β^* está determinada de forma única por β .

Definición 5.3.- La base β^* de V^* (obtenida en la anterior proposición) se llama base dual de la base β de V .

Si $B = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ es una base ordenada obtenida de β , σ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$, a $B^* = (\varphi_{\sigma(1)}, \varphi_{\sigma(2)}, \dots, \varphi_{\sigma(n)})$ se le llama la base ordenada dual de B .

Recordemos que en la proposición 4.20, pag. 127, dadas dos bases β de V y β' de V' construimos una base de $\text{Hom}_K(V, V')$. Pues bien, la base dual β^* de una base β de V se obtiene tomando como $\beta' = \{1\}$ en $V = K$ según lo anterior (compruébese).

Proposición 5.4.- Para cada $x \in V$, $x \neq 0$, existe $\varphi \in V^*$ tal que $\varphi(x) \neq 0$.

Demostración.- Sea una base de V de la forma $\beta = \{x_1 = x, x_2, \dots, x_n\}$. Sea $\beta^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ la correspondiente base dual en V^* . Entonces si tomamos $\varphi = \varphi_1$ resulta que $\varphi(x) = 1 \neq 0$.

Observese que para cada $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq \varphi_0 =$ forma lineal nula, existe $x \in V$ con $\varphi(x) \neq 0$.

Recordemos que $M_{1 \times n}(K) = K^n$ y que $M_{n \times 1}(K)$ y $M_{1 \times n}(K)$ son espacios vectoriales isomorfos. Esto nos hacia poder considerar K^n escribiendo cada n -lista de escalares en forma de fila o de columna (como ocurría cuando dábamos la ecuación matricial de un homomorfismo de K^n en K^m , pag. 138). Ahora, utilizando el concepto de espacio dual

podremos "distinguir" mejor $\mathcal{M}_{1 \times n}(K)$ de $\mathcal{M}_{n \times 1}(K)$. En efecto, cada $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_{1 \times n}(K)$ determina una forma lineal sobre $\mathcal{M}_{n \times 1}(K)$, a saber, la dada por

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

Recíprocamente, sea α una forma lineal sobre $\mathcal{M}_{n \times 1}(K)$, entonces si

$$\alpha(E_i) = a_i \text{ donde } E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{lugar } i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

vamos a ver que α resulta ser de esa forma.

$$\alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i E_i \right) = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \alpha(E_i) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

De modo que $\mathcal{M}_{1 \times n}(K)$ se puede mirar como el espacio dual de $\mathcal{M}_{n \times 1}(K)$. con más precisión, $\mathcal{M}_{1 \times n}(K)$ y $\mathcal{M}_{n \times 1}(K)^*$ son isomorfos mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n \times 1}(K)^* &\longrightarrow \mathcal{M}_{1 \times n}(K) \\ \alpha &\longmapsto (\alpha(E_1), \alpha(E_2), \dots, \alpha(E_n)) \end{aligned}$$

Desde este punto de vista la base dual de usual de $\mathcal{M}_{n \times 1}(K)$

$$\Phi = \left\{ E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (i) / i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

es $\Phi^* = \{ \varphi_j / \varphi_j(E_i) = \delta_{ji} \}$ que se identifica con

$\{e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) / i \in \{1, \dots, n\}\}$ que es la base usual de $M_{1 \times n}(K)$. Dada la base ordenada $B = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ de $M_{n \times 1}(K)$, $B^* = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ es identifiable con la base dual de B en $M_{1 \times n}(K)$.

Nótese que si V es un espacio vectorial sobre K , $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base de V , V^* su espacio dual y $\Phi^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ la base de V^* , dual de Φ , dados $\varphi \in V^*$ y $x \in V$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \varphi_i \quad \text{con} \quad a_j = \varphi(x_j) \quad ; \quad x = \sum_{j=1}^n b_j \cdot x_j \quad \text{con} \quad b_j = \varphi_j(x)$$

entonces

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \varphi_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \cdot x_j \right) = \sum_{i,j} a_i \cdot b_j \cdot \varphi_i(x_j) = \sum_{i,j} a_i \cdot b_j \cdot \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De modo que la ecuación matricial de φ en $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de V y $B' = (1)$ de K es

$$(b)_{1 \times 1} = M(\varphi, B, B')_{1 \times n} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad \text{con} \quad M(\varphi, B, B') = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)) \quad \varphi(x_j) = a_j$$

Observese también que como $\dim_K V = n = \dim_K V^*$ los espacios V y V^* son isomorfos. Un isomorfismo de V en V^*

$$x_j \longmapsto \varphi_j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Es claro que la matriz de este isomorfismo en las bases B de V y B^* de V^* es I_n .

Cambio de base en el espacio dual.-

Sea $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una base ordenada de $V(K)$ y sea $B^* = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ la base ordenada de $V^*(K)$ dual de B . Entonces $\forall x \in V$ y $\forall \varphi \in V^*$ tenemos

$$x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \cdot x_i \quad \varphi = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \cdot \varphi_j$$

De modo que la coordenada i -ésima de x en B es $\varphi_i(x)$ y "dualmente" la coordenada j -ésima de φ en B^* es $\varphi_j(x)$.

Sea ahora $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ y $B'^* = (\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n)$ una nueva base de V y su base dual en V^* respectivamente. Vamos a relacionar los cambios de base en V y V^* . Tendriamos

$$x = \sum_{j=1}^n \varphi'_j(x) \cdot x'_j \quad \varphi = \sum_{k=1}^n \varphi(x'_k) \cdot \varphi'_k$$

$$x'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\sum_{j=1}^n \varphi'_j(x) \cdot x'_j = \sum_{i,j} \varphi'_j(x) \cdot a_{ij} \cdot x_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \varphi'_j(x) \right) \cdot x_i$$

por la unicidad $\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \varphi'_j(x) \quad \forall x \in V$ luego

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \varphi'_j \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Si

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ \vdots \\ \varphi'_n \end{pmatrix}$$

es la ecuación matricial del cambio de base en $V(K)$ (ver pag. 138) entonces la ecuación matricial del cambio de base en V viene dada por

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{donde } b_{ij} = a_{ji}$$

Teorema de Reflexividad: Aplicaciones Anuladores.-

Vamos a considerar el espacio dual del dual o bidual $(V^*)^* = V^{**}$ de V . Como $\dim_K V^{**} = \dim_K V^* = \dim_K V$ es claro que V^{**} y V son espacios vectoriales isomorfos. Nosotros sabemos que para cada base de V y cada base de V^{**} tenemos un isomorfismo, no obstante, en el siguiente teorema, vamos a probar que podemos encontrar un isomorfismo de V en V^{**} definido sin hacer ninguna mención a bases (nótese que entre V y V^* hemos construido isomorfismo referidos a ciertas elecciones de bases, B en V y B^* en V^*).

Teorema 5.5.- (Teorema de Reflexividad) Cada espacio vectorial $V(K)$ (finitamente generado) es isomorfo a su bidual V^{**} mediante la aplicación $\Phi : V \longrightarrow V^{**}$ que le hace corresponder a cada vector $x \in V$ la forma lineal $\Phi_x : V^* \longrightarrow K$ definida por $\Phi_x(\varphi) = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in V^*$.

Demostración. En primer lugar veamos que Φ es una aplicación; es decir, que $\forall x \in V : \Phi(x) = \Phi_x$ es una forma lineal sobre V^* . En efecto,

$$\Phi_x(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \Phi_x(\varphi) + \Phi_x(\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in V^*$$

$$\Phi_x(a\varphi) = (a\varphi)(x) = a\varphi(x) = a \cdot \Phi_x(\varphi) \quad \forall a \in K, \quad \forall \varphi \in V^*$$

Veamos ahora que Φ es lineal:

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y) \quad \forall x, y \in V$$

$$\Phi(ax) = a\Phi(x) \quad \forall a \in K.$$

$$\Phi_{x+y}(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \Phi_x(\varphi) + \Phi_y(\varphi) = (\Phi_x + \Phi_y)(\varphi) \quad \forall \varphi \in V^*$$

con lo que

$$\Phi_{x+y} = \Phi_x + \Phi_y$$

$$\Phi_{ax}(\varphi) = \varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x) = a \cdot \Phi_x(\varphi) \quad \forall \varphi \in V^* \text{ con lo que}$$

$$\Phi_{ax} = a \cdot \Phi_x$$

Como V y V^{**} tienen la misma dimensión para probar que Φ es un isomorfismo, según la Proposición 4.16, pag. 119, es suficiente ver que nulidad (Φ) = 0. Sea $x \in \text{Ker } \Phi$, eso quiere decir que Φ_x es la forma nula sobre V^* , o lo que es lo mismo que $\Phi_x(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V^* \Rightarrow \varphi(x) = 0$. $\forall \varphi \in V^*$ esto implica que $x=0$. En efecto, si $x \neq 0$, según la Proposición 5.4, existe $\varphi \in V^*$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, pero nosotros sabemos que $\varphi(x)=0$ para toda forma lineal φ sobre V , por tanto $x=0$.

Una aplicación del teorema de reflexividad la da el siguiente:

Corolario 5.6.- Toda base de V^* es dual de una (única) de V .

Demostración.- Sea $\beta' = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ una base de V^* , y sea $\beta^{**} = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n\}$ la base dual de β' en V^{**} . Consideremos n vectores de V x_1, x_2, \dots, x_n tales que $\Phi_{x_i} = \Gamma_i$. Entonces $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de V ya que Φ es un isomorfismo (ver Teorema 4.11). Si vemos que

$$\psi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

por la Proposición 5.2 tendríamos que $\beta^{**} = \beta'$.

En efecto, sabemos que $\Gamma_j(\psi_i) = \delta_{ji}$ y que $\Phi_{x_i} = \Gamma_i$ por lo tanto

$$\Phi_{x_j}(\psi_i) = \psi_i(x_j) = \delta_{ji} = \delta_{ij}.$$

Consideremos ahora un sistema de ecuaciones de la forma

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} a_{ij} \in K \text{ y todos los términos independientes} \\ \text{nulos} \end{array}$$

Cada $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathcal{M}_{1 \times n}(K)$ se puede considerar como una forma lineal sobre $\mathcal{M}_{n \times 1}(K)$, y como cada ecuación de este sistema se puede escribir

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

resulta que el conjunto de las soluciones de este sistema es el subconjunto de vectores de $\mathcal{M}_{n \times 1}(K)$ "anulados" por estas formas lineales; es decir:

$$S = \left\{ x \in \mathcal{M}_{n \times 1}(K) / \alpha_i(x) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \right\}$$

donde α_i viene dada por $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$
dicho de otro modo

$$S = \text{Ker} \alpha_1 \cap \text{Ker} \alpha_2 \cap \dots \cap \text{Ker} \alpha_m$$

donde S es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n \times 1}(K)$. Como veremos a continuación $\dim_K S = n - (\text{nº de } \alpha_i \text{ indep.})$. En particular si $m=n$ el sistema tiene solución no trivial $\Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ es linealmente dependiente. Esta claro que conociendo una base del subespacio vectorial S de $\mathcal{M}_{n \times 1}(K)$ tendremos todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

Definición 5.7.- Sea S un subconjunto de un espacio vectorial $V(K)$, se define el anulador de S , $\text{an}(S)$, como

$$\text{an}(S) = \left\{ \varphi \in V^* / \varphi(x) = 0, \quad \forall x \in S \right\}$$

Es claro que $\text{an}(S)$ es un subespacio vectorial de V^* (aunque S no sea un subespacio de V).

Si S es un subconjunto de $V^*(K)$ su anulador es

$$\text{an}(S) = \left\{ x \in V / \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in S \right\}$$

donde se ha utilizado la identificación natural que en virtud del Teorema de Reflexividad se puede hacer entre un espacio vectorial y su dual.

Proposición 5.8.- Sea $V(K)$ y sea S un subconjunto de V .

1.- an(S) es un subespacio vectorial de V^* .

2.- Si S es un subespacio de $V \Rightarrow \dim_K \text{an}(S) = \dim_K V - \dim_K S$

3.- an(an(S))=L(S). En particular, si S es un subespacio vectorial de V tenemos que $\text{an}(\text{an}(S))=S$.

Demostración.- 1 es fácil y se hará como ejercicio. Para 2 sea $\{x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\}$ una base de V tal que $\{x_1, \dots, x_r\}$ sea una base de S y sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\}$ la correspondiente base dual. Vamos a probar que $\{\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\}$ es una base de $\text{an}(S)$. Basta ver que $L(\{\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\}) = \text{an}(S)$ ya que este conjunto de formas es linealmente independiente. Así que sea $\varphi \in \text{an}(S) \Rightarrow \forall x \in S : \varphi(x) = 0$, en particular $\varphi(x_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Por otro lado

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \quad a_k = \varphi(x_k),$$

con lo que $a_k = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, r\}$. Lo que implica

$$\varphi = \sum_{k=r+1}^n a_k \varphi_k \quad \text{y} \quad \text{an}(S) \subset L(\{\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\}).$$

Además, como $\{\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\} \subset \text{an}(S) \Rightarrow L(\{\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\}) \subset \text{an}(S)$ y de aquí se tiene la igualdad.

Por último probaremos 3. Sea $x \in S$, entonces $\varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in \text{an}(S)$ lo que implica $x \in \text{an}(\text{an}(S))$. Así $S \subset \text{an}(\text{an}(S))$ y $L(S) \subset \text{an}(\text{an}(S))$. Para probar la otra inclusión nótese que $\text{an}(S) = \text{an}(L(S))$ y por tanto

$$\dim_K \text{an}(\text{an}(S)) = \dim_K V - \dim_K \text{an}(S)$$

$$\dim_K \text{an}(S) = \dim_K V - \dim_K L(S) \quad \text{lo que implica}$$

$$\dim_K \text{an}(\text{an}(S)) = \dim_K L(S)$$

con lo que se tiene $\text{an}(\text{an}(S)) = L(S)$. En particular si S es un subespacio de V se tiene $L(S) = S$ y por ello $\text{an}(\text{an}(S)) = S$.

Obsérvese que de lo anterior se deduce que si V es un espacio vectorial sobre K , con $\dim_K V = n$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^*$ independientes entonces $\text{Ker } \alpha_1 \cap \dots \cap \text{Ker } \alpha_m = \text{an}(S)$, donde $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, es un subespacio vectorial de V y por la Proposición 5.8, tiene dimensión $n-m$. Recíprocamente, si U es un subespacio de V y $B = \{x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n\}$ es una base de V , donde $\{x_1, \dots, x_p\}$ es una base de U , tomemos la base dual de B , $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n\}$ y sea $S = \{\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n\}$ (como en la demostración de la Proposición 5.8). Entonces $U = \text{an}(S)$ y $\dim_K U = p = n - (n-p)$.

Trasposición de aplicaciones lineales y matrices. Rango de la traspuesta de una matriz. -

Proposición 5.9.- Sean $V(K)$ y $V'(K)$ espacios vectoriales y sea $f: V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. La aplicación $t_f: V'^* \rightarrow V^*$ dada por $\varphi' \mapsto \varphi' \circ f$ es lineal.

Demostración.- Sean $\varphi', \psi' \in V'^*$, entonces $t_f(\varphi' + \psi')$ es la forma lineal sobre V dada por

$$\begin{aligned} t_f(\varphi' + \psi')(x) &= (\varphi' + \psi')(f(x)) = \varphi'(f(x)) + \psi'(f(x)) = \\ &= t_f(\varphi')(x) + t_f(\psi')(x) = \\ &= [t_f(\varphi') + t_f(\psi')](x) \quad \forall x \in V \end{aligned}$$

con lo que

$$t_f(\varphi' + \psi') = t_f(\varphi') + t_f(\psi'), \quad \forall \varphi', \psi' \in V'^*.$$

Sea ahora $a \in K$, $\varphi' \in V'^*$ y veamos que

$$t_f(a \cdot \varphi') = a \cdot t_f(\varphi')$$

En efecto, para cada $x \in V$ tenemos

$$\begin{aligned} t_f(a \cdot \varphi')(x) &= (a \cdot \varphi')(f(x)) = a \cdot \varphi'(f(x)) = \\ &= a \cdot t_f(\varphi')(x) = [a \cdot t_f(\varphi')](x). \end{aligned}$$

Definición 5.10.- A esta aplicación lineal $t_f: V^* \rightarrow V^*$ se llama la aplicación traspuesta de f .

Al asignarle a cada $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ su traspuesta $t_f \in \text{Hom}_K(V'^*, V^*)$ lo que tenemos es una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_K(V, V') & \longrightarrow & \text{Hom}_K(V'^*, V^*) \\ f & \longmapsto & t_f \end{array}$$

llamada "trasposición". Como $\text{Hom}_K(V, V')$ y $\text{Hom}_K(V'^*, V^*)$ son espacios vectoriales sobre K parece lógico preguntarse si la trasposición es una aplicación lineal.

Proposición 5.11.- Sean $f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$ y $a \in K$ entonces

$$t_{(f+g)} = t_f + t_g$$

$$t_{(a.f)} = a \cdot t_f$$

Es decir, la trasposición es una aplicación lineal.

Demostración .-

$$t_{(f+g)}(\varphi') = \varphi' \circ (f+g) = \varphi' \circ f + \varphi' \circ g = t_f(\varphi') + t_g(\varphi') \quad \forall \varphi' \in V'^*$$

$$t_{(a.f)}(\varphi') = \varphi' \circ (a.f) = a(\varphi' \circ f) = a \cdot t_f(\varphi') \quad \forall a \in K \quad \forall \varphi' \in V'^*$$

Proposición 5.12.- Sea $f \in \text{Hom}_K(V, V')$, entonces, identificando V y V' con sus respectivos bíduales tenemos

$$t(t_f) = f$$

con lo que la trasposición es un isomorfismo.

Demostración.- En efecto, tanto f como $t(t_f)$ son aplicaciones lineales de V en V' . Además, si se identifica x con Φ_x de acuerdo con el Teorema de la Reflexividad, (Teorema 5.5, pag. 163),

$$t(t_f)(x) = \Phi_x \circ t_f$$

$$\text{y } (\Phi_x \circ t_f)(\varphi') = \Phi_x(t_f(\varphi')) = \Phi_x(\varphi' \circ f) = (\varphi' \circ f)(x) = \varphi'(f(x)) = \Phi_{f(x)}(\varphi')$$

donde $\Phi: V \rightarrow V^{**}$ y $\Phi': V' \rightarrow V'^{**}$ son los isomorfismos naturales $x \longmapsto \Phi_x$ y $y' \longmapsto \Phi_{y'}$

correspondientes.

De modo que $\Phi_x \circ t_f = \Phi'_{f(x)} \Rightarrow t(t_f)(x) = f(x)$.

Proposición 5.13. Sean $f \in \text{Hom}_k(V, V')$ y $g \in \text{Hom}_K(V', V'')$ entonces

$$t(g \circ f) = t_f \circ t_g$$

Demostración.- Si $\varphi'' \in V''^* \Rightarrow t(g \circ f)(\varphi'') = \varphi'' \circ (g \circ f) = (\varphi'' \circ g) \circ f = t_g(\varphi'') \circ f = (t_f \circ t_g)(\varphi'')$.

Como casi todos los conceptos definidos sobre aplicaciones lineales, la trasposición se puede definir para matrices. Antes veamos la siguiente

Proposición 5.14. Sea $f: V \rightarrow V'$ una aplicación lineal y sean $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ bases ordenadas de V y V' respectivamente. Supongamos que

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot x'_i \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

entonces

$$t_f(\varphi'_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \varphi_j \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

donde $B'^* = (\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n)$ y $B^* = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ son las bases ordenadas duales en V'^* y V^* de B' y B respectivamente.

Demostración.- Pongamos $t_f(\varphi'_i) = \sum_{k=1}^n b_{ki} \cdot \varphi_k$ entonces

$$t_f(\varphi'_i)(x_j) = \sum_{k=1}^n b_{ki} \cdot \varphi_k(x_j) \quad \text{y así} \quad \varphi'_i(f(x_j)) = \sum_{k=1}^n b_{ki} \cdot \delta_{kj} = b_{ji}$$

y por otro lado

$$\varphi'_i(f(x_j)) = \sum_{k=1}^m a_{kj} \cdot \varphi'_i(x'_k) = \sum_{k=1}^m a_{kj} \cdot \delta_{ik} = a_{ij}$$

Por tanto

$$b_{ji} = a_{ij}$$

lo que prueba la proposición.

Este resultado dice que si $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ son las coordenadas de $f(x_j)$, $j=1, 2, \dots, n$, en B' , entonces para cada $i=1, 2, \dots, m$ $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ son las coordenadas de $t_f(\varphi'_i)$ en B^* .

De modo que si

$$m(f, B, B') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$m(t_f, B'^*, B^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición 5.15. — Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Definimos la matriz traspuesta de A , que representamos por t_A , como sigue: Sean $V(K)$, $V'(K)$ espacios vectoriales con $\dim_K V = n$, $\dim_K V' = m$ y sean B y B' bases ordenadas de V y V' respectivamente. Sabemos que (ver pag. 123)

$$\exists ! f \in \text{Hom}_K(V, V') : m(f, B, B') = A.$$

Entonces ponemos

$$t_A = m(t_f, B'^*, B^*).$$

Está claro que esta definición es correcta y que $t_A \in \mathcal{M}_{n \times m}(K)$ si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Además, el elemento que está en la intersección de la fila i -ésima y la columna j -ésima de t_A es el elemento que está en la intersección de la fila j -ésima y la columna i -ésima de A .

Las proposiciones 5.11 y 5.12 tienen ahora la siguiente versión matricial:

Proposición 5.16. — La aplicación trasposición de matrices

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{m \times n}(K) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n \times m}(K) \\ A & \longmapsto & t_A \end{array}$$

verifica:

$$t(A+B) = t_A + t_B; \quad t(a \cdot A) = a \cdot t_A; \quad t(t_A) = A \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K), \forall a \in K.$$

En otras palabras, la trasposición es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Proposición 5.17.- Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(K)$ entonces

$$t_{(A \cdot B)} = t_B \cdot t_A$$

(Demuéstrese utilizando la Proposición 5.13).

Para acabar el tema veamos que el rango de una aplicación lineal y el de su traspuesta coinciden (como consecuencia tambien coincidirán el rango de una matriz y el de su trasposta). Antes necesitamos la siguiente:

Proposición 5.18.- Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Se cumple:

- i) $\text{an}(\text{Im } f) = \text{Ker } t_f$
- ii) $\text{an}(\text{Ker } f) = \text{Im } t_f. \quad (*)$

Demostración.- Sea $\varphi' \in \text{an}(\text{Im } f)$, entonces $\forall x \in V : \varphi'(f(x)) = 0$ y como $\varphi' f = t_f(\varphi')$ resulta que $\varphi' \in \text{Ker } t_f$. Con esto se prueba $\text{an}(\text{Im } f) \subset \text{Ker } t_f$. Recíprocamente, si $\varphi' \in \text{Ker } t_f \Rightarrow t_f(\varphi')(x) = \varphi'(f(x)) = 0 \quad \forall x \in V$, por tanto $\varphi' \in \text{an}(\text{Im } f)$, y así $\text{Ker } t_f \subset \text{an}(\text{Im } f)$.

Identificando V con V^{**} y V' con V^{**} podemos aplicar i) a la aplicación lineal $t_f : V^{**} \rightarrow V^*$. Entonces tendremos $\text{an}(\text{Im } t_f) = \text{Ker } t_f(t_f)$ pero por la Prop. 5.12, pag. 168, $\text{an}(\text{Im } t_f) = \text{Ker } f$ lo que implica $\text{an}(\text{an}(\text{Im } t_f)) = \text{an}(\text{Ker } f)$, pero $\text{an}(\text{an}(\text{Im } t_f))$ es igual a $\text{Im } t_f$ (ver Prop. 5.8, pag. 166) por tanto $\text{Im } t_f = \text{an}(\text{Ker } f)$.

Corolario 5.19.- Para cada aplicación lineal $f : V \rightarrow V'$ se tiene:

$$\text{rango}(f) = \text{rango}(t_f)$$

Demástración. Por ii) de la proposición anterior tenemos

$$\text{rango}(t_f) = \dim_K \text{an}(\text{Ker } f).$$

Pero, según la proposición 5.8, pag. 166,

$$\dim_K \text{an}(\text{Ker } f) = \dim_K V - \dim_K \text{Ker } f.$$

Así,

$$\text{rango}(t_f) = \dim_K V - \text{nulidad}(f) = \text{rango}(f),$$

por el Corolario 4.13 en pag. 118.

(*) Ver Problema 17, pag. 174, para una prueba directa.

Como consecuencia tenemos

Corolario 5.20.- Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ se cumple
 $\text{rango}(A) = \text{rango}({}^t A).$

Vimos en la pag. 148 que $\text{rango}(A)$ coincidía con el máximo número de columnas independientes de A . Aplicando esto a ${}^t A$, según el Cor. 5.20, resulta que $\text{rango}(A)$ es tambien el máximo núm. de filas independientes de A .

Estos últimos corolarios tiene bastantes aplicaciones. A título de ejemplo podemos probar que la aplicación traspuesta de una aplicación lineal de $V(K)$ en si mismo es biyectiva si y sólo si esta tambien lo es. En efecto, sea $f \in \text{Aut}_K V$, entonces f es biyectiva si y sólo si $\text{rango}(f) = \dim_K V$ (ver Prop. 4.16, pag. 119), pero por el Corolario 5.19 $\text{rango}(f) = \text{rango}({}^t f)$, y como $\dim_K V^* = \dim_K V$, f es biyectiva si y sólo si lo es ${}^t f$. No obstante podemos decir que la trasposición no proporciona un homomorfismo de grupos entre $\text{Aut}_K V$ y $\text{Aut}_K V^*$ (ver Prop. 5.13, pag. 169). Como ejercicio pruébese que dada $A \in \mathcal{M}_n(K)$, se tiene A es regular si y sólo si ${}^t A$ es regular.

PROBLEMAS

1.- Sea $V(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 , (ver prob. 22, pag. 105). Se consideran las bases ordenadas de V siguientes $B = (1, x, x^2)$ y $B' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$. Encontrar las ecuaciones de cambio de base entre B^* y B'^* . Si $\varphi \in V^*$ está dada por $\varphi(p(x)) = p(-1) =$ = valor de $p(x)$ al hacer $x=-1$, encontrar las coordenadas de φ en la base B'^* .

2.- Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices reales de orden 2 y sea traza: $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal que le hace corresponder a cada matriz su traza (ver prob. nº 16, pag. 155). Encontrar una base β' de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$ en la que esté esta forma lineal. Encontrar una base β de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $\beta^* = \beta'$.

3.- Sea U y W dos subespacios vectoriales de $V(K)$. Demostrar que $\text{an}(U+W) = \text{an}(U) \cap \text{an}(W)$ y $\text{an}(U \cap W) = \text{an}(U) + \text{an}(W)$. Deducir que si $V = U \oplus W$ entonces $V^* = \text{an}(U) \oplus \text{an}(W)$.

4.- En $\mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ se considera la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Obtener la correspondiente base dual en $\mathcal{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ (identificando $\mathcal{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ con $\mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})^*$ como en pag. 160).

5.- Se considera en $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ el subespacio vectorial

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 / a_1 + a_2 - a_3 = 0\}.$$

Encontrar $\text{an}(U)$ en $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})^*$.

6.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y t_A la matriz traspuesta de A . Demostrar que $\text{traza}(A) = \text{traza}(t_A)$ (ver prob. 16, pag. 155). Concluir que para cada $f \in \text{End}_K V$, V espacio vectorial sobre K , se verifica $\text{traza}(f) = \text{traza}(t_f)$.

7.- Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Probar que A y B son semejantes si y sólo si t_A y t_B son semejantes (ver pag. 149).

8.- Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ definimos una aplicación $\varphi_A : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K$ por $\varphi_A(X) = \text{traza}(A \cdot X) \quad \forall X \in \mathcal{M}_n(K)$. Demostrar que $\varphi_A \in \mathcal{M}_n(K)^*$. Recíprocamente, probar que para cada forma lineal φ sobre $\mathcal{M}_n(K)$ existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$: $\varphi_A = \varphi$.

9.- Sean $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(a, b, c) = 2.a + b - c$; $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(a, b, c) = a + b + c$. Demostrar que φ y ψ son formas lineales sobre $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ y que $\{\varphi, \psi\}$ es linealmente independiente (en $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})^*$). Encontrar $\alpha \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R})^*$ de modo que $\{\varphi, \psi, \alpha\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Encontrar también una base de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ cuya base dual sea $\{\varphi, \psi, \alpha\}$.

10.- Sea $f \in \text{End}_K V$ tal que $f \circ f = f$. Demostrar que su aplicación traspuesta t_f verifica $t_f \circ t_f = t_f$ y que $V^* = \text{an}(\text{Ker } f) \oplus \text{an}(\text{Im } f)$. (ver Prop. 5.18, pag. 171, y prob. 2, pag. 152).

11.- Sean V un espacio vectorial sobre K , V^* su dual y $\text{Aut}_K V$, $\text{Aut}_K V^*$ los grupos de automorfismos de V y V^* respectivamente. Demostrar que la aplicación $\text{Aut}_K V \rightarrow \text{Aut}_K V^*$ dada por $f \mapsto (t_f)^{-1}$ es un isomorfismo de grupos. (Compárese con la discusión en pag. 119). Como consecuencia demostrar que $\text{Gl}(n, K) \rightarrow \text{Gl}(n, K)$ dada por $A \mapsto (t_A)^{-1}$ es un automorfismo del grupo $\text{Gl}(n, K)$.

12.- Probar que toda $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ es de la forma $\varphi(a_1, a_2, a_3) = r_1 \cdot a_1 + r_2 \cdot a_2 + r_3 \cdot a_3$ donde $r_i = \varphi(e_i)$, $i = 1, 2, 3$, y $B = (e_1, e_2, e_3)$ es la base usual de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ (ver pag. 160). Probar tambien que (r_1, r_2, r_3) son las coordenadas de φ en la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ dual de B. (Comparar con prob. 12 de la lección 6^a y Prop. 9.30).

13.- Sea $B^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ dual de la usual de \mathbb{R}^3 y sea f el endomorfismo de $(\mathbb{R}^3)^*$ definido por $f(\varphi_1) = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3$, $f(\varphi_2) = \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_3$ y $f(\varphi_3) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. Encontrar el único endomorfismo de \mathbb{R}^3 h que cumple $t_h = f$.

14.- Obtener las ecuaciones matriciales de cambio de base en $V(K)^*$ a partir de que $t_{1_V} = 1_{V^*}$ y la Proposición 5.14.

15.- Sea U un subespacio de un espacio vectorial $V(K)$ con $\dim_K V = n$. Si S es una base de $\text{an}(U)$ probar que $U = \text{an}(S)$ (ver Prop. 5.8 y comparar con pag. 167).

16.- Demuéstrese (sin hacer uso de la Prop. 5.13) que si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(K)$ entonces se cumple $t(A \cdot B) = t_B \cdot t_A$.

17.- Sean V y V' espacios vectoriales sobre K y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sea $\varphi \in V^*$. Probar que existe $\varphi' \in (V')^*$ tal que $\varphi' \circ f = \varphi$ si y sólo si $\text{Ker } f \subset \text{Ker } \varphi$ (usar el Teorema de Ampliación de la base y el Teorema 4.11 para construir φ') (Esto es otra prueba de la afirmación ii) de la Proposición 5.18).

18.- Sea V un espacio vectorial complejo. Considerando a V como espacio vectorial real, dotar a $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$ de estructura de espacio vectorial complejo. Probar que $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = V^* \oplus V'$ siendo V^* el espacio dual de $V(\mathbb{C})$ y $V' = \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) / f(i \cdot x) = -i \cdot f(x) \text{ para todo } x \in V\}$.

LECCION 6^a : TENSORES.

Introducción. Concepto de Tensor.-

1) Sea K un cuerpo conmutativo y sea $T : K \times K \longrightarrow K$ la aplicación producto en K , es decir, $T(a, b) = a \cdot b \quad \forall (a, b) \in K \times K$. Sabemos que $K \times K$ es un espacio vectorial sobre K . Cabe entonces preguntarse si T es lineal. Una vez enseguida que T verifica las siguientes propiedades:

$$T(a_1 + a_2, b) = T(a_1, b) + T(a_2, b)$$

$$T(a, b_1 + b_2) = T(a, b_1) + T(a, b_2)$$

$$T(c \cdot a, b) = T(a, c \cdot b) = c \cdot T(a, b) \quad \forall a, b, c \in K.$$

Pero la última de estas igualdades implica

$$T(c \cdot (a, b)) = T(c \cdot a, c \cdot b) = c \cdot T(a, c \cdot b) = c^2 \cdot T(a, b)$$

lo que nos dice que T no es lineal. Sin embargo, nos damos cuenta que al fijar una variable de T la aplicación que resulta de K en K si es lineal, por ejemplo, si $a \in K$ fijo, la aplicación de K en K dada por $b \longmapsto T(a, b)$ es lineal.

2) Sea ahora $T : K \times K \times K \longrightarrow K$ dada por $T(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$. Esta aplicación no es lineal pero verifica

$$T(a_1 + a_2, b, c) = T(a_1, b, c) + T(a_2, b, c)$$

$$T(a, b_1 + b_2, c) = T(a, b_1, c) + T(a, b_2, c)$$

$$T(a, b, c_1 + c_2) = T(a, b, c_1) + T(a, b, c_2)$$

$$T(d \cdot a, b, c) = T(a, d \cdot b, c) = T(a, b, d \cdot c) = d \cdot T(a, b, c)$$

3) En general, si $T : K^n \times K \longrightarrow K$ está dada por $T(a_1, \dots, a_n) = a_1 \dots a_n$ resulta ser no lineal y verifica

$$T(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_n) = T(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + T(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)$$

$$T(a_1, \dots, c \cdot a_i, \dots, a_n) = c \cdot T(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como en las aplicaciones precedentes, aunque esta no es lineal si lo es la aplicación de K en K resultante al fijar $n-1$ variables.

4) Sea $T : K^n \times K^n \longrightarrow K$ dada por $T((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$ que verifica

$$\begin{aligned} T((a_1, \dots, a_n) + (a'_1, \dots, a'_n), (b_1, \dots, b_n)) &= \\ &= T((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) + T((a'_1, \dots, a'_n), (b_1, \dots, b_n)) \\ T((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) + (b'_1, \dots, b'_n)) &= \\ &= T((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) + T((a_1, \dots, a_n), (b'_1, \dots, b'_n)) \\ T(c \cdot (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) &= T((a_1, \dots, a_n), c \cdot (b_1, \dots, b_n)) = \\ &= c \cdot T((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)). \end{aligned}$$

Nótese que, para $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ fijo, la aplicación de K^n en K dada por $(b_1, \dots, b_n) \mapsto T((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n))$ es lineal.

5) Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, $A = (a_{ij})$, entonces la aplicación

$$T_A : K^n \times K^m \longrightarrow K \quad \text{dada por}$$

$$\begin{aligned} T_A((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_m)) &= (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i,j} a_i \cdot a_{ij} \cdot b_j \end{aligned}$$

verifica las mismas propiedades de anteriores ejemplos y justamente en el caso $A = I_n$ resulta que T_{I_n} es la aplicación dada en el ejemplo 4.

6) Utilizando la aplicación φ que aparece en el Teorema de Reflexividad (Teorema 5.5, pag. 163) podemos definir para cada espacio vectorial $V(K)$ la aplicación $T : V \times V^* \longrightarrow K$ dada por $T(x, \varphi) = \varphi(x)$ que cumple

$$\begin{aligned} T(x+y, \varphi) &= T(x, \varphi) + T(y, \varphi) \\ T(x, \varphi+\psi) &= T(x, \varphi) + T(x, \psi) \\ T(a \cdot x, \varphi) &= T(x, a \cdot \varphi) = a \cdot T(x, \varphi). \end{aligned}$$

Es claro, por consideraciones análogas a las hechas anteriormente, que T no es lineal pero que las aplicaciones $V \rightarrow K$ y $V^* \rightarrow K$

$$x \mapsto T(x, \varphi) \quad \psi \mapsto T(y, \psi)$$

para φ y ψ fijos respectivamente en V^* y V , sí lo son

7) El ejemplo 6 es un caso particular del presente. Sea $f \in \text{End}_K V$ y sea $T_f : V \times V^* \rightarrow K$ la aplicación dada por $T_f(x, \varphi) = \varphi(f(x))$. Entonces si $f = l_V$ resulta ser T_l la aplicación dada en el ejemplo anterior, y además, por ser f lineal, podemos asegurar que T_f verifica las mismas propiedades que el ejemplo 6 (compruébese).

8) Finalmente consideremos $T : V \times V \times V^* \times V^* \rightarrow K$ dada por $T(x, y, \varphi, \psi) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$. Teniendo en cuenta lo dicho en los ejemplos 6 y 1 resulta que T verifica

$$T(x_1 + x_2, y, \varphi, \psi) = T(x_1, y, \varphi, \psi) + T(x_2, y, \varphi, \psi)$$

$$T(x, y_1 + y_2, \varphi, \psi) = T(x, y_1, \varphi, \psi) + T(x, y_2, \varphi, \psi)$$

$$T(x, y, \varphi_1 + \varphi_2, \psi) = T(x, y, \varphi_1, \psi) + T(x, y, \varphi_2, \psi)$$

$$T(x, y, \varphi, \psi_1 + \psi_2) = T(x, y, \varphi, \psi_1) + T(x, y, \varphi, \psi_2)$$

$$\begin{aligned} T(a \cdot x, y, \varphi, \psi) &= T(x, a \cdot y, \varphi, \psi) = T(x, y, a \cdot \varphi, \psi) = T(x, y, \varphi, a \cdot \psi) = \\ &= a \cdot T(x, y, \varphi, \psi). \end{aligned}$$

Es decir, como antes T no es lineal pero al fijar todas las variables menos una tenemos que la aplicación resultante es lineal de V (o V^*) en K .

Si quisieramos estudiar este tipo de aplicaciones, parece claro que debemos desechar la idea de considerar ~~su dominio~~ un espacio vectorial producto de varios, más bien lo que hay que hacer es olvidarnos de que el producto cartesiano de espacios vectoriales es, de forma natural, un espacio vectorial y considerar el dominio de cada T como un producto de espacios vectoriales mirados "aisladamente".

Todas las aplicaciones que constituyen los ejemplos anteriores son "multilineales" en el sentido siguiente :

Definición 5.1. - Sean V_1, \dots, V_r, W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K . Una aplicación multilineal (r veces lineal) de $V_1 \times \dots \times V_r$ en W es una aplicación

$$T : V_1 \times \dots \times V_r \longrightarrow W$$

que verifica

$$(1) T(x_1, \dots, x_i + x'_i, \dots, x_r) = T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r) + T(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_r)$$

$$(2) T(x_1, \dots, a \cdot x_i, \dots, x_r) = a \cdot T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, donde x_j representa cualquier vector de V_j y $a \in K$.

Nótese que por (2) tenemos

$$T(a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_i, \dots, a \cdot x_r) = a^r \cdot T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r)$$

lo que impide que T sea lineal. Sin embargo, la aplicación

$$V_i \longrightarrow W$$

$$x_i \longmapsto T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r)$$

con $r-1$ vectores fijos x_j , $j \neq i$, si es lineal por (1) y (2). Este es el motivo de llamar multilinear a tal aplicación: el ser lineal en cada una de sus variables.

Definición 6.2.- Sea V un espacio vectorial sobre K . Un tensor r veces covariante y s veces contravariante, o de tipo (r,s) , es una aplicación multilineal de $V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^*$ en K .

En realidad todos los ejemplos que hemos dado son tensores. El ejemplo 1 se trata de un tensor de tipo $(2,0)$ sobre K ; el ejemplo 2 de un tensor de tipo $(3,0)$ sobre K ; el ejemplo 3 de un tensor de tipo $(n,0)$ sobre K . En el ejemplo 4 tenemos un tensor de tipo $(2,0)$ sobre K^n y del mismo tipo es el ejemplo 5. Los ejemplos 6 y 7 nos dan tensores de tipo $(1,1)$ sobre $V(K)$ y, finalmente, en el ejemplo 8 se da un tensor de tipo $(2,2)$ sobre $V(K)$.

La aplicación $K \times K \longrightarrow K$ dada por $(a,b) \longmapsto a^2 \cdot b$ no es multilineal y por tanto no es un tensor sobre K (nótese que tampoco es lineal). La aplicación $K \times K \longrightarrow K$ $(a,b) \longmapsto a$ no es multilineal pero si es lineal del espacio vectorial $K \times K$ en K .

Obsérvese que un tensor de tipo $(1,0)$ sobre V es una forma lineal sobre V ; un tensor de tipo $(0,1)$ sobre V es una forma lineal

sobre V^* y por tanto, según el Teorema de Reflexividad (Teor. 5.5, pag. 163) se puede considerar como un vector de V . En cierto sentido, esto nos viene a decir que el concepto de tensor engloba al de vector y de forma lineal y, como veremos, a varios más de los que hasta ahora hemos visto, incluso los escalares que se pueden considerar como tensores de tipo $(0,0)$.

Un tensor se dirá covariante si es de tipo $(r,0)$ y contravariante si es de tipo $(0,s)$.

Operaciones con tensores: suma, producto por un escalar, producto tensorial. Relación con los endomorfismos. Base del espacio vectorial de tensores.-

Sea $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ el conjunto de todos los tensores de tipo (r,s) sobre un espacio vectorial $V(K)$. Debido a que $\mathcal{E}_{1,0}(V)=V^*$ y $\mathcal{E}_{0,1}(V)=V^{**}$, resulta que $\mathcal{E}_{1,0}(V)$ y $\mathcal{E}_{0,1}(V)$ son espacios vectoriales sobre K y, según lo dicho arriba, $\mathcal{E}_{0,0}(V)=K$ es también un espacio vectorial sobre K . Parece natural preguntarse, a la vista de esto, si $\mathcal{E}_{r,s}(V)$, con las operaciones que generalicen a las de tales ejemplos, es un espacio vectorial sobre K . La respuesta la da el siguiente

Teorema 6.3.- $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ es un espacio vectorial sobre K cuando se le dota de la suma y producto por escalares siguientes:

$$(T+T')(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = T(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + T'(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s)$$

$$(a \cdot T)(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = a \cdot T(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s)$$

donde $a \in K$, $T, T' \in \mathcal{E}_{r,s}(V)$ y $x_j \in V$, $\varphi_k \in V^*$, $\forall j \in \{1, \dots, r\}$, $\forall k \in \{1, \dots, s\}$.

Demostración.- Si $T, T' \in \mathcal{E}_{r,s}(V)$ entonces $T+T' \in \mathcal{E}_{r,s}(V)$. En efecto,

$$(T+T')(x_1, \dots, x_i+x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) =$$

$$= T(x_1, \dots, x_i+x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + T'(x_1, \dots, x_i+x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) =$$

$$= T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + T(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) +$$

$$+ T'(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + T'(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) =$$

$$\begin{aligned}
&= T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + T'(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + \\
&+ T(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + T'(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = \\
&= (T+T')(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + (T+T')(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s)
\end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ y analogamente cuando se pone $\varphi_j + \varphi'_j$ en el lugar $j \in \{1, \dots, s\}$ correspondientes a argumentos en V^* .

$$\begin{aligned}
&(T+T')(x_1, \dots, a \cdot x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = \\
&= T(x_1, \dots, a \cdot x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + T'(x_1, \dots, a \cdot x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = \\
&= a \cdot T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + a \cdot T'(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = \\
&= a \cdot (T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + T'(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s)) = \\
&= a \cdot (T+T')(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s)
\end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ y analogamente cuando se pone $a \cdot \varphi_j$ en el lugar $j \in \{1, \dots, s\}$ correspondiente a argumentos de V^* .

Si $T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$ y $a \in K$ entonces $a \cdot T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(a \cdot T)(x_1, \dots, x_i + x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) &= a \cdot T(x_1, \dots, x_i + x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = \\
&= a \cdot (T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + T(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s)) = \\
&= a \cdot T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + a \cdot T(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = \\
&= (a \cdot T)(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) + (a \cdot T)(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) \\
\forall i \in \{1, \dots, r\}, \text{ y analogamente} \\
(a \cdot T)(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_j + \varphi'_j, \dots, \varphi_s) &= (a \cdot T)(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_s) + \\
&+ (a \cdot T)(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi'_j, \dots, \varphi_s) \quad \forall j \in \{1, \dots, s\}.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $a \cdot T$ verifica la condición (2) de la Definición 6.1 y con ello que $a \cdot T$ es un tensor de tipo (r,s) sobre V .

$$(a \cdot T)(x_1, \dots, b \cdot x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = a \cdot T(x_1, \dots, b \cdot x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) =$$

$$= a \cdot b \cdot T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = b(a \cdot T)(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s)$$

$\forall i \in \{1, \dots, r\}$ y analogamente

$$(a \cdot T)(x_1, \dots, x_r, \dots, \varphi_1, \dots, b \cdot \varphi_j, \dots, \varphi_s) = b(a \cdot T)(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_s)$$

$\forall j \in \{1, \dots, s\}$.

Estas operaciones verifican las siguientes propiedades :

$$(T + T') + T'' = T + (T' + T'')$$

$$\exists T_0 \in \mathcal{T}_{r,s}(V) : T_0 + T = T + T_0 = T \quad \forall T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$$

T_0 está definido por $T_0(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = 0 \quad \forall x_j \in V, \forall \varphi_i \in V^*$ y

se llama el "tensor nulo" de tipo (r,s) sobre V .

Para cada $T \in \mathcal{T}_{r,s}(V) \quad \exists (-T) \in \mathcal{T}_{r,s}(V) :$

$$T + (-T) = -T + T = T_0$$

$$-T \text{ está dado por } (-T)(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s) = -T(x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_s)$$

$x_j \in V, \varphi_i \in V^*$ y es el "tensor opuesto" de T .

$$T + T' = T' + T, \quad \forall T, T' \in \mathcal{T}_{r,s}(V).$$

Con lo que se tendría que esta suma da estructura de grupo abeliano al conjunto de los tensores de tipo (r,s) sobre V . Además tenemos:

$$a \cdot (T + T') = a \cdot T + a \cdot T' \quad \forall a \in K, \quad \forall T, T' \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$$

$$(a + b) \cdot T = a \cdot T + b \cdot T \quad \forall a, b \in K \quad \forall T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$$

$$(a \cdot b) \cdot T = a \cdot (b \cdot T) \quad \forall a, b \in K \quad \forall T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$$

$$1 \cdot T = T \quad \forall T \in \mathcal{T}_{r,s}(V) \quad \text{donde } 1 \text{ es la unidad de } K.$$

Con lo que $\mathcal{T}_{r,s}(V)$ es un espacio vectorial sobre K .

Si nos damos cuenta que el conjunto de todas las aplicaciones de un conjunto A en un cuerpo K, $\mathfrak{F}(A, K)$ constituye un espacio vectorial, (ver pag. 102 prob. 4), y que las operaciones que definimos en $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ son la restricción de las de $\mathfrak{F}(A, K)$, bastaría con probar que $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{F}(V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^*, K)$ y eso queda demostrado con ver que si

$$T, T' \in \mathcal{E}_{r,s}(V) \Rightarrow T + T' \in \mathcal{E}_{r,s}(V) \quad \text{y} \quad a \cdot T \in \mathcal{E}_{r,s}(V) \quad \forall a \in K$$

De la misma forma que en el Teorema 6.3 podríamos probar que el conjunto de todas las aplicaciones multilineales de $V_1 \times \dots \times V_m$ en W con operaciones formalmente idénticas a las dadas en la pag. 179, constituye un espacio vectorial (problema 2, pag. 230).

Vamos ahora a calcular una base de $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ y con ello su dimensión. Empecemos por el caso $r=s=1$ (ya conocemos $r=1, s=0$ y $r=0, s=1$).

Si $x \in V, \varphi \in V^*$ representamos por $\varphi \otimes x$ la aplicación $\varphi \otimes x : V \times V^* \rightarrow K$ definida por $(\varphi \otimes x)(y, \psi) = \varphi(y) \cdot \psi(x)$. Es fácil demostrar que

$$\forall x \in V \quad \forall \varphi \in V^* : \varphi \otimes x \in \mathcal{E}_{1,1}(V)$$

No obstante esta afirmación es un caso particular de un resultado que probaremos más adelante.

Sea $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base de V y sea $B^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\}$ la correspondiente base dual en V^* (pondremos superíndices a los vectores de V^*). Veamos que

$$\{\varphi^j \otimes x_i / j, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

es una base de $\mathcal{E}_{1,1}(V)$. En efecto, si $T \in \mathcal{E}_{1,1}(V)$ tenemos que para

$$x = \sum_{j=1}^n a^j \cdot x_j \quad \text{y} \quad \varphi = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \varphi^i$$

$$\begin{aligned} T(x, \varphi) &= T\left(\sum_{j=1}^n a^j \cdot x_j, \sum_{i=1}^n b_i \cdot \varphi^i\right) = \sum_{j=1}^n a^j \cdot T(x_j, \sum_{i=1}^n b_i \cdot \varphi^i) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a^j \cdot b_i \cdot T(x_j, \varphi^i) \end{aligned}$$

llamando $t_j^i = T(x_j, \varphi^i)$ $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tenemos

$$T(x, \varphi) = \sum_{i,j} a^j \cdot b_i \cdot t_j^i$$

en particular tomemos T como $\varphi^j \otimes x_i$ y entonces

$$(\varphi^j \otimes x_i)(x, \varphi) = \sum_{k,h} a^k \cdot b_h \cdot (\varphi^j \otimes x_i)(x_k, \varphi^h) = \sum_{k,h} a^k \cdot b_h \cdot \varphi^j(x_k) \cdot \varphi^h(x_i) = \\ = \sum_{k,h} a^k \cdot b_h \cdot \delta_k^j \cdot \delta_i^h = a^j \cdot b_i \quad (\delta_j^i = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases})$$

en particular $(\varphi^j \otimes x_i)(x_k, \varphi^h) = \delta_k^j \cdot \delta_i^h$

es decir $(\varphi^j \otimes x_i)(x, \varphi)$ es el producto de la componente j de x en $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ por la componente i de φ en $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$.

Así tenemos:

$$T(x, \varphi) = \sum_{i,j} a^j \cdot b_i \cdot t_j^i = \sum_{i,j} t_j^i (\varphi^j \otimes x_i)(x, \varphi) = \\ = \left(\sum_{i,j} t_j^i \cdot \varphi^j \otimes x_i \right)(x, \varphi) \quad \forall x \in V \quad \forall \varphi \in V^*$$

con lo que

$$T = \sum_{i,j} t_j^i \cdot \varphi^j \otimes x_i \quad \text{donde } t_j^i = T(x_j, \varphi^i)$$

lo que prueba que $\{\varphi^j \otimes x_i / j, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ es un sistema de generadores del espacio vectorial $\mathcal{E}_{r,s}(V)$. Veamos que es linealmente independiente.

Supongamos $\sum_{i,j} a_j^i \cdot \varphi^j \otimes x_i = T_0$ (tensor nulo de tipo $(1,1)$ sobre V)

entonces

$$0 = \left(\sum_{i,j} a_j^i \cdot \varphi^j \otimes x_i \right)(x_k, \varphi^h) = \sum_{i,j} a_j^i \cdot \varphi^j(x_k) \cdot \varphi^h(x_i) = \sum_{i,j} a_j^i \cdot \delta_k^j \cdot \delta_i^h = a_k^h$$

$\forall k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Así tenemos una base de $\mathcal{E}_{1,1}(V)$ y como consecuencia $\dim_K \mathcal{E}_{1,1}(V) = n^2$.

Antes de tratar de generalizar a $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ vamos a obtener un resultado sobre $\mathcal{E}_{1,1}(V)$. Sabemos que $\dim_K \text{End}_K V = n^2$ si $n = \dim_K V$. Por otro lado en el ejemplo 7 se da una aplicación de $\text{End}_K V$ en $\mathcal{E}_{1,1}(V)$. Si probamos que es lineal como $\dim_K \text{End}_K V = \dim_K \mathcal{E}_{1,1}(V)$ (ver Prop. 4.20, pag. 127) para ver que es un isomorfismo sólo hay que comprobar, por ejemplo, que su nulidad es cero (Prop. 4.16, pag. 119) tenemos:

Teorema 6.4.- La aplicación $\text{End}_K V \rightarrow \mathcal{E}_{1,1}(V)$ dada por
 $f \rightarrow T_f$

siendo $T_f(x, \varphi) = \varphi(f(x)) \quad \forall x \in V, \forall \varphi \in V^*$ es un isomorfismo entre estos dos espacios vectoriales.

Demostración.- Probar que esta aplicación es lineal equivale a ver que

$$T_{f+f'} = T_f + T_{f'} \quad y \quad T_{af} = a.T_f \quad \forall a \in K \quad \forall f, f' \in \text{End}_K V$$

En efecto

$$\begin{aligned} T_{f+f'}(x, \varphi) &= \varphi((f+f')(x)) = \varphi(f(x) + f'(x)) = \varphi(f(x)) + \varphi(f'(x)) = \\ &= T_f(x, \varphi) + T_{f'}(x, \varphi) = (T_f + T_{f'})(x, \varphi) \end{aligned}$$

$$T_{af}(x, \varphi) = \varphi((a.f)(x)) = \varphi(a.f(x)) = a.\varphi(f(x)) = a.T_f(x, \varphi) = (a.T_f)(x, \varphi)$$

Veamos que esta aplicación es inyectiva. Si $T_f = T_{f_0} (= T_{f_0})$ donde $f_0(x) = 0 \quad \forall x \in V$ tenemos

$$T_f(x, \varphi) = T_{f_0}(x, \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi(f(x)) = 0 \quad \forall x \in V \quad \forall \varphi \in V^*$$

Sabemos por la Proposición 5.4, pag. 159 que para cada $z \in V$, $z \neq 0$ existe $\Psi \in V^*$ con $\Psi(z) \neq 0$, por el paso al contrarrecíproco si $\Psi(z) = 0 \quad \forall \Psi \in V^* \Rightarrow z = 0$. Apliquemos esto aquí. En efecto, suponemos $x \in V$ fijo entonces $f(x) \in V$ tal que $\varphi(f(x)) = 0 \quad \forall \varphi \in V \Rightarrow f(x) = 0$ como esto es $\forall x \in V \Rightarrow f = f_0$ (la aplicación lineal nula de V en V).

Otra forma es darse cuenta que $\varphi(f(x)) = t_f(\varphi)(x) = 0 \quad \forall x \in V$ quiere decir que $t_f(\varphi) = \varphi$ forma lineal nula sobre $V \quad \forall \varphi \in V^* \Rightarrow \Rightarrow$ nulidad (t_f) = $n \Rightarrow$ rango $f = \text{rango } t_f = 0$ (Corolario 5.19,

pág. 171) es decir $f=f_0$.

Hay que observar que el isomorfismo del Teorema 6.4 no se define a partir de bases de $\text{End}_K V$ y de $\mathcal{T}_{1,1}(V)$ así que es un isomorfismo "natural", y por ello los espacios vectoriales $\text{End}_K V$ y $\mathcal{T}_{1,1}(V)$ son identificables de manera natural. Nótese que tomando una base de $\text{End}_K V$, otra de $\mathcal{T}_{1,1}(V)$ y haciendo uso del Teorema 4.11, obtendríamos un isomorfismo que dependería de las bases elegidas.

Notemos que si

$$f(x_j) = \sum_{k=1}^n a_j^k \cdot x_k$$

es decir, si $M(f, B) = (a_j^i)$ (i indica fila, j columna) entonces

$$T_f(x_j, \varphi^i) = \varphi^i(f(x_j)) = \sum_{k=1}^n a_j^k \cdot \varphi^i(x_k) = \sum_{k=1}^n a_j^k \cdot \delta_k^i = a_j^i$$

De modo que la componente t_j^i de T_f en la base

$$(\varphi^1 \otimes x_1, \dots, \varphi^1 \otimes x_n, \dots, \varphi^n \otimes x_1, \dots, \varphi^n \otimes x_n)$$

es el elemento de la fila i columna j de $M(f, B)$; es decir, la matriz de f en B , nos proporciona las componentes de T_f en esta base de $\mathcal{T}_{1,1}(V)$

Dado un tensor T de tipo $(1,1)$ sobre V , si

$$T = \sum_{i,j} t_j^i \cdot \varphi^j \otimes x_i$$

llamemos $A = (t_j^i) \in \mathcal{M}_n(K)$. Sabemos que $\exists! f \in \text{End}_K V : M(f, B) = A$, siendo $B = (x_1, \dots, x_n)$, entonces

$$T_f = T.$$

Por este resultado, Teorema 6.4, se puede hablar indistintamente de endomorfismos de V y de tensores de tipo $(1,1)$ sobre V . De hecho, en lenguaje físico se emplean indistintamente los términos tensor $(1,1)$ y "operador" sobre un espacio vectorial.

Volvamos ahora al problema que nos propusimos: encontrar una base de $\mathcal{T}_{r,s}(V)$. Si nos damos cuenta, el hecho de tener un tensor de la forma $\varphi \otimes x$ para $\varphi \in V^*$ y $x \in V$ nos ha sido muy útil en el caso $\mathcal{T}_{1,1}(V)$,

vamos a generalizar esto para aplicarlo a $\mathcal{E}_{r,s}(V)$. La construcción de $\Psi \otimes x$ a partir de Ψ y x es un caso particular de la siguiente:

Definición 6.5.- Sean $T \in \mathcal{E}_{r,s}(V)$ y $T' \in \mathcal{E}_{r',s'}(V)$ se define su producto tensorial $T \otimes T'$ por la fórmula

$$(T \otimes T')(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^1, \dots, \psi^s, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) = \\ = T(x_1, \dots, x_r, \psi^1, \dots, \psi^s) \cdot T'(x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) \in K \\ \forall x_j \in V, \quad \forall \psi^i \in V^*, \quad j \in \{1, \dots, r, r+1, \dots, r+r'\} \\ i \in \{1, \dots, s, s+1, \dots, s+s'\}.$$

Un cálculo fácil, aunque largo, prueba que si $T \in \mathcal{E}_{r,s}(V)$ y $T' \in \mathcal{E}_{r',s'}(V)$ entonces $T \otimes T' \in \mathcal{E}_{r+r',s+s'}(V)$ (compruébese). Entonces $\Psi \otimes x$ es el producto tensorial de Ψ por x . Sea $T: V \times V^* \rightarrow K$ el tensor dado por $T(x, \Psi) = \Psi(x)$, ver ejemplo 6. Entonces el tensor dado en el ejemplo 8 es justamente $T \otimes T$.

En el caso particular que $T \in \mathcal{E}_{0,0}(V) = K$, es decir, que $T = a \in K$ El producto tensorial de a por T' , $a \otimes T'$ no es otro que el producto usual $a \cdot T'$. En este sentido se trata de una generalización de aquel.

Sean $T \in \mathcal{E}_{r,s}(V)$, $T' \in \mathcal{E}_{r',s'}(V)$ y $T'' \in \mathcal{E}_{r'',s''}(V)$ entonces $T \otimes T' \in \mathcal{E}_{r+r',s+s'}(V)$ y $T' \otimes T'' \in \mathcal{E}_{r'+r'',s'+s''}(V)$.

Por tanto $(T \otimes T') \otimes T''$ y $T \otimes (T' \otimes T'')$ son tensores de tipo $(r+r'+r'', s+s'+s'')$ sobre V .

Se comprobará como ejercicio que

$$(T \otimes T') \otimes T'' = T \otimes (T' \otimes T'')$$

Así podremos iterar el producto tensorial a tres o más factores.

El producto tensorial satisface las siguientes propiedades:

Proposición 6.6.- Se cumple:

$$T \otimes (T'_1 + T'_2) = T \otimes T'_1 + T \otimes T'_2$$

$$(T_1 + T_2) \otimes T' = T_1 \otimes T' + T_2 \otimes T'$$

$$(a \cdot T) \otimes T' = T \otimes (a \cdot T') = a \cdot T \otimes T'$$

$\forall \tau, \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{E}_{r,s}(v) , \forall \tau', \tau'_1, \tau'_2 \in \mathcal{E}_{r',s'}(v) \text{ y } \forall a \in K.$

En otras palabras la aplicación

$$\mathcal{E}_{r,s}(v) \times \mathcal{E}_{r',s'}(v) \longrightarrow \mathcal{E}_{r+r',s+s'}(v)$$

$$(\tau, \tau') \longleftrightarrow \tau \otimes \tau'$$

es bilineal.

Demostración.- En efecto,

$$\begin{aligned} & (\tau \otimes (\tau'_1 + \tau'_2))(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^1, \dots, \psi^s, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) = \\ &= \tau(x_1, \dots, x_r, \psi^1, \dots, \psi^s) \cdot ((\tau'_1 + \tau'_2)(x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'})) = \\ &= \tau(x_1, \dots, x_r, \psi^1, \dots, \psi^s) \cdot \tau'_1(x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) + \\ & \quad + \tau(x_1, \dots, x_r, \psi^1, \dots, \psi^s) \cdot \tau'_2(x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) = \\ & (\tau \otimes \tau'_1)(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^1, \dots, \psi^s, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) + \\ & + (\tau \otimes \tau'_2)(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^1, \dots, \psi^s, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) = \\ &= (\tau \otimes \tau'_1 + \tau \otimes \tau'_2)(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^1, \dots, \psi^s, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) \end{aligned}$$

$\forall x_j \in v, \forall \psi^k \in v^*$ con lo que

$$\tau \otimes (\tau'_1 + \tau'_2) = \tau \otimes \tau'_1 + \tau \otimes \tau'_2.$$

Análogamente se prueba que

$$(\tau_1 + \tau_2) \otimes \tau' = \tau_1 \otimes \tau' + \tau_2 \otimes \tau'.$$

Por último

$$\begin{aligned} & ((a \cdot \tau) \otimes \tau')(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^1, \dots, \psi^s, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) = \\ & (a \cdot \tau)(x_1, \dots, x_r, \psi^1, \dots, \psi^s) \cdot \tau'(x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) = \\ & = a \cdot \tau(x_1, \dots, x_r, \psi^1, \dots, \psi^s) \cdot \tau'(x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T(x_1, \dots, x_r, \psi^1, \dots, \psi^s) \cdot (a \cdot T')(x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) = \\
&= (T \otimes (a \cdot T'))(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^1, \dots, \psi^s, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}) = \dots = \\
&= a \cdot (T \otimes T')(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+r'}, \psi^1, \dots, \psi^s, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+s'}).
\end{aligned}$$

$\forall x_j \in V$, $\forall \psi^k \in V^*$ con lo que

$$(a \cdot T) \otimes T' = T \otimes (a \cdot T') = a \cdot T \otimes T'.$$

Teorema 6.7.- Sea $V(K)$ un espacio vectorial sobre K . Si $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de V y $\beta^* = \{\psi^1, \dots, \psi^n\}$ la correspondiente base dual en V^* , entonces

$$\left\{ \psi^{i_1} \otimes \dots \otimes \psi^{i_r} \otimes x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_s} \mid \begin{array}{l} \text{todos los índices varian} \\ \text{independientemente de } l \text{ a } n \end{array} \right\}$$

es una base de $\mathcal{G}_{r,s}(V)$. Como consecuencia $\dim_K \mathcal{G}_{r,s}(V) = n^{r+s}$ donde $n = \dim_K V$.

Demostración.- Sea $T \in \mathcal{G}_{r,s}(V)$, entonces si

$$y_1 = \sum_{i_1=1}^n a_1^{i_1} \cdot x_{i_1}; \dots; y_r = \sum_{i_r=1}^n a_r^{i_r} \cdot x_{i_r}$$

$$\psi^1 = \sum_{j_1=1}^n b_1^{j_1} \cdot \psi^{j_1}; \dots; \psi^s = \sum_{j_s=1}^n b_s^{j_s} \cdot \psi^{j_s}$$

resulta que

$$T(y_1, \dots, y_r, \psi^1, \dots, \psi^s) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} a_1^{i_1} \dots a_r^{i_r} \cdot b_1^{j_1} \dots b_s^{j_s} \cdot t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$$

$$\text{donde } t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = T \cdot (x_{i_1}, \dots, x_{i_r}, \psi^{j_1}, \dots, \psi^{j_s}) \in K.$$

En particular, tomemos T como $\psi^{i_1} \otimes \dots \otimes \psi^{i_r} \otimes x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_s}$ y entonces

$$(\psi^{i_1} \otimes \dots \otimes \psi^{i_r} \otimes_{j_1} \otimes \dots \otimes_{j_s}) \cdot (y_1, \dots, y_r, \psi^1, \dots, \psi^s) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ \ell_1, \dots, \ell_s}} a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r} \cdot b_1^{\ell_1} \dots b_s^{\ell_s} \cdot \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_r}^{i_r} \cdot \delta_{j_1}^{\ell_1} \dots \delta_{j_s}^{\ell_s} =$$

$$= a_1^{i_1} \dots a_r^{i_r} \cdot b_1^{\ell_1} \dots b_s^{\ell_s}$$

y así

$$(\psi^{i_1} \otimes \dots \otimes \psi^{i_r} \otimes_{j_1} \otimes \dots \otimes_{j_s}) \cdot (x_{k_1}, \dots, x_{k_r}, \psi^{\ell_1}, \dots, \psi^{\ell_s}) =$$

$$= \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_r}^{i_r} \cdot \delta_{j_1}^{\ell_1} \dots \delta_{j_s}^{\ell_s} .$$

Con lo que se tiene

$$\tau(y_1, \dots, y_r, \psi^1, \dots, \psi^s) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot (\psi^{i_1} \otimes \dots \otimes \psi^{i_r} \otimes_{j_1} \otimes \dots \otimes_{j_s}) \cdot (y_1, \dots, y_r, \psi^1, \dots, \psi^s)$$

y por tanto

$$\tau = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot \psi^{i_1} \otimes \dots \otimes \psi^{i_r} \otimes_{j_1} \otimes \dots \otimes_{j_s}$$

lo que prueba que $\left\{ \psi^{i_1} \otimes \dots \otimes \psi^{i_r} \otimes_{j_1} \otimes \dots \otimes_{j_s} \right\}_{\text{ todos los índices varian independientemente de } 1 \text{ a } n}$

es un sistema generador de $\mathcal{G}_{r,s}(V)$. Veamos que es linealmente independiente.

Supongamos $\sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ \ell_1, \dots, \ell_s}} a_{k_1, \dots, k_r}^{\ell_1, \dots, \ell_s} \cdot \psi^{k_1} \otimes \dots \otimes \psi^{k_r} \otimes_{\ell_1} \otimes \dots \otimes_{\ell_s} = T_0$ (tensor nulo de tipo (r,s) sobre V)

entonces

$$0 = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ \ell_1, \dots, \ell_s}}^{\ell_1, \dots, \ell_s} a_{k_1, \dots, k_r} \cdot \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_r} \otimes x_{\ell_1} \otimes \dots \otimes x_{\ell_s} (x_{i_1}, \dots, x_{i_r}, \varphi^{j_1}, \dots, \varphi^{j_s}) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ \ell_1, \dots, \ell_s}}^{\ell_1, \dots, \ell_s} a_{k_1, \dots, k_r} \cdot \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{\ell_1}^{j_1} \dots \delta_{\ell_s}^{j_s} = a_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$$

Con lo que tenemos una base de $\mathcal{G}_{r,s}(V)$.

Observese además que la expresión que nos da T como combinación lineal de la base del Teorema 6.7, tambien demuestra que todo tensor T de tipo (r,s) sobre V se pone como suma de n^{r+s} tensores del tipo

$$t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r} \otimes x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_s}.$$

Es decir todo tensor se puede obtener a partir de vectores, formas lineales y escalares, utilizando las tres operaciones: suma de tensores, producto de un escalar por un tensor y producto tensorial de tensores.

Es claro que este resultado generaliza la construcción que hicimos para $\mathcal{G}_{1,1}(V)$ (ver pag. 182). En el caso de $\mathcal{G}_{2,0}(V)$ tenemos que

$$\left\{ \varphi^i \otimes \varphi^j / i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

es una base de $\mathcal{G}_{2,0}(V)$ y cada $T \in \mathcal{G}_{2,0}(V)$ se pone

$$T = \sum_{i,j} t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j \quad \text{con} \quad t_{ij} = T(x_i, x_j).$$

En el caso $\mathcal{G}_{0,2}(V)$ tenemos que

$$\left\{ x_i \otimes x_j / i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

es una base de $\mathcal{G}_{0,2}(V)$ y cada $T' \in \mathcal{G}_{0,2}(V)$ se pone

$$T' = \sum_{i,j} t^{ij} \cdot x_i \otimes x_j \quad \text{con} \quad t^{ij} = T'(x^i, x^j).$$

Como $\dim_K \mathcal{E}_{1,1}(V) = \dim_K \mathcal{E}_{2,0}(V) = \dim_K \mathcal{E}_{0,2}(V)$ los espacios se tensores $\mathcal{E}_{1,1}(V)$, $\mathcal{E}_{2,0}(V)$ y $\mathcal{E}_{0,2}(V)$ son isomorfos. Más generalmente $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ y $\mathcal{E}_{r',s'}(V)$, con $r+s = r'+s'$ son isomorfos.

Proposición 6.8.- Sean $T \in \mathcal{E}_{r,s}(V)$ y $T' \in \mathcal{E}_{r',s'}(V)$ con

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r} \otimes \dots \otimes \varphi^{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{j_s} \quad y$$

$$T' = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{r'} \\ \ell_1, \dots, \ell_{s'}}} t'_{k_1, \dots, k_{r'}}^{\ell_1, \dots, \ell_{s'}} \cdot \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_{r'}} \otimes \varphi^{\ell_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{\ell_{s'}}$$

entonces

$$T \otimes T' = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{r+r'} \\ h_1, \dots, h_{s+s'}}} \tilde{t}_{p_1, \dots, p_{r+r'}}^{h_1, \dots, h_{s+s'}} \cdot \varphi^{p_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{p_{r+r'}} \otimes \varphi^{h_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{h_{s+s'}}$$

donde

$$\tilde{t}_{p_1, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_{r+r'}}^{h_1, \dots, h_s, h_{s+1}, \dots, h_{s+s'}} = t_{p_1, \dots, p_r}^{h_1, \dots, h_s} \cdot t'_{p_{r+1}, \dots, p_{r+r'}}^{h_{s+1}, \dots, h_{s+s'}}$$

En particular si $x = \sum_{i=1}^n a^i \cdot x_i$, $y = \sum_{j=1}^m b^j \cdot x_j$ entonces

$$x \otimes y = \sum_{i,j} a^i \cdot b^j \cdot x_i \otimes x_j,$$

al tensor $x \otimes y$ se le llama el producto "diádico" de x e y .

Demuéstrese como ejercicio. (Usar Proposición 6.6 y Teorema 6.7).

Cambio de base. Definición de tensor por coordenadas.-

Sean $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ dos bases de $V(K)$.

Supongamos que

$$x'_j = \sum_{i=1}^n a_j^i \cdot x_i \quad \text{con } a_j^i \in K$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Entonces sabemos (ver pag. 162) que

$$\varphi^i = \sum_{j=1}^n a_j^i \cdot \varphi'^j$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

siendo $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ y $B'^* = (\varphi'^1, \varphi'^2, \dots, \varphi'^n)$ las bases duales de B y B' respectivamente. Además uno ve que

$$\varphi'^i = \sum_{\ell=1}^n b_{\ell}^i \cdot \varphi^{\ell}$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

donde b_{ℓ}^i es el elemento que está en la fila i -ésima y en la columna ℓ -ésima de la matriz inversa de (a_j^i) .

Empecemos por $\mathcal{E}_{1,1}(V)$. Se consideran las bases de $\mathcal{E}_{1,1}(V)$

$$\left\{ \varphi^k \otimes x_{\ell} / k, \ell \in \{1, 2, \dots, n\} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \varphi'^i \otimes x'_j / i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

que ordenamos, por ejemplo, como en la pag. 185.

Utilizando las fórmulas de arriba tenemos:

$$\varphi'^i \otimes x'_j = \left(\sum_{k=1}^n b_k^i \cdot \varphi^k \right) \otimes \left(\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}^i \cdot x_{\ell} \right) = \sum_{k, \ell} a_{j\ell}^i \cdot b_k^i \cdot \varphi^k \otimes x_{\ell}$$

Si $T \in \mathcal{E}_{1,1}(V)$ entonces

$$T = \sum_{k, \ell} t_{k\ell}^i \cdot \varphi^k \otimes x_{\ell} = \sum_{i, j} t_i^j \cdot \varphi'^i \otimes x'_j$$

y por lo tanto

$$T = \sum_{k, \ell} t_{k\ell}^i \cdot \varphi^k \otimes x_{\ell} = \sum_{i, j, k, \ell} t_i^j \cdot a_{j\ell}^i \cdot b_k^i \cdot \varphi^k \otimes x_{\ell} = \sum_{k, \ell} \left(\sum_{i, j} t_i^j \cdot a_{j\ell}^i \cdot b_k^i \right) \cdot \varphi^k \otimes x_{\ell}$$

lo que implica

$$t_k^l = \sum_{i,j} a_j^l \cdot b_k^i \cdot t_i^j$$

$$\forall k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$$

que se puede escribir matricialmente

$$(t_k^l) = A \cdot (t_i^j) \cdot A^{-1}$$

siendo A la matriz (a_j^i) . Es decir, las "matrices" de coordenadas de T en estas bases de $\mathcal{E}_{1,1}(V)$ son semejantes. Esto no debe extrañar a la vista del Teorema 6.4, pag. 184. Dicho de otro modo, teniendo en cuenta la relación entre $\mathcal{E}_{1,1}(V)$ y $\text{End}_K V$, esta fórmula matricial no es otra que la dada en la Proposición 4.37, pag. 149, para el único $f \in \text{End}_K V$ con $T_f = T$.

A la vista de lo anterior, es erróneo decir que un tensor es una matriz pues ésta no es más que el "nombre" de aquél. Un tensor $(1,1)$ puede tener distintas "matrices de coordenadas" en distintas bases de $\mathcal{E}_{1,1}(V)$.

Precisamente dos matrices que representen al mismo tensor están relacionadas por esta fórmula. Por abuso de lenguaje a veces se habla de las coordenadas de T en la base $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ queriendo decir las coordenadas de T en una base ordenada de $\mathcal{E}_{1,1}(V)$ inducida por B .

Esto se generaliza de inmediato $\mathcal{E}_{r,s}(V)$. En efecto,

Proposición 6.9. Sean $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ bases de $V(K)$ y sean $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ y $B'^* = (\varphi'^1, \varphi'^2, \dots, \varphi'^n)$ las bases duales correspondientes en V^* . Entonces la expresión analítica del cambio de base en $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ entre bases ordenadas obtenidas de

$$\left\{ \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_r} \otimes x_{l_1} \otimes \dots \otimes x_{l_s} \middle| \begin{array}{l} \text{todos los índices varian} \\ \text{de } 1 \text{ a } n \text{ independientemente} \end{array} \right\} \subseteq$$

$$\left\{ \varphi'^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi'^{i_r} \otimes x'_{j_1} \otimes \dots \otimes x'_{j_s} \middle| \begin{array}{l} \text{todos los índices varian} \\ \text{independientemente de } 1 \text{ a } n \end{array} \right\}$$

viene dada por :

$$t_{k_1, \dots, k_r}^{\ell_1, \dots, \ell_s} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} a_{j_1}^{\ell_1} \dots a_{j_s}^{\ell_s} \cdot b_{k_1}^{i_1} \dots b_{k_r}^{i_r} \cdot t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$$

Demostración.- En efecto, las fórmulas de la pag.192 se escriben ahora

$$\varphi^{i_h} = \sum_{k_h=1}^n b_{k_h}^{i_h} \cdot \varphi^{k_h} \quad h = 1, 2, \dots, r.$$

$$x'_{j_q} = \sum_{\ell_q=1}^n a_{j_q}^{\ell_q} \cdot x_{\ell_q} \quad q = 1, 2, \dots, s.$$

y entonces, utilizando la Proposición 6.6, pag. 186, tenemos

$$\begin{aligned} \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r} \otimes x'_{j_1} \otimes \dots \otimes x'_{j_s} &= (\sum_{k_1=1}^n b_{k_1}^{i_1} \cdot \varphi^{k_1}) \otimes \dots \otimes (\sum_{k_r=1}^n b_{k_r}^{i_r} \cdot \varphi^{k_r}) \otimes (\sum_{\ell_1=1}^n a_{j_1}^{\ell_1} \cdot x_{\ell_1}) \otimes \dots \otimes (\sum_{\ell_s=1}^n a_{j_s}^{\ell_s} \cdot x_{\ell_s}) \\ &\dots \otimes (\sum_{\ell_s=1}^n a_{j_s}^{\ell_s} \cdot x_{\ell_s}) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ \ell_1, \dots, \ell_s}} a_{j_1}^{\ell_1} \dots a_{j_s}^{\ell_s} \cdot b_{k_1}^{i_1} \dots b_{k_r}^{i_r} \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_r} \otimes x_{\ell_1} \otimes \dots \otimes x_{\ell_s}. \end{aligned}$$

Sea

$$T = \sum_{t_{k_1, \dots, k_r}^{\ell_1, \dots, \ell_s}} t_{k_1, \dots, k_r}^{\ell_1, \dots, \ell_s} \cdot \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_r} \otimes x_{\ell_1} \otimes \dots \otimes x_{\ell_s} =$$

$$= \sum_{t'_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}} t'_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r} \otimes x'_{j_1} \otimes \dots \otimes x'_{j_s}$$

como en la pag. 190. Entonces

$$\sum_{t_{k_1, \dots, k_r}^{\ell_1, \dots, \ell_s}} t_{k_1, \dots, k_r}^{\ell_1, \dots, \ell_s} \cdot \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_r} \otimes x_{\ell_1} \otimes \dots \otimes x_{\ell_s} =$$

$$= \sum_{a_{j_1} \dots a_{j_s} \cdot b_{k_1} \dots b_{k_r} \cdot t'_{i_1}, \dots, i_r}^{\ell_1 \dots \ell_s \cdot b_{k_1} \dots b_{k_r} \cdot t'_{i_1}, \dots, i_r} \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes^{k_r} \ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_s =$$

$$= \sum \left(\sum_{a_{j_1} \dots a_{j_s} \cdot b_{k_1} \dots b_{k_r} \cdot t'_{i_1}, \dots, i_r}^{\ell_1 \dots \ell_s \cdot b_{k_1} \dots b_{k_r} \cdot t'_{i_1}, \dots, i_r} \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes^{k_r} \ell_1 \otimes \dots \otimes \ell_s \right)$$

y por tanto

$$\ell_1, \dots, \ell_s = \sum_{t_{k_1}, \dots, k_r}^{\ell_1 \dots \ell_s} a_{j_1} \dots a_{j_s} \cdot b_{k_1} \dots b_{k_r} \cdot t'_{i_1}, \dots, i_r$$

como se quería probar.

Obsérvese que, para el caso particular en que $r=s=1$, la fórmula de la Proposición 6.9 se obtuvo en la pag. 193. Para tensores de tipo $(2,0)$ tenemos

$$t_{k\ell} = \sum_{i,j} b_k^i \cdot b_\ell^j \cdot t'_{ij}$$

y en el caso de los tensores de tipo $(0,2)$

$$t^{k\ell} = \sum_{i,j} a_i^k \cdot a_j^\ell \cdot t^{ij}$$

Ambas se pueden escribir matricialmente

$$(t_{k\ell}) = t(A^{-1}) \cdot (t'_{ij}) \cdot A^{-1} \quad y$$

$$(t^{k\ell}) = A \cdot (t^{ij}) \cdot t_A$$

siendo $A = (a_j^i)$ como en la pag. 193.

Las fórmulas de cambio de base de la Proposición 6.9 se pueden interpretar desde otro punto de vista: pueden ser usadas para dar una definición alternativa de tensor. Necesitamos dar algunos preliminares.

Definición 6.10. — Sean K un cuerpo y s, r, n enteros no negativos. Entenderemos por una multimatriz de tipo (r,s) y orden n un conjunto ordenado de n^{r+s} escalares de K .

$$\begin{pmatrix} \ell_1, \dots, \ell_s \\ t_{k_1, \dots, k_r} \end{pmatrix}$$

donde todos los índices varian independientemente de l a n y
 t_{k_1, \dots, k_r} es un escalar de K para cualesquier ℓ_1, \dots, ℓ_s y
 k_1, \dots, k_r de $\{1, \dots, n\}$.

Está claro que para $r=s=1$ esta definición coincide con la de matriz cuadrada de orden n sobre K (ver pag. 121).

Como en la Definición 4.31, pag.142, en el conjunto de todas las multimatrices de tipo (r,s) y orden n podemos definir una relación de equivalencia diciendo que

$$\begin{pmatrix} \ell_1, \dots, \ell_s \\ t_{k_1, \dots, k_r} \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_s \\ t_{i_1, \dots, i_r} \end{pmatrix}$$

son "semejantes" si existe $A = (a_{ij}^i) \in G1(n, K)$ tal que

$$\begin{pmatrix} \ell_1, \dots, \ell_s \\ t_{k_1, \dots, k_r} \end{pmatrix} = \sum a_{j_1}^{i_1} \dots a_{j_s}^{i_s} \cdot b_{k_1}^{i_1} \dots b_{k_r}^{i_r} \cdot \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_s \\ t_{i_1, \dots, i_r} \end{pmatrix}$$

donde b_k^i representa al elemento fila i columna k de A^{-1} .

La Proposición 6.9 prueba que multimatrices que representan al mismo tensor son semejantes. Recíprocamente

Proposición 6.11.- Sustituiremos que

$$\begin{pmatrix} \ell_1, \dots, \ell_s \\ t_{k_1, \dots, k_r} \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_s \\ t_{i_1, \dots, i_r} \end{pmatrix}$$

son multimatrices de tipo (r,s) y orden n semejantes y
sean V un espacio vectorial sobre K con $\dim_K V = n$, $B = (x_1, \dots, x_n)$
una base de V y $B^* = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ su dual en V . Si T es el (único) tensor
de tipo (r,s) sobre V dado por

$$T = \sum t_{k_1, \dots, k_r} \cdot \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_r} \otimes x_{\ell_1} \otimes \dots \otimes x_{\ell_s}$$

entonces existe una única base $B' = (x'_1, \dots, x'_n)$ de V tal que

$$T = \sum t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r} \otimes x'^{j_1} \otimes \dots \otimes x'^{j_s}$$

siendo $B^* = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ la base dual de B' en V^* .

Hágase la demostración como ejercicio (comparar con pag. 145).

A la vista de lo anterior podemos decir que un tensor de tipo (r,s) sobre V también se puede definir como una aplicación que le hace corresponder a cada base ordenada $B = (x_1, \dots, x_n)$ una multimatriz de tipo (r,s) y orden n (n^{r+s} escalares indizados):

$$(t_{k_1, \dots, k_r}^{\ell_1, \dots, \ell_s})$$

de tal forma que si a $B' = (x'_1, \dots, x'_n)$ le corresponde $(t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s})$ se cumpla

$$t_{k_1, \dots, k_r}^{\ell_1, \dots, \ell_s} = \sum a_{j_1}^{\ell_1} \dots a_{j_s}^{\ell_s} \cdot b_{k_1}^{i_1} \dots b_{k_r}^{i_r} \cdot t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$$

donde $(a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^n)$ son las coordenadas de x'_j en B' $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y b_j^i el elemento de la fila i -ésima y columna j -ésima de la matriz inversa de $A = (a_j^i)$.

Obsérvese que en esta "definición clásica" de tensor se omite toda referencia al espacio dual.

Particularizando a tensores $(1,1)$, se puede decir que un tensor $(1,1)$ sobre V es una aplicación que le hace corresponder a cada base ordenada de $B = (x_1, \dots, x_n)$ de V una matriz de orden n

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_n^n \end{pmatrix}$$

de tal forma que para cada dos bases ordenadas distintas de V las

"matrices de coordenadas" correspondientes estén ligadas como en la página 193.

En física suelen utilizarse tensores de orden 2 sobre $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sin hacer mención ni a su covarianza, ni a su contravarianza. Esto se va a poder hacer, como veremos en la lección 9, debido a una herramienta suplementaria que posee el espacio vectorial $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$: una métrica euclídea o producto escalar (ver también prob. 13 en pag. 232).

Otros procedimientos para construir tensores: contracción, producto contraido.-

Hasta ahora tenemos tres maneras de obtener nuevos tensores a partir de varios dados : suma de dos tensores del mismo tipo, producto de un escalar por un tensor y producto tensorial de dos tensores. Veamos dos nuevos procedimientos : la contracción tensorial y el producto contraido.

Sea T un tensor de tipo $(1,1)$ sobre $V(K)$. Entonces para una base $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de V y $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ su base dual en V^* , tendremos (ver pag. 183)

$$T = \sum_{i,j} t^i_j \cdot \varphi^j \otimes x_i \quad \text{donde } t^i_j = T(\varphi^i, x_j)$$

y para otra base $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ de V y $B'^* = (\varphi'^1, \varphi'^2, \dots, \varphi'^n)$ su dual en V^* también tendremos

$$T = \sum_{k,l} t'^k_l \cdot \varphi'^l \otimes x'_k \quad \text{conde } t'^k_l = T(\varphi'^k, x'_l)$$

y además (ver pag. 193)

$$t^i_j = \sum_{k,l} a_k^i \cdot b_j^l \cdot t'^k_l$$

Así

$$\sum_{i=1}^n t^i_i = \sum_{i,k,l} a_k^i \cdot b_i^l \cdot t'^k_l = \sum_{k,l} \left(\sum_i a_k^i \cdot b_i^l \right) t'^k_l = \sum_{k,l} \delta_k^l \cdot t'^k_l = \sum_{k=1}^n t'^k_k$$

Con lo que el escalar $\sum_{i=1}^n t^i_i$ no depende de la base de $\mathcal{C}_{1,1}(V)$ que

elijamos para representar T. Si hacemos esto para todos los tensores de tipo (1,1) sobre V resulta que así tenemos una aplicación

$$c : \mathcal{T}_{1,1}(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{0,0}(V) (=K)$$

$$T \longmapsto \sum_{i=1}^n T(\varphi^i, x_i)$$

Obsérvese que si $f \in \text{End}_K V$ es el único endomorfismo de V con $T_f = T$, se tiene $c(T) = \text{traza } f$ (ver prob. 16, pag. 155) y por ello c es una aplicación lineal.

Si uno quiere generalizar esto, lo primero que advierte es que para tensores (r,0) o (0,s) tal cosa no es posible ya que tendríamos que idear un procedimiento para obtener un tensor de tipo (r-1,s-1) a partir de uno (r,s).

Proposición 6.12.- Sea $T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$ con $r > 0$ y $s > 0$. Sea $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Entonces $c_i^j T$ definido por

$$(c_i^j T)(y_1, \dots, y_{r-1}, \psi^1, \dots, \psi^{s-1}) = \sum_{k=1}^n T(y_1, \dots, x_k, \dots, y_{r-1}, \psi^1, \dots, \psi^k, \dots, \psi^{s-1})$$

donde $\Phi = \{x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$ es una base de $V(K)$ y $\Phi^* = \{\psi^1, \dots, \psi^k, \dots, \psi^n\}$ su dual en V^* es un tensor de tipo $(r-1, s-1)$ sobre V .

Demostración.- En primer lugar vemos que $c_i^j T$ está bien definido. Así que sea $\Phi' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ otra base de V y $\Phi'^* = \{\psi'^1, \dots, \psi'^n\}$ su dual. Entonces

$$x'_p = \sum_{k=1}^n a_p^k \cdot x_k, \quad \psi'^p = \sum_{h=1}^n b_h^p \cdot \psi^h \quad \text{y}$$

$$\sum_{p=1}^n T(y_1, \dots, x'_p, \dots, y_{r-1}, \psi^1, \dots, \psi'^p, \dots, \psi^{s-1}) =$$

$$= \sum_{p,k,h} a_p^k \cdot b_h^p \cdot T(y_1, \dots, x_k, \dots, y_{r-1}, \psi^1, \dots, \psi^h, \dots, \psi^{s-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,h} \left(\sum_p a_p^k \cdot b_h^p \right) \cdot T(y_1, \dots, x_k, \dots, y_{r-1}, \varphi^1, \dots, \varphi^h, \dots, \varphi^{s-1}) = \\
&= \sum_{k,h} \delta_h^k \cdot T(y_1, \dots, x_k, \dots, y_{r-1}, \varphi^1, \dots, \varphi^h, \dots, \varphi^{s-1}) = \\
&= \sum_{k=1}^n T(y_1, \dots, x_k, \dots, y_{r-1}, \varphi^1, \dots, \varphi^k, \dots, \varphi^{s-1})
\end{aligned}$$

lo que prueba que $C_i^j T$ está bien definido. Como T es multilineal también lo es $C_i^j T$ (compruébese).

Definición 6.13.— Dado un tensor T de tipo (r,s) sobre V , se llama contracción de T respecto a la variable i -ésima covariante y j -ésima contravariante, al tensor $C_i^j T$ de tipo $(r-1,s-1)$ sobre V que se establece en la Proposición 6.12.

Según esta definición la contracción (la única posible) de un tensor T de tipo $(1,1)$ $C_1^1 T$ coincide con $C(T)$ de la pag. 199.

Proposición 6.14. Sea $T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$ con (como en la pag. 189)

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} t^{j_1, \dots, j_s}_{i_1, \dots, i_r} \cdot \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r} \otimes x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_s}$$

y sean $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $h \in \{1, 2, \dots, s\}$; entonces:

$$C_k^h T = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}, \ell, i_{k+1}, \dots, i_r} t^{j_1, \dots, j_{h-1}, \ell, j_{h+1}, \dots, j_s}_{i_1, \dots, i_{k-1}, \ell, i_{k+1}, \dots, i_r} \right) \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_{k-1}} \otimes \varphi^{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r} \otimes x_{j_1} \otimes \dots$$

$$\dots \otimes x_{j_{h-1}} \otimes x_{j_{h+1}} \otimes \dots \otimes x_{j_s}$$

Es decir, las coordenadas de $C_k^h T$ se obtienen igualando la coordenada k -ésima covariante y h -ésima contravariante de T y luego sumando en

el índice anteriormente igualado.

Demostración.- En efecto,

$$\begin{aligned}
 & (c_k^h T)(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_r}, \varphi^{j_1}, \dots, \varphi^{j_{h-1}}, \varphi^{j_{h+1}}, \dots, \varphi^{j_s}) = \\
 & = \sum_{\ell=1}^n T(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_\ell, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_r}, \varphi^{j_1}, \dots, \varphi^{j_{h-1}}, \varphi^\ell, \varphi^{j_{h+1}}, \dots, \varphi^{j_s}) = \\
 & = \sum_{\ell=1}^n t_{i_1, \dots, i_{k-1}, \ell, i_{k+1}, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_{h-1}, \ell, j_{h+1}, \dots, j_s}
 \end{aligned}$$

El siguiente resultado generaliza lo que ya dijimos para $C=C_1^1$ en la pag. 199.

Proposición 6.15.- La contracción C_i^j es una aplicación lineal de $\mathcal{E}_{r,s}(v)$ en $\mathcal{E}_{r-1,s-1}(v)$. Es decir, $C_i^j : \mathcal{E}_{r,s}(v) \rightarrow \mathcal{E}_{r-1,s-1}(v)$ verifica

$$(1) \quad C_i^j(\tau + \tau') = C_i^j \tau + C_i^j \tau' \quad \forall \tau, \tau' \in \mathcal{E}_{r,s}(v)$$

$$(2) \quad C_i^j(a \cdot \tau) = a \cdot C_i^j \tau \quad \forall a \in K$$

Demostración.- Veamos sólo (2), (1) se hará como ejercicio,

$$\begin{aligned}
 & C_i^j(a \cdot \tau)(y_1, \dots, y_{r-1}, \psi^1, \dots, \psi^{s-1}) = \sum_{\ell=1}^n (a \cdot \tau)(y_1, \dots, x_\ell, \dots, y_{r-1}, \psi^1, \dots, \varphi^\ell, \dots, \psi^{s-1}) = \\
 & = \sum_{\ell=1}^n a \cdot \tau(y_1, \dots, x_\ell, \dots, y_{r-1}, \psi^1, \dots, \varphi^\ell, \dots, \psi^{s-1}) = \\
 & = a \cdot (C_i^j \tau)(y_1, \dots, y_{r-1}, \psi^1, \dots, \psi^{s-1}) \Rightarrow C_i^j(a \cdot \tau) = a \cdot C_i^j \tau .
 \end{aligned}$$

Se pueden definir contracciones más generales. Pongamos un ejemplo. Sea $T \in \mathcal{E}_{3,4}(v)$. La contracción $C_{1,2}^{1,4}$ de T , viene dada al igual-

lar primer índice covariante con el primer índice contravariante y luego sumar, e independientemente el segundo covariante con el cuarto contravariante y también sumar. En concreto:

$$(\mathcal{C}_{1,2}^{1,4}T)(x, \varphi, \psi) = \sum_{k,h} T(x_k, x_h, x, \varphi^k, \varphi, \psi, \psi^h)$$

para una base $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ de V y su correspondiente dual $\beta^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ en V^* . Si $\beta' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ y $\beta'^* = \{\varphi'^1, \dots, \varphi'^n\}$ son otra base de V y su dual con

$$x_j^i = \sum_{i=1}^n a_j^i \cdot x_i \quad \text{y} \quad \varphi'^i = \sum_{l=1}^n b_l^i \cdot \varphi^l$$

tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} T(x_i, x_j, x, \varphi'^i, \varphi, \psi, \varphi'^j) &= \sum_{\ell, p, i, j, k, h} a_i^k \cdot a_j^h \cdot b_\ell^i \cdot b_p^j \cdot T(x_k, x_h, x, \varphi^\ell, \varphi, \psi, \varphi^p) = \\ &= \sum_{\ell, p, k, h} (\sum_i a_i^k \cdot b_\ell^i) (\sum_j a_j^h \cdot b_p^j) \cdot T(x_k, x_h, x, \varphi^\ell, \varphi, \psi, \varphi^p) = \\ &= \sum_{\ell, p, k, h} \delta_\ell^k \cdot \delta_p^h \cdot T(x_k, x_h, x, \varphi^\ell, \varphi, \psi, \varphi^p) = \sum_{k,h} T(x_k, x_h, x, \varphi^k, \varphi, \psi, \psi^h) \end{aligned}$$

con lo que esta definición es correcta y además $\mathcal{C}_{1,2}^{1,4}T \in \mathcal{C}_{1,2}^{1,4}(V)$ con

$$\mathcal{C}_{1,2}^{1,4}T = \sum_{i,j_1,j_2} (\sum_{k,h,i}^{k,j_1,j_2,h} t_{k,h,i}^i) \varphi^i \otimes x_{j_1} \otimes x_{j_2}$$

siendo

$$T = \sum t_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3, j_4} \varphi^{i_1} \otimes \varphi^{i_2} \otimes \varphi^{i_3} \otimes x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes x_{j_3} \otimes x_{j_4}.$$

$$\text{Obsérvese que } \mathcal{C}_{1,2}^{1,4}T = \mathcal{C}_1^3(\mathcal{C}_1^1 T) = \mathcal{C}_1^1(\mathcal{C}_2^4 T).$$

Como ejercicio defínase la contracción general $C_{k_1, \dots, k_p}^{h_1, \dots, h_s} T$ para $T \in \mathcal{E}_{r,s}(V)$, $p \leq \min\{r, s\}$, y comórvébese propiedades análogas a lo anterior.

Definición 6.16.- Si $T \in \mathcal{E}_{r,0}(V)$ y $T' \in \mathcal{E}_{0,s}(V)$ entonces $T \otimes T' \in \mathcal{E}_{r,s}(V)$ y si $r > 0$, $s > 0$ $C_i^j(T \otimes T')$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ es un tensor de tipo $(r-1, s-1)$ sobre V . Llamaremos a $C_i^j(T \otimes T')$ el producto contraido de T y T' respecto a la variable i -ésima de T y j -ésima de T' .

Haciendo uso de la Proposición 6.14 podemos establecer el siguiente resultado:

Proposición 6.17.- Sea $T \in \mathcal{E}_{r,0}(V)$ y $T' \in \mathcal{E}_{0,s}(V)$ y sean $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Entonces

$$C_i^j(T \otimes T')(y_1, \dots, y_{r-1}, \psi^1, \dots, \psi^{s-1}) = \sum_{k=1}^n T(y_1, \dots, x_k, \dots, y_{r-1}) \cdot T'(\psi^1, \dots, \psi^k, \dots, \psi^{s-1}) \quad (i) \quad (j)$$

donde $\Phi = \{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de $V(K)$ y $\Phi^* = \{\psi^1, \dots, \psi^n\}$, su dual en V^* . Además, si

$$T = \sum_{k_1, \dots, k_r} t_{k_1, \dots, k_r} \cdot \psi^{k_1} \otimes \dots \otimes \psi^{k_r} \quad y$$

$$T' = \sum_{h_1, \dots, h_s} t'^{h_1, \dots, h_s} \cdot x_{h_1} \otimes \dots \otimes x_{h_s} \quad \text{entonces :}$$

$$C_i^j(T \otimes T') = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k_1, \dots, k_{i-1}, \ell, k_{i+1}, \dots, k_r} t_{k_1, \dots, k_{i-1}, \ell, k_{i+1}, \dots, k_r} \cdot t'^{h_1, \dots, h_{j-1}, \ell, h_j, \dots, h_s} \right).$$

$$\cdot \psi^{k_1} \otimes \dots \otimes \psi^{k_{i-1}} \otimes \psi^{k_{i+1}} \otimes \dots \otimes \psi^{k_r} \otimes x_{h_1} \otimes \dots \otimes x_{h_{j-1}} \otimes x_{h_{j+1}} \otimes \dots \otimes x_{h_s}$$

Esta proposición nos dice además que si

$$x = \sum_{k=1}^n a^k \cdot x_k \quad , \quad \psi = \sum_{\ell=1}^n b_{\ell} \cdot \psi^{\ell}$$

entonces

$$c_1^1(T \otimes x) = \sum \left(\sum_{k=i}^n t_{k,i_2, \dots, i_r} \cdot a^k \right) \varphi^1 \otimes \dots \otimes \varphi^r$$

$$c_1^1(\varphi \otimes T') = \sum \left(\sum_{\ell=1}^n b_\ell \cdot t'_{\ell, j_2, \dots, j_s} \right) x_{j_2} \otimes \dots \otimes x_{j_s}$$

$$c_1^1(\varphi \otimes x) = \sum_{k=1}^n a^k \cdot b_k.$$

Por otro lado si $T \in \mathcal{G}_{r,o}(V)$ y $x \in V$ la aplicación

$$i_x T : V \times \dots \times V \longrightarrow K$$

$$(i_x T)(y_1, \dots, y_{r-1}) = T(x, y_1, \dots, y_{r-1})$$

es un tensor de tipo $(r-1, 0)$ que se llama el producto interno de T mediante x. Claramente

$$i_x T = \sum (i_x T)(x_{k_1}, \dots, x_{k_{r-1}}) \cdot \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_{r-1}} =$$

$$= \sum T(x, x_{k_1}, \dots, x_{k_{r-1}}) \cdot \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_{r-1}} =$$

$$= \sum \left(\sum_h a^h T(x_h, x_{k_1}, \dots, x_{k_{r-1}}) \right) \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_{r-1}} =$$

$$= \sum \left(\sum_{h=1}^n a^h \cdot t_{h, k_1, \dots, k_{r-1}} \right) \varphi^{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{k_{r-1}}$$

lo que implica que

$$i_x T = c_1^1(T \otimes x).$$

Análogamente si $T' \in \mathcal{G}_{o,s}(V)$ y $\varphi \in V^*$ la aplicación

$$i_{\varphi} : V^* \times \overset{(s-1)}{\dots} \times V^* \longrightarrow K$$

$$(i_{\varphi T})(\psi^1, \dots, \psi^{s-1}) = T(\varphi, \psi^1, \dots, \psi^{s-1})$$

es un tensor de tipo $(0, s-1)$ que se llama producto interno de T' mediante φ y $C_1^1(\varphi \otimes T') = i_{\varphi T}$.

Nótese que

$$C_1^1(\varphi \otimes x) = i_x \varphi = i_{\varphi x}.$$

Más generalmente que i_x e i_{φ} , si en un tensor de tipo (r, s) se fijan k argumentos covariantes y h contravariantes se obtiene un tensor de tipo $(r-k, s-h)$.

En cuanto a propiedades de linealidad podemos afirmar:

Proposición 6.18.- La aplicación

$$\mathcal{E}_{r,0}(V) \times \mathcal{E}_{0,s}(V) \longrightarrow \mathcal{E}_{r-1,s-1}(V)$$

$$(T, T') \longmapsto C_i^j(T \otimes T')$$

es bilineal.

Demostración.- Basta observar que $\mathcal{E}_{r,0}(V) \times \mathcal{E}_{0,s}(V) \longrightarrow \mathcal{E}_{r,s}(V)$
 $(T, T') \longmapsto T \otimes T'$ es

bilineal por la Proposición 6.6 en la pag. 186 y

$$\mathcal{E}_{r,s}(V) \longrightarrow \mathcal{E}_{r-1,s-1}(V)$$

$$T \longmapsto C_i^j T$$

es lineal (ver Proposición 6.15, pag. 201) y que componiendo estas dos aplicaciones tenemos la del enunciado de la proposición.

Estudio particular de tensores covariantes: tensores simétricos, alternados y hemisimétricos. Matrices simétricas y antisimétricas.-

Algunos objetos geométricos que han sido tratados durante el Bachillerato son tensores sólo covariantes, es decir, tensores de tipo

(r,o) . Por ejemplo el "producto euclídeo ordinario" de \mathbb{R}^2 es un tensor $(2,0)$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ (ejemplo nº 4, pag. 176 con $K = \mathbb{R}$) o el "determinante" de una matriz real 2×2 , que puede considerarse como un tensor $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $((a,b), (c,d)) \mapsto a \cdot d - b \cdot c$, también de tipo $(2,0)$.

Obsérvese que estos dos tensores $(2,0)$ tienen propiedades que los distinguen cualitativamente. El primero de estos ejemplos cumple que los pares $((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ y $((b_1, b_2), (a_1, a_2))$ proporcionan el mismo número real $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$, pero estos mismos pares según el segundo tensor dan $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ y $b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1$, respectivamente, que son uno el opuesto del otro.

Estudiaremos ahora algunos tipos especiales de tensores covariantes, entre los que se encuentran los dos ejemplos precedentes. Empecemos por tensores de tipo $(2,0)$.

Proposición 6.19. — Sea $T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ y sea ${}^t T: V \times V \rightarrow K$ dado por ${}^t T(x,y) = T(y,x) \quad \forall x, y \in V$. Entonces ${}^t T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$.

Demostración .— En efecto,

$${}^t T(x+x', y) = T(y, x+x') = T(y, x) + T(y, x') = {}^t T(x, y) + {}^t T(x', y)$$

Análogamente

$${}^t T(x, y+y') = {}^t T(x, y) + {}^t T(x, y')$$

$${}^t T(a \cdot x, y) = T(y, a \cdot x) = T(a \cdot y, x) = {}^t T(x, a \cdot y) = a \cdot {}^t T(x, y).$$

Definición 6.20. — Al tensor ${}^t T$ definido a partir de cada $T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$, se le llama el tensor trasuesto de T .

En los ejemplos precedentes, tenemos que el primero de ellos coincide con su trasuesto y el segundo es el opuesto de este, son "simétrico" y "antisimétrico" en el sentido de la siguiente :

Definición 6.21. — Sea $T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ y ${}^t T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ su tensor trasuesto.

- (1) Si $T = {}^t T$, esto es, si $T(x,y) = T(y,x)$ se dirá que T es simétrico.
- (2) Si $T = -{}^t T$, esto es, si $T(x,y) = -T(y,x)$ se dirá que T es antisimétrico.

métrico o antisimétrico.

(3) Si $T(x,x) = 0 \quad \forall x \in V$ diremos que T es alternado.

Uno piensa que (2) y (3) son equivalentes y no es así, "depende de quién sea el cuerpo K ". En efecto,

Proposición 6.22.- Si T es alternado $\Rightarrow T$ es hemisimétrico.

Si T es hemisimétrico y $\text{carac}(K) \neq 2 \Rightarrow T$ es alternado.

Demostración.- Si $T(x,x) = 0 \quad \forall x \in V \Rightarrow T(x+y, x+y) = 0 \quad \forall x, y \in V$
pero $T(x+y, x+y) = T(x, x) + T(y, y) + T(x, y) + T(y, x)$ con lo que
 $\begin{matrix} " \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} " \\ 0 \end{matrix}$

$$T(x, y) = -T(y, x).$$

$$\text{Si } T(x, y) = -T(y, x) \Rightarrow T(x, x) = -T(x, x) \Rightarrow 2 \cdot T(x, x) = 0$$

Entonces si $2 \neq 0$ en K , es decir si $\text{carac}(K) \neq 2$ (ver Def. 2.21, pag. 62)
se tiene $T(x, x) = 0 \quad \forall x \in V$.

Sea $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ una base de V^* . Sabemos (ver pag. 190)
que $\{\varphi^i \otimes \varphi^j / i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ es una base de $\mathcal{E}_{2,0}(V)$. Para cada
 $T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ tenemos

$$T = \sum t_{ij} \varphi^i \otimes \varphi^j$$

Entonces se ve que

$$T \text{ es simétrico} \Leftrightarrow t_{ij} = t_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$T \text{ es hemisimétrico} \Leftrightarrow t_{ij} = -t_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$T \text{ es alternado} \Rightarrow t_{ii} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Nótese que si V fuese un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ resulta que $t_{ij} = -t_{ji} = t_{ji}$, de modo que en este caso no hay "distinción" entre tensores simétricos y hemisimétricos.

Proposición 6.23.- La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{2,0}(V) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{2,0}(V) \\ T & \longmapsto & t_T \end{array}$$

verifica

$$t(T + T') = t_T + t_{T'} ; \quad t(a \cdot T) = a \cdot t_T ; \quad t(t_T) = T$$

para cualesquiera $T, T' \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$, $\forall a \in K$. Es decir, es un autororfismo del espacio vectorial $\mathcal{E}_{2,0}(V)$, cuyo inverso es el mismo.

Demuéstrese como ejercicio.

Definición 6.24.- Si V es el espacio vectorial sobre K damos

$$S_2(V) = \{T \in \mathcal{E}_{2,0}(V) / T \text{ es simétrico}\}$$

$$H_2(V) = \{T \in \mathcal{E}_{2,0}(V) / T \text{ es hemisimétrico}\}$$

$$A_2(V) = \{T \in \mathcal{E}_{2,0}(V) / T \text{ es alternado}\}$$

Proposición 6.25.- $S_2(V)$, $H_2(V)$ y $A_2(V)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{E}_{2,0}(V)$.

Demostración.- $S_2(V) = \{T \in \mathcal{E}_{2,0}(V) / T = t_T\} = \text{Ker } F$ y

$H_2(V) = \{T \in \mathcal{E}_{2,0}(V) / T = -t_T\} = \text{Ker } G$ siendo

$F, G : \mathcal{E}_{2,0}(V) \rightarrow \mathcal{E}_{2,0}(V)$ las aplicaciones lineales dadas por

$$F(T) = T - t_T, \quad G(T) = T + t_T \quad (F = G \text{ si } \text{carac}(K) = 2).$$

Por otro lado, si $a, b \in K$, $T, T' \in A_2(V)$ tenemos

$$(a \cdot T + b \cdot T')(x, x) = a \cdot T(x, x) + b \cdot T'(x, x) = 0 + 0 = 0$$

con lo que $A_2(V)$ es también un subespacio vectorial de $\mathcal{E}_{2,0}(V)$.

Proposición 6.26.- Sea V un espacio vectorial sobre K , con $\text{carac}(K) \neq 2$, Entonces

$$\mathcal{E}_{2,0}(V) = S_2(V) \oplus A_2(V).$$

$$\text{Si } \dim_K V = n, \text{ entonces } \dim_K S_2(V) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{y } \dim_K A_2(V) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Demostración.- En efecto, si $T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ podemos poner

$$T = \frac{1}{2} (T + t_T) + \frac{1}{2} (T - t_T)$$

Como $T + t_T \in S_2(V)$, $T - t_T \in A_2(V)$ y esta descomposición es única, tenemos

$$\mathcal{E}_{2,0}(V) = S_2(V) \oplus A_2(V).$$

También se puede ver esto aplicando el resultado del problema 9 en la pag. 154 (en la notación de este problema $U = S_2(V)$, $W = A_2(V)$)

Sea la base de $\mathcal{G}_{2,0}(V)$, $\{\varphi^i \otimes \varphi^j / i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$

Vamos a ver que

$$\{\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i / i < j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{\varphi^i \otimes \varphi^i / i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

es una base de $S_2(V)$ y

$$\{\varphi^i \otimes \varphi^j - \varphi^j \otimes \varphi^i / i < j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

es una base de $A_2(V)$.

En primer lugar, aplicada la descomposición anterior al tensor $\varphi^i \otimes \varphi^j$ resulta

$$\varphi^i \otimes \varphi^j = \frac{1}{2}(\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i) + \frac{1}{2}(\varphi^i \otimes \varphi^j - \varphi^j \otimes \varphi^i)$$

así que

$$\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i \in S_2(V) \quad y \quad \varphi^i \otimes \varphi^j - \varphi^j \otimes \varphi^i \in A_2(V).$$

Sea $T \in S_2(V)$, entonces

$$T = \sum_{i,j} t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j = \sum_{i < j} t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j + \sum_{i > j} t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j + \sum_i t_{ii} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^i$$

Si además T es simétrico ocurre que $t_{ij} = t_{ji}$ y por tanto

$$T = \sum_{i < j} t_{ij} \cdot (\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i) + \sum_i t_{ii} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^i$$

o que prueba que

$$\{\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i / i < j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{\varphi^i \otimes \varphi^i / i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

es un sistema de generadores de $\mathcal{G}_{2,0}(V)$.

Si $\sum_{i < j} a_{ij} \cdot (\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i) + \sum_i a_{ii} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^i = T_0 = \text{tensor nulo}(2,0)$

sobre V entonces

$$\sum_{i < j} a_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j + \sum_{i > j} a_{ij} \cdot \varphi^j \otimes \varphi^i + \sum_i a_{ii} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^i = T_0$$

es decir

$$\sum_{i,j} a'_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j = T_0 \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} & \text{si } i < j \\ a'_{ii} &= a_{ii} \\ a'_{ji} &= a_{ji} & \text{si } i > j \end{aligned}$$

y como $\{\varphi^i \otimes \varphi^j / i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ es una base de $\mathcal{G}_{2,0}(V) \Rightarrow a_{ij} = 0$ para cualesquiera i, j .

Otra forma de ver la independencia lineal es tomar la base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V cuya dual es $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$. Entonces

$$\sum_{i < j} a_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j(x_k, x_\ell) + \sum_{i < j} a_{ij} \cdot \varphi^j \otimes \varphi^i(x_k, x_\ell) + \sum_i a_{ii} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^i(x_k, x_\ell) = 0$$

$$\sum_{i < j} a_{ij} \cdot \delta_k^i \cdot \delta_\ell^j + \sum_{i < j} a_{ij} \cdot \delta_k^j \cdot \delta_\ell^i + \sum_i a_{ii} \cdot \delta_k^i \cdot \delta_\ell^i = 0$$

Si $k < \ell \Rightarrow \delta_k^j \cdot \delta_\ell^i$ no puede ser = 1 ni $\delta_k^i \cdot \delta_\ell^i$ tampoco, y queda $a_{kk} = 0$, tomando ahora $k = \ell \Rightarrow a_{kk} = 0$.

$$\text{Así } \dim_{K_2}(V) = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Supongamos ahora que T es antisimétrico, entonces $-t_{ij} = t_{ji}$ $i \neq j$ y $t_{ii} = 0$. Así,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i < j} t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j + \sum_{i > j} t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j = \sum_{i < j} t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j + \sum_{i < j} t_{ji} \cdot \varphi^j \otimes \varphi^i = \\ &= \sum_{i < j} t_{ij} (\varphi^i \otimes \varphi^j - \varphi^j \otimes \varphi^i) \end{aligned}$$

con lo que

$$L(\{\varphi^i \otimes \varphi^j - \varphi^j \otimes \varphi^i / i < j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}) = A_2(V).$$

Si $\sum_{i < j} a_{ij} (\varphi^i \otimes \varphi^j - \varphi^j \otimes \varphi^i) = T_0$ = tensor nulo $(2,0)$ sobre V

uno obtiene $\sum_{i,j} a''_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j = T_0$ donde $a''_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ -a_{ji} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$

y por la independencia de esta base de $\mathcal{E}_{2,0}(V)$ se concluye.

De otra forma, tenemos

$$\sum_{i < j} a_{ij} \cdot (\varphi^i \otimes \varphi^j - \varphi^j \otimes \varphi^i)(x_k, x_\ell) = 0$$

$$\text{y si } k < \ell \Rightarrow \sum_{i < j} a_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j (x_k, x_\ell) = 0 \Rightarrow \sum_{i < j} a_{ij} \cdot \delta_k^i \cdot \delta_\ell^j = 0 \Rightarrow a_{k\ell} = 0$$

para cualesquiera k y ℓ .

$$\text{Así } \dim_K A_2(V) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Para dar una consecuencia de la proposición 6.26 necesitamos la siguiente :

Definición 6.27. — Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\text{carac}(K) \neq 2$,

Decimos que A es simétrica si $A = {}^t A$

Decimos que A es antisimétrica si $A = -{}^t A$.

En otras palabras A es simétrica si sus elementos son las coordenadas de un tensor simétrico $(2,0)$ sobre V , $\dim_K V = n$, respecto a una base ordenada obtenida de la base

$$\{\varphi^i \otimes \varphi^j / i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\} \text{ de } \mathcal{E}_{2,0}(V)$$

A es antisimétrica si sus elementos son las coordenadas de un tensor $(2,0)$ antisimétrico sobre V .

Como $\mathcal{E}_{2,0}(V)$ es isomorfo a $\mathcal{M}_n(K)$ mediante

$$T = \sum t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j \longleftrightarrow (t_{ij})_{n \times n}$$

y resulta que a $S_2(V)$ le corresponde por este isomorfismo

$$\mathcal{J}_n(K) = \{ A \in \mathcal{M}_n(K) / A = {}^t A \}$$

y a $A_2(V)$ le corresponde

$$\mathcal{A}_n(K) = \{ A \in \mathcal{M}_n(K) / A = -{}^t A \}.$$

(Nótese que si a T le corresponde A , al tensor ${}^t T$ le corresponde ${}^t A$)

Tenemos:

Proposición 6.28.- Sea $\mathcal{M}_n(K)$ el espacio vectorial de todas las matrices $n \times n$ sobre K , y sean $\mathcal{S}_n(K)$ y $\mathcal{A}_n(K)$ los subconjuntos de $\mathcal{M}_n(K)$ de matrices simétricas y antisimétricas. Entonces:

(1) $\mathcal{S}_n(K)$ y $\mathcal{A}_n(K)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n(K)$ con
 $\dim_K \mathcal{S}_n(K) = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\dim_K \mathcal{A}_n(K) = \frac{n(n-1)}{2}$

(2) $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S}_n(K) \oplus \mathcal{A}_n(K)$.

Obsérvese que (2) viene de que $A = \frac{1}{2}(A + {}^t A) + \frac{1}{2}(A - {}^t A)$ como en la Proposición 6.26, pag. 208.

Obsérvese también que si E_{ij} es la matriz de orden n que tiene 1 en la intersección de la fila i y columna j y todos los demás elementos nulos (ver pag. 132), podemos decir que:

$\{E_{ij} + E_{ji} / i < j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{E_{ii} / i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$
 es una base de $\mathcal{S}_n(K)$, y

$\{E_{ij} - E_{ji} / i < j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$

es una base de $\mathcal{A}_n(K)$, (compárese con pag. 209).

Pasemos ahora a tensores de tipo $(r, 0)$ sobre V .

Definición 6.29.- Sea $T \in \mathcal{E}_{r,0}(V)$ y sean $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $i < j$

(1) Decimos que T es simétrico respecto a las variables i -ésima y j -ésima si el tensor $(2,0)$ obtenido de T al fijar las $r-2$ variables restantes, es simétrico (en el sentido de la Proposición 6.24, pag. 208). Es decir, si

$$T(y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_r) = T(y_1, \dots, y_j, \dots, y_i, \dots, y_r)$$

(2) Decimos que T es hemisimétrico o antisimétrico respecto a las variables i -ésima y j -ésima si el tensor $(2,0)$ obtenido de T al fijar las $r-2$ variables restantes es antisimétrico (en el sentido de la Proposición 6.24, pag. 208). Es decir, si

$$T(y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_r) = -T(y_1, \dots, y_j, \dots, y_i, \dots, y_r)$$

(3) Decimos que T es alternado respecto a las variables i -ésima y j -ésima si el tensor $(2,0)$ obtenido de T al fijar las $r-2$ variables restantes, es alternado (en el sentido de la Proposición 6.24, pag. 208). Es decir, si

$$T(y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_r) = 0 \text{ siempre que } y_i = y_j.$$

Un tensor $T \in \mathcal{T}_{r,0}(V)$ se dice simétrico (o totalmente simétrico) si es simétrico respecto a cualquier par de variables.

Un tensor $T \in \mathcal{T}_{r,0}(V)$ se dice hemisimétrico (o totalmente hemisimétrico) si es hemisimétrico respecto a cualquier par de variables.

Un tensor $T \in \mathcal{T}_{r,0}(V)$ se dice alternado (o totalmente alternado) si es alternado respecto a cualquier par de variables.

Proposición 6.30.- Sea $T \in \mathcal{T}_{r,0}(V)$. Entonces T es simétrico si y sólo si

$$T(y_1, \dots, y_r) = T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \text{ para toda permutación } \sigma \text{ de } \{1, 2, \dots, r\};$$

y T es hemisimétrico si y sólo si

$$T(y_1, \dots, y_r) = (-1)^{[\sigma]} \cdot T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)})$$

siendo $(-1)^{[\sigma]}$ la signatura de la permutación σ (ver prob. 16, pag. 45).

Se probará como ejercicio.

Proposición 6.31.- Si T es alternado respecto a las variables i -ésima y j -ésima entonces T es hemisimétrico respecto a esas mismas variables.
Si T es hemisimétrico respecto a las variables i -ésima y j -ésima y $\text{carac}(K) \neq 2$, entonces T es alternado respecto a esas mismas variables.

La demostración se reduce, dado $T \in \mathcal{T}_{r,0}(V)$, a considerar el tensor de tipo $(2,0)$

$$(y_i, y_j) \longleftrightarrow T(y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_r)$$

(siendo $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_r$ $r-2$ vectores de V) y aplicar la Proposición 6.22, pag 207.

Corolario 6.32.- Si T es alternado entonces T también es hemisimétrico.

Si T es hemisimétrico y $\text{carac}(K) \neq 2$ entonces T es alternado.

A la hora de ver si un tensor concreto $T \in \mathcal{E}_{r,c}(V)$ es hemisimétrico o no, la proposición 6.30 nos da un criterio bastante laborioso que claramente se complica mucho si r es muy grande. Teniendo en cuenta el Corolario 6.32 podemos enunciar

Proposición 6.33.- Un tensor T de tipo (r,c) sobre $V(K)$, $\text{carac}(K) \neq 2$, es (totalmente) hemisimétrico si y sólo si es hemisimétrico respecto a índices contiguos.

La demostración se deduce del hecho de que si $i, j \in \{1, \dots, r\}$, $i < j$, entonces

$$T(y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_r) = (-1)^{j-i-1} \cdot T(y_1, \dots, y_i, y_j, y_{i+1}, \dots, y_r).$$

En lo sucesivo, supondremos que el cuerpo comunitativo K tiene $\text{carac}(K) \neq 2$, aunque esto no se dirá explicitamente en cada resultado.

Sean

$$S_r(V) = \left\{ T \in \mathcal{E}_{r,0}(V) / T \text{ es simétrico} \right\}$$

$$A_r(V) = \left\{ T \in \mathcal{E}_{r,c}(V) / T \text{ es hemisimétrico} \right\};$$

(a los elementos de $A_r(V)$ también se les llama formas multilínealess alternadas de orden r).

Entonces tenemos:

Proposición 6.34.- $S_r(V)$ y $A_r(V)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{E}_{r,c}(V)$.

Demostración.- Sean $T, T' \in S_r(V)$ entonces

$$\begin{aligned} (T + T')(y_1, \dots, y_r) &= T(y_1, \dots, y_r) + T'(y_1, \dots, y_r) = \\ &= T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) + T'(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) = \\ &= (T + T')(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \end{aligned}$$

$\forall y_1, \dots, y_r \in V$ y $\forall \sigma \in S_r$ (S_r representará el grupo de todas las permutaciones de $\{1, 2, \dots, r\}$). Por otro lado

$$(a \cdot T)(y_1, \dots, y_r) = a \cdot T(y_1, \dots, y_r) = a \cdot T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) = (a \cdot T)(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}).$$

con lo que $S_r(V)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{E}_{r,o}(V)$.

Sean ahora $T, T' \in A_r(V)$, entonces

$$\begin{aligned} (T+T')(y_1, \dots, y_r) &= T(y_1, \dots, y_r) + T'(y_1, \dots, y_r) = \\ &= (-1)^{[\sigma]} \cdot T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) + (-1)^{[\sigma]} \cdot T'(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) = \\ &= (-1)^{[\sigma]} \cdot (T+T')(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (a \cdot T)(y_1, \dots, y_r) &= a \cdot T(y_1, \dots, y_r) = (-1)^{[\sigma]} \cdot a \cdot T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) = \\ &= (-1)^{[\sigma]} \cdot (a \cdot T)(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \end{aligned}$$

$\forall y_1, \dots, y_r \in V$ y $\forall \sigma \in S_r$. Con lo que $A_r(V)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{E}_{r,o}(V)$ y ello acaba la demostración.

Cuando $r=2$ sabemos que $S_2(V) \oplus A_2(V) = \mathcal{E}_{2,0}(V)$. Este resultado no se puede generalizar a $\mathcal{E}_{r,o}(V)$ con $r>2$ (problema 14 en pag. 232).

Proposición 6.35. - Sea $B = (x_1, \dots, x_n)$ una base de V y sea $T \in \mathcal{E}_{r,o}(V)$ un tensor con coordenadas $t_{i_1, \dots, i_r} = T(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ respecto a una base ordenada de $\mathcal{E}_{r,o}(V)$ asociada a B (ver pag. 193-194). Entonces:

$$T \in S_r(V) \Leftrightarrow t_{i_1, \dots, i_r} = t_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}} \quad \forall \sigma \in S_r$$

$$T \in A_r(V) \Leftrightarrow t_{i_1, \dots, i_r} = (-1)^{[\sigma]} \cdot t_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}} \quad \forall \sigma \in S_r$$

Demostración.- Las dos implicaciones (\Rightarrow) salen como consecuencia de la Proposición 6.30, pag. 213. Las dos implicaciones (\Leftarrow) salen de observar que los dos tensores con iguales coordenadas en la misma base coinciden (unicidad de expresión de un vector en una base). Concretamente: si $\sigma \in S_r$ definimos σT por

$$\sigma T(y_1, \dots, y_r) = T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \quad \forall y_1, \dots, y_r \in V$$

Fijémosnos que si $r=2$ y $\sigma \in S_2$ dada por $\sigma(1)=2, \sigma(2)=1$ ocurre que $\sigma_T = t_T$ (ver pag. 206). Entonces $\sigma_T \in \mathcal{E}_{r,0}(V)$ (compruébese) y

$$\sigma_T(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = T(x_{i_{\sigma(1)}}, \dots, x_{i_{\sigma(r)}}) = t_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}}$$

$$\text{Si } t_{i_1, \dots, i_r} = t_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}} \Rightarrow T(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = \sigma_T(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$$

de modo que $T = \sigma_T$.

Supongamos ahora que $t_{i_1, \dots, i_r} = (-1)^{[\sigma]} \cdot t_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}}$

entonces $T(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = ((-1)^{[\sigma]} \cdot T)(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ y por tanto

$$T = (-1)^{[\sigma]} \cdot \sigma_T$$

es decir

$$T(y_1, \dots, y_r) = (-1)^{[\sigma]} \cdot T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \quad \forall \sigma \in S_r, \quad \forall y_1, \dots, y_r \in V.$$

Lo cual acaba la demostración.

Producto exterior de tensores hemisimétricos. Dimensión del espacio vectorial de tensores hemisimétricos: Aplicaciones.

Al principio de la lección estudiamos $\mathcal{E}_{1,1}(V)$ y vimos que mediante el producto tensorial de formas lineales y vectores, obteníamos una base de $\mathcal{E}_{1,1}(V)$ (ver pag. 182) y que generalizando este producto logramos una base de $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ (ver Teorema 6.7, pag. 188). Ahora vamos a analizar el estudio particular que hemos hecho para $A_2(V)$ y trataremos de generalizar introduciendo un nuevo "producto" entre tensores hemisimétricos.

En primer lugar, por definición, ponemos

$$A_0(V) = \mathcal{E}_{0,0}(V) = K \quad \text{y}$$

$$A_1(V) = \mathcal{E}_{1,0}(V) = V^*$$

¿Qué podemos decir de $A_r(V)$ con $r > 2$? Veamos que

Proposición 6.36. - $A_{n+k}(V) = \{T_0\}$ $\forall k \geq 1$ donde $n = \dim_K V$ y T_0 es el tensor nulo de tipo $(n+k, 0)$ sobre V .

Demostración.- Sea $T \in A_{n+k}(V)$ y $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base de V . entonces : $T(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}, x_{i_{n+1}}, \dots, x_{i_{n+k}}) = 0$ ya que alguno de los x_{i_j} debe estar repetido pues sólo hay n "distintos". Así que $T = T_0$.

De modo que los espacios de tensores alternados sobre V no triviales son

$$A_0(V), A_1(V), A_2(V), \dots, A_n(V).$$

Por otro lado (ver Proposición 6.26, pag. 208) si $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ es una base de V entonces

$$\{\varphi^i \otimes \varphi^j - \varphi^j \otimes \varphi^i / i < j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

es una base de $A_2(V)$.

Por tanto, $\dim_K A_2(V) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$. Pero $\dim_K A_0(V) = 1 = \binom{n}{0}$ y $\dim_K A_1(V) = \binom{n}{1} = n$. Así que ya nos imaginamos que ha de ser $\dim_K A_r(V) = \binom{n}{r}$.

Uno observa que si $\varPhi, \Psi \in A_1(V)$ definiendo $\varPhi \wedge \Psi = \varPhi \otimes \Psi - \Psi \otimes \varPhi$ resulta que $\varPhi \wedge \Psi \in A_2(V)$ (el producto tensorial $\varPhi \otimes \Psi$ es un tensor $(2,0)$ pero no es hemisimétrico).

Definición 6.37. - Dadas $\varPhi, \Psi \in A_1(V) = V^*$ al tensor hemisimétrico $\varPhi \wedge \Psi = \varPhi \otimes \Psi - \Psi \otimes \varPhi$ se le llama el producto exterior de \varPhi y Ψ .

Al la vista de esta definición resulta que la base de $A_2(V)$ mencionada anteriormente se escribe

$$\{\varPhi^i \wedge \varPhi^j / i < j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Si generalizamos esta definición para tensores hemisimétricos de mayor orden, uno se imagina cómo sería una base de $A_r(V)$.

Escribimos

$$(\varPhi \wedge \Psi)(y_1, y_2) = \varPhi(y_1) \cdot \Psi(y_2) - \varPhi(y_2) \cdot \Psi(y_1)$$

lo que nos sugiere que si $\varphi \in A_1(V)$ y $T \in A_r(V)$ pongamos

$$(\varphi \wedge T)(y_1, y_2, \dots, y_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \varphi(y_i) \cdot T(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{r+1})$$

Es fácil ver que si $\varphi \in A_1(V)$ y $T \in A_r(V)$ entonces $\varphi \wedge T \in \mathcal{E}_{r+1,0}(V)$.

Además si $y_j = y_{j+1}$ tenemos

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge T)(y_1, \dots, y_j, y_{j+1}, \dots, y_{r+1}) &= (-1)^{j-1} \varphi(y_j) \cdot T(y_1, \dots, y_{j+1}, \dots, y_{r+1}) + \\ &+ (-1)^j \varphi(y_{j+1}) \cdot T(y_1, \dots, y_j, \dots, y_{r+1}) = 0 \end{aligned}$$

ya que los demás sumandos son cero por ser $T \in A_r(V)$ y de estos dos uno es el opuesto del otro. Por la Proposición 6.33, $\varphi \wedge T \in A_r(V)$.

Definición 6.38.— Dados $\varphi \in A_1(V) = V^*$ y $T \in A_r(V)$ al tensor hemisimétrico $\varphi \wedge T$ definido por

$$(\varphi \wedge T)(y_1, y_2, \dots, y_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \varphi(y_i) \cdot T(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{r+1})$$

se le llama el producto exterior de φ y T .

Claramente esta fórmula contiene al caso $r=1$.

Para generalizar, obsérvese que en esta fórmula $(-1)^{i-1}$ es la signatura de la permutación $\sigma : \{1, 2, \dots, r+1\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, r+1\}$ definida por

$$\sigma(k) = k-1 \quad \text{si} \quad 2 \leq k \leq i$$

$$\sigma(1) = i$$

$$\sigma(j) = j \quad \text{si} \quad i+1 \leq j \leq r+1$$

Además vemos que esta σ verifica $\sigma(j) < \sigma(j+1)$ para $j \in \{2, \dots, r+1\}$

De modo que para $T \in A_r(V)$ y $T' \in A_s(V)$ ponemos

$$(T \wedge T')(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \widetilde{G}_{r,s}} (-1)^{[\sigma]} \cdot T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \cdot T^1(y_{\sigma(r+1)}, \dots, y_{\sigma(r+s)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \widetilde{G}_{r,s}} (-1)^{[\sigma]} \cdot (T \otimes T^1)(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}, y_{\sigma(r+1)}, \dots, y_{\sigma(r+s)})$$

donde $\widetilde{G}_{r,s} = \{\sigma \in S_{r+s} / \sigma(1) < \dots < \sigma(r); \sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s)\}$

(que no es un subgrupo de S_{r+s}). Claramente generalizamos los casos anteriores.

Observemos que también podemos poner

$$T \wedge T^1 = \sum_{\sigma \in \widetilde{G}_{r,s}} (-1)^{[\sigma]} \cdot \tilde{\sigma}(T \otimes T^1)$$

donde $\tilde{\sigma}(T \otimes T^1)$ es el tensor $(r+s, o)$ definido por

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(T \otimes T^1)(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) &= \\ &= (T \otimes T^1)(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}, y_{\sigma(r+1)}, \dots, y_{\sigma(r+s)}) = \\ &= T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}).T^1(y_{\sigma(r+1)}, \dots, y_{\sigma(r+s)}) \end{aligned}$$

De esta forma, o bien directamente, se ve que $T \wedge T^1 \in \widetilde{G}_{r+s, o}(V)$. Por ejemplo, si $r=s=2$

$$\begin{aligned} (T \wedge T^1)(y_1, y_2, y_3, y_4) &= T(y_1, y_2).T^1(y_3, y_4) - T(y_1, y_3).T^1(y_2, y_4) + \\ &+ T(y_1, y_4).T^1(y_2, y_3) + T(y_2, y_3).T^1(y_1, y_4) - \\ &- T(y_2, y_4).T^1(y_1, y_3) + T(y_3, y_4).T^1(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Haciendo $y_i = y_{i+1}$ $i=1, 2, 3$ veríamos que

$$(T \wedge T^1)(\dots, y_i, y_{i+1}, \dots) = 0.$$

Por ejemplo si $y_1 = y_3$

$$\begin{aligned}
 (\tau \wedge \tau')(y_1, y_2, y_3, y_4) &= \tau(y_1, y_2) \cdot \tau'(y_1, y_4) - \tau(y_1, y_1) \cdot \tau'(y_2, y_4) + \\
 &\quad + \tau(y_1, y_4) \cdot \tau'(y_2, y_1) + \tau(y_2, y_1) \cdot \tau'(y_1, y_4) - \\
 &\quad - \tau(y_2, y_4) \cdot \tau'(y_1, y_1) + \tau(y_1, y_4) \cdot \tau'(y_1, y_2) = 0
 \end{aligned}$$

Así se probaría en general que

$$\tau \wedge \tau' \in A_{r+s}(v).$$

Uno observa en este ejemplo que

$$\sum_{\substack{\tau \in S \\ r+s}} (-1)^{[\tau]} \cdot \tau(y_{\tau(1)}, y_{\tau(2)}) \cdot \tau'(y_{\tau(3)}, y_{\tau(4)}) = 2!2!(\tau \wedge \tau')(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

En efecto en el sumando de la izquierda aparece

$$\tau(y_1, y_2) \cdot \tau'(y_3, y_4)$$

y tres sumandos más que se obtienen al permutar y_1 e y_2 por un lado y también y_3 e y_4 por otro, de modo que cada permutación estricta de (y_1, y_2) , (y_3, y_4) viene de cuatro sumandos del tipo

$$\begin{aligned}
 &\tau(y_1, y_2) \cdot \tau'(y_3, y_4) - \tau(y_2, y_1) \cdot \tau'(y_3, y_4) + \tau(y_2, y_1) \cdot \tau'(y_4, y_3) - \tau(y_1, y_2) \cdot \tau'(y_4, y_3) = \\
 &= 4\tau(y_1, y_2) \cdot \tau'(y_3, y_4) = 2!2!\tau(y_1, y_2) \cdot \tau'(y_3, y_4)
 \end{aligned}$$

Como esto se puede hacer con todos los sumandos del miembro izquierdo de la fórmula anterior, el agruparlos de cuatro en cuatro demuestra lo allí puesto.

Así se obtiene (compruébese)

$$\begin{aligned}
 &(\tau \wedge \tau')(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) = \\
 &= \frac{1}{r!} \cdot \frac{1}{s!} \sum_{\substack{\tau \in S \\ r+s}} (-1)^{[\tau]} \cdot \tau(y_{\tau(1)}, \dots, y_{\tau(r)}) \cdot \tau'(y_{\tau(r+1)}, \dots, y_{\tau(r+s)})
 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Proposición 6.39. - Si}} \quad T \in A_r(V) \quad \Rightarrow \quad T \wedge T' \in A_{r+s}(V).$$

$$T' \in A_s(V)$$

Demostración.- Sea $\alpha \in S_{r+s}$. Entonces

$$(T \wedge T')(y_{\alpha(1)}, \dots, y_{\alpha(r)}, y_{\alpha(r+1)}, \dots, y_{\alpha(r+s)}) =$$

$$= \frac{1}{r!} \cdot \frac{1}{s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} (-1)^{[\tau]} \cdot T(y_{\tau \circ \alpha(1)}, \dots, y_{\tau \circ \alpha(r)}) \cdot T'(y_{\tau \circ \alpha(r+1)}, \dots, y_{\tau \circ \alpha(r+s)}) =$$

$$= \frac{1}{r!} \cdot \frac{1}{s!} \sum_{\gamma \in S_{r+s}} (-1)^{[\gamma]} \cdot (-1)^{[\alpha]} \cdot T(y_{\gamma(1)}, \dots, y_{\gamma(r)}) \cdot T'(y_{\gamma(r+1)}, \dots, y_{\gamma(r+s)})$$

donde $\gamma = \tau \circ \alpha$ es cualquier permutación de $r+s$ elementos. Así

$$(T \wedge T')(y_{\alpha(1)}, \dots, y_{\alpha(r+s)}) = (-1)^{[\alpha]} \cdot (T \wedge T')(y_1, \dots, y_{r+s})$$

y por tanto

$$T \wedge T' \in A_{r+s}(V).$$

Definición 6.40.- Dados dos tensores hémisimétricos $T \in A_r(V)$ y $T' \in A_s(V)$ al tensor hémisimétrico $T \wedge T' \in A_{r+s}(V)$ se le llama el producto exterior de T y T' .

Proposición 6.41.- Sean $T, T_1, T_2 \in A_r(V)$, $T', T'_1, T'_2 \in A_s(V)$, $T'' \in A_p(V)$ y $a \in K$. Se cumple:

$$(1) \quad (T \wedge T') \wedge T'' = T \wedge (T' \wedge T'')$$

$$(2) \quad T \wedge (T'_1 + T'_2) = T \wedge T'_1 + T \wedge T'_2$$

$$(3) \quad (T_1 + T_2) \wedge T' = T_1 \wedge T' + T_2 \wedge T'$$

$$(4) \quad (a \cdot T) \wedge T' = T \wedge (a \cdot T') = a \cdot (T \wedge T')$$

$$(5) \quad T \wedge T' = (-1)^{rs} T' \wedge T$$

Demostración.- La propiedad (1) nos dice que el producto exterior es asociativo y no la probaremos (se puede hacer como un largo ejercicio).

Probaremos en primer lugar (5). En efecto,

$$(\tau \wedge \tau^1)(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{r,s}} (-1)^{[\sigma]} \cdot \tau(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \cdot \tau^1(y_{\sigma(r+1)}, \dots, y_{\sigma(r+s)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{r,s}} (-1)^{[\sigma]} \cdot \tau^1(y_{\sigma \circ \tau(1)}, \dots, y_{\sigma \circ \tau(s)}) \cdot \tau(y_{\sigma \circ \tau(s+1)}, \dots, y_{\sigma \circ \tau(r+s)})$$

donde τ es la permutación de $\{1, 2, \dots, r+s\}$ dada por

$$\tau(i) = r+i \quad 1 \leq i \leq s$$

$$\tau(s+j) = j \quad 1 \leq j \leq r$$

Entonces:

$$(\tau \wedge \tau^1)(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{r,s}} (-1)^{[\sigma]} \cdot \tau^1(y_{\sigma \circ \tau(1)}, \dots, y_{\sigma \circ \tau(s)}) \cdot \tau(y_{\sigma \circ \tau(s+1)}, \dots, y_{\sigma \circ \tau(s+r)}) =$$

$$= (\tau^1 \wedge \tau)(y_{\tau(1)}, \dots, y_{\tau(s)}, y_{\tau(s+1)}, \dots, y_{\tau(s+r)})$$

Como $\tau^1 \wedge \tau \in A_{r+s}(V)$ y la signatura de τ es $(-1)^{r+s}$ se tiene

$$(\tau \wedge \tau^1)(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) = (-1)^{r+s} (\tau^1 \wedge \tau)(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}).$$

Probemos ahora (2) :

$$[(\tau \wedge (\tau_1^1 + \tau_2^1))] (y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{r,s}} (-1)^{[\sigma]} \cdot \tau(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \cdot (\tau_1^1 + \tau_2^1)(y_{\sigma(r+1)}, \dots, y_{\sigma(r+s)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{r,s}} (-1)^{[\sigma]} \cdot \tau(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \cdot \tau_1^1(y_{\sigma(r+1)}, \dots, y_{\sigma(r+s)}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\sigma \in \overline{\mathcal{G}_{r,s}}} (-1)^{[\sigma]} \cdot T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \cdot T'(y_{\sigma(r+1)}, \dots, y_{\sigma(r+s)}) = \\
& = (T \wedge T'_1)(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) + (T \wedge T'_2)(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) = \\
& = (T \wedge T'_1 + T \wedge T'_2)(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}).
\end{aligned}$$

A partir de (2) y (5) probamos (3):

$$\begin{aligned}
(T_1 + T_2) \wedge T' &= (-1)^{r+s} T'_1 \wedge (T_1 + T_2) = (-1)^{r+s} T'_1 \wedge T_1 + (-1)^{r+s} T'_1 \wedge T_2 = \\
&= T_1 \wedge T' + T_2 \wedge T'.
\end{aligned}$$

Por último, veamos que

$$(a \cdot T) \wedge T' = a \cdot T \wedge T'$$

y a que por (5), si esta fórmula está demostrada tenemos

$$T \wedge (a \cdot T') = (-1)^{r+s} (a \cdot T) \wedge T' = a \cdot (-1)^{r+s} T'_1 \wedge T = a \cdot T \wedge T'.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
& ((a \cdot T) \wedge T')(y_1, y_2, \dots, y_{r+s}) = \\
& = \sum_{\sigma \in \overline{\mathcal{G}_{r,s}}} (-1)^{[\sigma]} \cdot (a \cdot T)(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \cdot T'(y_{\sigma(r+1)}, \dots, y_{\sigma(r+s)}) = \\
& = a \left(\sum_{\sigma \in \overline{\mathcal{G}_{r,s}}} (-1)^{[\sigma]} \cdot T(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)}) \cdot T'(y_{\sigma(r+1)}, \dots, y_{\sigma(r+s)}) \right) = \\
& = a \cdot (T \wedge T')(y_1, y_2, \dots, y_{r+s}).
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración de la Proposición 6.41.

Obsérvese que las propiedades (2), (3) y (4) de la anterior Proposición, lo que nos dicen es que la aplicación

$$\begin{array}{ccc}
A_r(V) \times A_s(V) & \longrightarrow & A_{r+s}(V) \\
(T, T') & \longmapsto & T \wedge T'
\end{array}$$

es bilineal.

La propiedad (5) afirma que el producto exterior es "comutativo" o "anticomutativo" dependiendo de que el producto r.s sea par o impar respectivamente, (nótese que tal consideración no es posible para el producto tensorial). En particular, si $\Psi, \Psi \in A_1(V)$ se tiene por (5), $\Psi \wedge \Psi = -\Psi \wedge \Psi$ (fórmula que ya sabíamos de la Definición 6.37 pag. 217).

Vamos ahora a considerar productos exteriores de varias formas lineales:

Sean $\psi^1, \psi^2, \psi^3 \in A_1(V)$. Vamos a calcular $\psi^1 \wedge \psi^2 \wedge \psi^3$

$$\begin{aligned}
 (\psi^1 \wedge \psi^2 \wedge \psi^3)(y_1, y_2, y_3) &= (\psi^1 \wedge (\psi^2 \wedge \psi^3))(y_1, y_2, y_3) = \\
 &= \psi^1(y_1) \cdot \psi^2 \wedge \psi^3(y_2, y_3) - \psi^1(y_2) \cdot \psi^2 \wedge \psi^3(y_1, y_3) + \psi^1(y_3) \cdot \psi^2 \wedge \psi^3(y_1, y_2) = \\
 &= \psi^1(y_1) \cdot \psi^2(y_2) \cdot \psi^3(y_3) - \psi^1(y_1) \cdot \psi^2(y_3) \cdot \psi^3(y_2) - \psi^1(y_2) \cdot \psi^2(y_1) \cdot \psi^3(y_3) + \\
 &\quad + \psi^1(y_2) \cdot \psi^2(y_3) \cdot \psi^3(y_1) + \psi^1(y_3) \cdot \psi^2(y_1) \cdot \psi^3(y_2) - \psi^1(y_3) \cdot \psi^2(y_2) \cdot \psi^3(y_1) = \\
 &= \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{[\sigma]} \cdot \psi^{\sigma(1)}(y_1) \cdot \psi^{\sigma(2)}(y_2) \cdot \psi^{\sigma(3)}(y_3) = \\
 &= \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{[\sigma]} \cdot \psi^1(y_{\sigma(1)}) \cdot \psi^2(y_{\sigma(2)}) \cdot \psi^3(y_{\sigma(3)}) .
 \end{aligned}$$

Este resultado se generaliza en la siguiente

Proposición 6.42.- Sean $\psi^1, \dots, \psi^r \in A_1(V)$ y sean $y_1, \dots, y_r \in V$. Entonces

$$\begin{aligned}
 (\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^r)(y_1, \dots, y_r) &= \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{[\sigma]} \cdot \psi^{\sigma(1)}(y_1) \dots \psi^{\sigma(r)}(y_r) = \\
 &= \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{[\sigma]} \cdot \psi^1(y_{\sigma(1)}) \dots \psi^r(y_{\sigma(r)})
 \end{aligned}$$

Demostración.- Está claro que si se tiene la primera igualdad, también se tiene la segunda. En efecto, en

$$\sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{[\sigma]} \cdot \psi^{\sigma(1)}(y_1) \dots \psi^{\sigma(r)}(y_r)$$

los índices de las formas son las imágenes de cada σ y los de los vectores, los elementos del dominio de σ . Ahora bien estos papeles se pueden cambiar y entonces cada sumando $\psi^{\sigma(1)}(y_1) \dots \psi^{\sigma(r)}(y_r)$ origina uno único del tipo $\psi^1(y_{\sigma^{-1}(1)}) \dots \psi^r(y_{\sigma^{-1}(r)})$ y como la signatura de σ y de σ^{-1} es la misma (ver prob. 16 y 17, pag. 45), se concluye.

Supongamos por inducción que se tiene

$$(\psi^2 \wedge \dots \wedge \psi^r)(y_2, \dots, y_r) = \sum_{\tau \in S_{r-1}} (-1)^{[\tau]} \cdot \psi^2(y_{\tau(2)}) \dots \psi^r(y_{\tau(r)})$$

entonces

$$(\psi^1 \wedge \psi^2 \wedge \dots \wedge \psi^r)(y_1, y_2, \dots, y_r) = (\psi^1 \wedge (\psi^2 \wedge \dots \wedge \psi^r))(y_1, y_2, \dots, y_r) =$$

$$= \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \cdot \psi^1(y_i) \cdot (\psi^2 \wedge \dots \wedge \psi^r)(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_r) = \\ = \sum_{\substack{i=1 \\ \tau \in S_{r-1}^{(i)}}}^r (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{[\tau]} \cdot \psi^1(y_i) \cdot \psi^2(y_{\tau(1)}) \dots \psi^i(y_{\tau(i-1)}).$$

$$\cdot \psi^{i+1}(y_{\tau(i+1)}) \dots \psi^r(y_{\tau(r)})$$

donde $S_{r-1}^{(i)}$ es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, r\}$. Ahora bien $i-1$ es el número de inversiones (ver prob. 16, pag. 45) de la permutación

$$\sigma_i : \{1, 2, \dots, r\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, r\} \text{ dada por} \quad \begin{aligned} \sigma_i(1) &= i \\ \sigma_i(k) &= k-1 \quad 2 \leq k \leq i \\ \sigma_i(j) &= j \quad i+1 \leq j \leq r \end{aligned}$$

Está claro que cada $\tau \in S_r^{(i)}$ se extiende a una única $\tilde{\tau} \in S_r$ poniendo $\tilde{\tau}(i) = i$ y $\tilde{\tau}(j) = \tau(j)$ para $j \neq i$. Así

$$\begin{aligned}
 & (\psi^1 \wedge \psi^2 \wedge \dots \wedge \psi^r)(y_1, y_2, \dots, y_r) = \\
 & = \sum_{\substack{i=1 \\ \tau \in S_r^{(i)}}} (-1)^{[\tau \circ \sigma_i]} \cdot \psi^1(y_{\tau \circ \sigma_i(1)}) \dots \psi^i(y_{\tau \circ \sigma_i(i)}) \cdot \\
 & \quad \cdot \psi^{i+1}(y_{\tau \circ \sigma_i(i+1)}) \dots \psi^r(y_{\tau \circ \sigma_i(r)}).
 \end{aligned}$$

Lo único que hay ahora que observar es que toda $\sigma \in S_r$ se pone como $\sigma = \tau \circ \sigma_i$, para algún i , de forma única y esto acaba la demostración.

Observese que el resultado de la Proposición 6.42, se puede expresar

$$\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^r = \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{[\sigma]} \cdot \psi^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi^{\sigma(r)}$$

para cualquiera $\psi^1, \dots, \psi^r \in A_1(V) = V^*$.

En particular, si $\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una base de $V(K)$ y $\beta^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\}$ su dual en $V^*(K)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_r}(x_{k_1}, \dots, x_{k_r}) &= \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{[\sigma]} \cdot \delta_{k_1 \sigma(1)}^{i_1} \dots \delta_{k_r \sigma(r)}^{i_r} = \\
 &= \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{[\sigma]} \cdot \delta_{k_1}^{i_{\sigma(1)}} \dots \delta_{k_r}^{i_{\sigma(r)}}
 \end{aligned}$$

Si $i_1 < \dots < i_r$ y $k_1 < \dots < k_r$ resulta

$$\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_r}(x_{k_1}, \dots, x_{k_r}) = \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_r}^{i_r}$$

ya que la única permutación "estricta" es la identidad.

Ya estamos en condiciones de dar el siguiente:

Teorema 6.43.- Sea $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ una base de $A_1(V) = V^*$. Entonces
 $\{\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_r} / i_1 < \dots < i_r\}$

es una base de $A_r(V)$. Por tanto $\dim_K A_r(V) = \binom{n}{r}$, siendo $n = \dim_K V$.

Demostración.- Si $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ es la base de V cuya dual es $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ (ver Corolario 5.6, pag. 164) de

$$\sum_{i_1 < \dots < i_r} a_{i_1, \dots, i_r} \cdot \varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_r} = T_0 \quad \text{tenemos}$$

$$\sum_{i_1 < \dots < i_r} a_{i_1, \dots, i_r} (\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_r})(x_{k_1}, \dots, x_{k_r}) = 0$$

en donde tomando $k_1 < \dots < k_r$ resulta $a_{k_1, \dots, k_r} = 0$, lo que prueba la independencia lineal.

Sea ahora $T \in A_r(V)$. De acuerdo con el Teorema 6.7, pag. 188, podemos poner

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_r} t_{i_1, \dots, i_r} \cdot \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_r}$$

con $t_{i_1, \dots, i_r} = T(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$.

Como T es hemisimétrico ocurre $t_{i_1, \dots, i_r} = (-1)^{[\sigma]} \cdot t_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}}$ $\forall \sigma \in S_r$. Entonces, si agrupamos en la anterior expresión de T para cada lista $i_1 < \dots < i_r$ todos los sumandos con estos mismos índices en el orden que sea (hay de ellos $r!$) tenemos :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} \sum_{\sigma \in S_r} t_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}} \cdot \varphi^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_{\sigma(r)}} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} \sum_{\sigma \in S_r} t_{i_1, \dots, i_r} \cdot (-1)^{[\sigma]} \varphi^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_{\sigma(r)}} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} t_{i_1, \dots, i_r} \cdot \varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_r}. \end{aligned}$$

Así se prueba que $\{\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_r} / i_1 < \dots < i_r\}$ genera a $A_r(V)$ y con ello el Teorema.

Nótese que esta demostración generaliza la que hicimos anteriormente para $r=2$ en la Proposición 6.25, pag. 208.

Observamos que por una propiedad conocida de los números combinatorios se tiene

$$\dim_K A_r(V) = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \dim_K A_{n-r}(V)$$

por tanto $A_r(V)$ y $A_{n-r}(V)$ son isomorfos. Además si $\dim_K V = n$ entonces $\dim_K A_n(V) = 1$.

Vamos a dar ahora algunas consecuencias del Teorema 6.43.

Corolario 6.44.- Sean $\psi^1, \dots, \psi^r \in A_1(V) = V^*$. Entonces

(1) $\{\psi^1, \dots, \psi^r\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^r \neq T_0$ en $A_r(V)$.

(2) Si $\dim_K V = r$, $\{\psi^1, \dots, \psi^r\}$ es una base de $A_1(V) = V^*$ si y sólo si $\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^r \neq T_0$ en $A_r(V)$.

Demcstración.- Está claro que (2) se obtiene de (1) utilizando la Proposición 3.40, pag. 96. Probemos entonces (1).

Si $\{\psi^1, \dots, \psi^r\}$ es linealmente independiente por el teorema de ampliacicón de la base (Teorema 3.39, pag. 96) encontramos $\psi^{r+1}, \dots, \psi^n \in A_1(V)$ tales que $\{\psi^1, \dots, \psi^r, \psi^{r+1}, \dots, \psi^n\}$ es una base de $A_1(V)$. Según el Teorema 6.43 resulta que $\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^r$ es un vector de una base de $A_r(V)$ y por tanto es no nulo.

Recíprocamente, supongamos que $\{\psi^1, \dots, \psi^r\}$ sea linealmente dependiente y que, por ejemplo,

$$\psi^r = \sum_{j=1}^{r-1} a_j \cdot \psi^j$$

entonces

$$\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^{r-1} \wedge \psi^r = \sum_{j=1}^{r-1} a_j \cdot \psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^{r-1} \wedge \psi^j$$

y como cada uno de estos sumandos es nulo (ver Proposición 6.41,(5), pag. 221) resulta $\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^r = T_0$.

Corolario 6.45.- Para cada base ordenada $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de V existe un único $T_B \in A_n(V)$, ($T_B \neq T_0$) tal que $T_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$.

Demostración.- Tomemos $T_B = \Psi^1 \wedge \dots \wedge \Psi^n$ donde (Ψ^1, \dots, Ψ^n) es la base ordenada dual de B . Entonces (ver Proposición 6.42, pag. 224)

$T_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$. Si $T \in A_n(V)$ verifica $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ como

$T = a \cdot \Psi^1 \wedge \dots \wedge \Psi^n$, $a \in K$, por ser $\Psi^1 \wedge \dots \wedge \Psi^n$ una base de $A_n(V)$ entonces $a = 1$ lo que implica que $T = \Psi^1 \wedge \dots \wedge \Psi^n = T_B$.

El desarrollo precedente se puede hacer también para tensores contravariantes sobre un espacio vectorial $V(K)$. En efecto, un tensor contravariante sobre V es un tensor covariante sobre V^* y de ello resulta que todo lo dicho anteriormente se traslada a tensores contravariantes sin más. Así, por ejemplo, se puede definir el producto exterior de dos vectores x e y de V por

$$(x \wedge y)(\Psi, \Psi) = \Psi(x) \cdot \Psi(y) - \Psi(x) \cdot \Psi(y)$$

es decir

$$(x \wedge y)(\Psi, \Psi) = (\Psi \wedge \Psi)(x, y).$$

Más generalmente, si $y_1, y_2, \dots, y_r \in V$ entonces

$$y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_r = \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{[\sigma]} \cdot y_{\sigma(1)} \otimes y_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes y_{\sigma(r)}.$$

PROBLEMAS

1.- Sean V , W y U espacios vectoriales sobre el cuerpo K , $\text{carac}(K) \neq 2$.

Demostrar que la única aplicación $T : V \times W \rightarrow U$ que es a la vez lineal y bilineal, es la aplicación nula, es decir, la que cumple $T(x, x') = 0 \quad \forall x \in V, \quad \forall x' \in W$.

2.- Sean V_1, \dots, V_r , \mathbb{W} espacios vectoriales sobre K . Probar que el conjunto de todas las aplicaciones multilineales de $V_1 \times \dots \times V_r$ en \mathbb{W} , $\text{Multi}_K(V_1 \times \dots \times V_r, \mathbb{W})$ es un espacio vectorial sobre K cuando se le dota de una suma y un producto por escalares como en el Teorema 6.3, pag. 179.

3.- Sean V_1, V_2, V y V' espacios vectoriales sobre K , $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ y $T \in \text{Multi}_K(V_1 \times V_2, V)$. Demostrar que la composición $f \circ T$ es una aplicación multilineal de $V_1 \times V_2$ en V' .

4.- Sea $T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ y sea $f \in \text{End}_K V$. Probar que la aplicación $V \times V \rightarrow K$ dada por $(x, y) \mapsto T(f(x), f(y))$ es un tensor de tipo $(2,0)$ sobre V .

5.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y sea $T_A : K^n \times K^n \rightarrow K$ definida por $T_A(x, y) = {}^t x \cdot A \cdot y$ (como en el ejemplo 5, pag. 176) donde x e y son vectores de K^n representados por matrices $n \times 1$. Probar que $T_A \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ y que si $T_A = \sum t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j$ donde $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ es la base dual de la usual $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $K^n(K)$ entonces $t_{ij} = a_{ij}$ siendo $A = (a_{ij})$. En el caso particular $K = \mathbb{R}$ y $n=3$ obtener las coordenadas de T_A donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ respecto a } (\varphi^1 \otimes \varphi^1, \varphi^1 \otimes \varphi^2, \varphi^1 \otimes \varphi^3, \dots, \varphi^3 \otimes \varphi^1, \varphi^3 \otimes \varphi^2, \varphi^3 \otimes \varphi^3)$$

donde $\{x'_1 = e_1, x'_2 = e_1 + e_2, x'_3 = e_1 + e_2 + e_3\}$, que es una base de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, y $\{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ es su dual. Calcular tambien expresiones de $T_A \otimes x$ y $\mathcal{E}_2^1(T_A \otimes x)$ siendo $x = 2 \cdot e_1 - 3 \cdot e_2 + e_3$.

6.- Sea $V(K)$ y sean $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq \varphi_0$, $x \in V$, $x \neq 0$. Demostrar que si $\varphi(x) = 1$ es posible encontrar una base de $\mathcal{E}_{1,1}(V)$ $\{\varphi^j \otimes x_i / i, j \in \{1, \dots, n\}\}$, $n = \dim_K V$, con $\varphi^1 \otimes x_1 = \varphi \otimes x$. Si ocurre $\varphi(x) = 0$ y $n > 2$ es posible encontrar tal base con $\varphi^1 \otimes x_2 = \varphi \otimes x$?

7.- Sea $T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ y sean $x, y \in V$ fijos. Se considera la aplicación $f : V \rightarrow V$ definida por $f(z) = T(x, y) \cdot z \quad \forall z \in V$. Probar que f es lineal y que $\text{traza}(f) = n \cdot T(x, y)$ siendo $n = \dim_K V$. Se considera ahora $f' : V \rightarrow V$ definida por $f'(z) = T(x, z) \cdot y$. Probar que f' es lineal y que $\text{rango}(f') \leq 1$. Demostrar tambien que $\text{traza}(f') = T(x, y)$.

8.- Sean $V(K)$ un espacio vectorial y $V^*(K)$ su espacio dual. Comprobar que $\mathcal{E}_{s,0}(V^*) = \mathcal{E}_{0,s}(V)$. Para cada $T \in \mathcal{E}_{0,r}(V^*)$ se pone $\tilde{T}: Vx..xV \rightarrow K$ definido por $\tilde{T}(x_1, \dots, x_r) = T(\Phi_{x_1}, \dots, \Phi_{x_r})$ donde $\Phi: V \rightarrow V^{**}$ es el isomorfismo que se establece en el Teorema de Reflexividad (Teorema 5.5, pag. 163). Probar que $\tilde{T} \in \mathcal{E}_{r,0}(V)$ para cada $T \in \mathcal{E}_{0,r}(V^*)$ y que la aplicación $T \mapsto \tilde{T}$ de $\mathcal{E}_{0,r}(V^*)$ en $\mathcal{E}_{r,0}(V)$ es un isomorfismo. Generalizar para demostrar que $\mathcal{E}_{s,r}(V^*)$ y $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ son isomorfos de manera natural.

9.- Se considera $V(K)$ y $\mathcal{E}_{2,1}(V)$. Sea $\text{Multi}_K(VxV, V)$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones bilineales de VxV en V (ver prob. 2 pag. 230). Para cada $f \in \text{Multi}_K(VxV, V)$ se define $T_f: VxVxV^* \rightarrow K$ mediante $T_f(x, y, \varphi) = \varphi(f(x, y))$. Probar que $T_f \in \mathcal{E}_{2,1}(V)$ y que la aplicación $f \mapsto T_f$ de $\text{Multi}_K(VxV, V)$ en $\mathcal{E}_{2,1}(V)$ es un isomorfismo, (compárese con el Teorema 6.4, pag. 184). Generalizar para demostrar que $\text{Multi}_K(Vx...xV, V)$ y $\mathcal{E}_{r,1}(V)$ son isomorfos de manera natural.

10.- Para cada $f \in \text{Hom}_K(V, V^*)$ definimos $T_f: VxV \rightarrow K$ por $T_f(x, y) = (f(x))(y)$ (nótese que $f(x) \in V^*$ y por tanto tiene sentido $f(x)(y)$). Demostrar que $T_f \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ y que la aplicación $f \mapsto T_f$ de $\text{Hom}_K(V, V^*)$ en $\mathcal{E}_{2,0}(V)$ es un isomorfismo.

11.- Utilizando los problemas 8 y 10 demostrar que los espacios vectoriales $\text{Hom}_K(V^*, V)$ y $\mathcal{E}_{0,2}(V)$ son isomorfos de manera natural.

12.- Sea V un espacio vectorial real y sea G un tensor de tipo $(2,0)$ sobre V , simétrico y que verifica la siguiente condición: $G(x, y) = 0 \forall y \in V \Rightarrow x = 0$ (por ejemplo si $V = \mathbb{R}^3$, puede ser, $G(x, y) = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot b_i$, $x = (a_1, a_2, a_3)$, $y = (b_1, b_2, b_3)$). Para cada $x \in V$ se define $\Gamma_x: V \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $\Gamma_x(y) = G(x, y) \quad \forall y \in V$. Probar que $\Gamma_x \in V^*$ y que la aplicación $\Gamma: V \rightarrow V^*$ dada por $\Gamma(x) = \Gamma_x$ es un isomorfismo. En el caso particular $V = \mathbb{R}^3$, y G el tensor dado anteriormente, relacionar las coordenadas de cada $x \in \mathbb{R}^3$ en la base ordenada usual $B = (e_1, e_2, e_3)$ con las coordenadas de Γ_x en la base dual $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ de B . (Ver problema 12 de la lección 5^a).

- 13.- Sean $V(\mathbb{R})$ y sea G como en el problema anterior. Sea $\Gamma: V \rightarrow V^*$ el isomorfismo que induce G . Para cada $T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ se define $T_\Gamma : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ por $T_\Gamma(\varphi, \psi) = T(\Gamma^{-1}(\varphi), \Gamma^{-1}(\psi))$ (nótese que $\Gamma^{-1}(\varphi) \in V$ para cada $\varphi \in V^*$). Probar que $T_\Gamma \in \mathcal{E}_{0,2}(V)$ y que la aplicación $\mathcal{E}_{2,0}(V) \rightarrow \mathcal{E}_{0,2}(V)$ dada por $T \mapsto T_\Gamma$ es un isomorfismo (para cada elección del tensor G se tendrá un isomorfismo diferente de $\mathcal{E}_{2,0}(V)$ en $\mathcal{E}_{0,2}(V)$). También para cada $T \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$ se define $T^\Gamma : V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ por $T^\Gamma(x, \varphi) = T(x, \Gamma^{-1}(\varphi))$. Probar que $T^\Gamma \in \mathcal{E}_{1,1}(V)$ y que la aplicación $\mathcal{E}_{2,0}(V) \rightarrow \mathcal{E}_{1,1}(V)$ dada por $T \mapsto T^\Gamma$ es un isomorfismo. Relacionar las matrices de componentes de T , T_Γ y T^Γ cuando se toma G como en el problema precedente (el producto escalar usual en \mathbb{R}^3). Generalizar. (Comparar con Teorema 9.33).
- 14.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sean $\mathcal{E}_{r,0}(V)$, $S_r(V)$ y $A_r(V)$ como en la página 208. Comprobar que si $r > 2$, $\mathcal{E}_{r,0}(V)$ no es la suma directa de $S_r(V)$ y $A_r(V)$. (Ver Prop. 6.36).
- 15.- Sea V un espacio vectorial sobre K con $\dim_K V = n$. Demostrar que al asignarle a cada base ordenada de $V(K)$ la matriz $I_n = (\delta_j^i)$ se define un tensor de tipo $(1,1)$ sobre V (ver pag. 197). En el caso de ser $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$ ¿de qué tensor se trata?. ¿Se define un tensor de tipo $(2,0)$ (resp. $(0,2)$) si a cada base se le asocia $I_n = (\delta_{ij})$ (resp. $I_n = (\delta^{ij})$)?
- 16.- Sea V un espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$. Demostrar que si $\{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ es una base de V^* la aplicación $h: A_1(V) \rightarrow A_2(V)$, $h(\varphi^1) = \varphi^2 \wedge \varphi^3$, $h(\varphi^2) = \varphi^1 \wedge \varphi^3$, $h(\varphi^3) = \varphi^1 \wedge \varphi^2$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.
- 17.- Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $T: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por $T(A, B) = \text{traza } {}^t A \cdot B$. Demostrar que T es un tensor de tipo $(2,0)$ sobre el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ¿Es simétrico?, ¿es antisimétrico?

- 18.- a) Sea $T \in S_2(V)$. Demostrar que $T = T_0$ si y solo si $T(x,x) = 0 \forall x \in V$.
 b) Dados $T, T' \in S_2(V)$, probar que $T = T'$ si y solo si $T(x,x) = T'(x,x) \forall x \in V$. (Ind. aplicar el apartado anterior al tensor simétrico $T-T'$).
 ¿ Se puede generalizar al caso $S_r(V)$, $r > 2$?

- 19.- Se considera la aplicación $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida por $(A,B) \mapsto [A,B] = A.B - B.A$. Demostrar que es bilineal y que cumple $[A,B] = -[B,A]$. Probar que esta operación binaria (a $[A,B]$ se le llama el corchete de A y B) no es asociativa. Supongamos que $A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, probar que $[A,B] \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Para $n = 3$ considerar el isomorfismo

$$\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F} (a,b,c).$$

¿ Quien es $F([A,B])$ en \mathbb{R}^3 ? (Ver discusión posterior a la Definición 9.28)

- 20.- Sean $\{y_1, \dots, y_r\}$ vectores de un espacio vectorial $V(K)$ con $\dim_K V = n$. Demostrar que $\{y_1, \dots, y_r\}$ es linealmente independiente si y solo si $y_1 \wedge \dots \wedge y_r$ no es el tensor nulo en $A_r(V^*)$ (ver Corolario 6.44).

- 21.- Sea G el tensor "producto escalar" de \mathbb{R}^3 (problema 12) y sea $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación $F(x,y,z) = G(y,z).x - G(x,z).y$. Probar que F es trilineal. Sea $T_F \in \mathcal{G}_{3,1}(\mathbb{R}^3)$ definido por el isomorfismo natural del problema 9, pag. 231. Obtener la expresión de T_F relativa a una base de $\mathcal{G}_{3,1}(\mathbb{R}^3)$ inducida por una base β de \mathbb{R}^3 . ¿Qué se puede decir de las componentes de T_F si β es la base usual? Probar tambien que $C_1^1 T_F = 2.G$ ¿Tiene alguna relación $(C_1^1 T_F)(y,z)$ con la traza del endomorfismo de \mathbb{R}^3 definido por $x \mapsto F(x,y,z)$ (con $y, z \in \mathbb{R}^3$ fijos) (ver problema 7).

LECCION 7º: DETERMINANTES.

Introducción. Determinante de un endomorfismo.-

Fundamentalmente este tema está dedicado al estudio del determinante de una matriz cuadrada, y de sus aplicaciones. No obstante vamos a empezar definiendo el determinante de un endomorfismo. Esta definición no va a ser, desde luego, nada intuitiva pero va a tener dos ventajas: en primer lugar, vamos a aprovechar toda la herramienta pesada del final del sexto tema, y en segundo lugar, que las propiedades de los determinantes de matrices salen como consecuencias casi inmediatas de lo que diremos primero para endomorfismos (que a su vez, también se vé fácil de la definición de determinante de un endomorfismo). En definitiva, como siempre, cuanto más elaboradas sean las definiciones, más fácil se obtienen de ellas las teoremas.

Consideraremos primeramente un ejemplo que motive nuestra definición.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Sabemos que el determinante de

la matriz A es el número real $\det A$ obtenido por la fórmula

$$\det A = ad - bc. \text{ Además si}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \in G_1(2, \mathbb{R})$$

se tiene $\det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det A$ lo cual puede comprobarse directamente

$$\text{poniendo } P^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \text{ y aplicando que } P^{-1} \cdot P = P \cdot P^{-1} = I_2$$

en el desarrollo del cálculo de $\det(P^{-1} \cdot A \cdot P)$. Así uno observa que dos matrices 2×2 sobre \mathbb{R} semejantes tienen el mismo determinante. Por otro lado nosotros sabemos que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ y A "representan" el mismo endomorfismo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ respecto a bases distintas (ver Propo-

sición 4.37, pag. 149). Parece entonces que se puede definir el determinante de un endomorfismo como el determinante de cualquier matriz que lo represente respecto a una base. Esta claro que probar que dos matrices semejantes de orden n tienen el mismo determinante es difícil y muy largo. Por esto nosotros daremos una definición a la inversa. En efecto, si uno considera $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ con $M(f, B) = A$ para una base B de \mathbb{R}^2 , podemos hacer la siguiente construcción: Supongamos que $T \in A_2(\mathbb{R}^2)$, $T \neq T_0$. Entonces la aplicación $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(x, y) \mapsto T(f(x), f(y))$, es bilineal (prob. 4, pag. 230) y alternada por serlo T . Como $\dim_{\mathbb{R}} A_2(\mathbb{R}^2) = 1$ (ver pag. 228) resulta que $\{T\}$ ($T \neq T_0$) es una base de $A_2(\mathbb{R}^2)$ y por lo tanto, esta forma bilineal alternada definida por

$$(x, y) \mapsto T(f(x), f(y))$$

y que llamaremos f^*T tiene que ser "proporcional" a T ; es decir, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f^*T = r \cdot T$. Se comprueba que $r = a.d - b.c$ por lo tanto r no depende nada más que de f y podemos poner

$$f^*T = (\det f) \cdot T \quad \forall T \in A_2(\mathbb{R}^2)$$

Esta última fórmula va a ser nuestra definición del determinante de f .

Necesitamos la siguiente

Proposición 7.1. - Sea V un espacio vectorial sobre K , (siempre supondremos $\text{carac}(K) \neq 2$) $f \in \text{End}_K V$ y f^* definida por

$$(f^*T)(y_1, y_2, \dots, y_r) = T(f(y_1), \dots, f(y_r))$$

$y_i \in V$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$, donde $T \in A_r(V)$, $0 < r \leq \dim_K V$. Entonces

(1) $f^*T \in A_r(V)$ para cada $T \in A_r(V)$

(2) La aplicación $f^*: A_r(V) \rightarrow A_r(V)$, $T \mapsto f^*T$, es lineal

Demostración.- Al ser T un tensor de tipo $(r, 0)$ sobre V y $f \in \text{End}_K V$ fácilmente se comprueba que f^*T es también un tensor sobre V de tipo $(r, 0)$ (problema 4, pag. 230). Además si $y_i = y_j$ entonces

$f(y_i) = f(y_j)$ y como T es alternado

$$(f^*T)(y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_r) = T(f(y_1), \dots, f(y_i), \dots, f(y_j), \dots, f(y_r)) = 0$$

Lo que prueba (1).

Por otro lado ocurre

$$f^*(T + T') = f^*T + f^*T'$$

ya que

$$\begin{aligned} (f^*(T + T'))(y_1, y_2, \dots, y_r) &= (T + T')(f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_r)) = \\ &= T(f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_r)) + T'(f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_r)) = \\ &= (f^*T)(y_1, y_2, \dots, y_r) + (f^*T')(y_1, y_2, \dots, y_r) = (f^*T + f^*T')(y_1, y_2, \dots, y_r) \end{aligned}$$

$\forall y_i \in V$ y también

$$f^*(a \cdot T) = a \cdot f^*T$$

$\forall a \in K \quad \forall T \in A_r(V)$ pues

$$\begin{aligned} f^*(a \cdot T)(y_1, y_2, \dots, y_r) &= (a \cdot T)(f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_r)) = \\ &= a \cdot T(f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_r)) = a \cdot (f^*T)(y_1, y_2, \dots, y_r) \end{aligned}$$

$\forall y_i \in V \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Con lo que se concluye (2) y con ello la proposición.

Definición 7.2.- Al endomorfismo f^* de $A_r(V)$ se le llama el endomorfismo de $A_r(V)$ inducido por f .

Nótese que para $r=1$ $f^*: A_1(V) = V^* \longrightarrow A_1(V) = V^*$ no es otro que el traspuesto de f (ver Definición 5.10, pag. 168).

Tomemos $f^*: A_n(V) \longrightarrow A_n(V)$, $n = \dim_K V$. Sea $T \in A_n(V)$, $T \neq T_0$ entonces $\{T\}$ es una base del espacio vectorial unidimensional $A_n(V)$. De modo que $f^*T = a \cdot T$ donde $a \in K$ depende en principio de T . Sin embargo la siguiente Proposición afirma que a "sólo" depende de f .

Proposición 7.3.- Sea $T_1 \in A_n(V)$, $T_1 \neq T_0$ y $a \in K$ determinado por $f^*T_1 = a \cdot T_1$. Entonces

$$\forall T \in A_n(V) : f^*T = a \cdot T.$$

Demostración.- Si $T \in A_n(V)$, $T \neq T_0$ $\exists b \in K$ tal que $f^*T = b \cdot T$, pero $T = c \cdot T_1$ por ser $\{T_1\}$ una base de $A_n(V)$, y así

$$f^*T = f^*(c \cdot T_1) = c \cdot f^*T_1 = c \cdot (a \cdot T_1) = (c \cdot a)T_1 = (a \cdot c)T_1 = a \cdot (c \cdot T_1) = a \cdot T$$

y como $f^*T = b \cdot T$ también, ocurre $b=a$. Lo que concluye la prueba.

Definición 7.4.- Sea $f \in \text{End}_K V$ y sea f^* el endomorfismo de $A_n(V)$ inducido por f . Al único escalar a tal que

$$f^*T = a \cdot T \quad \forall T \in A_n(V), \quad n = \dim_K V$$

se le llama el determinante de f y se representa por $\det f$. Es decir $\det f$ es el único escalar que cumple

$$f^*T = (\det f) \cdot T \quad \forall T \in A_n(V).$$

Recordemos que (ver Teorema 6.43, pag. 227) si $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\}$ es una base de V^* entonces $\{\varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \dots \wedge \varphi^n\}$ es una base de $A_n(V)$. De modo que podemos poner

$$f^*(\varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \dots \wedge \varphi^n) = (\det f) \cdot \varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \dots \wedge \varphi^n$$

Sea $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ la base ordenada de V y sea

$B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ su dual en V^* . Ponemos $\det_B = \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^n$, que llamaremos el tensor hemisimétrico "determinante" en la base B. Entonces

$$f^*\det_B = (\det f) \cdot \det_B$$

y aplicando ambos miembros a $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ obtenemos

$$\det f = \det_B(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)).$$

Para ver algunas propiedades del determinante de un endomorfismo precisamos la siguiente :

Proposición 7.5.- Sean $f, h \in \text{End}_K V$ entonces

$$(1) (f \circ h)^* = h^* \circ f^*$$

$$(2) (l_V)^* = l_{A_n}(V).$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} ((f \circ h)^* \tau)(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \tau((f \circ h)(y_1), (f \circ h)(y_2), \dots, (f \circ h)(y_n)) = \\ &= \tau(f(h(y_1)), f(h(y_2)), \dots, f(h(y_n))) = (f^* \tau)(h(y_1), h(y_2), \dots, h(y_n)) = \\ &= (h^*(f^* \tau))(y_1, y_2, \dots, y_n) = ((h^* \circ f^*) \tau)(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

$\forall y_i \in V, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ con lo que (1) queda probado.

Para (2) tenemos

$$((l_V)^* \tau)(y_1, y_2, \dots, y_n) = \tau(l_V(y_1), l_V(y_2), \dots, l_V(y_n)) = \tau(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$y_i \in V, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Lo que concluye la demostración.

Ahora podemos dar el siguiente :

Teorema 7.6.- Se cumple:

$$(1) \det(f \circ h) = \det f \cdot \det h \quad \forall f, h \in \text{End}_K V$$

$$(2) \det l_V = 1$$

$$(3) \text{ Si } f \in \text{Aut}_K V \Rightarrow \det f^{-1} = (\det f)^{-1}$$

$$(4) \det f = \det t_f \quad \forall f \in \text{End}_K V$$

$$(5) \text{ Sea } f \in \text{End}_K V. \text{ Entonces } f \text{ biyectiva} \Leftrightarrow \det f \neq 0.$$

Demostración.- En efecto,

$\det(f \circ h) = ((f \circ h)^* \det_B)(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es cualquier base de $V(K)$. Como $(f \circ h)^* = h^* \circ f^*$ según (1) de la proposición precedente, tenemos

$$\begin{aligned} \det(f \circ h) &= (h^* \circ f^* \det_B)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (h^* \cdot \det_B)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (\det f) \cdot (h^* \det_B)(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$= (\det f)(\det h) \cdot \det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det f \cdot \det h$$

$$\det l_V = \det_B(l_V(x_1), l_V(x_2), \dots, l_V(x_n)) = \det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

$$\text{Sea ahora } f \in \text{Aut}_K V \Rightarrow \exists f^{-1} \in \text{Aut}_K V : f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = l_V$$

con lo que

$$\det(f \circ f^{-1}) = \det(f^{-1} \circ f) = \det l_V \quad \text{y}$$

$$(\det f) \cdot (\det f^{-1}) = (\det f^{-1}) \cdot (\det f) = 1 \quad \text{por (1) y (2).}$$

De éste modo $\det f \neq 0$ y $\det f^{-1} = (\det f)^{-1}$ con lo que se prueba el punto (3).

Para (4) tenemos

$$\det t_f = (x_1 \wedge \dots \wedge x_n) (t_f(\psi^1), \dots, t_f(\psi^n))$$

en virtud de lo dicho en la página 229. Así,

$$\begin{aligned} \det t_f &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \cdot t_f(\psi^{\sigma(1)})(x_1) \dots t_f(\psi^{\sigma(n)})(x_n) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \cdot \psi^{\sigma(1)}(f(x_1)) \dots \psi^{\sigma(n)}(f(x_n)) = \\ &= (\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^n)(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det f \end{aligned}$$

con lo que probamos (4).

Finalmente, por (3) tenemos que $f \in \text{Aut}_K V \Rightarrow \det f \neq 0$. Recíprocamente, si f no es biyectiva entonces $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ (ver Teorema 4.11, pag. 116) es un conjunto linealmente dependiente.

Por tanto

$$\det_B(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = 0 \Rightarrow \det f = 0.$$

Determinante de una matriz cuadrada.-

Ya nos encontramos casi en condiciones de definir el determinante de una matriz cuadrada. En efecto, sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y sea $f \in \text{End}_K V$, donde $n = \dim_K V$, de tal forma que $M(f, B) = A$ para una base

ordenada B de V . Entonces parece lógico definir el determinante de A como el determinante de este endomorfismo f . Ahora bien, pudiera ocurrir que si tomamos otra base B' , distinta, de V como habría un $h \in \text{End}_K V$ único tal que $M(h, B') = A$ y está claro que $h \neq f$, que $\det f$ y $\det h$ no fuesen el mismo escalar. Pero esto no es así como lo pone de manifiesto la siguiente

Proposición 7.7.- Sean $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y V un espacio vectorial sobre K con $\dim_K V = n$. Supongamos que B y B' son bases ordenadas de V y $f, h \in \text{End}_K V$ definidos por

$$M(f, B) = A = M(h, B').$$

Entonces

$$\det f = \det h.$$

Demostración.- Si $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ y $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$, $B'^* = (\varphi'^1, \varphi'^2, \dots, \varphi'^n)$ tenemos

$$\det f = \det_{B'}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \cdot \varphi^{\sigma(1)}(f(x_1)) \dots \varphi^{\sigma(n)}(f(x_n))$$

$$\det h = \det_{B'}(h(x'_1), \dots, h(x'_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \cdot \varphi'^{\sigma(1)}(h(x'_1)) \dots \varphi'^{\sigma(n)}(h(x'_n)).$$

Ahora vamos a utilizar que $M(f, B) = M(h, B') = A$. Pero según nuestra hipótesis tenemos

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \quad ; \quad h(x'_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x'_i \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

con

$$a_{ij} = \varphi^i(f(x_j)) = \varphi'^i(h(x'_j)) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

y por tanto

$$\det f = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

y tambien

$$\det h = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Lo que concluye la demostración.

Ahora podemos dar la siguiente

Definición 7.8. - Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$, definimos el determinante de A $\det A$ como sigue : tomamos $V(K)$ con $n=\dim_K V$ ($K^n(K)$ por ejemplo), B una base ordenada cualquiera de V y $f \in \text{End}_K V$ tal que $M(f, B)=A$. Entonces ponemos

$$\det A = \det f.$$

Según la Proposición 7.7 esta definición es correcta. Además, como consecuencia inmediata de ella tenemos que dos matrices semejantes tienen el mismo determinante. En efecto, si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ son semejantes sabemos que podemos encontrar B y B' bases de V y $f \in \text{End}_K V$ tales que $M(f, B)=A$, $M(f, B')=B$ (ver pag. 150) por lo tanto $\det A = \det f = \det B$.

Esta definición también nos resuelve algunas "dudas" que podríamos tener sobre el determinante de una matriz. Por ejemplo, queda claro que no se puede definir el determinante de una matriz que no sea cuadrada. Tendremos además la ventaja, de que vamos a demostrar varias propiedades del determinante de una matriz, sin dar

una expresión explícita para éste. En efecto,

Teorema 7.9.- Se cumple:

$$(1)' \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$(2)' \det I_n = 1$$

$$(3)' \text{ Si } A \in GL(n, K) \Rightarrow \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

$$(4)' \det A = \det {}^t A$$

$$(5)' \text{ Sea } A \in \mathcal{M}_n(K). \text{ Entonces } A \text{ es regular} \iff \det A \neq 0$$

Este resultado se prueba a partir del teorema 7.6, pag. 238, sin más que aplicar la definición de determinante de una matriz cuadrada. Por ejemplo, probaremos (1)' directamente de (1) del Teorema 7.6. En efecto, sea B una base de $V(K)$, $\dim_K V = n$, y sean $f, g \in \text{End}_K V$ definido por $M(f, B) = A$, $M(g, B) = B$. Entonces, como $A \cdot B = M(f, B)$ resulta

$$\det A \cdot B = \det(f \cdot g) = \det f \cdot \det g = \det A \cdot \det B$$

Las otras propiedades se harán de este mismo modo como ejercicio.

Nótese que por (1) y (2) del Teorema 7.5, pag. 238 (resp. por (1)' y (2)' del Teorema 7.9) la aplicación $\text{Aut}_K V \longrightarrow K - \{0\}$, $f \mapsto \det f$ es un homomorfismo de grupos (resp. la aplicación $GL(n, K) \longrightarrow K - \{0\}$, $A \mapsto \det A$ es un homomorfismo de grupos).

El apartado (5) en el Teorema 7.5, pag. 238 ó (5)' del Teorema 7.9, de esta misma página, nos da una primera aplicación práctica del uso de determinantes.

Se puede demostrar que, a partir de (1)' y (3)', que dos matrices semejantes tienen el mismo determinante. En efecto, sean $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ y supongamos que existe $P \in GL(n, K) : P^{-1} \cdot A \cdot P = B$, entonces

$$\det B = \det P^{-1} \cdot A \cdot P = (\det P^{-1}) \cdot (\det A) \cdot (\det P) =$$

$$= (\det P)^{-1} \cdot (\det A) \cdot (\det P) = \det A.$$

Del hecho de que el determinante de una matriz se defina a partir de "tensores hemisimétricos" resultan las siguientes propiedades (compruébese)

$$1.- \det \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1j} + a_{1j}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, \dots, a_{2j} + a_{2j}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{nj} + a_{nj}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, \dots, a_{2j}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{nj}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, \dots, a_{2j}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{nj}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$2.- \det \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{aij}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, \dots, a_{aj}, \dots, a_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{nj}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{1p} \\ a_{21}, \dots, a_{2j}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{nj}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$3.- \det \begin{pmatrix} (i & (j \\ a_{11}, \dots, a_{1i}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, \dots, a_{2i}, \dots, a_{2j}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{ni}, \dots, a_{nj}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} (i & (j \\ a_{11}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{1i}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, \dots, a_{2j}, \dots, a_{2i}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{nj}, \dots, a_{ni}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$4.- \det \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1i} + \sum b_j \cdot a_{ij}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, \dots, a_{2i} + \sum b_j \cdot a_{2j}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{ni} + \sum b_j \cdot a_{nj}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $\det^t A = \det A$, lo que ponemos para columnas se puede afirmar para filas; así, por ejemplo, la propiedad 3º tiene una análoga para filas que diría: si se intercambian dos filas de A , la matriz resultante tiene por determinante $-\det A$.

En cuanto al cálculo práctico del determinante de un matriz cuadrada, la demostración de la Proposición 7.7, pag. 240, contiene la siguiente

Proposición 7.10. - Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$, entonces

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Por otro lado, como $\det A = \det^t A$ en virtud de (4)' del Teorema 7.9, pag. 242, tenemos

Proposición 7.11. - Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$, entonces

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} \cdot a_1, \sigma(1) \cdot a_2, \sigma(2) \cdots a_n, \sigma(n).$$

Veamos ahora algunos ejemplos prácticos de aplicación de las proposiciones 7.10 y 7.11.

$$\det(a) = a \quad (a \in K)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

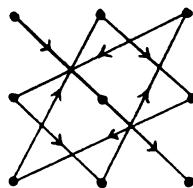
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Para determinantes de matrices 3×3 el anterior desarrollo se

conoce con el nombre de regla de Sarrus: el determinante de $A \in \mathcal{M}_3(K)$ se calcula mediante seis sumandos, cada uno integrado por el producto de tres escalares de A . Hay tres sumandos que se escriben

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}, \quad a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \quad y \quad a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{12}$$

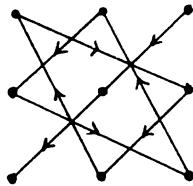
obtenidos según el siguiente esquema



y tres

$$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}, \quad a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \quad y \quad a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

de los que se toman sus opuestos y se obtienen por



Está claro que el cálculo del determinante de una matriz de orden n , $n > 4$, se complica conforme crece n . Hay $n!$ sumandos y cada uno de ellos va precedido por la signatura de la permutación correspondiente. Vamos ahora a dar un método de cálculo más sencillo aplicable sobre todo para determinantes de matrices de orden n con n muy grande.

Recordemos que (ver Definición 6.38, pag. 218)

$$(\psi^1 \wedge \psi^2 \wedge \dots \wedge \psi^n)(y_1, y_2, \dots, y_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \cdot \psi^1(y_j) (\psi^2 \wedge \dots \wedge \psi^n)(y_1, \dots, \overset{j}{y_{j-1}}, y_{j+1}, \dots, y_n)$$

siendo $\varphi^i \in V^*$ e $y_j \in V$ $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Teniendo en cuenta (5) de la Proposición 6.41, pag 221, tenemos

$$\varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \dots \wedge \varphi^n = (-1)^{i-1} \varphi^i \wedge \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^{i-1} \wedge \varphi^{i+1} \wedge \dots \wedge \varphi^n$$

y como $i+j-2$ tiene la misma paridad que $i+j$ podemos escribir

$$(\varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \dots \wedge \varphi^n)(y_1, y_2, \dots, y_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \varphi^i(y_j) \cdot (\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^{i-1} \wedge \varphi^{i+1} \wedge \dots \wedge \varphi^n)(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n).$$

Sea ahora $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ es la base ordenada usual de $K^n(K)$ y $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ su dual en $K^n(K)^*$ resulta

$$\det A = (\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^n)(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

donde

$$y_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Aplicando ahora la fórmula anterior tenemos

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

siendo

$$A_{ij} = (\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^{i-1} \wedge \varphi^{i+1} \wedge \dots \wedge \varphi^n)(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n).$$

Lo primero que uno ve es que A_{ij} es el determinante de una matriz de orden $n-1$: el determinante de la submatriz de A obtenida al eliminar la fila i y la columna j de A . En efecto,

$$A_{ij} = \sum_{\tau \in S_{n-1}} (-1)^{|\tau|} \varphi^{\tau(1)}(y_1) \dots \varphi^{\tau(i-1)}(y_{i-1}) \cdot \varphi^{\tau(i+1)}(y_i) \dots \\ \dots \varphi^{\tau(j)}(y_{j-1}) \cdot \varphi^{\tau(j+1)}(y_{j+1}) \dots \varphi^{\tau(n)}(y_n)$$

donde S_{n-1} es el grupo de todas las permutaciones de

$$\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\} \quad (\text{falta } i).$$

De modo que (suponemos $i < j$)

$$A_{ij} = \sum_{\tau \in S_{n-1}} (-1)^{|\tau|} \cdot {}^a\tau(1), 1 \cdots {}^a\tau(i-1), i-1 \cdot {}^a\tau(i+1), i \cdots \\ \cdots {}^a\tau(j), j-1 \cdot {}^a\tau(j+1), j+1 \cdots {}^a\tau(n), n$$

Como $\tau(k) \neq i \ \forall k$ y el índice j no aparece como segundo "índice" de los a_k , no hay elementos de la fila i ni de la columna j (compruébese con algún ejemplo).

Definición 7.12. - Al escalar $(-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$ se le llama el adjunto del elemento a_{ij} de A y se le representa por Δ_{ij} .

Proposición 7.13. - Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Entonces

$$(1) \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \Delta_{ij} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$(2) \det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \Delta_{ij} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

La primera igualdad resulta de combinar la Definición 7.12 y el resultado de la pag. 246. La segunda, de aplicar (1) a $\det {}^t A$ y utilizar que $\det {}^t A = \det A$ (Proposición 7.9, (4)').

A (1) se le llama el desarrollo de $\det A$ por la fila i -ésima y a (2) el desarrollo de $\det A$ por la columna j -ésima. Ambas relaciones demuestran que para hacer el determinante de una matriz de orden n podemos hacer n determinantes de "ciertas" submatrices de A .

de orden $n-1$.

Por ejemplo

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} &= \\ &= a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} + \\ &+ a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{14} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora podemos combinar este procedimiento con la propiedad 4, pag. 243, procurando primero dejar en una fila (o columna) el mayor número de ceros y desarrollar justo por esta. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & -6 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix} - \\ &\text{multiplico por-2} && \text{desarrollo por} \\ &\text{la 1ª columna y} && \text{la 3ª fila} \\ &\text{la sumo a la 3ª} && \end{aligned}$$

$$- 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 14 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix} - 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} =$$

multiplico por

2 la 2^a fila y

sumo a la 1^a fila

hacemos lo

mismo que en

la anterior

$$= 3 \cdot 14 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - 7 \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = 7 \cdot (6 + 3) = 7 \cdot 9 = 63.$$

Cálculo explícito de la matriz inversa de una matriz regular.

Cálculo del rango por determinantes : Teorema del rango.-

Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Recordemos (ver (5)¹ Teorema 7.9, pag. 242) que A es regular si y sólo si $\det A \neq 0$. Ahora vamos a ver que si A es regular, utilizando el cálculo con determinantes, podemos dar una fórmula explícita para la matriz inversa A^{-1} de A .

En virtud de (1) en la Proposición 7.13, pag 247, tenemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \Delta_{ij} = \det A.$$

Fórmula que se puede interpretar como un "producto de matrices".

En efecto, podemos poner

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \Delta_{kj} = (\det A) \cdot \delta_{ik} \text{ con } \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & k=i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \text{ ó bien}$$

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{k1} \\ \Delta_{k2} \\ \vdots \\ \Delta_{kn} \end{pmatrix} = (\det A) \cdot \delta_{ik}$$

Si llamamos \hat{A} a la matriz que tiene en la intersección de la fila i -ésima y la columna j -ésima Δ_{ji} (*¡atención a los índices!*), que suele llamarse la matriz adjunta de A , la fórmula anterior se

escribe

$$A \cdot \hat{A} = (\det A) \cdot I_n$$

y por (2) de la Proposición 7.13, pag. 247, resulta

$$\hat{A} \cdot A = (\det A) \cdot I_n$$

Así podemos enunciar el siguiente resultado que nos da una fórmula para el cálculo explícito de la matriz inversa de una matriz regular :

Proposición 7.14.- Sea $A \in GL(n, K)$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}$$

Veamos ahora como, con estas nuevas técnicas, se facilita el cálculo del rango de una matriz.

Recordemos que (ver Definición 4.33, pag. 148) dada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ el rango de A , $\text{rango}(A)$, se definía como el rango de "cualquier" aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ donde V y V' son espacios vectoriales sobre K con $\dim_K V = n$, $\dim_K V' = m$ y f está dada por $M(f, B, B') = A$ para B y B' bases ordenadas de V y V' respectivamente. En particular $\text{rango}(A) = \text{rango}(f_A)$ siendo $f_A : K^n \longrightarrow K^m$ la aplicación lineal única que cumple $M(f_A, B, B') = A$ siendo B y B' las respectivas bases ordenadas canónicas de K^n y K^m (ver Problema nº 5, pag. 153). Entonces es automático que $\text{rango}(A)$ coincide con el número de columnas independientes de A (consideradas como vectores de K^m), y puesto que $\text{rango}(A) = \text{rango}({}^t A)$ (Corolario 5.20, pag 172) $\text{rango}(A)$ también es igual al número de filas independientes de A (consideradas como vectores de K^n).

Podemos enunciar el siguiente

Teorema 7.15.- (Teorema del rango). El rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ coincide con el orden de la mayor submatriz cuadrada de A con determinante no nulo.

Demostración.- Llamemos $r = \text{rango } A$ y $s = \text{orden de la mayor submatriz}$

cuadrada de A con determinante no nulo.

Sea B la submatriz de A formada por r columnas independientes. Como rango $B = r$ "dentro" de B hay una submatriz suya cuadrada C formada por r filas independientes de B . C no puede tener determinante nulo pues por el Teorema 7.9 (5)', pag 242, C no sería regular. Así $\det C \neq 0$ y $r \leq s$.

Veamos la otra desigualdad. Sea

$$D = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} \dots a_{i_2 j_s} \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ a_{i_s j_1} \dots a_{i_s j_s} \end{pmatrix}$$

con $\det D \neq 0$. Entonces, por lo de antes, las s columnas de D son linealmente independientes (como vectores de K^s). Por lo tanto, las s columnas de A j_1 -ésima, j_2 -ésima, ..., j_s -ésima son linealmente independientes (como vectores de K^m) (compruébese tal extremo) y en consecuencia $s \leq r$. Por tanto $s=r$. Lo que concluye la demostración.

Del Teorema del rango (o si se quiere del razonamiento precedente a este) se deduce que si en una matriz A

- i) Intercambiamos dos columnas ó
- ii) Multiplicamos un escalar no nulo por una columna ó
- iii) Le sumamos a una columna una combinación lineal del resto la matriz A' resultante tiene el mismo rango que A (es por tanto equivalente a A). La misma afirmación se puede hacer si en las tres anteriores "manipulaciones" se intercambian las palabras columna por fila. Lo que no es posible, por motivos obvios, es mezclar filas con columnas.

Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché-Frobenius:

Aplicaciones.-

Ya en dos ocasiones hemos tratado con sistemas de ecuaciones lineales (ver pag. 137 y pag. 164) pero es ahora cuando, con las herramientas convenientes, los estudiaremos sistemáticamente.

Por un sistema de m ecuaciones y n incógnitas sobre K entenderemos

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \right\} \quad (s)$$

donde los $a_{ij} \in K$ son los coeficientes, $b_k \in K$ los términos independientes y $x_\ell \in K$ son las incógnitas (escalares que hay que calcular si existen).

Resolver un sistema de ecuaciones lineales, es encontrar las x_ℓ que lo satisfacen. Pero ¿ siempre tiene que tener solución ?.

Sean

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Podemos poner (s) como sigue (ver pag 137)

$$A \cdot x = b \quad (s)'$$

Es evidente que, así escrito el sistema, más fácil será encontrar solución si la hay (por una solución entenderemos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{que cumple (s). Por ejemplo, vamos a fijarnos en}$$

el caso particular

$$m = n \quad \text{y} \quad A \text{ regular}$$

(Un sistema en estas condiciones se dice un sistema de Cramer).

Proposición 7.16.- Sea $A \cdot x = b$ un sistema de Cramer. Entonces

$\exists! x \in K^n (= \mathcal{M}_{n \times 1}(K)) : A \cdot x = b$. Es decir, un sistema de Cramer tiene solución única.

Demostración.- Como $A \in GL(n, K) \Rightarrow \exists A^{-1} \in GL(n, K) : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

$$\text{Entonces } A \cdot x = b \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot x) = A^{-1} \cdot b$$

$$(A^{-1} \cdot A)x = A^{-1} \cdot b$$

$$I_m \cdot x = A^{-1} \cdot b \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b.$$

Así, $x = A^{-1} \cdot b$ es la única solución del sistema.

Si tenemos en cuenta que, según la Proposición 7.14, pag. 250,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}, \text{ tenemos} \quad (i)$$

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n b_j \cdot \Delta_{ji} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, b_1, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, \dots, b_2, \dots, a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}, \dots, b_n, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

donde el numerador es el determinante de la matriz que resulta de A al eliminar su i -ésima columna y poner en su lugar la matriz columna de los términos independientes. Esta fórmula que acabamos de ver se le conoce como "la regla de Cramer", válida precisamente para sistemas de Cramer.

Estudiaremos sistemas más generales. Veamos tres ejemplos:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = 1 \\ -4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 0 \end{array} \right\} (1) \quad \left. \begin{array}{l} 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 2 \end{array} \right\} (2) \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 2 \cdot x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 = 3 \end{array} \right\} (3)$$

El sistema (1) no tiene solución, de modo que no es cierto que un sistema con igual número de ecuaciones que incógnitas tenga solución única. El sistema (2) tampoco tiene solución, así que no se puede pensar que porque en un sistema hay más incógnitas que ecuaciones siempre haya solución. El sistema (3) tiene solución única, lo que desacredita el pensar que si hay más ecuaciones que incógnitas no hay solución.

Dado un sistema como (s)' en la pag. 252, se impone en primer lugar ver si tiene o no solución. Despues, caso que tenga solución, dar explicitamente la solución o soluciones.

Teorema 7.17.- (Teorema de Rouché-Frobenius). Un sistema de ecuaciones lineales $A \cdot x = b$ tiene solución si y sólo si $\text{rang } A = \text{rang } (A|b)$, donde $(A|b)$ es la matriz $m \times (n+1)$ obtenida de A adjuntándole como última columna la de términos independientes b .

Vemos a dar dos demostraciones. La primera tiene la ventaja de que cuando $\text{rang } A = \text{rang } (A|b)$ se va a demostrar de qué manera son las soluciones. Tiene no obstante la desventaja que precisa de la Regla de Cramer. La segunda demostración es muy sencilla, pero sólo dice si hay solución, no quién es esta.

Primera demostración.- Supongamos que $\exists x : A \cdot x = b$, entonces podemos poner

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Como esto nos dice que la última columna de la matriz $(A|b)$ es combinación lineal del resto, entonces $\text{rang } A = \text{rang } (A|b)$.

Recíprocamente, supongamos que $\text{rang } A = \text{rang } (A|b) = r$ y que sean las r primeras columnas de A , las que son independientes así como las r primeras filas (por sencillez). Entonces el sistema $A \cdot x = b$ se reduce a

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{array} \right\}$$

Cando los valores que queramos a (x_{r+1}, \dots, x_n) resolvemos utilizando la regla de Cramery así concluye la prueba.

Segunda demostración.- Está claro que un sistema de la forma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede interpretar como sigue : sea $f_{\mathbf{A}}: K^n \rightarrow K^m$ la aplicación lineal $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$, donde \mathbf{y} es una matriz $n \times 1$ que representa a un vector de K^n (ver Problema nº 5, pag. 153). Entonces : el sistema $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución si y sólo si $\mathbf{b} \in \text{Im } f_{\mathbf{A}}$, pero esto ocurre si y sólo si \mathbf{b} es combinación lineal de las columnas de \mathbf{A} lo cual es condición necesaria y suficiente para que $\text{rango } \mathbf{A} = \text{rango } (\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Esto acaba esta segunda prueba.

En el caso de que $b_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, es decir de que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, el sistema se dice entonces homogéneo, el teorema de Rouché-Frobenius nos dice que un sistema homogéneo tiene siempre solución (la trivial $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$) no obstante, en este caso, el

conjunto de las soluciones del sistema $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ es el subespacio vectorial $\text{Ker } f_{\mathbf{A}}$ de K^n . Además, $\dim_K \text{Ker } f_{\mathbf{A}} = n - \text{rango } f_{\mathbf{A}} = n - \text{rango } (\mathbf{A})$ (compárese con pag. 165).

Dado un sistema lineal $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ podemos dar un esquema con los resultados anteriores:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango } A = \text{rango } (A b) = r \\ \text{el sistema tiene solución} \\ \text{se dice COMPATIBLE} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} r = n \\ \text{hay solución única} \\ \text{DETERMINADO} \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango } A \neq \text{rango } (A b) \\ \text{el sistema no tiene solución} \\ \text{se dice INCOMPATIBLE} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} r < n \\ \text{hay infinitas soluciones} \\ \text{INDETERMINADO} \end{array} \right.$

En el caso particular que el sistema sea homogéneo :

$A \cdot x = 0$ siempre es
COMPATIBLE

$\left\{ \begin{array}{l} r = n \\ \text{hay solución única (la trivial)} \\ \text{DETERMINADO} \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} r < n \\ \text{hay un subespacio vectorial de } K^n \\ \text{de soluciones con dimensión } n-r \\ \text{INDETERMINADO} \end{array} \right.$

Como una aplicación de lo expuesto anteriormente para sistemas de ecuaciones lineales, vamos a establecer "ecuaciones" para cada subespacio vectorial de un espacio $V(K)$.

Sea entonces V un espacio vectorial sobre K y sea U un subespacio vectorial suyo. Supongamos que $B = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ y $B' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ son bases ordenadas de U y V respectivamente. Si x es un vector de U , tendrá coordenadas (a_1, a_2, \dots, a_m) respecto a B y (b_1, b_2, \dots, b_n) respecto a B' (estas últimas considerando x como un vector de V simplemente). Por otro lado tendremos

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i$$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$
 donde $a_{ij} \in K$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Entonces

$$x = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i = \sum_{j=1}^m a_{j} \cdot y_j = \sum_{j=1}^m a_j \cdot \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot a_j \right) \cdot x_i$$

y por la unicidad (Proposición 3.36, pag. 93)

$$b_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot a_j$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

que se le llama las ecuaciones paramétricas de U respecto de las bases B de U y B' de U' . Nótese que estas n ecuaciones nos dan las coordenadas de cada $x \in U$ en B' a partir de las de x en B y las de los vectores de B en B' . Los escalares a_j , $j=1, 2, \dots, m$, se llaman parámetros (hay igual número que dimensión tenga U) ya que al darles todos los valores posibles se obtienen por estas ecuaciones todas las coordenadas de los vectores de U en B' . Obsérvese que si $U = \{0\}$ no hay ecuaciones paramétricas para U (U no tiene ninguna base!) y si $m=n$ las ecuaciones paramétricas se confunden con las del cambio de base en V (ver pag. 101).

Por ejemplo sea el subespacio de \mathbb{R}^3 (K) $U=L(\{e_1+e_2, e_1-e_3\})$ donde $B'=(e_1, e_2, e_3)$ es la base ordenada usual de \mathbb{R}^3 . Está claro que $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$ y que las ecuaciones paramétricas de U con respecto a las bases $B=(e_1+e_2, e_1-e_3)$ de U y $B'=(e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 son

$$b_1 = a_1 + a_2$$

$$b_2 = a_1$$

$$b_3 = -a_2$$

Uno piensa que eliminando los dos parámetros a_1, a_2 se pueden obtener unas "ecuaciones intrínsecas" que nos den una relación entre las b_i que nos diga, a partir del conocimiento de las coordenadas de x en B' , si este vector pertenece o no a U . En efecto, obtenemos

$$b_1 + b_3 - b_2 = 0$$

de modo que podemos decir que en un vector $x \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas (b_1, b_2, b_3) pertenece a U si y sólo si $b_1 + b_3 - b_2 = 0$. Pero también podemos afirmar lo mismo cuando

$$2b_1 + 2b_3 - 2b_2 = 0$$

Así, parece que al asignarle a cada subespacio U de V a partir de una base B' de V unas ecuaciones de este tipo no se puede hacer de forma única (en contra del hecho de que las ecuaciones paramétricas están unívocamente determinados por las bases B de U y B' de V). No debe preocuparnos este hecho, pues en definitiva, lo que se hace es dar un subespacio U de V como la solución de un sistema homogéneo (ver pág. 255) y está claro que "diferentes" sistemas pueden tener idénticas soluciones.

Dados un subespacio vectorial U , $\dim_K U = m$, de $V(K)$ y una base $B' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de V diremos que

$$\left. \begin{array}{l} r_{11} \cdot b_1 + r_{12} \cdot b_2 + \dots + r_{1n} \cdot b_n = 0 \\ r_{21} \cdot b_1 + r_{22} \cdot b_2 + \dots + r_{2n} \cdot b_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{n-m1} \cdot b_1 + r_{n-m2} \cdot b_2 + \dots + r_{n-mn} \cdot b_n = 0 \end{array} \right\} \quad (+)$$

Son unas ecuaciones implícitas (o no paramétricas) para U con respecto a B' si para

$$x = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i$$

se tiene $x \in U$ si y sólo si (b_1, b_2, \dots, b_n) verifica (+).

Nótese que estas ecuaciones implícitas identifican U como el subespacio de V de los vectores cuyas coordenadas en B' son soluciones del sistema homogéneo (+). Hay que hacer notar que si U tiene dimensión m cualquier conjunto de ecuaciones implícitas consta de $n-m$ ecuaciones (independientes). Entonces el subespacio $U = \{0\}$ viene dado, respecto a cualquier base B' de V , por un sistema homogéneo "de Cramer" es decir, con n incógnitas y n ecuaciones independientes (por tanto, con una única solución $(0,0,\dots,0)$). Por otro lado, el subespacio $U = V$ no posee ecuaciones implícitas.

Un método práctico de calcular $n-m$ ecuaciones implícitas para U de dimensión m puede ser el siguiente:

Supongamos $x \in U$ que tiene coordenadas (b_1, b_2, \dots, b_n) respecto a la base $B' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de V . Entonces, calcular las coordenadas (a_1, a_2, \dots, a_m) de x respecto a la base $B = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ de U equivale a resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

el cual sabemos que tiene solución única. Por tanto, será compatible y determinado (pag. 256) y como

$$\text{rango } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \text{rango } \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} & b_1 \\ a_{21} \dots a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} & b_n \end{pmatrix} = m$$

todas las submatrices cuadradas de orden $m+1$ de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

tienen que tener determinante nulo.

Supongamos que las m primeras filas de la matriz $(a_{ij})_{n \times m}$ son linealmente independientes. Entonces

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & b_m \\ a_{m+j1} & \dots & a_{mj+m} & b_{m+j} \end{pmatrix} = 0$$

para $j=1, 2, \dots, n-m$.

Calculamos cada uno de estos $n-m$ determinantes obteniendo

$$\left. \begin{array}{l} r_{11} \cdot b_1 + \dots + r_{1n} \cdot b_n = 0 \\ r_{21} \cdot b_1 + \dots + r_{2n} \cdot b_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ r_{n-m1} \cdot b_1 + \dots + r_{nm} \cdot b_n = 0 \end{array} \right\}$$

Obsérvese que en ninguna de estas ecuaciones son nulos simultáneamente todos los coeficientes.

Hemos demostrado que si

$$x = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i$$

pertenece a U entonces (b_1, b_2, \dots, b_n) satisface $n-m$ ecuaciones lineales; luego U está incluido en el subespacio U' de V de los vectores cuyas coordenadas en B' son soluciones del sistema homogéneo definido por estas ecuaciones.

Supongamos ahora que $x = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i$ sea un vector de U' , entonces

(b_1, b_2, \dots, b_n) satisface el anterior sistema homogéneo y por tanto

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & b_m \\ a_{m+j1} & \dots & a_{mj+m} & b_{m+j} \end{pmatrix} = 0$$

para cada $j=1, 2, \dots, n-m$ con lo que la columna de los b_i depende linealmente del resto, (ver problema 14, pag. 269) es decir

$$\text{rango} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix} = m$$

y esto implica que $x \in U$. Así hemos probado que $U = U'$.

Consideremos $V = \mathbb{R}^5$, $K = \mathbb{R}$ y $U = L(\{e_1 - e_2, e_3\})$ donde $B' = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ es la base ordenada usual de \mathbb{R}^5 . Entonces $B = (e_1 - e_2, e_3)$ es una base de U y las ecuaciones paramétricas de U respecto a B y B' son

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 &= -a_1 \\ b_3 &= a_2 \\ b_4 &= 0 \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

Para obtener unas ecuaciones implícitas para U respecto a B ponemos

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & b_5 \end{pmatrix} = 2.$$

Así de

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix} = 0$$

resulta

$$b_1 + b_2 = 0$$

Ahora bien

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & b_5 \end{vmatrix} = 0$$

independientemente de quienes sean los b_i . Luego de estas dos submatrices no sacamos ninguna ecuación. Entonces tomamos

$$\det \begin{vmatrix} -1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix} = 0 \iff b_4 = 0$$
$$\det \begin{vmatrix} -1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_5 \end{vmatrix} = 0 \iff b_5 = 0.$$

Luego unas ecuaciones implícitas para U son

$$\left. \begin{array}{l} b_1 + b_2 = 0 \\ b_4 = 0 \\ b_5 = 0 \end{array} \right\}$$

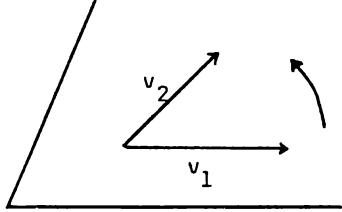
Obsérvese que $b_4 = 0$ y $b_5 = 0$ aparecían en las ecuaciones paramétricas y no incluían ningún parámetro, ya que se sabía entonces que cada una de ellas daba lugar a una ecuación implícita.

Orientación en un espacio vectorial real.-

Veamos por último una aplicación más sofisticada de los determinantes : la orientación en un espacio vectorial real.

La noción intuitiva de orientación es sencilla (no tanto su formalización). En una recta vectorial real hay dos orientaciones coincidiendo justamente con los dos posibles sentidos. Uno puede "representar" una orientación eligiendo un vector no nulo v (una base de la recta vectorial), entonces $-v$ representa la otra orientación. En un plano vectorial la cosa se complica . Uno puede hablar de "un sentido de giro" y de su opuesto. Un sentido de giro

viene dado al considerar una base ordenada $B = (v_1, v_2)$ queriendo indicar que así se elige el sentido de giro tal que primero se encuentra uno a v_1 y luego a v_2 . La base ordenada (v_2, v_1) representa el sentido de giro inverso.



Como $\det_B(v_2, v_1) < 0$ uno piensa que el determinante de los vectores de una base ordenada según la otra, me puede indicar si dos bases ordenadas representan o no la misma orientación. Por ejemplo, la base ordenada $(-v_2, v_1)$ verifica $\det_B(-v_2, v_1) > 0$ y (v_1, v_2) y $(-v_2, v_1)$ representan la misma orientación.

Estos ejemplos intuitivos nos dan pie a una definición abstracta de orientación que se establece como sigue:

Sea \mathcal{C} el conjunto de todas las bases ordenadas de $V(\mathbb{R})$. Veámos como mediante el uso de determinantes podemos definir en \mathcal{C} una relación de equivalencia. En efecto, si $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ decimos que $B \sim B'$ si y sólo si

$$\det M(l_V, B', B) > 0$$

Recuérdese que $M(l_V, B', B)$ es la matriz del cambio de base obtenido al expresar los vectores de B' como combinación lineal de los de B (ver pag. 138) por tanto, $\det M(l_V, B', B)$ es el determinante de una matriz regular que, como sabemos (Teorema 7.9, (5)', pag. 242) es un escalar real no nulo. (No confundir $\det M(l_V, B', B)$ con $\det M(l_V, B)$ pues en este último caso, $\det M(l_V, B) = \det l_V = 1$ cualquiera sea la base B de V). Nótese, además que

$$\det M(l_V, B', B) = \det_B(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

donde $\det_B = \varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \dots \wedge \varphi^n$ y $(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ es la base ordenada dual de B (ver pag. 237).

Esta relación binaria es reflexiva por la observación hecha antes. Es simétrica ya que

$$M(I_V, B', B) \cdot M(I_V, B, B') = M(I_V, B, B) = I_n$$

y por ello

$$\det M(I_V, B', B) \cdot \det M(I_V, B, B') = 1 > 0$$

con lo que si $\det M(I_V, B', B) > 0$ entonces $\det M(I_V, B, B') > 0$. Finalmente es transitiva ya que

$$M(I_V, B', B) \cdot M(I_V, B'', B') = M(I_V, B'', B)$$

y por tanto

$$\det M(I_V, B', B) \cdot \det M(I_V, B'', B') = \det M(I_V, B'', B)$$

con lo que si $\det M(I_V, B', B) > 0$ y $\det M(I_V, B'', B') > 0$, necesariamente $\det M(I_V, B'', B) > 0$.

Así, tendremos un conjunto cociente (ver Definición 0.4, pag. 5)

$$\mathcal{C}/\sim = \{ c(B) / B \in \mathcal{C} \}$$

donde $c(B)$ es la clase de equivalencia representada por B .

Afirmamos ahora que el conjunto cociente \mathcal{C}/\sim tiene sólo dos elementos. En efecto, sea $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ entonces B no está relacionado con B' . Luego al menos las clases de equivalencia $c(B)$ y $c(B')$ de representantes B y B' son dos elementos distintos del cociente \mathcal{C}/\sim (ver Proposición 0.1, pag. 4). Sea $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ otra base ordenada. Por la fórmula

$$\det M(I_V, B', B) \cdot \det M(I_V, B'', B') = \det M(I_V, B'', B)$$

deducimos

$$\det M(I_V, B'', B') = -\det M(I_V, B'', B)$$

lo cual demuestra que o bien $B'' \sim B$ o bien $B'' \sim B'$.

Definición 7.18. – Una orientación de $V(\mathbb{R})$ es cualquiera de las dos clases de equivalencia de \mathcal{C}/\sim . Si elegimos una orientación $c(B)$ a todas las bases ordenadas que representen tal clase se les llama bases ordenadas positivamente; a cualquier otra base ordenada que represente a la otra clase de equivalencia se le llama

base ordenada negativamente. Un espacio vectorial orientado es un par $(V(\mathbb{R}), c(B))$ donde $V(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real y $c(B)$ una orientación suya.

La base usual B de \mathbb{R}^3 define la "orientación usual" de \mathbb{R}^3 .

$B' = (e_2, e_1, e_3)$ define la otra orientación posible de \mathbb{R}^3 . Si

$B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ es otra base ordenada de \mathbb{R}^3 entonces B_1 define la misma orientación que B si y sólo si $M(1_{\mathbb{R}^3}, B_1, B)$ tiene determinante positivo, y la otra orientación si $M(1_{\mathbb{R}^3}, B_1, B)$ tiene determinante negativo.

Definición 7.19. - Un automorfismo f de $V(\mathbb{R})$ conserva la orientación $c(B)$ si lleva bases ordenadas positivas en bases ordenadas positivas.

Proposición 7.20. - Sea $f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} V$. Entonces f conserva $c(B)$ si y sólo si $\det f > 0$.

La demostración se deduce fácilmente de observar que

$$\det f = \det M(f, B) = \det M(1_V, B', B)$$

donde si $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es $B' = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$.

El conjunto de los automorfismos que conservan la orientación es un grupo $\text{Aut}_{\mathbb{R}}^+ V = \{f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} V \mid \det f > 0\}$. El correspondiente subgrupo de las matrices regulares es

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0 \}$$

Cada una de las matrices de $GL^+(n, \mathbb{R})$ se puede interpretar como una matriz de cambio de base (por ser regular) y además que cambia bases positivas en bases positivas y negativas en negativas.

Nótese que $GL^+(n, \mathbb{R})$ (ó $\text{Aut}_{\mathbb{R}}^+ V$) describe la "geometría" del par $(V, c(B))$ en el mismo sentido que $GL(n, \mathbb{R})$ lo hacía de $V(\mathbb{R})$. Además, uno se da cuenta, de nuevo, que cada vez que se añade un objeto a $V(\mathbb{R})$ el grupo de transformaciones que conservan tal objeto es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ (ó $\text{Aut}_{\mathbb{R}} V$). Esto da pie a pensar

que debe haber una biyección entre subgrupos de $Gl(n, \mathbb{R})$ y nuevos objetos geométricos sobre $V(\mathbb{R})$. Por ejemplo, (ahora lo hacemos al revés) el subgrupo "lineal especial" de $Gl(n, \mathbb{R})$, $Sl(n, \mathbb{R})$, se define por $Sl(n, \mathbb{R}) = \{ A \in Gl(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$. Nótese que $Sl(n, \mathbb{R})$ es el núcleo del homomorfismo de grupos $\det: Gl(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $A \mapsto \det A$; y que $Sl(n, \mathbb{R}) \subset Gl^+(n, \mathbb{R})$. De modo que las matrices $A \in Sl(n, \mathbb{R})$, miradas como automorfismos, conservan la orientación y "algo más". Ese algo más lo adivina uno si vuelve a la definición de determinante de un endomorfismo $f^*T = (\det f).T$, $\forall T \in A_n(\mathbb{R}^n)$. De modo que $\det f = 1 \iff f^*$ es la aplicación identidad de $A_n(\mathbb{R}^n)$, es decir, si y sólo si conserva un $T \in A_n(\mathbb{R}^n)$ $T \neq T_0$, es decir, una base de $A_n(\mathbb{R}^n)$ que es lo que se llama un elemento de volumen sobre $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$.

PROBLEMAS

1.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $f \in End_K V$. Supongamos que existen dos subespacios vectoriales U y W de V tales que $V = U \oplus W$ y $f_{|U}(U) \subset U$, $f_{|W}(W) \subset W$; y representemos por $f_1: U \rightarrow U$ y $f_2: W \rightarrow W$ las respectivas restricciones de f ; es decir $f_1(x) = f(x)$ $\forall x \in U$ y $f_2(y) = f(y)$ $\forall y \in W$. Probar que $\det f = (\det f_1)(\det f_2)$. Como consecuencia demostrar que si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y $C \in \mathcal{M}_m(K)$ el determinante de la matriz de orden $n+m$ $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ es $(\det A)(\det C)$.

2.- Sea $V(K)$ y $V'(K)$ espacios vectoriales y sean $f \in End_K V$, $f' \in End_{K'} V'$. Demostrar que la aplicación $V \times V' \rightarrow V \times V'$ dada por $(x, x') \mapsto (f(x), f'(x'))$ es un endomorfismo del espacio vectorial $V \times V'$ (ver problema nº 5, pag. 103) y, aplicando el problema anterior, probar que su determinante es $(\det f)(\det f')$.

3.- Con la notación del ejercicio número 1, sea $\tilde{f}: V/U \longrightarrow V/U$ ($*$) dado por $\tilde{f}(x+U) = f(x) + U$. Probar que \tilde{f} es una aplicación y que es lineal. Demostrar también que se cumple $\det f = (\det f_1) \cdot (\det \tilde{f})$. Aplicar esto para probar que si $A \in \mathcal{M}_m(K)$, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ y $C \in \mathcal{M}_n(K)$ el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ es precisamente $(\det A) \cdot (\det C)$.

4.- Sean $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Probar que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = |\det(A + iB)|^2$

(el módulo al cuadrado del número complejo obtenido al calcular el determinante de la matriz $A + iB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$). Aplicar esto para probar que $A + iB$ es regular si y sólo si $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ es regular. Demostrar también que la aplicación $Gl(m, \mathbb{C}) \longrightarrow Gl(2m, \mathbb{R})$ dada por $A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ es un monomorfismo de grupos.

5.- Calcular los determinantes de las siguientes matrices reales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}. \quad \text{Generalizar.}$$

6.- Demostrar que el determinante de una matriz triangular superior (o inferior) (ver problema nº 21, pag. 156) se obtiene como el producto de los elementos de su diagonal. Encontrar una solución necesaria y suficiente para que una matriz triangular superior (o inferior) sea regular. Dar una expresión explícita para la matriz inversa de una matriz diagonal que sea regular.

7.- Demostrar que si $A = (a_{ij})$ es una matriz antisimétrica de orden 4 sobre K se verifica $\det A = (a_{12} \cdot a_{34} - a_{13} \cdot a_{24} + a_{14} \cdot a_{23})^2$. Probar que si A es una matriz antisimétrica de orden impar sobre K , $\text{carac}(K) \neq 2$, entonces $\det A = 0$.

(*) Ver prob. 10, pag. 14.

8.- Calcular el rango de las siguientes matrices de números reales

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & -6 \end{array} \right) \quad y \quad \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

9.- Utilizando el teorema del rango (Teorema 7.15, pag. 245) ver si los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ son o no independientes
 $\{(1,-1,2,0),(1,0,1,2),(1,0,2,1),(0,-1,1,-2)\}$
 $\{(1,1,-1,1),(1,-1,1,1),(-1,1,1,-1),(1,1,-1,-1)\}$.

10.- Discutir y resolver los siguientes sistemas sobre \mathbb{R}

$$\left. \begin{array}{l} 3.x_1 - 2.x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4.x_2 - 5.x_3 = 3 \\ -x_1 + 3.x_2 + 2.x_3 = -4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 3.x_2 + x_3 = 1 \\ 2.x_1 - 3.x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2.x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

11.- Discutir según los distintos valores de parámetro real a el sistema de ecuaciones sobre \mathbb{R}

$$\left. \begin{array}{l} a.x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + a.x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + a.x_3 + x_4 = a^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + a.x_4 = a^3 \end{array} \right\}$$

Resolver para algún valor de a que el sistema sea compatible.

12.- Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$

$$U = L(\{(1,0,-1,2,1),(0,1,1,2,0),(1,1,0,4,1)\})$$

$$W = L(\{(2,1,-1,6,2),(1,1,2,1,3),(1,1,1,1,-1),(1,0,0,0,1)\}).$$

Hallar ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap W$ y $U + W$.

13.- Se consideran V un espacio vectorial real, $B = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ una base de V y los subespacios vectoriales de V $U = L(\{u_1 - u_2 + 3u_4, u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4, u_1 - 7u_2 - 6u_3 + u_4\})$ y W dado por las ecuaciones implícitas

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 0 \\ 3b_2 + b_3 + b_4 &= 0 \end{aligned}$$

Calcular ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap W$ y $U + W$.

14.- Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm+1} \end{pmatrix}$, $n > m$, con $\det \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{mm} \\ a_{m1}, \dots, a_{mm} \end{pmatrix} \neq 0$.

Supongamos que $\det \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} & a_{1m+1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mm} & a_{mm+1} \\ a_{m+j1} \dots a_{m+jm} & a_{m+jm+1} \end{pmatrix} = 0 \quad \forall j=1, 2, \dots, n-m$.

Probar que rango (A) = m (Indicación, razonar por filas).

15.- Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y sea $\text{Aut}_{\mathbb{R}}^+V = \{f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}V / \det f > 0\}$.

Probar que $\text{Aut}_{\mathbb{R}}^+V$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}_{\mathbb{R}}V$ (ver Definición

1.17, pag 30). Sea $\text{Gl}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}) / \det A > 0\}$. Demostrar que $\text{Gl}^+(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$. Sea B una base ordenada de $V(\mathbb{R})$. Probar que para $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}V$ se tiene $f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}^+V$ si y sólo si $M(f, B) \in \text{Gl}^+(n, \mathbb{R})$. Probar, por último, que la aplicación $\text{Aut}_{\mathbb{R}}^+V \longrightarrow \text{Gl}^+(n, \mathbb{R})$, $f \mapsto M(f, B)$, es un isomorfismo de grupos (ver Proposición 4.29, pag 141).

16.- Sea $P \in \text{Gl}^+(n, \mathbb{R})$ y sea $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una base ordenada de un espacio vectorial real V . Demostrar que existe una única base ordenada $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ de $V(\mathbb{R})$ tal que $M(1_V, B', B) = P$ y además B' define en V la misma orientación que B (ver pag. 143). Particularizar al caso $V = \mathbb{R}^3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$, la base usual, y

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Gl}^+(3, \mathbb{R}).$$

17.- a) Sea $V(K)$ un espacio vectorial con $\dim_K V = 1$ y sea $F \in \text{End}_K V$.

Demostrar que $F(x) = (\det F) \cdot x \quad \forall x \in V$. b) Se considera $f \in \text{End}_K V$, donde ahora V es un espacio vectorial sobre K con $\dim_K V = n$. Sea f^* el endomorfismo de $\text{A}_n(V)$ inducido por f (ver Definición 7.2, pag. 236). Probar que $\det f^* = \det f$.

18.- Encontrar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, si es posible, que cumpla $f(e_1) = e_1$, $\det f = -1$ y traza $f = 1$.

19.- Probar que $\forall a \in K$ y $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$ se tiene $\det(a \cdot A) = a^n \cdot \det A$.

Probar tambien que $\det(a \cdot I_n) = a^n$.

20.- Sean $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $n \geq 2$, y \hat{A} la matriz adjunta de A . Probar que $\det \hat{A} = (\det A)^{n-1}$. Probar tambien que \hat{A} es regular si y sólo si lo es A . Cuando \hat{A} sea regular obtener una expresión para \hat{A}^{-1} .

21.- Sea V un espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}} V = n \geq 1$. Demostrar que para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ de manera que $\det f = a$. Probar que el grupo cociente $G_1(n, \mathbb{R})/S_1(n, \mathbb{R})$ (ver pag. 266) es isomorfo al grupo multiplicativo $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$.

22.- Sean V un espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ y $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Supongamos que $\text{rango } A = \text{rango } f$, $\text{traza } A = \text{traza } f$ y $\det A = \det f$. ¿ Podemos asegurar que existe una base B de V tal que $M(f, B) = A$?

23.- a) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que una condición necesaria para que exista $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de manera que $B^2 = A$ es que $\det A \geq 0$. b) Probar que no existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = -I_3$.

24.- Sea V un espacio vectorial finitamente generado. Supongamos que existe $j \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ que cumple $j \circ j = -1_V$. Demostrar que la dimensión de $V(\mathbb{R})$ es par (Ind. usar Teorema 7.6) (ver prob. 3 y prob. 27 de la lección 4@).

25.- Sean $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y $F \in \text{End}_K \mathcal{M}_n(K)$ definido a partir de A en el prob. 31, pag. 157. Probar que $\det F = (\det A)^n$. Demostrar que F es biyectiva si y sólo si A es regular. (Ind. usar prob. 1).

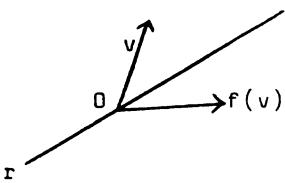
26.- Para cada matriz regular P de orden n sobre K se considera el automorfismo F de $\mathcal{M}_n(K)$ definido por $F(X) = P^{-1} \cdot X \cdot P$ para toda matriz X de orden n sobre K (ver prob. 17, pag. 155). Calcular traza F y $\det F$.

LECCION 8^a: DIAGONALIZACION.

Introducción.-

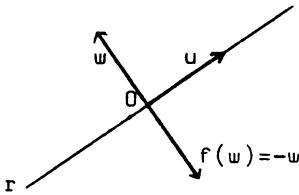
Sabemos que dado un endomorfismo f de un espacio vectorial $V(K)$ y elegida una base B de V , la matriz $M(f, B)$ identifica completamente a f . Parece entonces que, por razones meramente técnicas, sería conveniente hacer elecciones de bases B de tal forma que $M(f, B)$ sea lo "más sencilla" posible. Pongamos un ejemplo: sea f el endomorfismo del plano de vectores libres que le hace corresponder a cada vector v su "simétrico" $f(v)$ con respecto a cierta recta vectorial r (r es un espejo donde al mirarse v ve $f(v)$). Como v y $f(v)$

son independientes si $v \neq 0$ y v tiene la posición del dibujo, $B = (v, f(v))$ es una base y $M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (Obsérvese que $f \circ f = 1_V$).



Tomemos ahora w tal que $w \neq 0$ y $f(w) = -w$, y u cualquier vector no nulo. Entonces $B' = (w, u)$ es también una base y $M(f, B') = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Así

hemos conseguido una base de V tal que la matriz de f en esa base es diagonal. Claramente las matrices diagonales son las más sencillas a la hora de efectuar operaciones. Parece que lo que tenemos que buscar es bases donde las matrices de f sean diagonales. Este proceso se va a llamar la "diagonalización" de f . No hay que confundir esto con el resultado de la Proposición 4.32, pag.146. Es claro a partir de él, que si f es un endomorfismo de $V(K)$, podemos encontrar "dos bases" B y B' de V tales que $M(f, B, B') = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$ con $r = \text{rango } (f)$. Apli-



cando al ejemplo de arriba con $B = (v, f(v))$, $B' = (w, u)$ y $v=w+u$ tendríamos $M(f, B, B') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y con $B_1 = (w, u)$, $B'_1 = (-w, u)$ es $M(f, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Con lo que uno se da cuenta que si $f: V \rightarrow V'$ es un isomorfismo, siempre es posible encontrar bases B de V y B' de V' con $M(f, B, B') = I_n$. En particular, cuando $V = V'$, esto nos dice que con "dos bases" en V , B y B' siempre podemos conseguir que $M(f, B, B') = I_n$ si f es un automorfismo. En resumen, lo que da realmente información sobre un endomorfismo $f: V \rightarrow V$ es $M(f, B)$ y no $M(f, B, B')$.

Por otro lado, en muchos problemas físicos tiene gran interés que para ciertos endomorfismos f podamos encontrar vectores $x \neq 0$ tales que $f(x) = a.x$ para algún escalar a . Tal ocurre en problemas de vibraciones. En este caso las frecuencias con que oscila un sistema se pueden determinar encontrando los escalares a que cumplen $f(x) = a.x$, $x \neq 0$. Estos escalares "a" y estos vectores "x" tienen interpretación física, los primeros determinan las frecuencias de oscilación del sistema, mientras que los vectores describen cómo puede oscilar este.

Valores y vectores propios de un endomorfismo y una matriz cuadrada. Conceptos de endomorfismo diagonalizable y matriz cuadrada diagonalizable.-

Damos en primer lugar algunos ejemplos.

1.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(a_1, a_2) = (-a_2, a_1)$. Entonces f es un endomorfismo de \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}) y cumple $f.f = -I_{\mathbb{R}^2}$. De modo que si $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, verifica $f(x) = a.x$ para $a \in \mathbb{R}$ entonces $(f.f)(x) = a.f(x) = a^2.x$ y como $f.f = -I_{\mathbb{R}^2}$ será $a^2.x = -x$, pero $x \neq 0$ lo que implica $a^2 = -1$. Como no hay ningún número real a que verifique $a^2 = -1$ resulta que no podemos encontrar una base B de \mathbb{R}^2 tal que $M(f, B)$ sea diagonal.

2.- Sea $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $g(a_1, a_2) = (a_1, -a_2)$. Entonces g es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ y cumple $g \circ g = 1_{\mathbb{R}^2}$. Así, si $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, verifica $g(x) = a \cdot x$ para $a \in \mathbb{R}$, entonces $(g \circ g)(x) = a \cdot g(x) = a^2 \cdot x$ con lo que $a^2 = 1$. Si $B = (e_1, e_2)$ es la base ordenada usual de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ entonces $M(g, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3.- Sea $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $h(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_2)$. Uno ve, análogamente a los ejemplos anteriores, que $(h-1_{\mathbb{R}^2})(h-1_{\mathbb{R}^2}) = f_0$ siendo f_0 el endomorfismo nulo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. Así, si $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, es tal que $h(x) = a \cdot x$ entonces $(a-1)^2 = 0$. Si pudiesemos encontrar una base B de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ tal que $M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ h sería la identidad de \mathbb{R}^2 y es claro que eso no ocurre.

En estos ejemplos se pone de manifiesto que dependerá mucho de qué "ecuaciones" verifique un endomorfismo para poder encontrar una base donde su matriz sea diagonal.

Definición 8.1.- Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(K)$ (K representará siempre un cuerpo conmutativo y con $\text{carac}(K) \neq 2$). Un escalar $a \in K$ se dice que es un valor propio de f (autovalor de f) si existe $x \in V$, $x \neq 0$, tal que $f(x) = a \cdot x$. En este caso al vector x , $x \neq 0$, que cumple $f(x) = a \cdot x$ para algún $a \in K$ se le llama vector propio de f de valor propio a (autovector de f asociado al autovalor a).

Definición 8.2.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Un escalar $a \in K$ se dice que es un valor propio de A (autovalor de A) si existe $x \in K^n (= \mathcal{M}_{n \times 1}(K))$, $x \neq 0$ tal que $A \cdot x = a \cdot x$. El vector x , $x \neq 0$, tal que $A \cdot x = a \cdot x$ para $a \in K$, se le llama vector propio de A de valor propio a (autovector de A asociado al autovalor a).

Obsérvese que a es un valor propio de A , si y sólo si, a es un valor propio del endomorfismo $f_A: K^n \rightarrow K^n$ dado por $f_A(y) = A \cdot y$ (problema 5, pag. 153). Un vector propio de A es así-

mismo un vector propio de f_A . Por otro lado, si a es un valor propio de $f \in \text{End}_K V$ y B es una base de V , el escalar a es un valor propio de la matriz $M(f, B)$, y si $x \in V$ es un vector propio de f , el vector de K^n formado por las coordenadas de x en B es un vector propio de la matriz $M(f, B)$. Recíprocamente, sea $f \in \text{End}_K V$ y B una base ordenada cualquiera de $V(K)$. Entonces un valor propio para la matriz $M(f, B)$ es un valor propio de f y un vector propio de $M(f, B)$ nos da, tomando el único vector de esas coordenadas en B , un vector de f .

En el ejemplo 1 tenemos un endomorfismo sin ningún valor propio. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tampoco tiene ningún valor propio.

El endomorfismo g del ejemplo 2 tiene los valores propios 1 y -1. Los vectores e_1 y e_2 son propios de g respectivamente asociados a 1 y -1. En el ejemplo 3 tenemos un endomorfismo cuyo "único" valor propio es 1, sin embargo no podemos encontrar dos vectores de \mathbb{R}^3 propios, de valor propio 1 y que sean independientes.

Definición 8.3.- Sea $f \in \text{End}_K V$. Decimos que f es diagonalizable si es posible encontrar una base ordenada B de V formada por vectores propios; es decir, tal que $M(f, B)$ sea diagonal. La diagonalización de f será entonces el proceso que conduzca a encontrar tal base (*¡cuando ella exista!*).

Definición 8.4.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Decimos que A es diagonalizable si es posible encontrar $P \in G_1(n, K)$ tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal; es decir, si A es semejante a una matriz diagonal. La diagonalización de A será precisamente el encontrar la matriz P (*¡cuando sea posible!*).

Nótese que una matriz A es diagonalizable si y sólo si el endomorfismo f_A de $K^n(K)$ definido por $M(f_A, B) = A$, siendo B la base ordenada usual de $K^n(K)$ (problema 5, pag 153) es diagonalizable.

Está claro que si $f \in \text{End}_K V$ es diagonalizable y B' es cualquier base de $V(K)$, la matriz $M(f, B')$ es diagonalizable (Si B es una base tal que $M(f, B)$ es diagonal tenemos que $M(f, B)$ y $M(f, B')$ son semejantes, (Proposición 4.37, pag. 149)). Recíprocamente, sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalizable y sean V un espacio vectorial sobre K con $\dim_K V = n$ y B una base ordenada de V . Si f es el único endomorfismo de V con $M(f, B)$ entonces f es diagonalizable. En efecto, tenemos una nueva base \tilde{B} de V definida por $M(1_V, \tilde{B}, B) = P$ (ver pag 150) donde $P \in GL(n, K)$ es tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es diagonal. Entonces $M(f, \tilde{B})$ es precisamente $P^{-1} \cdot A \cdot P$ y por tanto f es diagonalizable.

Teniendo en cuenta el Teorema 5.4, pag. 184, uno también podría hablar de que un tensor $(1,1)$ sobre $V(K)$ es diagonalizable. En concreto, dado $T \in \mathcal{T}_{1,1}(V)$ sea f el único endomorfismo de $V(K)$ tal que $T_f = T$. Supongamos que f es diagonalizable y sea $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una base de $V(K)$ formada por vectores propios de valores propios a_1, a_2, \dots, a_n . Entonces si $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ es la base dual de B resulta

$$T = \sum_{i=1}^n t_i^i \cdot \varphi^i \otimes x_i$$

donde $t_i^i = a_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. De modo que podemos decir que un tensor $(1,1)$ es diagonalizable si es posible encontrar una base B de $V(K)$ de tal forma que la matriz de coordenadas de T respecto a una base ordenada de $\mathcal{T}_{1,1}(V)$, inducida por B como en la pag. 182, es diagonal.

Nótese que en el ejemplo 1 tenemos un endomorfismo f que no es diagonalizable. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tampoco es diagonalizable. El endomorfismo g del ejemplo 2, si es diagonalizable pero el endomorfismo h del ejemplo 3 no lo es. Sin embargo f y h no son diagonalizables por distinto motivo. El endomorfismo f no tiene ningún valor propio, mientras que h tiene un valor propio 1

pero no hay una base de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ con vectores propios asociados a f (ver pag. 273).

Polinomio característico de un endomorfismo y de una matriz cuadrada. El teorema fundamental de diagonalización.-

De lo expuesto en el epígrafe anterior se deduce que una condición necesaria (y no suficiente) para que un endomorfismo f de $V(K)$ sea diagonalizable, es que f tenga valores propios. Estudiaremos estos a continuación empezando por ver que se pueden obtener como soluciones de cierta ecuación asociada a f .

Un escalar $a \in K$ es un valor propio de f si y sólo si $\exists x \in V, x \neq 0$, con $x \in \text{Ker}(f-a \cdot \text{l}_V)$, que a su vez es equivalente con que $f-a \cdot \text{l}_V$ no sea biyectiva, lo cual ocurre si y sólo si $\det(f-a \cdot \text{l}_V) = 0$ ((5) en Teorema 7.6, pag. 238). Así, el conjunto de los valores propios de f coincide con

$$\{a \in K \mid \det(f-a \cdot \text{l}_V) = 0\}.$$

Ahora bien, si ponemos $p_f(t) = \det(f-t \cdot \text{l}_V)$ resulta que $p_f(t)$ es un polinomio en la indeterminada "t" de grado $\dim_K V$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ resulta que el conjunto de los valores propios de A viene dado por

$$\{a \in K \mid \det(A-a \cdot \text{I}_n) = 0\}.$$

Poniendo, como antes, $p_A(t) = \det(A-t \cdot \text{I}_n)$ resulta que $p_A(t)$ es un polinomio en la indeterminada "t" de grado n . Entonces podemos enunciar

Proposición 8.5.- Si $f \in \text{End}_K V$ (ó $A \in \mathcal{M}_n(K)$) es diagonalizable entonces la ecuación $p_f(t) = 0$ (la ecuación $p_A(t) = 0$) ha de tener $n = \dim_K V$ soluciones contadas con su multiplicidad.

Por tanto una condición necesaria (y no suficiente) para que un endomorfismo de $V(K)$ (ó una matriz cuadrada de orden n) sea diagonalizable es que tenga $n = \dim_K V$ valores propios, contados

*

cada uno con su multiplicidad.

Recordemos ahora que dijimos que el endomorfismo h del ejemplo 3, pag. 273, tenía un "único" valor propio. Si nos damos cuenta $p_h(t) = (1-t)^2$. De modo que según lo anterior afirmamos que h tiene dos valores propios 1 y 1 (nótese que el único endomorfismo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ diagonalizable que tiene a 1 como valor propio "doble" es $1_{\mathbb{R}^2}$).

Definición 8.6.- Al polinomio $p_f(t) = \det(f - t \cdot 1_V)$ se le llama el polinomio característico de f . A la ecuación $p_f(t) = 0$ se le llama la ecuación característica de f .

Definición 8.7. Al polinomio $p_A(t) = \det(A - t \cdot I_n)$ se le llama el polinomio característico de A . A la ecuación $p_A(t) = 0$ se le llama la ecuación característica de A .

Acabamos de ver que un escalar $a \in K$ es un valor propio de f (resp. valor propio de A) si y sólo si es raíz de la ecuación característica de f (resp. de la ecuación característica de A).

Teniendo en cuenta la definición de determinante de una matriz (Definición 7.8, pag 241) tenemos para cualquier base B de V

$$p_f(t) = \det(f - t \cdot 1_V) = \det M(f - t \cdot 1_V) \quad \text{y como}$$

$$M(f - t \cdot 1_V) = M(f, B) - t \cdot M(1_V, B) = M(f, B) - t \cdot I_n$$

resulta

$$p_f(t) = \det(M(f, B) - t \cdot I_n) = p_{M(f, B)}(t).$$

En particular, si f_A es el endomorfismo de $K^n(K)$ definido por $M(f_A, B') = A$, siendo B' la base usual de K^n , ocurre

$$p_{f_A}(t) = p_{M(f_A, B')}(t) = p_A(t),$$

lo cual está de acuerdo con la discusión en la pag. 274.

Si tomamos $B = (e_1, e_2)$ la base usual de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, tenemos que los polinomios característicos de los endomorfismos f y g de la introducción son

$$p_f(t) = \det \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1$$

$$p_g(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & -1-t \end{pmatrix} = -(1-t)(1+t) = t^2 - 1$$

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. El polinomio característico de A es

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 - 1$$

De modo que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tienen el mismo polinomio característico. Por otro lado, si g es el endomorfismo de \mathbb{R}^2 del ejemplo 2, pag. 273, y $B' = (e'_1, e'_2)$ con $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$ tenemos que B' es una base de \mathbb{R}^2 que cumple $M(g, B') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Esto se generaliza en la siguiente

Proposición 8.8.- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ son semejantes entonces

$$p_A(t) = p_B(t).$$

(pruébese como ejercicio).

El recíproco no es cierto, pues las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen ambas el mismo polinomio característico $(1 - t)^2$ y no son semejantes.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ entonces

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-t \end{pmatrix} = t^2 - (\text{traza } A).t + \det A$$

y que si $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} p_B(t) = -t^3 + (\text{traza } B).t^2 - \left\{ \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \det \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \right\}. t + \det B. \end{aligned}$$

Según la Proposición 8.8 si dos matrices son semejantes tienen igual polinomio característico, y eso quiere decir que ambas deben tener el mismo determinante (pag. 242) la misma traza (prob. 16, pag. 155) y así con todos los demás coeficientes.

Definición 8.9. - Sea a un valor propio de $f \in \text{End}_K V$. Entonces a $V_a = \{x \in V / f(x) = a.x\}$ se le llama el subespacio propio de V asociado al valor propio a de f . Nótese que $V_a = \text{Ker}(f-a.\text{id}_V)$ y por ello es un subespacio vectorial de V . Además $0 \in V_a$ aunque según nuestra definición, 0 no puede ser un vector propio (esto es porque $f(0) = b.0 \quad \forall b \in K$).

Definición 8.10. - Sea a un valor propio de $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Entonces a $V_a = \{x \in K^n / A.x = a.x\}$ se le llama el subespacio propio de K^n asociado al valor propio a de A (iguales consideraciones que en la anterior definición pueden hacerse ahora).

Si g es el endomorfismo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ del ejemplo 2, pag. 273,

tenemos

$$(\mathbb{R}^2)_1 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 / g(a_1, a_2) = (a_1, a_2)\} = L(\{(1, 0)\})$$

$$(\mathbb{R}^2)_{-1} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 / g(a_1, a_2) = -(a_1, a_2)\} = L(\{(0, 1)\}).$$

Obsérvese que \mathbb{R}^2 es suma directa de estos dos subespacios suyos. Sin embargo en el tercer ejemplo, pag. 273, el subespacio propio de \mathbb{R}^2 asociado al valor propio 1 del endomorfismo h es

$$\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 / h(a_1, a_2) = (a_1, a_2)\} = L(\{(1, 0)\})$$

que tiene dimensión 1.

Examinemos algunas propiedades de los vectores y subespacios propios.

Proposición 8.11.- Sea $f \in \text{End}_K V$ y sea V_a el subespacio propio de V asociado al valor propio a de f . Entonces V_a es invariante por f , es decir $f_*(V_a) \subset V_a$.

Si a y b son dos valores propios distintos de f , entonces $V_a \cap V_b = \{0\}$. Por tanto, si $x \in V_a$, $x \neq 0$, $y \in V_b$, $y \neq 0$, $\{x, y\}$ es linealmente independiente.

Demostración.- Sea $x \in V_a$, entonces $f(x) = a.x$ que pertenece a V_a por tanto $f_*(V_a) \subset V_a$.

Si $z \in V_a \cap V_b$ entonces $f(z) = a.z = b.z$ luego $(a-b).z = 0$. Al ser $a \neq b$ esto implica $z=0$. Nótese por último que si $\{x, y\}$ es linealmente dependiente, por la Proposición 3.27, pag. 88, ocurriría, por ejemplo $x=c.y$, $c \in K$, y por lo tanto $x \in V_a \cap V_b$ lo que implica $x=0$.

La segunda afirmación de este resultado se puede generalizar a un número cualquiera (finito) de subespacios propios. Se obtiene así que si $V_{a_1}, V_{a_2}, \dots, V_{a_r}$ son subespacios propios de V asociados a los valores propios a_1, \dots, a_r de f , entonces

$$(v_{a_1} + \dots + v_{a_j}) \cap v_{a_{j+1}} = \{0\} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$$

lo que implica (ver Proposición 3.12) que el subespacio suma

$$v_{a_1} + v_{a_2} + \dots + v_{a_r} \text{ de } V \text{ puede escribirse } v_{a_1} \oplus v_{a_2} \oplus \dots \oplus v_{a_r}.$$

Proposición 8.12.- Sea f un endomorfismo de $V(K)$ y sean v_{a_1}, v_{a_2}, \dots

\dots, v_{a_r} los subespacios propios de V asociados a los valores propios a_1, a_2, \dots, a_r de f . Entonces

$$f \text{ es diagonalizable} \iff V = v_{a_1} \oplus v_{a_2} \oplus \dots \oplus v_{a_r}$$

(Analogamente tendríamos un resultado similar a la Proposición 8.12 si se cambia f por una matriz cuadrada sobre K , A , y V por K^n).

Demostración.- Si f es diagonalizable existe una base B formada por vectores propios . Pongamos

$$B = (x_1^{(1)}, \dots, x_{i_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_{i_r}^{(r)})$$

donde $x_k^{(j)}$ es propio de valor propio a_j , $1 \leq j \leq r$. Entonces, cada vector x de V se escribe de manera única

$$x = \sum_{j=1}^{i_1} b_j \cdot x_j^{(1)} + \dots + \sum_{\ell=1}^r d_\ell \cdot x_\ell^{(r)}$$

es decir, como suma de un vector propio correspondiente a cada valor propio , y por tanto $V = v_{a_1} \oplus v_{a_2} \oplus \dots \oplus v_{a_r}$ (ver Proposición 3.12 y la discusión de arriba). Recíprocamente , tomamos una base de cada v_{a_i} , $1 \leq i \leq r$, como

$$V = v_{a_1} \oplus v_{a_2} \oplus \dots \oplus v_{a_r}$$

todos estos vectores me dan una base de V (Problema 20, pag. 105)

Con lo que f es diagonalizable y esto concluye la prueba.

Volviendo al ejemplo 3, pag. 273, resulta que el valor propio λ aparece dos veces (tiene multiplicidad 2) y el subespacio propio asociado a λ sólo tiene dimensión 1. Que la multiplicidad de un valor propio λ_i coincida con la dimensión de V_{λ_i} no quiere

dicir otra cosa que podemos elegir tantos vectores propios independientes de valor propio λ_i como veces salga λ_i solución de la ecuación característica.

Como consecuencia de la Proposición 8.12, vamos a dar una condición suficiente de diagonalización que no va a ser necesaria como lo pone de manifiesto el endomorfismo h del ejemplo 3.

Proposición 8.13.- Un endomorfismo de un espacio vectorial $V(K)$ de dimensión n (o una matriz de orden n sobre K) que tiene n valores propios distintos es diagonalizable.

Demostración.- Tomemos un vector propio asociado a cada uno de los n valores propios. De esta forma tenemos n vectores independientes en V (Proposición 8.11). De acuerdo con la Proposición 3.40, pag. 96, estos vectores constituyen una base de $V(K)$.

Vamos ahora a dar una condición necesaria y suficiente de diagonalización. Necesitamos el siguiente resultado previo

Lema 8.14.- Sea $f \in \text{End}_K V$ y a un valor propio de f . Entonces

$$\dim_K V_a \leq \text{multiplicidad de } a.$$

Demostración.- Supongamos $m = \dim_K V_a$. Sea $B_1 = (x_1, \dots, x_m)$ una base ordenada de V_a . Utilizando el teorema de ampliación de la base (Teorema 3.39, pag. 96) podemos tener una base B de V de la forma $B = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$. Entonces

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} a \cdot I_m & A' \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

donde A' y A'' son matrices sobre K con órdenes $m \times (n-m)$ y $(n-m) \times (n-m)$ respectivamente.

Calculemos el polinomio característico de f

$$p_f(t) = \det(M(f, B) - t \cdot I_n) = \det \left(\begin{array}{c|c} (a-t) \cdot I_m & A' \\ \hline 0 & A'' - t \cdot I_{n-m} \end{array} \right)$$

y por el problema 3 , pag. 267, resulta

$$\begin{aligned} p_f(t) &= \det((a-t) \cdot I_m) \cdot \det(A'' - t \cdot I_{n-m}) = \\ &= (a-t)^m \cdot \det(A'' - t \cdot I_{n-m}). \end{aligned}$$

Esta fórmula nos dice que la multiplicidad de la raíz a de $p_f(t) = 0$ es por lo menos igual a m (ya que también podría ocurrir que a fuese raíz de $\det(A'' - t \cdot I_{n-m}) = 0$). Así se concluye la prueba del Lema 8.14.

Teorema 8.15.- (Teorema fundamental de diagonalización)

Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(K)$ de dimensión n . La condición necesaria y suficiente para que f sea diagonalizable es que se verifiquen:

(1) La ecuación $p_f(t) = 0$ tiene n soluciones (contadas cada una tantas veces como su multiplicidad indique) en K .

(2) Para cada valor propio a de f (solución de $p_f(t) = 0$) se cumple $\dim_K V_a =$ multiplicidad de a .

Demostración.- Si f es diagonalizable su polinomio característico $p_f(t)$ se escribirá como

$$p_f(t) = (a_1 - t)^{m_1} \cdot (a_2 - t)^{m_2} \cdots (a_r - t)^{m_r}$$

donde a_1, a_2, \dots, a_r son los valores propios de f y m_1, m_2, \dots, m_r sus respectivas multiplicidades. Por tanto, es claro que ocurre (1).

Por otro lado, según la Proposición 8.12, pag. 281 , tendremos

$$V = V_{a_1} \oplus V_{a_2} \oplus \dots \oplus V_{a_r}$$

y por tanto

$$n = \dim_K V = \sum_{i=1}^r \dim_K V_{a_i}.$$

Por otro lado $n = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ que junto con la fórmula anterior implica

$$0 = \sum_{i=1}^r (m_i - \dim_K V_{a_i})$$

pero por el Lema 8.14 , pag. 282 , $\dim_K V_{a_i} \leq m_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

De modo que ha de ser

$$\dim_K V_{a_i} = m_i$$

lo que prueba (2).

Recíprocamente, consideremos el subespacio

$$V_{a_1} + V_{a_2} + \dots + V_{a_r} = V_{a_1} \oplus V_{a_2} \oplus \dots \oplus V_{a_r}$$

(ver pag. 281) de V . Probamos que tiene igual dimensión que V y por tanto coincide con V .

$$\dim_K (V_{a_1} \oplus V_{a_2} \oplus \dots \oplus V_{a_r}) = \sum_{i=1}^r \dim_K V_{a_i} = \sum_{i=1}^r m_i = n = \dim_K V$$

Con lo cual

$$V = V_{a_1} \oplus V_{a_2} \oplus \dots \oplus V_{a_r}$$

y por tanto (Proposición 8.12, pag. 281) f es diagonalizable, y así acaba la demostración.

Corolario 8.16.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. La condición necesaria y suficiente para que A sea diagonalizable es que se verifique :

(1)' La ecuación $p_A(t) = 0$ tiene n soluciones (contada cada una tantas veces como su multiplicidad indique) en K .

(2)' Para cada valor propio a de A (solución de $p_A(t) = 0$) se cumple $\dim_{K_a} V_a = \text{multiplicidad de } a$.

Nótese que si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es diagonalizable y P es una matriz regular de orden n sobre K tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es diagonal tendrá por columnas n vectores propios de A , que forman una base de K^n , y que la matriz diagonal resultante es del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} a_1 \cdot I_{m_1} & 0 \\ \hline 0 & a_2 \cdot I_{m_2} \\ & \vdots \\ 0 & a_r \cdot I_{m_r} \end{array} \right)$$

que es única, salvo una reordenación de las submatrices $a_i \cdot I_{m_i}$.

Corolario 8.17.- Sean A y B dos matrices de orden n sobre K diagonalizables. Entonces A y B son semejantes si y sólo si

$$p_A(t) = p_B(t).$$

Demostración.- Si A y B son semejantes tienen igual polinomio característico por la Proposición 8.8, pag. 278. Recíprocamente,

$$p_A(t) = p_B(t) = (a_1 - t)^{m_1} \cdot (a_2 - t)^{m_2} \cdots (a_r - t)^{m_r}$$

por tanto, A y B son semejantes a la misma matriz diagonal y por ello A es semejante a B .

Algunas aplicaciones de la diagonalización.-

Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $f \in \text{End}_K V$. Vamos a buscar condiciones suficientes sobre f para que exista $h \in \text{End}_K V$: $h \cdot h = f$ (h se llama una raíz cuadrada de f). Supongamos que f es diagonalizable y sea B una base de V formada por vectores propios. Además, si a_1, \dots, a_r son los valores propios de f , vamos a suponer que cada a_i tiene una "raíz cuadrada" en K ; es decir, que po-

demos encontrar $b_i \in K$ con $b_i \cdot b_i = a_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$ (por ejemplo, si $K = \mathbb{R}$ eso ocurre cuando $a_i \geq 0$; para $K = \mathbb{C}$ eso ocurre siempre). Sea h el único endomorfismo de $V(K)$ cuya matriz en la base B , $M(h, B)$, es diagonal de la forma

$$M(h, B) = \left(\begin{array}{c|c} b_1 \cdot I_{m_1} & 0 \\ \hline 0 & b_2 \cdot I_{m_2} \\ & \vdots \\ 0 & b_r \cdot I_{m_r} \end{array} \right)$$

si es

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} a_1 \cdot I_{m_1} & 0 \\ \hline 0 & a_2 \cdot I_{m_2} \\ & \vdots \\ 0 & a_r \cdot I_{m_r} \end{array} \right)$$

Como tenemos

$$M(h \circ h, B) = M(h, B) \cdot M(h, B) = M(f, B)$$

ocurre

$$h \circ h = f.$$

La versión matricial de esto afirmaría que si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es diagonalizable y todos sus valores propios tienen "raíz cuadrada" en K existe $C \in \mathcal{M}_n(K) : C \cdot C = A$.

Sea ahora $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y $m \in \mathbb{Z}^+$. Está claro que si uno preten-de calcular A^m la cosa se complica si m es "muy grande", además, en general, no será posible encontrar una ley que nos de los elementos de A^m a partir de los de A y del entero m . Vamos a suponer que A es diagonalizable y veamos como A^m se calcula ahora de forma muy sencilla, no importando quien sea m . En efecto, sea

$P \in GL(n, K)$ tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ siendo D una matriz diagonal. Entonces

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

y

$$A^m = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdots (P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot D^m \cdot P^{-1}$$

donde la matriz D^m es diagonal y se obtiene de D simplemente "elevando a m " los elementos de la diagonal de D . Si además A fuese regular y p es entero negativo tendríamos $A^p = (A^{-1})^m$ donde $m=-p \in \mathbb{Z}^+$. Repitiendo el proceso anterior para A^{-1} en lugar de A podemos calcular A^p .

PROBLEMAS

- 1.- Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(K)$. Probar que 0 es un valor propio de f si y sólo si f no es inyectiva.
- 2.- Si a es un valor propio de un endomorfismo f de $V(K)$, probar que $a^m, m \in \mathbb{Z}^+$, es un valor propio de $f^m (= f \circ \dots \circ f)$. Si además f es un automorfismo de $V(K)$, demostrar que $a^p, p \in \mathbb{Z} - \{0\}$, es un valor propio de f^p .
- 3.- Determinar los vectores propios y valores propios de las siguientes matrices reales

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Calcular cual de ellas es diagonalizable en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? . ¿Hay alguna que no sea diagonalizable en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y si lo sea al considerarla en $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

4.- Sea $A \in \mathcal{M}_m(K)$, $A' \in \mathcal{M}_{m \times (n-m)}(K)$ y $A'' \in \mathcal{M}_{(n-m) \times (n-m)}(K)$.

Se considera la matriz sobre K de orden n

$$M = \begin{pmatrix} A & A' \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

Demostrar que el polinomio característico de M es el producto de los polinomios característicos de A y A'' . (Ver prob. 3, pag. 267 y pag. 283).

5.- Dar tres ejemplos de endomorfismos de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ que tengan, respectivamente, por polinomios característicos

$$(1 - t)^3 \quad -(1 - t)^2 \cdot (1 + t) \quad (1 - t) \cdot (t^2 + 1)$$

6.- Sean $n \in \mathbb{Z}^+$, K un cuerpo y $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K$. Demostrar que la matriz A de orden n sobre K

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

tiene polinomio característico

$$p_A(t) = (-1)^n \cdot (a_0 + a_1 \cdot t + \dots + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + t^n)$$

y que si $a \in K$ es un valor propio de A , entonces el vector

$x = (1, a, a^2, \dots, a^{n-1})$ es un vector propio de A de valor propio a .

7.- Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(K)$ y sea $t_f \in \text{End}_K V^*$ su traspuesto. Probar que f y t_f tienen el mismo polinomio característico y que los subespacios de V y V^* correspondientes a los mismos valores propios de f y t_f tienen la misma dimensión. Con ello probar que f es diagonalizable si y sólo si lo es t_f .

8.- Probar las fórmulas de la pag. 279 para el polinomio característico de matrices de orden 2 y de orden 3. Generalizar obteniendo una fórmula análoga para matrices de orden 4. ¿Quién es el término independiente de $p_A(t)$ para cualquier $A \in \mathcal{M}_n(K)$?

9.- A partir del problema anterior , probar que toda matriz real de orden 2,A con $\det A < 0$ es diagonalizable.

10.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que la suma de los elementos de cada linea (fila y columna) es 1. Demostrar que 1 es un valor propio de A. Poner algún ejemplo.

11.- Se considera el tensor T de tipo (1,1) sobre $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ dado por

$T = \sum t_j^i \cdot \varphi^j \otimes e_i$ donde $B = (e_1, e_2, e_3)$ es la base usual de \mathbb{R}^3 y $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ su dual en (\mathbb{R}^3) y $t_j^i = i + j \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Probar que existe una base $B = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 tal que

$T = \sum t'_j^i \cdot \varphi'^j \otimes e'_i$, siendo $B' = (\varphi'^1, \varphi'^2, \varphi'^3)$ la base dual de B y donde $t'_j^i = 0$ si $i \neq j$ (T se puede diagonalizar en el sentido de la pag. 275)

12.- Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ entonces

$$A^2 - (\text{traza } A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = 0.$$

13.- Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que cumple traza $A = \det A = 0$. Probar que $A^2 = 0$.

(usar el problema anterior). Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = 0$. Demostrar que ó $A = 0$ ó bien $\{A, I_2\}$ es linealmente independiente y por tanto traza $A = \det A = 0$.

14.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calcular A^{12} y A^{-7} . ¿Es

posible encontrar $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$? . (Indicación : ver problema 23, página 270) . ¿Es posible encontrar $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tal que $C^2 = A$? (ver pag. 286).

15.- Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(K)$, $n = \dim_K V$. Si su ecuación característica $p_f(t) = 0$ tiene n soluciones en K , probar que existe una base ordenada B de V tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde los elementos de la diagonal de $M(f, B)$ son los valores propios de f . (Indicación : utilizar inducción sobre n).

Se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ dado por $f(a_1, a_2) = (-2a_1 - a_2, a_1)$. ¿ Es diagonalizable ? . Si no lo es encontrar, si es posible, una base B de \mathbb{R}^2 donde $M(f, B)$ sea del tipo anterior.

16.- Como aplicación del problema anterior probar que cada matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ (que tiene n valores propios en \mathbb{C}) es semejante a una (*) del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde los escalares de la diagonal son los valores propios de A .

17.- Sea f un endomorfismo de $V(K)$ que tiene n valores propios . Demostrar que existen $f_1, f_2 \in \text{End}_K V$ tales que f_1 es diagonalizable, f_2 verifica $f_2^n = f_0$ (f_0 es el endomorfismo nulo de V y $n = \dim_K V$) y $f = f_1 + f_2$. (Aplicar el problema 15).

(*) Dado un polinomio $p(t) \in \mathbb{C}[t]$, de grado $n \geq 1$, la ecuación $p(t) = 0$ tiene n soluciones en \mathbb{C} , contada cada una tantas veces como indique su multiplicidad. (Véase el tomo II de la obra de Mac Lane, Birkhoff que se da en la Bibliografía para una prueba de este resultado).

18.- Para cada $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $a \in K$, encontrar qué relación hay entre los valores propios de A y de $A + a.I_n$. Demostrar que A es diagonalizable si y sólo lo es $A + a.I_n$.

19.- Probar explicitamente que si $\{x_1, \dots, x_m\}$ es un conjunto de vectores propios de un endomorfismo f de un espacio vectorial $V(K)$, cada uno correspondiente a un valor propio distinto, entonces $\{x_1, \dots, x_m\}$ es linealmente independiente (el caso $m = 2$ está probado en Prop. 8.11, pag. 280).

20.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = r.I_n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son \sqrt{r} y $-\sqrt{r}$. Probar tambien que A es diagonalizable. (Ind. ver prob. 9, pag. 154).

21.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que cumple $A^2 = -r.I_n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son $i\sqrt{r}$ e $-i\sqrt{r}$. Probar que A es diagonalizable. (Ind. ver prob. 32, pag. 157).

22.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$, que cumple $A^2 = r.A$, $r \in K$, $r \neq 0$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son r y 0 . Probar tambien que A es diagonalizable. (Ind. ver prob. 2, pag. 152).

23.- a) Probar que la única matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = 0$ y es diagonalizable es $A = 0$ (comparar con prob. 25, pag. 156).

b) Probar que la única matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 - 2.A + I_n = 0$ y es diagonalizable es $A = I_n$ (comparar con ejemplo 3, pag. 273).

24.- Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ sea F el endomorfismo de $\mathcal{M}_n(K)$ dado por $F(X) = A.X$ para toda $X \in \mathcal{M}_n(K)$ (ver prob. 31, pag. 157). Calcular el polinomio característico de F . ¿Qué relación hay entre los valores propios de A y de F ? (ver prob. 25, pag. 270). Probar que si A es diagonalizable entonces F es diagonalizable.

LECCION 9^a: ESPACIOS VECTORIALES METRICOS

Introducción. Métricas. Métricas euclídeas. Ejemplos.-

Los vectores libres de un plano son el primer ejemplo de espacio vectorial (ver pag. 71), incluso la teoría de espacios vectoriales "abstractos" hereda la terminología clásica de aquellos. Si releemos ahora cómo establecimos que los vectores libres tienen estructura de espacio vectorial (ejemplo 1, pag. 71) nos damos cuenta que allí aparecía el concepto (intuitivo si se quiere) de "longitud de un vector". Más adelante, en pag. 271 por ejemplo, utilizamos, sin hacer mención expresa de ello, que en el plano de los vectores libres se puede hablar de "vectores perpendiculares" y más generalmente de "vectores que forman un cierto ángulo". El alumno está familiarizado con estos conceptos pues sin duda los ha utilizado en la geometría elemental , y en la física que ha utilizado en bachillerato.

En definitiva en el espacio vectorial de los vectores libres se tiene la posibilidad de "medir". Naturalmente si se tiene alguna herramienta que permite hacer estas medidas podemos, entre otras cosas, distinguir mejor entre vectores;por ejemplo, en el plano de los vectores libres no sólo se puede hablar de que dos vectores son independientes sino tambien que dos vectores son "perpendiculares" que está claro que identifica mucho mejor la posición relativa en que se encuentran estos dos vectores.

Pero ¿ cual es la herramienta que permite "medir" en el olano de los vectores libres ?. El alumno la conoce con el nombre de "producto escalar usual" del olano de los vectores libres. Enseguida se da una cuenta que el producto escalar usual es un "tensor simétrico" que puede venir dado por el del ejemplo 4, pag.176, con $K = \mathbb{R}$ y $n=2$, al tomar $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ como representación numérica del pla-

no de los vectores libres como en pag. 72 . Pretendemos ahora generalizar esta situación. En primer lugar resulta que no parece posible "medir" longitud de vectores en un espacio vectorial sobre un cuerpo cualquiera. Necesitamos que en el cuerpo haya una relación de orden total (ver página 3) para poder comparar longitudes de vectores. Además esta relación de orden debe ser compatible con la estructura del cuerpo; por ejemplo, debe ocurrir (entre otras cosas) que el producto de dos escalares del cuerpo que sean "mayores que cero" deben ser un escalar "mayor que cero". Por estos motivos sólo estudiaremos en este tema espacios vectoriales reales pues el cuerpo de los números reales ($\mathbb{R}, +, \cdot$) tiene además un orden total (que el alumno conoce del análisis) que se comporta "muy bien" frente a la suma y producto usuales de números reales (existe un subconjunto de \mathbb{R} formados por los números reales positivos (ver pag. 33) \mathbb{R}^+ donde la suma "+" y el producto "·" son operaciones binarias y para cada real $r \in \mathbb{R}$ se cumple una y sólo una de las si-condiciones $r \in \mathbb{R}^+$, $-r \in \mathbb{R}^+$ ó $r=0$). Por otro lado el concepto de producto escalar en el plano de vectores libres se abstrae como sigue:

Definición 9.1.- Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . A cualquier tensor de tipo $(2,0)$ simétrico sobre $V(\mathbb{R})$ le llamaremos una métrica sobre $V(\mathbb{R})$. Si $(x,y) \in V \times V$ al escalar $g(x,y)$ se le llama el producto de x e y mediante g . Si además g cumple $g(x,x) \geq 0$ y $g(x,x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ diremos que g es una métrica euclídea.

Si g es una métrica sobre V , diremos que el par (V,g) es un espacio vectorial métrico. Si además g es euclídea (en el sentido anterior) diremos que (V,g) es un espacio vectorial métrico euclídeo.

Véamos los siguientes ejemplos:

1. Consideraremos en $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ el tensor g dado por

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \quad \text{siendo } x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i , \quad y = \sum_{j=1}^n b_j \cdot e_j$$

y $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base ordenada usual de $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$. Está claro que g es un tensor simétrico sobre \mathbb{R}^n y además, como

$$g(x, x) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \text{tenemos } g(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{y } g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x=0.$$

De modo que g es una métrica euclídea; la llamaremos la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$. En otras palabras, la métrica euclídea usual g de $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ viene dada por

$$g = \sum_{i=1}^n \varphi^i \otimes \varphi^i$$

(ver Teorema 6.7, pag. 188) siendo $B^* = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ la base dual de B en $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$. Así tenemos que (\mathbb{R}^n, g) es un espacio vectorial euclídeo. En particular para $n=2$, (\mathbb{R}^2, g) puede ser mirado como el espacio métrico euclídeo de los vectores libres de un plano, y para $n=3$, (\mathbb{R}^3, g) como el espacio vectorial métrico euclídeo de los vectores libres del espacio tridimensional de la geometría elemental.

2. Se considera en \mathbb{R}^n el tensor g_s dado por

$$g_s = - \sum_{i=1}^s \varphi^i \otimes \varphi^i + \sum_{j=s+1}^n \varphi^j \otimes \varphi^j$$

o bien por $g_s(x, y) = - \sum_{i=1}^s a_i \cdot b_i + \sum_{j=s+1}^n a_j \cdot b_j$ (con la misma notación que en el ejemplo precedente) para cada $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ resulta que g_s es una métrica, euclídea si y sólo si $s=0$. Así (\mathbb{R}^n, g_s) es un espacio vectorial métrico, euclídeo si y sólo si $s=0$.

3. Sea A una matriz simétrica de orden n sobre \mathbb{R} . Entonces el tensor g_A sobre \mathbb{R}^n dado por

$$g_A(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot a_i \cdot b_j$$

es simétrico (ver pag. 207). Por tanto g_A es una métrica (no euclídea en general) sobre \mathbb{R}^n .

4. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales. Se define $g(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(t) \cdot q(t) dt$

para $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ es decir, el producto de $p(x)$ y $q(x)$ según g , es el número real obtenido al integrar el producto de estos polinomios entre 0 y 1. Entonces g es una métrica sobre $\mathbb{R}[x]$ y

si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces $g(p(x),p(x)) = \int_0^1 p(t)^2 dt \geq 0$, además

$g(p(x),p(x)) = 0 \Leftrightarrow p(t)=0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1$ y esto ocurre si y sólo si $p(x)$ es el polinomio nulo.

5. En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definimos para cada $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$g(A, B) = \text{traza } {}^t AB = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot b_{ij} \in \mathbb{R}, \quad A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}).$$

Entonces g es una métrica sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y como $g(A, A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$

resulta que $g(A, A) \geq 0$ y $g(A, A) = 0$ sí y sólo si $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, es decir, sí y sólo si A es la matriz nula.

Por tanto, g es una métrica euclídea sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), g)$ es un espacio vectorial métrico euclídeo.

6. Si g es una métrica sobre $V(\mathbb{R})$ y $g|_U$ representa la restricción de g a un subespacio vectorial U de V , resulta que $g|_U$ es una métrica sobre U . Entonces $(U, g|_U)$ es un espacio vectorial métrico distinto de (V, g) . Nótese que si (V, g) es euclídeo, también lo es $(U, g|_U)$.

7. Si (V_1, g_1) y (V_2, g_2) son espacios vectoriales métricos podemos definir una métrica $g_1 \times g_2$ en el espacio vectorial producto $V_1 \times V_2$ (prob. 5, pag. 103) poniendo

$$(g_1 \times g_2)((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2)$$

Además si g_1 y g_2 son euclídeas también lo es $g_1 \times g_2$.

Formas cuadráticas. Métricas y endomorfismos.-

Si (V, g) es un espacio vectorial métrico podemos definir una aplicación $F_g : V \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $F_g(x) = g(x, x)$, $\forall x \in V$, que fácilmente se comprueba que verifica

$$(1) \quad F_g(a \cdot x) = a^2 \cdot F_g(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in V$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} \cdot \{F_g(x+y) - F_g(x) - F_g(y)\} = g(x, y) \quad \forall x, y \in V$$

Definición 9.1.- A esta aplicación F_g construida a partir de g se le llama la forma cuadrática asociada a la métrica g .

Axiomatizando las propiedades (1) y (2) que cumple F_g podemos dar la siguiente

Definición 9.2.- Sea $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación que verifica las siguientes propiedades:

$$(1) \quad F(a \cdot x) = a^2 \cdot F(x) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$$

$$(2) \quad g_F : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } g_F(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \{F(x+y) - F(x) - F(y)\}$$

es una métrica sobre V . Diremos entonces que F es una forma cuadrática sobre V (g_F se llama la métrica asociada a F).

Recordemos (ver Proposición 6.25, pag.208) que el conjunto de todas las métricas sobre V , $S_2(V)$, es un espacio vectorial real y que si $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ entonces $\dim_{\mathbb{R}} S_2(V) = \frac{n(n+1)}{2}$ (Proposición 6.26 pag. 208). Por otro lado

$$F(V) = \{F / F \text{ es una forma cuadrática sobre } V\}$$

es un espacio vectorial real (subespacio del espacio vectorial de todas las aplicaciones de V en \mathbb{R}).

Podemos establecer ahora la siguiente

Proposición 9.3.- La aplicación

$$\begin{array}{ccc} S_2(V) & \longrightarrow & F(V) \\ g & \longleftarrow & F_g \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración.- Sean $g, g' \in S_2(V)$, entonces

$$\begin{aligned} F_{g+g'}(x) &= (g+g')(x, x) = g(x, x) + g'(x, x) = F_g(x) + F_{g'}(x) = \\ &= (F_g + F_{g'})(x) \quad \forall x \in V \end{aligned}$$

Con lo que $F_{g+g'} = F_g + F_{g'}$. Además si $g \in S_2(V)$ y $a \in \mathbb{R}$ tenemos

$$F_{a \cdot g}(x) = (a \cdot g)(x, x) = a \cdot g(x, x) = a \cdot F_g(x) = (a \cdot F_g)(x) \quad \forall x \in V$$

y por ello $F_{a \cdot g} = a \cdot F_g$. Lo que prueba la linealidad. Para probar que es biyectiva consideremos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \longrightarrow & S_2(V) \\ F & \longleftarrow & g_F \end{array}$$

que fácilmente se comprueba que es la inversa de la dada. Esto concluye la demostración.

Esta proposición prueba que los procesos de construcción de una forma cuadrática F_g a partir de una métrica g , y de una métrica g_F a partir de una forma cuadrática son ambos lineales y uno el inverso del otro. Además, como estos isomorfismos son naturales podemos afirmar que dado un espacio vectorial real V , es equivalente el considerar sobre V una métrica o una forma cuadrática. En particular esto nos da un nuevo método de construcción de métricas sobre V .

De entre todas las métricas que podamos considerar sobre un

en espacio vectorial las euclídeas son las más interesantes, entre otras cosas, porque sirven para estudiar todas las demás métricas como pone de manifiesto lo siguiente.

Sea V un espacio vectorial real y sea $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una base ordenada de V . Del ejemplo 1, pag. 293, deducimos que la métrica g sobre V dada por (ver discusión final pag. 309)

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

siendo $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$, $y = \sum_{j=1}^n b_j \cdot x_j$ es euclídea. Sea ahora $g' \in S_2(V)$. A partir de g' y g definimos una aplicación lineal

$$f_{g'} : V \longrightarrow V$$

como sigue: dado $x \in V$, $f_{g'}(x)$ es el único vector de V que cumple

$$g(f_{g'}(x), y) = g'(x, y) \quad \forall y \in V$$

Está claro que esta condición equivale a que

$$g(f_{g'}(x), x_k) = g'(x, x_k) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Supongamos probado que $f_{g'}$ es lineal (demuéstrese como ejercicio) y sea

$$f_{g'}(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \delta_{ik} = g'(x_j, x_k)$$

de modo que

$$a_{kj} = g'(x_k, x_j).$$

Es decir, $M(f_{g'}, B) = M_B(g')$, donde $M_B(g') = (g'(x_k, x_j))$ como en la pag. 195.

Podemos ahora establecer el siguiente

Teorema 9.4.- La aplicación

$$S_2(V) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}} V$$

$$g' \longmapsto f_{g'}$$

es un monomorfismo de espacios vectoriales y su imagen es

$$\{f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V / g(f(x), y) = g(x, f(y)) \quad \forall x, y \in V\}$$

Demostración.- La discusión anterior prueba que $f_{g'} \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$
 $\forall g' \in S_2(V)$. Si $g', g'' \in S_2(V)$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$f_{g'+g''} = f_{g'} + f_{g''}$$

$$f_{a \cdot g'} = a \cdot f_{g'}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} g(f_{g'+g''}(x), y) &= (g' + g'')(x, y) = g'(x, y) + g''(x, y) = \\ &= g(f_{g'}(x), y) + g(f_{g''}(x), y) = \\ &= g((f_{g'} + f_{g''})(x), y) \quad \forall y \in V, \end{aligned}$$

pero como g es euclídea esto implica $f_{g'+g''}(x) = (f_{g'} + f_{g''})(x)$ (*)
 $\forall x \in V$, es decir $f_{g'+g''} = f_{g'} + f_{g''}$. La otra igualdad se probará como ejercicio.

Si g' es una métrica tal que $f_{g'}$ es el endomorfismo nulo de $V(\mathbb{R})$ entonces $M_B(g') = M(f_{g'}, B) =$ matriz nula de orden n sobre \mathbb{R} y por tanto g' es el tensor nulo de $S_2(V)$.

Debido a que g' es un tensor simétrico tenemos

$$g(f_{g'}(x), y) = g'(x, y) = g'(y, x) = g(f_{g'}(y), x) = g(x, f_{g'}(y))$$

con lo que la imagen de este monomorfismo está contenida en

$$\{f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V / g(f(x), y) = g(x, f(y)), \quad \forall x, y \in V\}.$$

Pero cada endomorfismo f de este "subconjunto" de $\text{End}_{\mathbb{R}} V$ nos

(*) Ver Definición 9.6.

define un tensor simétrico de tipo $(2,0)$ sobre V ,

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto g(f(x),y) \end{aligned}$$

cuya imagen es precisamente esta aplicación lineal f . Por tanto, se da la otra inclusión y con ella la igualdad.

En particular el Teorema 9.4 demuestra que $\{f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V / g(f(x),y) = g(x,f(y))\}$ es un espacio vectorial con dimensión (la misma que $S_2(V)$) $\frac{n(n+1)}{2}$, siendo $n = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Desde un punto de vista algo informal podemos afirmar que la Proposición 9.4 nos dice que estudiando métricas euclídeas y endomorfismos también estudiamos otros tipos de métricas sobre su espacio vectorial.

Relación de perpendicularidad. Diversos tipos de métricas.-

Definición 9.5.- Dado un espacio vectorial métrico (V,g) decimos que x es perpendicular (u ortogonal) a y , $x,y \in V$, si $g(x,y) = 0$.

Si x es perpendicular a y (mediante g) también y es perpendicular a x por ser g un tensor simétrico. Justamente a una métrica se le exige que sea "simétrica" para que esta relación binaria entre los vectores de $V(\mathbb{R})$ sea simétrica. Esta relación binaria no es reflexiva ni tampoco transitiva. En cualquier espacio métrico el vector 0 es perpendicular a todos los demás, en particular a sí mismo. También, en algunos ejemplos existen vectores distintos del vector cero, perpendiculares a ellos mismos. En el ejemplo 2 pag. 294, si $n=2$ y $s=1$ el vector $x=e_1 + e_2$ cumple que $g_1(x,x)=0$.

Definición 9.6.- Sea (V,g) un espacio vectorial métrico. Diremos que la métrica g es no degenerada si el único vector de V que es perpendicular a todos es el cero. Si esto no ocurre g es degenerada. Una métrica euclídea sobre V (Definición 9.1) también se dice definida positiva. Una métrica g sobre V es definida negativa si $g(x,x) \leq 0$ y $g(x,x)=0$ si y sólo si $x=0$. (Una métrica definida positiva

va o negativa es no degenerada). Una métrica no degenerada que no sea definida ni positiva ni negativa se dirá indefinida.

Está claro, como vimos en la lección 6, que si

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i, \quad y = \sum_{j=1}^n b_j \cdot x_j$$

donde $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una base ordenada de V se tiene que

$$g(x, y) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot M_B(g) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

siendo $M_B(g)$ la matriz de componentes de g en una base ordenada de $\mathcal{E}_{2,0}(V)$ obtenida de $\{\varphi^i \otimes \varphi^j / i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ donde $B^* = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ es la base ordenada dual de B . Entonces si \tilde{B} es otra base de V tenemos (ver pag. 195)

$$M_{\tilde{B}}(g) = {}^t P \cdot M_B(g) \cdot P$$

siendo $P = M(1_V, \tilde{B}, B)$ la correspondiente matriz de cambio de base. Con esto podemos probar la siguiente :

Proposición 9.7.- Sea g una métrica sobre un espacio vectorial V . Tenemos que g es una métrica no degenerada si y sólo si $M_B(g)$ es regular para una base B de V , (y por tanto para toda base de V).

Demostración.- Si $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ con $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, es perpendicular a todos los vectores de V ocurre

$$M_B(g) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y reciprocamente.

Así x es perpendicular a todo $y \in V \Leftrightarrow$ sus coordenadas en B satisfacen el anterior sistema de ecuaciones lineales homogéneo.
Por tanto $x \neq 0 \Leftrightarrow \text{rango } M_B(g) < n \Leftrightarrow \det M_B(g) = 0.$

En 1, 2, 4 y 5 de las págs. 293, 294 y 295 se dan ejemplos de métricas no degeneradas. En el ejemplo 6 se puede ver que g es no degenerada si y sólo si lo es g_1 y g_2 . Finalmente si tomamos $V = \mathbb{R}^n$ y g dada por $M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ siendo B cualquier base de \mathbb{R}^n ,

resulta que g es una métrica degenerada. Las métricas de los ejemplos 1, 4 y 5 son definidas positivas y la del ejemplo 2 es indefinida si $s \neq 0, n$. Por otro lado si g es una métrica definida positiva sobre V la nueva métrica $-g$ sobre V definida por $(-g)(x, y) = -g(x, y)$ es definida negativa.

Definición 9.8.- Dado un espacio vectorial métrico (V, g) diremos que es:

degenerado si g es una métrica degenerada,
no degenerado si g es una métrica no degenerada,
indefinido si g es una métrica indefinida,
definido negativo si g es una métrica definida negativa,
un espacio euclídeo también se dice definido positivo.

Norma de un vector en un espacio vectorial métrico euclídeo.

Propiedades. Desigualdad de Schwarz. Ángulo entre dos vectores.-

En un espacio vectorial métrico "general" (V, g) uno puede hablar, como ya hemos dicho, de la relación de perpendicularidad entre vectores de V . En general $F_g(x)$ no tiene siempre el mismo signo. En un espacio vectorial métrico euclídeo sabemos que $F_g(x) \geq 0$ por lo cual podemos dar la siguiente :

Definición 9.9.- Sea (V, g) un espacio vectorial métrico euclídeo.

Definimos la longitud o norma de un vector $x \in V$ por

$$\|x\| = \sqrt{F_g(x)}$$

En el ejemplo 1 tenemos $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ siendo $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i$.

En el 4, $\|p(x)\| = \sqrt{\int_0^1 p(t)^2 dt}$ y en el 5, $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$.

Proposición 9.10.- Si (V, g) es un espacio vectorial euclídeo, entonces la norma asociada a g es una aplicación de V en \mathbb{R} que verifica las siguientes propiedades:

- (1) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (2) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\| \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in V$ donde $|a|$ es el valor absoluto del número real a .
- (3) $|g(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Desigualdad de Schwarz), dándose la igualdad si y sólo si $\{x, y\}$ es linealmente dependiente.
- (4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad de Minkowski).

Demostración.- La primera afirmación es clara de cómo se define la norma de un vector. Por otro lado, como $F_g(a \cdot x) = a^2 \cdot F_g(x)$ (ver pag. 296) tomando raíces cuadradas tenemos (2). Supongamos demostrada la desigualdad de Schwarz y veamos cómo esta implica la de Minkowski. En efecto,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= g(x, x) + 2 \cdot g(x, y) + g(y, y) \leq g(x, x) + 2|g(x, y)| + \\ &+ g(y, y) \leq g(x, x) + 2 \cdot \sqrt{g(x, x)} \cdot \sqrt{g(y, y)} + g(y, y) = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

(4) se obtiene, entonces, tomando raíces cuadradas.

Para probar la desigualdad de Schwarz observemos que cuales-

quieras sean $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$g(a.x - b.y, a.x - b.y) \geq 0 \quad \forall x, y \in V,$$

por tanto

$$a^2 \cdot g(x, x) + b^2 \cdot g(y, y) - 2.a.b.g(x, y) \geq 0.$$

Si tomamos $a = g(y, y)$, $b = g(x, y)$ en la fórmula anterior tenemos:

$$g(y, y)^2 \cdot g(x, x) + g(x, y)^2 \cdot g(y, y) - 2.g(y, y).g(x, y)^2 \geq 0$$

es decir

$$g(y, y) \cdot \{ g(y, y).g(x, x) - g(x, y)^2 - 2.g(x, y)^2 \} \geq 0$$

$$g(y, y) \cdot \{ g(y, y).g(x, x) - g(x, y)^2 \} \geq 0.$$

Como $g(y, y) \geq 0$ también resulta que $g(y, y).g(x, x) \geq g(x, y)^2$. ¿ Cuándo se da la igualdad en (3)? Es fácil ver que si x e y son vectores linealmente dependientes tenemos $g(x, y)^2 = g(x, x).g(y, y)$. Recíprocamente, si esto ocurre rehaciendo lo anterior demostración en sentido contrario tendríamos que $g(a.x - b.y, a.x - b.y) = 0$ con lo que $a.x - b.y = 0$ por ser g una métrica euclídea. Tenemos ahora que ver, que bien a ó bien b es distinto de cero, pero si $a=0$ ocurre que $y=0$ y claramente $\{y=0, x\}$ es linealmente dependiente. Si $a \neq 0$ entonces $\{x, y\}$ es linealmente dependiente.

Esta desigualdad de Schwarz es muy importante por sus muchas aplicaciones. Ya hemos visto que la de Minkowski es consecuencia de ella.

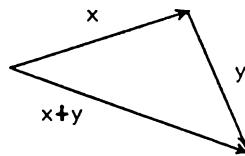
Aplicadas al ejemplo 1, pag. 293, resultan respectivamente:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad \text{siendo} \quad x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i \\ y = \sum_{j=1}^n b_j \cdot e_j$$

La desigualdad de Minkowski se llama también desigualdad triangular pues obsérvese que lo que nos dice en el caso de $n=2$ en el ejemplo 1 , pag. 293, que un lado de un triángulo mide siempre menor que la suma de los otros dos.

Aplicadas estas dos desigualdades al ejemplo 4, pag. 295, nos proporcionan las siguientes fórmulas:



$$\left| \int_0^1 p_1(t) \cdot p_2(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 p_1(t)^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 p_2(t)^2 dt}$$

$$\sqrt{\int_0^1 (p_1(t) + p_2(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^1 p_1(t)^2 dt} + \sqrt{\int_0^1 p_2(t)^2 dt}$$

Si en la desigualdad de Schwarz ponemos $p_1(x) = p(x)$ y $p_2(x) = 1$ tenemos

$$\left(\int_0^1 p(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 p(t)^2 dt .$$

Por último, para el ejemplo 5, pag. 295, tenemos

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} \cdot b_{ij} \right| \leq \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,j} b_{ij}^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i,j} (a_{ij} + b_{ij})^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} + \sqrt{\sum_{i,j} b_{ij}^2}$$

Veamos que tambien podemos hablar del ángulo de dos vectores en un espacio vectorial métrico euclídeo. En efecto, sean $x, y \in V$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. De la desigualdad de Schwarz, (3) en la Proposición 9.10, pag. 303, tenemos

$$-1 \leq \frac{g(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

De modo que existe $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que cumple

$$\cos \theta = \frac{g(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

pero el coseno de $2\pi - \theta$ y el de θ coinciden. De modo que tenemos dos posibles selecciones para el ángulo de x e y . Podemos dar la siguiente

Definición 9.11.— Dados $x, y \in V$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, definimos el ángulo de x e y , $\alpha(x,y)$, como el menor de los comprendidos entre 0 y 2π tal que

$$\cos \alpha(x,y) = \frac{g(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Nótese que debido a la simetría de g no hay que distinguir entre el ángulo de x e y y el ángulo de y e x , pues se trata del mismo. Además, es inmediato comprobar que x e y son perpendiculares (en el sentido de la Definición 9.5, pag. 300) si y sólo si $\alpha(x,y)=\pi/2$. Por otro lado, aprovechando lo dicho para la desigualdad de Schwarz, (3) de la Proposición 9.10, pag. 303), tenemos que $\alpha(x,y)=0$ si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

En la prueba de la desigualdad de Schwarz fue esencial el que la métrica g sea euclídea. Por tanto no es posible hablar de ángulo de dos vectores en un espacio vectorial métrico "general", sin embargo si se puede hablar de perpendicularidad (Definición 9.5, pag. 303).

Una vez definido el ángulo de dos vectores, uno puede escribir

$$g(x,y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \alpha(x,y)$$

que es la fórmula usual de dar el producto escalar en el plano (o en el espacio) de vectores libres; es decir, el producto escalar de dos vectores se obtiene multiplicando sus longitudes por el coseno del ángulo que forman.

Bases ortonormales. Cambio de base entre bases ortonormales.

Matrices ortogonales.-

Definición 9.12.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Un vector x de V se dice unitario si $\|x\| = 1$. Un conjunto $\{y_1, \dots, y_m\} \subset V$ se dice ortonormal si $g(y_i, y_j) = \delta_{ij}$, es decir, si todos sus vectores son unitarios y perpendiculares dos a dos.

Dado cualquier $x \in V$, $x \neq 0$, siempre podemos tomar un vector unitario linealmente dependiente con x , a saber $\frac{1}{\|x\|} \cdot x$. De modo que si se tiene un conjunto formado por vectores perpendiculares dos a dos, y multiplicamos cada uno de ellos por el inverso de su módulo (se supone que el vector cero no está en ese conjunto) obtenemos un nuevo conjunto de vectores que, claramente, será ortonormal.

Consideremos (\mathbb{R}^2, g) donde g es la métrica euclídea usual de \mathbb{R}^2 (ver ejemplo num 1, pag. 293). Entonces resulta que la base usual $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es ortonormal para g en el sentido anterior. Observemos que en este caso tenemos

$$x = g(x, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + g(x, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2$$

$$g(x, y) = g(x, \mathbf{e}_1) \cdot g(y, \mathbf{e}_1) + g(x, \mathbf{e}_2) \cdot g(y, \mathbf{e}_2)$$

$$\|x\| = (\|g(x, \mathbf{e}_1)\|^2 + \|g(x, \mathbf{e}_2)\|^2)^{1/2}$$

Una mirada atenta a estas fórmulas nos indica que son válidas sólo por el hecho de que la base usual $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base ortonormal para g . Sería interesante el poder asegurar que en todo espacio vectorial euclídeo existiesen bases ortonormales pues, entre otras cosas, obtendríamos fórmulas análogas a las de arriba para cualquier base ortonormal de un espacio vectorial euclídeo.

Vamos, en primer lugar, a establecer un resultado que nos relacione la perpendicularidad con la independencia lineal.

Proposición 9.13.- Sea $\{y_1, \dots, y_m\}$ un conjunto de vectores de V , ninguno de ellos nulo, que son ortogonales dos a dos. Entonces $\{y_1, \dots, y_m\}$ es linealmente independiente.

Demostración.- Consideremos una combinación lineal del tipo $\sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i = 0$. Entonces

$$g\left(\sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i, y_j\right) = g(0, y_j) = 0$$

pero

$$g\left(\sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i, y_j\right) = \sum_{i=1}^m b_i \cdot g(y_i, y_j) = b_j \cdot g(y_j, y_j)$$

Comparando ambas expresiones tenemos que $b_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$ ya que al ser $y_j \neq 0$ es $g(y_j, y_j) > 0$.

Teorema 9.14.- Todo espacio vectorial métrico euclídeo posee una base ortonormal, es decir, una base formada por vectores perpendiculares dos a dos y unitarios.

Demostración.- Sea $\beta = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ una base cualquiera de un espacio vectorial euclídeo (V, g) . Sean z_1, z_2, \dots, z_n n vectores de V definidos como sigue: tomamos $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - a_{12} \cdot z_1$, y vamos a determinar el número real a_{12} con la condición $g(z_2, z_1) = 0$. En efecto,

z_1 y z_2 son perpendiculares si y solo si

$$g(z_1, y_2) = a_{12} \cdot g(z_1, z_1) \iff a_{12} = \frac{g(z_1, y_2)}{g(z_1, z_1)}$$

Supongamos construidos z_1, \dots, z_j a partir de β de esta forma. Entonces ponemos

$$z_{j+1} = y_{j+1} - \sum_{i=1}^j a_{ij+1} \cdot z_i$$

Como z_1, z_2, \dots, z_j e y_{j+1} son conocidos sólo tengo que calcular los j números reales $a_{1j+1}, a_{2j+1}, \dots, a_{jj+1}$. Para ello voy a obligar que el vector z_{j+1} sea perpendicular a z_1, z_2, \dots, z_j . En efecto, si

$\forall k \in \{1, \dots, j\} : g(z_k, z_j) = 0$ tenemos

$$g(z_k, y_{j+1}) = \sum_{i=1}^j a_{i,j+1} \cdot g(z_k, z_i) = a_{k,j+1} \cdot g(z_k, z_k)$$

con lo que

$$a_{k,j+1} = \frac{g(z_k, y_{j+1})}{g(z_k, z_k)} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, j\}.$$

De esta forma construimos n vectores z_i que como son ortogonales, por la Proposición 9.13, también son independientes y como $n = \dim \mathbb{R}^V$ tenemos que $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ es una base (ver Proposición 3.40, pag. 96) ortogonal. Si tomamos ahora $\tilde{\mathcal{B}}' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $x_i = \frac{1}{\|z_i\|} \cdot z_i$ resulta que $g(x_i, x_j) = \delta_{ij}$. Así, $\tilde{\mathcal{B}}'$ es una base ortonormal de (V, g) . Lo que concluye la demostración del Teorema.

Esta demostración es constructiva pues a partir de cualquier base de V podemos obtener una ortonormal. Al procedimiento que hemos seguido se le llama el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

Naturalmente, al disponer de bases ortonormales en un espacio vectorial métrico euclídeo (V, g) uno puede hablar de bases ordenadas ortonormales. Está claro que si \mathcal{B} es una base ortonormal ordenada de (V, g) se tiene $M_{\mathcal{B}}(g) = I_n$ y que el recíproco también es cierto.

Recordemos ahora que la métrica euclídea g que aparece en el Teorema 9.4, pag. 299, se elegía de tal forma que para una base ordenada \mathcal{B} de V se tuviera $M_{\mathcal{B}}(g) = I_n$ (con esto se aseguraba uno precisamente su carácter euclídeo). Podemos afirmar, a la vista de este resultado, que la métrica g en el Teorema 9.4 es cualquier métrica euclídea en V .

Observese que el Teorema 9.14 afirma que si B es cualquier base ordenada de un espacio vectorial real V y g es una métrica euclídea sobre V existe $P \in GL(n, \mathbb{R})$, $n = \dim_{\mathbb{R}} V$, tal que

$${}^t P \cdot M_B(g) \cdot P = I_n .$$

De rebote esto nos va a dar solución a la siguiente pregunta: si A es una matriz simétrica de orden n sobre \mathbb{R} y g es la única métrica sobre V definida por $M_B(g) = A$ ¿cuando podemos afirmar que g es euclídea?

Si g fuese una métrica euclídea, en virtud del Teorema 9.14, existe una base ordenada ortonormal \tilde{B} de (V, g) y por lo anterior

$$I_n = {}^t P \cdot M_B(g) \cdot P = {}^t P \cdot A \cdot P$$

con lo que

$$A = {}^t (P^{-1}) \cdot P^{-1} .$$

Recíprocamente, sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = {}^t Q \cdot Q$ para alguna $Q \in GL(n, \mathbb{R})$. Consideremos cualquier base ordenada B_1 de V y sea g la métrica dada por $M_{B_1}(g) = A$. Sea también B'_1 la única base ordenada de V dada por $M_{(V, B'_1, B_1)}(g) = Q^{-1}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} M_{B'_1}(g) &= {}^t (Q^{-1}) \cdot M_{B_1}(g) \cdot Q^{-1} = \\ &= {}^t (Q^{-1}) \cdot A \cdot Q^{-1} \\ &= {}^t (Q^{-1}) \cdot ({}^t Q \cdot Q) \cdot Q^{-1} = I_n \end{aligned}$$

Con lo que B'_1 es una base ordenada ortonormal de (V, g) y g una métrica euclídea sobre V .

Por tanto hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 9.15.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y sean V un espacio vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y B una base de V . Se considera la métrica g

sobre V definida por $M_B(g) = A$. Entonces g es euclídea si y sólo si existe $Q \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $A = {}^t Q \cdot Q$.

Disponer de bases ortonormales en un espacio vectorial métrico euclídeo (V, g) es importante por muchos motivos que iremos viendo; uno de ellos se da en el siguiente resultado:

Proposición 9.16.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sea $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una base ortonormal ordenada de (V, g) . Entonces:

$$(1) \quad x = \sum_{i=1}^n g(x, x_i) \cdot x_i$$

$$(2) \quad g(x, y) = \sum_{i=1}^n g(x, x_i) \cdot g(y, x_i)$$

$$(3) \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n g(x, x_i)^2}$$

Demostración.- Es claro que (3) se obtiene de (2) al ser
 $\|x\| = \sqrt{g(x, x)}$. Para (1) sabemos que si $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ entonces

$$g(x, x_j) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot g(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \delta_{ij} = a_j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Utilicemos para (2) las expresiones de x e y que (1) proporciona. Entonces:

$$g(x, y) = g\left(\sum_{i=1}^n g(x, x_i) \cdot x_i, \sum_{j=1}^n g(y, x_j) \cdot x_j\right) = \sum_{i,j} g(x, x_i) \cdot g(y, x_j) \cdot \delta_{ij}$$

de donde se concluye (2) y con ello la proposición.

Obsérvese que (1) de esta Proposición 9.16 nos dice que si $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una base ortonormal ordenada de (V, g)

la componente i -ésima de un vector x en B se obtiene simplemente multiplicando x por x_i mediante g . Hasta ahora no disponíamos de un método sistemático de calcular las componentes de un vector en una base. En un espacio vectorial métrico euclídeo (V, g) las componentes de un vector en una base ortonormal nos las proporciona la propia métrica euclídea g . Las otras dos fórmulas (2) y (3) nos dicen como obtener el escalar $g(x, y)$ y $\|x\|$ a partir de las componentes de x e y , y de x respectivamente, en una base ortonormal de (V, g) . Nótese que todas estas fórmulas generalizan las dadas en la pag. 307 para (\mathbb{R}^2, g) (g es la métrica euclídea usual de \mathbb{R}^2).

Sean $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ dos bases ortonormales ordenadas de (V, g) . Sabemos que la matriz de cambio de base $M(l_V, B', B)$ es regular. Como el concepto de base ortonormal es "más fuerte" que el de base parece lógico pensar que la matriz de cambio de base $M(l_V, B', B)$ entre dos bases ortonormales B y B' sea también "algo más" que regular. En efecto, pongamos

$$x'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \quad (\text{donde ahora } a_{ij} = g(x_j, x_i)). \quad \text{Tenemos}$$

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= g(x'_j, x'_k) = g\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i, \sum_{\ell=1}^n a_{\ell k} \cdot x_\ell\right) = \sum_{i, \ell} a_{ij} \cdot a_{\ell k} \cdot g(x_i, x_\ell) = \\ &= \sum_{i, \ell} a_{ij} \cdot a_{\ell k} \cdot \delta_{i\ell} = \sum_{i, \ell} a_{ij} \cdot a_{ik} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \\ &\quad \text{columna } j \text{ de } A \\ &\quad \text{o fila } j \text{ de } {}^t A \quad \text{columna } k \text{ de } A \end{aligned}$$

lo que nos dice

$$A \cdot {}^t A = {}^t A \cdot A = I_n \quad \text{siendo } A = (a_{ij}) = M(l_V, B', B)$$

Recíprocamente, supongamos que $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una base ortonormal de (V, g) y A una matriz cuadrada que verifica $A \cdot {}^t A = {}^t A \cdot A = I_n$

(en particular A es regular). Definimos n vectores de V por
 $x'_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot x_i \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ (como en la pag. 143). Al ser regular A resulta que $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ es una base de V. Además

$$g(x'_j, x'_k) = \sum_{i,l} a_{ij} \cdot a_{ik} \cdot \delta_{il} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot a_{ik} = \delta_{jk}$$

por cumplir A la condición ${}^t A \cdot A = I_n$. Así hemos probado que B' es una base ortonormal de (V, g) .

Definición 9.17. - Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que verifique ${}^t A \cdot A = A \cdot {}^t A = I_n$, es decir $A^{-1} = {}^t A$, se dirá ortogonal.

La discusión anterior a esta definición justifica el calificativo "ortogonal" para una matriz regular real A que cumpla ${}^t A = A^{-1}$. El contenido de dicha discusión se puede resumir diciendo que la matriz de cambio de base entre bases ortonormales ordenadas B y B' , $M(l_V, B', B)$ es ortogonal. Recíprocamente, si A es una matriz ortogonal y B es una base ortonormal ordenada de (V, g) existe una única base ortonormal ordenada B' de (V, g) tal que $M(l_V, B', B) = A$.

Proposición 9.18. - Sea $O(n, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices ortogonales de orden n. Entonces $O(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo de $Gl(n, \mathbb{R})$.

Demostración.- En primer lugar tenemos que $O(n, \mathbb{R}) \subset Gl(n, \mathbb{R})$ ya que ${}^t A \cdot A = A \cdot {}^t A = I_n$ equivale a se tenga ${}^t A = A^{-1}$. Sean ahora A, C pertenecientes a $O(n, \mathbb{R})$. Probaremos que $A \cdot C^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$ y utilizando el Corolario 1.10, pag. 24, obtendremos que $O(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo de $Gl(n, \mathbb{R})$. En efecto,

$$\begin{aligned} {}^t(A \cdot C^{-1}) \cdot (A \cdot C^{-1}) &= {}^t(C^{-1}) \cdot ({}^t A \cdot A) \cdot C^{-1} = \\ &= {}^t(C^{-1}) \cdot C^{-1} = I_n \end{aligned}$$

ya que ${}^t(C^{-1}) \cdot C^{-1} = (C \cdot {}^t C)^{-1}$ (ver Prop. 5.17, pag. 171 y pag. 172) y ${}^t C \in O(n, \mathbb{R})$ siempre que $C \in O(n, \mathbb{R})$. Esto concluye la demostración.

Definición 9.19. - Llamaremos a $O(n, \mathbb{R})$ el grupo ortogonal de orden n (sobre \mathbb{R}).

Isometrias.-

Recordemos que las matrices regulares tenían una doble interpretación. Por un lado son matrices de cambio de base (ver pag. 143), por otro son matrices de automorfismos (pag. 142). Ahora podemos pensar en otra doble interpretación para las matrices ortogonales. En efecto, sea $A \in O(n, \mathbb{R})$ y B una base ortonormal ordenada de un espacio vectorial euclídeo (V, g) . Sabemos que $\exists! f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} V$ tal que $M(f, B) = A$. Veamos que este automorfismo f de V verifica además la siguiente propiedad:

$$g(f(x), f(y)) = g(x, y)$$

para cualesquiera $x, y \in V$. En efecto, si $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $A = (a_{ij}) = M(f, B)$ entonces

$$\begin{aligned} g(f(x_j), f(x_k)) &= \sum_{i, l} a_{ij} \cdot a_{lk} \cdot g(x_i, x_l) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot a_{ik} = \delta_{jk} = g(x_j, x_k). \end{aligned}$$

De modo que la propiedad es cierta para vectores de la base B , pero esto es suficiente para que $g(f(x), f(y)) = g(x, y)$. Para ello definimos $T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ por $T(x, y) = g(f(x), f(y)) - g(x, y)$, entonces T es un tensor de tipo $(2, 0)$ sobre V (ver prob. 4, pag. 230) y además cumple $T(x_i, x_j) = 0$ por lo que acabamos de ver. Así, T es el tensor nulo de tipo $(2, 0)$ sobre V , es decir $g(f(x), f(y)) = g(x, y)$.

Definición 9.20. — Sean (V, g) y (V', g') dos espacios vectoriales euclídeos y sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Diremos que f es una isometría de (V, g) en (V', g') si

- (1) f es biyectiva y
- (2) $g'(f(x), f(y)) = g(x, y) \quad \forall x, y \in V$.

Nótese que, antes que nada una isometría de (V, g) en (V', g') es un isomorfismo de V en V' . Por otro lado, la condición (2) ya implicaría que f es inyectiva por ser g una métrica euclídea. En efecto, si $f(x) = 0'$ entonces $0 = g'(f(x), f(y)) = g(x, y) \quad \forall y \in V$, por tanto $x = 0$.

Aunque las condiciones (1) y (2) de la Definición 9.20 no son independientes, como acabamos de ver, preferimos dar esta definición de isometría por varios motivos: por un lado, así queda claro que una isometría es, en particular, un isomorfismo de espacios vectoriales; por otro, resulta que la Definición 9.20 puede ampliar a espacios vectoriales no euclídeos en general. De modo que podemos enunciar

Definición 9.20 (continuación).- Sean (V, g) y (V', g') dos espacios vectoriales métricos y sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal.

Diremos que f es una isometría de (V, g) en (V', g') si

- (1) f es biyectiva y
- (2) $g'(f(x), f(y)) = g(x, y) \quad \forall x, y \in V$.

En la discusión de la página anterior lo que se ha probado es que cada matriz ortogonal nos define una isometría de un espacio vectorial euclídeo en sí mismo (una isometría de (V, g) en sí mismo se llamará simplemente una isometría de (V, g)). Recíprocamente, si (V, g) es un espacio vectorial euclídeo, $f : V \longrightarrow V$ es una isometría de (V, g) y B es una base ortonormal de (V, g) , la condición (2) de la Definición 9.20 implica que $M(f, B)$ es una matriz ortogonal.

Una primera observación que hay que hacer es que la condición (2) de la definición de isometría es equivalente a la siguiente

$$(2)' \quad \forall x \in V : F_{g'}(f(x)) = F_g(x)$$

En efecto, (2) implica (2)' sin más que poner $y=x$ y utilizar la definición de la forma cuadrática asociada a una métrica (ver Definición 9.1, pag. 296). Recíprocamente, si ocurre (2)', tenemos

$$\begin{aligned} g'(f(x), f(y)) &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ F_{g'}(f(x)+f(y)) - F_{g'}(f(x)) - F_{g'}(f(y)) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ F_{g'}(f(x+y)) - F_{g'}(f(x)) - F_{g'}(f(y)) \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ F_g(x+y) - F_g(x) - F_g(y) \right\} = g(x,y) .$$

Así hemos probado la siguiente:

Proposición 9.21.- Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales métricos y $f: V \rightarrow V'$ un isomorfismo. Entonces, f es una isometría si y sólo si cumple

$$F_{g'}(f(x)) = F_g(x) \quad \forall x \in V .$$

Fácilmente se prueba la siguiente :

Proposición 9.22.- (1) La composición de dos isometrías es otra isometría. (2) La aplicación inversa de una isometría también lo es.

De este resultado se deduce que el conjunto de todas las isometrías de un espacio vectorial métrico (V, g) , $\text{Iso}(V, g)$ es un subgrupo del grupo del $\text{Aut}_{\mathbb{R}} V$ (ver pag.141)

En el caso de que (V, g) sea euclídeo, si tomamos una base ortonormal ordenada B de (V, g) la aplicación $f \mapsto M(f, B)$ de $\text{Iso}(V, g)$ en $O(n, \mathbb{R})$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, es un isomorfismo de grupos (compárese con iii) de la Proposición 4.29, pag. 141).

Al igual que el concepto de isomorfismo de espacios vectoriales era un criterio para poder identificar dos espacios vectoriales, recordemos la relación binaria "ser isomorfo con" (ver pag.114) uno puede definir otra relación también de equivalencia en un conjunto de espacios vectoriales métricos.

Decimos que (V, g) y (V', g') son isométricos si $\exists f: V \rightarrow V'$ que es una isometría de (V, g) en (V', g') . Por la Proposición 9.22 y por el hecho de que la identidad $l_V: V \rightarrow V$ es una isometría de (V, g) tenemos que "ser isométrico con" es una relación de equivalencia. Por ejemplo, (\mathbb{R}^2, g) y (\mathbb{R}^2, g') donde g y g' vienen dadas por $M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $M_B(g') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = (e_1, e_2)$ no

son isométricos pues mientras que g es definida positiva, g es indefinida (ver prob. 13, pag. 362). Si sólo se consideran espacios vectoriales euclídeos, la relación "ser isométrico con" no tiene ahí mucho sentido como pone de manifiesto el siguiente resultado:

Proposición 9.23.- Sean (V, g) y (V', g') espacios vectoriales métricos euclídeos. Entonces (V, g) y (V', g') son isométricos si y sólo si $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V'$.

Demostración .- La condición necesaria está clara por (1) de la Definición 9.20, pag. 315. Recíprocamente, sean $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ bases ortonormales ordenadas de (V, g) y (V', g') respectivamente. Consideremos la única aplicación lineal $f: V \longrightarrow V'$ que cumple $f(x_i) = x'_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (Teorema 4.11, pag. 116). Entonces, es claro que f es biyectiva (por este mismo Teorema 4.11). Veamos además que se cumple

$$g'(f(x_i), f(x_j)) = g(x_i, x_j)$$

y con ello tendremos

$$g'(f(x), f(y)) = g(x, y)$$

(como en la pag. 314). En efecto,

$$g'(f(x_i), f(x_j)) = g'(x'_i, x'_j) = \delta_{ij} = g(x_i, x_j)$$

pues ambas bases son ortonormales. Esto concluye la prueba de la Proposición.

Nótese que en la demostración de este resultado hay implícita una "forma práctica" de construcción de isometrías. En efecto, si (V, g) y (V', g') son espacios vectoriales métricos euclídeos de la misma dimensión y B y B' son bases ortonormales ordenadas, la única aplicación lineal $f: V \longrightarrow V'$ determinada por $M(f, B, B') = I_n$ es una isometría de (V, g) en (V', g') . Recíprocamente, si $f: V \longrightarrow V'$ es una isometría de (V, g) en (V', g') y $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es ortonormal, definiendo $x'_i = f(x_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ es una base ortonormal de (V', g') .

Orientación en un espacio vectorial euclídeo. Ángulo orientado. Producto vectorial.-

Sean (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Podemos considerar una orientación sobre V (Definición 7.18, pag. 264) representada por una base ordenada B_1 de V . Dada cualquier base ortonormal ordenada B de (V, g) puede ocurrir que ó B defina en V la misma orientación que B_1 ó bien que B defina la orientación opuesta. Pongamos $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B' = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ entonces si B es una base ortonormal ordenada también lo es B' y está claro que , ó bien B ó bien B' define la misma orientación de B_1 . Hemos probado así que la orientación de V viene representada por una base ortonormal ordenada de (V, g) .

Sean B y \tilde{B} dos bases ortonormales ordenadas de (V, g) . B y \tilde{B} definen la misma orientación en V si y sólo si (pag. 263)

$$\det M(l_V, \tilde{B}, B) > 0$$

Pero según sabemos (pag. 312) $M(l_V, \tilde{B}, B)$ es una matriz ortogonal y por tanto su determinante será 1 ó -1. Entonces B y \tilde{B} definen la misma orientación en V si y sólo si

$$\det M(l_V, \tilde{B}, B) = 1.$$

Sea $SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\}$. Como $SO(n, \mathbb{R})$ es la intersección de $O(n, \mathbb{R})$ con el núcleo del homomorfismo $Gl(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $A \mapsto \det A$ (pag. 266) resulta (Proposición 1.26, pag. 35) que $SO(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $O(n, \mathbb{R})$.

Definición 9.24.- Al grupo $SO(n, \mathbb{R})$ se le llama el grupo especial ortogonal de orden n (sobre \mathbb{R}).

Nótese que, según lo anterior, $SO(n, \mathbb{R}) = Sl(n, \mathbb{R}) \cap O(n, \mathbb{R})$ donde $Sl(n, \mathbb{R}) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\}$ (ver pag. 266).

Análogamente como en la pag. 265 podemos establecer la siguiente

Proposición 9.25.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo, sea $f \in \text{Iso}(V, g)$ y $c(B)$ una orientación de V . Entonces f conserva la orientación $c(B)$ si y sólo si $\det f = 1$.

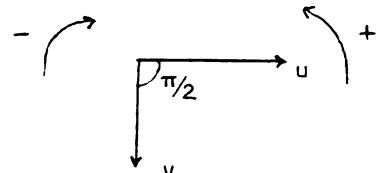
Obsérvese que si $f \in \text{Iso}(V, g)$ los dos únicos valores posibles de $\det f$ son 1 ó -1 pues $\det f = \det M(f, B)$ y si B es ortonormal $\det M(f, B) = \pm 1$. De modo que las isometrías que conservan la orientación constituyen el subgrupo

$$\text{Iso}^+(V, g) = \{f \in \text{Iso}(V, g) / \det f = 1\}$$

del grupo de todas las isometrías de (V, g) , $\text{Iso}(V, g)$. Con la notación de la pag. 265 se tiene $\text{Iso}^+(V, g) = \text{Iso}(V, g) \cap \text{Aut}_R^+ V$.

Si B es una base ortonormal ordenada de (V, g) y se considera el isomorfismo de grupos $\text{Iso}(V, g) \longrightarrow O(n, R)$ dado por $f \longmapsto M(f, B)$ precisamente la imagen de $\text{Iso}^+(V, g)$ es $SO(n, R)$. En particular $\text{Iso}^+(V, g)$ y $SO(n, R)$ son grupos isomorfos.

La introducción de una orientación en un espacio vectorial euclídeo tiene algunas ventajas. Veamos en primer lugar que se puede hablar de ángulo orientado en un plano vectorial euclídeo orientado. Consideremos en el plano euclídeo de los vectores libres, dos vectores u y v como en la siguiente figura. Según nuestra definición de ángulo (Definición 9.11, pag. 306) tendríamos $\measuredangle(u, v) = \measuredangle(v, u) = \pi/2$.



Orientemos ahora el plano eligiendo precisamente la base $B = (v, u)$ como positiva. El ángulo de u y v (en este orden) debe estar de acuerdo con la orientación de modo que sería $3\pi/2$ mientras que el ángulo de v y u , con esta misma orientación sería $\pi/2$. Si consideramos ahora la orientación representada por la base $B = (u, v)$ resulta que el ángulo de u y v sería $\pi/2$ y el de v y u , $3\pi/2$. Tratemos de formalizar ahora, esta idea intuitiva.

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2 y sea $B = (x_1, x_2)$ una base ortonormal de (V, g) . Si \det_B es el tensor hemisimétrico "determinante" en la base B (pag. 237) y $x, y \in V$ tenemos

$$\det_B(x, y) = \det \begin{pmatrix} g(x, x_1) & g(y, x_1) \\ g(x, x_2) & g(y, x_2) \end{pmatrix} =$$

$$= g(x, x_1) \cdot g(y, x_2) - g(x, x_2) \cdot g(y, x_1),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \det_B(x, y)^2 &= (g(x, x_1) \cdot g(y, x_2) - g(x, x_2) \cdot g(y, x_1))^2 = \\ &= g(x, x_1)^2 \cdot g(y, x_2)^2 - g(x, x_2)^2 \cdot g(y, x_1)^2 - 2 \cdot g(x, x_1) \cdot g(y, x_2) \cdot g(x, x_2) \cdot g(y, x_1) = \\ &= g(x, x_1)^2 \cdot g(y, x_1)^2 - g(x, x_2)^2 \cdot g(y, x_2)^2 - g(x, x_1)^2 \cdot g(y, x_2)^2 - g(x, x_2)^2 \cdot g(y, x_1)^2 - \\ &\quad - \left(g(x, x_1)^2 \cdot g(y, x_1)^2 - g(x, x_2)^2 \cdot g(y, x_2)^2 - 2 \cdot g(x, x_1) \cdot g(y, x_2) \cdot g(x, x_2) \cdot g(y, x_1) \right) = \\ &= g(x, x) \cdot g(y, y) - g(x, y)^2. \end{aligned}$$

Así hemos probado la siguiente:

Proposición 9.26. — Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo con $\dim_R V = 2$. Para toda base ortonormal ordenada B de (V, g) se tiene

$$\det_B(x, y)^2 = g(x, x) \cdot g(y, y) - g(x, y)^2.$$

Obsérvese que si B y B' son dos bases de V entonces $\det_B = \det_M(l_V, B', B) \cdot \det_{B'}$ (ver pag. 288). Por tanto, si B y B' son ortonormales tenemos que $\det_B = \det_{B'}$, si B y B' definen la misma orientación y $\det_B = -\det_{B'}$, si B y B' definen diferente orientación, pero en cualquier caso $\det_B(x, y)^2 = \det_{B'}(x, y)^2$.

Supongamos que $x \neq 0$, $y \neq 0$. Entonces la fórmula de la Proposición 9.26 se puede escribir

$$\frac{g(x, y)^2}{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2} + \frac{\det_B(x, y)^2}{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2} = 1.$$

Por tanto existe un único $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, tal que

$$\cos \theta = \frac{g(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad y \quad \sin \theta = \frac{\det_B(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Definición 9.27. – Al número real θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, que cumple las dos fórmulas anteriores lo llamaremos el ángulo orientado de x e y .

Si la orientación cambia, el ángulo orientado entre x e y es $2\pi - \theta$. El ángulo orientado entre y y x se obtiene del ángulo orientado de x e y al observar que $\det_B(y, x) = -\det_B(x, y)$. Por tanto, el ángulo orientado de y y x es $2\pi - \theta$ (como en la discusión intuitiva de la pag. 319) siempre que $\theta \neq 0$.

Vamos ahora que en un espacio vectorial euclídeo (V, g) , de dimensión 3, con una orientación $c(B)$ es posible definir un producto de vectores (una operación binaria en V).

Definición 9.28. – Sean $x, y \in V$ y $B = (x_1, x_2, x_3)$ una base ortonormal ordenada que representa la orientación $c(B)$ de V . Se define el producto vectorial de x e y (en este orden) según esta orientación como el único vector $x \times y$ de V que cumple

$$g(x \times y, z) = \det_B(x, y, z) \quad \forall z \in V.$$

Si $x = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3$, $y = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3$ y $z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3$ resulta

$$g(x \times y, z) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

de donde, tomando $z = x_1, x_2, x_3$ y utilizando (1) de la Proposición 9.16, pag. 311, obtenemos

$$x \times y = (a_2.b_3 - a_3.b_2).x_1 + (a_3.b_1 - a_1.b_3).x_2 + (a_1.b_2 - a_2.b_1).x_3$$

En particular, si $V=\mathbb{R}^3$, g es la métrica euclídea usual de \mathbb{R}^3 (el producto escalar ordinario) y $B=(e_1, e_2, e_3)$ la base usual (ortonormal para g), esta fórmula definía el producto vectorial ordinario. En particular $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ y $e_3 \times e_1 = e_2$.

Obsérvese que el vector $x \times y$ está determinado por la métrica euclídea g y la orientación de V . Si se cambia la orientación, el producto vectorial de x e y cambia su signo. Por tanto, no es correcto hablar del producto vectorial de dos vectores de \mathbb{R}^3 si antes no se ha elegido una de sus dos posibles orientaciones. En la terminología clásica de físicos y geómetras se dice que el producto vectorial de dos vectores es un "pseudovector" pues para estar bien definido hace falta fijar una orientación de \mathbb{R}^3 . Nosotros decimos que si (V, g) es un espacio vectorial tridimensional y $x, y \in V$, existen "dos" productos vectoriales $x \times y$, cada uno correspondiente a una orientación de V .

Proposición 9.29.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo tridimensional y $c(B)$ una orientación de V , el producto vectorial en (V, g) según $c(B)$ verifica:

$$(1) (a.x + b.x') \times y = a.(x \times y) + b.(x' \times y)$$

$$(2) x \times (a.y + b.y') = a.(x \times y) + b.(x \times y')$$

$$(3) x \times y = -y \times x$$

$$(4) g(x \times x', y \times y') = g(x, y).g(x', y') - g(x, y').g(x', y)$$

$$(5) \|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - g(x, y)^2$$

$$(6) \|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \operatorname{sen}\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

$$(7) x \times (y \times z) = g(x, z).y - g(x, y).z$$

La demostración se hará como ejercicio.

Obsérvese que las propiedades (1) y (2) nos dicen que el producto vectorial es una aplicación bilineal de $V \times V$ en V . (3) que es "antisimétrica". (5) se obtiene como un caso particular de (4). (6) sale de (5) tomando "raíces cuadradas". Finalmente, nótese que ambos miembros de (7) son trilineales al variar sus argumentos.

Introducción de una métrica euclídea en el dual. Isomorfismos inducidos entre espacios de tensores.-

Vamos ahora a ver como el disponer de una métrica euclídea g en V nos soluciona un nuevo problema : el poder encontrar un isomorfismo entre V y su dual V^* que se defina sin hacer uso de bases. Pero como tal isomorfismo dependerá de g no va a ser natural en el sentido que nosotros damos a este término.

Proposición 9.30.- Sean $x \in V$, $\varphi \in V^*$, y sean

$$x^\flat : V \longrightarrow \mathbb{R} , \quad \varphi^* \in V$$

dados por $x^\flat(y) = g(x, y) \quad \forall y \in V$, $g(\varphi^*, y) = \varphi(y) \quad \forall y \in V$.

Entonces :

$$(1) \quad x^\flat \in V^*, \quad \varphi^* \in V$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \flat : V &\longrightarrow V^* & \ast : V^* &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto x^\flat & \varphi &\longmapsto \varphi^* \end{aligned} \quad \text{son lineales}$$

$$(3) \quad \flat \circ \ast = 1_{V^*}, \quad \ast \circ \flat = 1_V.$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} x^\flat(y_1 + y_2) &= g(x, y_1 + y_2) = g(x, y_1) + g(x, y_2) = x^\flat(y_1) + x^\flat(y_2) \\ x^\flat(a.y) &= g(a.x, y) = a.g(x, y) = a.x^\flat(y) \end{aligned}$$

en definitiva, x^\flat es lineal por ser g bilineal. Por otro lado $g(\varphi^*, y) \quad \forall y \in V$ identifica por completo a un vector de V ya que si $g(\varphi^*, y) = g(z, y) \quad \forall y \in V \Rightarrow g(\varphi^* - z, y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow \varphi^* = z$.

Con lo que (1) que da probado. De (2) sólo probaremos que \flat es lineal, la otra queda ejercicio (o bien sale aplicando que (3) nos dice que \ast es la inversa de \flat). Veamos que

$$(x + x')^\flat = x^\flat + x'^\flat$$

$$(a.x)^\flat = a.x^\flat$$

en efecto,

$$(x + x')^{\bar{b}}(y) = g(x+x', y) = g(x, y) + g(x', y) = x^{\bar{b}}(y) + x'^{\bar{b}}(y) = (x + x')^{\bar{b}}(y)$$

$$x^{\bar{b}}(a.y) = g(x, a.y) = a.g(x, y) = a.x^{\bar{b}}(y)$$

es decir, se aplica la linealidad de g en la otra componente. Para (3), dado $x \in V$ veamos que $(x^{\bar{b}})^* = x$.

$$g((x^{\bar{b}})^*, y) = x^{\bar{b}}(y) = g(x, y) \quad \forall y \in V \quad y \text{ entonces } (x^{\bar{b}})^* = x.$$

Finalmente sea $\varphi \in V^*$. Entonces

$$(\varphi^*)^{\bar{b}}(y) = g(\varphi^*, y) = \varphi(y) \quad \forall y \in V \quad \text{por tanto } (\varphi^*)^{\bar{b}} = \varphi.$$

Así concluye la prueba de la proposición.

Definición 9.31. - A los isomorfismos $\bar{b} : V \longrightarrow V^*$ y $\bar{*} : V^* \longrightarrow V$ ($\bar{*} = \bar{b}^{-1}$) establecidos en la Proposición 9.30 se les llama los isomorfismos "musicales" inducidos por g . \bar{b} se llama "bemol" y $\bar{*}$ "sostenido".

Estos isomorfismos nos permiten identificar V y V^* (de manera diferente para cada métrica euclídea g), (comárese con prob. num. 12, pag. 231). Además podemos trasladar objetos geométricos de V a V^* . Concretamente veamos que g induce una métrica g^* en V^* (la única que hace que \bar{b} sea una isometría).

Proposición 9.32. - Si para cada $\varphi, \psi \in V^*$ se pone $g^*(\varphi, \psi) = g(\varphi^*, \psi^*)$ entonces g^* es una métrica euclídea sobre V^* , y además, g^* es la única métrica euclídea que hace que \bar{b} (y por lo tanto $\bar{*}$) sea una isometría.

Demostración. - Se probará que g^* es bilineal utilizando que g es bilineal y $\bar{*}$ es lineal (ver prob. num. 4, pag. 230). Además $g^*(\varphi, \psi) = g(\varphi^*, \psi^*) = g(\psi^*, \varphi^*) = g^*(\psi, \varphi)$, luego g^* es simétrico. Finalmente, se cumple $g^*(\varphi, \varphi) = g(\varphi^*, \varphi^*) \geq 0$ y $g^*(\varphi, \varphi) = 0$ si y sólo si $\varphi^* = 0 \in V$ y como $\bar{*}$ es un isomorfismo (Proposición 9.30) entonces $\varphi = \varphi^*$ (forma lineal nula de V^*). Claramente \bar{b} es una isometría ya que

$$g^*(x^{\bar{b}}, y^{\bar{b}}) = g((x^{\bar{b}})^*, (y^{\bar{b}})^*) = g(x, y)$$

y g^* es única cumpliendo esto pues si g' es otra métrica en V^* tal que $g'(x^b, y^b) = g(x, y)$ entonces

$$g^*(x^b, y^b) = g'(x^b, y^b)$$

y como \tilde{b} es biyectiva esto implica que $g' = g^*$. Con esto acaba la demostración.

Hay que hacer notar que en la Proposición 9.30, pag. 323, sólo se ha utilizado que g es no degenerada (Definición 9.6, pag. 300) de modo que es posible establecer un resultado análogo cuando (V, g) es un espacio vectorial métrico no degenerado (Definición 9.8, pag. 302). Por otro lado, la métrica g^* sobre V^* de la Proposición 9.32 es euclídea por serlo g . Así, si la métrica g fuese solo no degenerada, g^* sería también no degenerada.

Veamos ahora como las métricas euclídeas g y g^* nos permiten relacionar las componentes de x y x^b , y por tanto las de φ y φ^* , en ciertas bases de V y V^* .

En efecto, sea $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ cualquier base ordenada de V y $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ su dual en V . Pongamos

$$m_B(g) = (g_{ij}) \quad \text{con} \quad g_{ij} = g(x_i, x_j) \quad \text{y}$$

$$m_{B^*}(g^*) = (g^{*kl}) \quad \text{con} \quad g^{*kl} = g^*(\varphi^k, \varphi^l).$$

Entonces, si

$$x = \sum_{i=1}^n a^i \cdot x_i \quad \text{y} \quad x^b = \sum_{j=1}^n b_j \cdot \varphi^j$$

resulta

$$b_j = \sum_{k=1}^n g_{jk} \cdot a^k \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

ya que

$$b_j = x^b(x_j) = g(x, x_j) = g\left(\sum_{i=1}^n a^i \cdot x_i, x_j\right) = \sum_{i=1}^n a^i \cdot g(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^n g_{ij} \cdot a^i.$$

Por otro lado, si

$$\Psi = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \varphi^i \quad \text{y} \quad \Psi^* = \sum_{j=1}^n d_j \cdot x_j \quad \text{resulta}$$

$$d_j = \sum_{k=1}^n g^{*jk} \cdot c_k \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

En efecto,

$$d_j = \varphi^j(\Psi^*) = g^*(\varphi^j, \varphi) = g^*(\varphi^j, \sum_{i=1}^n c_i \cdot \varphi^i) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot g^*(\varphi^j, \varphi^i) = \sum_{i=1}^n g^{*ji} \cdot c_i$$

Uno observa de estas fórmulas que $M(B, B^*, g^*) = M_B(g)$ y $M(\Psi^*, B^*, B) = M_{B^*}(g^*)$ con lo que

$$M_{B^*}(g^*) = M_B(g)^{-1}.$$

Además, de esta última relación también se deduce que si B es una base ortonormal ordenada de (V, g) entonces B^* es una base ortonormal de (V^*, g^*) . En este caso las fórmulas anteriores se reducirían a $b_j = a^j$ y $d_j = c_j$ (ver prob. nº 12, pag. 174 y prob. 12, pag. 231).

A su vez el disponer de una métrica euclídea g^* en V^* nos va a permitir "identificar" tensores sobre V en el sentido que pone de manifiesto el siguiente:

Teorema 9.33.- Para cada $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ se ponen

$$T^1 : V \times V^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad T^* : V^* \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T^1(x, \varphi) = T(x, \varphi^*) \quad T^*(\varphi, \psi) = T(\varphi^*, \psi^*)$$

Entonces:

$$(1) \quad T^1 \in \mathcal{T}_{1,1}(V) \quad \text{y} \quad T^* \in \mathcal{T}_{0,2}(V) \quad \text{para cada } T \in \mathcal{T}_{2,0}(V).$$

(2) Las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{2,0}(V) & \longrightarrow & \mathcal{T}_{1,1}(V) \\ T & \longmapsto & T^1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{2,0}(V) & \longrightarrow & \mathcal{T}_{0,2}(V) \\ T & \longmapsto & T^* \end{array}$$

son isomorfismos de espacios vectoriales.

Este resultado es claramente generalizable para obtener isomorfismos entre $\mathcal{E}_{r,s}(V)$ y $\mathcal{E}_{r',s'}(V)$ con $r+s=r'+s'$ que son "casi naturales" pues no utilizan bases aunque si una métrica euclídea g sobre V . Por otro lado merece la pena comentar que particularizando al caso $V = \mathbb{R}^3$ y g es la métrica euclídea usual; es decir, $M_B(g) = I_3$ siendo $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base usual de \mathbb{R}^3 , nos da la posibilidad de "identificar" físicamente $\mathcal{E}_{2,0}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{E}_{1,1}(\mathbb{R}^3)$ y $\mathcal{E}_{0,2}(\mathbb{R}^3)$, es por ello que en física se habla de un tensor de orden 2 sin distinguir covarianza y contravarianza. Además, como vamos a ver más adelante T , T' y T'' van a tener (si $T \in \mathcal{E}_{2,0}(\mathbb{R}^3)$) las mismas matrices de coordenadas en bases convenientes de $\mathcal{E}_{2,0}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{E}_{1,1}(\mathbb{R}^3)$ y $\mathcal{E}_{0,2}(\mathbb{R}^3)$. (Compárese con prob. 13, pag. 232 y véase pag. 329, 330).

Demostración del Teorema 9.33.- Observemos, en primer lugar, que T' es un tensor de tipo $(1,1)$ sobre V y T'' un tensor de tipo $(0,2)$ sobre V .

T' es lineal en la primera componente y también en la segunda por ser ~~Y~~ lineal. (Notemos que como generalización del prob. 4 pag. 230, si $T: V_1 \times V_2 \rightarrow W$ es bilineal y $f_i: V_i' \rightarrow V_i$, $i=1,2$, son dos aplicaciones lineales, entonces la aplicación $V_1' \times V_2' \rightarrow W$ dada por $(x_1', x_2') \mapsto T(f_1(x_1'), f_2(x_2'))$ también es bilineal).

Sean ahora $T_1, T_2 \in \mathcal{E}_{2,0}(V)$. Tenemos

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)'(x, \varphi) &= (T_1 + T_2)(x, \varphi^*) = T_1(x, \varphi^*) + T_2(x, \varphi^*) = \\ &= T_1'(x, \varphi) + T_2'(x, \varphi) = (T_1' + T_2')(x, \varphi) \end{aligned}$$

Con lo que $(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2'$. Análogamente $(a \cdot T)' = a \cdot T'$.

Como las dimensiones de $\mathcal{E}_{2,0}(V)$ y $\mathcal{E}_{1,1}(V)$ son iguales (Teorema 6.7, pag 188) basta que probemos que $T \mapsto T'$ es inyectiva para afirmar que (ver Proposición 4.16, pag. 119) se trata de

un isomorfismo. Si T' es el tensor nulo de $\mathcal{G}_{1,1}(V)$ tendríamos $T'(x, \varphi) = 0 \quad \forall x \in V, \forall \varphi \in V^*$ pero por como se define T' a partir de T ocurre $T(x, \varphi^*) = 0 \quad \forall x \in V, \forall \varphi \in V^*$ y como $*$ es biyectiva, tenemos $T(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in V$ con lo que T también sería el tensor nulo de $\mathcal{G}_{2,0}(V)$. La prueba de que $T \mapsto T''$ es un isomorfismo de $\mathcal{G}_{2,0}(V)$ en $\mathcal{G}_{0,2}(V)$ se deja como ejercicio. Así concluye el Teorema 9.33.

Proposición 9.34.- Sean $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una base ordenada (no necesariamente ortonormal) de (V, g) y sea $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ su dual.

Supongamos que

$$T = \sum_{i,j} t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j$$

entonces (con la notación del Teorema 9.33) tenemos

$$T' = \sum_{i,j} t'_i{}^j \cdot \varphi^i \otimes x_j \quad y \quad T'' = \sum_{i,j} t''^{ij} \cdot x_i \otimes x_j$$

con

$$t'_i{}^j = \sum_{k=1}^n g^{*jk} \cdot t_{ik} \quad y \quad t''^{ij} = \sum_{k,\ell} g^{*ik} \cdot g^{*j\ell} \cdot t_{k\ell} .$$

Demostración.- En efecto,

$$t'_i{}^j = T'(x_i, \varphi^j) = T(x_i, (\varphi^j)^*) = \sum_{\ell} g^{*\ell j} \cdot T(x_i, x_{\ell}) = \sum_{\ell} g^{*\ell j} \cdot t_{i\ell}$$

$$\text{ya que } (\varphi^j)^* = \sum_{\ell} \left(\sum_k g^{*\ell k} \cdot \delta_{kj} \right) \cdot x_{\ell} = \sum_{\ell} g^{*\ell j} \cdot x_{\ell} , \text{ y además}$$

$$\begin{aligned} t''^{ij} &= T''(\varphi^i, \varphi^j) = T((\varphi^i)^*, (\varphi^j)^*) = T\left(\sum_{\ell} g^{*\ell i} \cdot x_{\ell}, \sum_k g^{*kj} \cdot x_k\right) = \\ &= \sum_{\ell, k} g^{*\ell i} \cdot g^{*kj} \cdot T(x_{\ell}, x_k) = \sum_{\ell, k} g^{*\ell i} \cdot g^{*kj} \cdot t_{\ell k} . \end{aligned}$$

Con lo que queda probada la Proposición.

Si particularizamos las fórmulas de la Proposición 9.34 al caso en que B es una base ortonormal de (V, g) (y por tanto B^* es una base ortonormal de (V^*, g^*) por la discusión de la pag. 326) resulta que

$$t_i^j = \sum_k \delta^{jk} \cdot t_{i,k} \quad y \quad t''^{ij} = \sum_{k,\ell} \delta^{ik} \cdot \delta^{jl} \cdot t_k$$

es decir :

$$t_i^j = t''^{ij} = t_{ij} . \quad (*)$$

De modo que cuando $V = \mathbb{R}^3$ y g es la métrica euclídea usual tenemos

$$T = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} t_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j ; \quad T' = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} t_i^j \cdot \varphi^i \otimes e_j ; \quad T'' = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} t''^{ij} \cdot e_i \otimes e_j$$

con $t_{ij} = t_i^j = t''^{ij}$ donde $B = (e_1, e_2, e_3)$ es la base usual de \mathbb{R}^3
y $B^* = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ su dual en $(\mathbb{R}^3)^*$.

Hay que observar que las fórmulas de la Proposición 9.34 pueden ser invertidas (lo que está de acuerdo con el Teorema 9.33) obteniendo

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot t_j^k \quad y \quad t_{ij} = \sum_{k,\ell} g_{ik} \cdot g_{j\ell} \cdot t''^{k\ell}$$

En efecto, multipliquemos por $g_{j\ell}$ ambos miembros de

$$t_i^j = \sum_{k=1}^n g^{*jk} \cdot t_{ik}$$

y sumemos en j

(*) Recuérdese (pag. 185) que en la matriz (t_k^ℓ) ℓ representa fila y k columna.

$$\sum_{j=1}^n g_{\ell j} \cdot t_i^j = \sum_{k,j} g_{\ell j} \cdot g^{*jk} \cdot t_{ik} = \sum_k \left(\sum_j g_{\ell j} \cdot g^{*jk} \right) \cdot t_{ik}$$

pero como

$$\sum_{j=1}^n g_{\ell j} \cdot g^{*jk} = \delta_{\ell}^k \quad \text{por ser } M_3^*(g^*) = M_B(g)^{-1}$$

resulta

$$t_{i\ell} = \sum_{j=1}^n g_{\ell j} \cdot t_i^j$$

que (cambiando los índices) resulta ser la primera de las fórmulas.

Para la segunda, multipliquemos por $g_{mi} \cdot g_{pj}$ ambos miembros de

$$t''^{ij} = \sum_{k,\ell} g^{*ik} \cdot g^{*j\ell} \cdot t_{k\ell}$$

y sumemos en i y j

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} g_{mi} \cdot g_{pj} \cdot t''^{ij} &= \sum_{k,\ell,i,j} g_{mi} \cdot g_{pj} \cdot g^{*ik} \cdot g^{*j\ell} \cdot t_{k\ell} = \\ &= \sum_{k,\ell} \left(\sum_i (g_{mi} \cdot g^{*ik}) \right) \left(\sum_j (g_{pj} \cdot g^{*j\ell}) \right) \cdot t_{k\ell} = \sum_{k,\ell} \delta_m^k \cdot \delta_p^\ell \cdot t_{k\ell} = t_{mp} \end{aligned}$$

que es la segunda de las fórmulas anunciadas. (Como ejercicio escribanse las fórmulas de la Proposición 9.34 en forma matricial y demuéstrese estas fórmulas de manera diferente (ver pag. 195)).

Nótese que si $T \in S_2(V)$ entonces coinciden el endomorfismo de V que le corresponde a T' (del Teorema 9.33) por el isomorfismo natural del Teorema 6.4 y el endomorfismo f definido por $g(f(x), y) = T(x, y) \forall x, y \in V$ (ver Teorema 9.4). Además, en este caso, con la notación de la página anterior, se tiene $t_j^i = t^{ij} = t_{ij}$.

Suplemento ortogonal . Proyección ortogonal.-

Recordemos que si U es un subespacio vectorial de V existian muchos "suplementarios" de U en V ; es decir muchos subespacios U' de V verificado $V = U \oplus U'$ (ver pag. 97). Veamos que al disponer de una métrica euclídea g en un espacio vectorial real V nos proporciona, de forma única, un cierto suplementario de U . En efecto, pongamos

$$U^\perp = \{x \in V \quad / \quad g(x, y) = 0 \quad \forall y \in U\}$$

Por ejemplo, tomamos \mathbb{R}^2 con la métrica euclídea usual g , resulta que si $U = L(\{e_1 + e_2\})$ entonces $U^\perp = L(\{-e_1 + e_2\})$. De modo que, en este ejemplo, resulta que U^\perp es también un subespacio de \mathbb{R}^2 , además se cumple $\mathbb{R}^2 = U \oplus U^\perp$. Pero esto es general como la afirma el siguiente resultado:

Proposición 9.34.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V . Entonces:

(1) U^\perp es un subespacio de V .

(2) $V = U \oplus U^\perp$.

Demostración .- Sean $x, y \in U^\perp$, $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a.x + b.y$ es un vector de U^\perp ya que

$$g(a.x + b.y, z) = a.g(x, z) + b.g(y, z) = a.0 + b.0 = 0 \quad \forall z \in U.$$

Así, (1) se concluye aplicando el Corolario 3.5, pag. 78.

Facilmente se ve que $U \cap U^\perp = \{0\}$, pues si $x \in U \cap U^\perp$ entonces $g(x, x) = 0$ y como g es euclídea eso implica $x=0$.

Sea $\{x_1, \dots, x_m\}$ cualquier base de U , entonces U^\perp es el subespacio de V anulador (Definición 5.7, pag. 165) de $\{x_1^*, \dots, x_m^*\} \subset V^*$ (ver Proposición 9.30, pag. 323). En efecto, notemos, en primer lugar, que se puede escribir

$$U^\perp = \{x \in V \quad / \quad g(x, x_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$$

pero $g(x, x_i) = x_i^b(x)$, de modo que

$$U^\perp = \left\{ x \in V / x_i^b(x) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \right\},$$

es decir, $U^\perp = \text{an}(\{x_1^b, \dots, x_m^b\})$. Aplicando 2 de la Proposición 5.8, pag. 166, tenemos

$$\dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} L(\{x_1^b, \dots, x_m^b\}).$$

Como $b: V \longrightarrow V^*$ es un isomorfismo (Proposición 9.30, pag. 323) y $\{x_1, \dots, x_m\}$ es linealmente independiente, entonces $\{x_1^b, \dots, x_m^b\}$ es linealmente independiente (ver Teorema 4.11, pag. 116) y por tanto

$$\dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U.$$

Utilizando ahora el problema 29, pag. 106, (consecuencia de la Proposición 3.41) como $U \cap U^\perp = \{0\}$, esto junto con la fórmula anterior implica que $V = U \oplus U^\perp$, lo que concluye la prueba.

Definición 9.35.- Al subespacio U^\perp de V definido a partir de U mediante la métrica euclídea g , se le llama el subespacio suplemento ortogonal de U en (V, g) .

En la prueba de la Proposición 9.34 se identifica a U^\perp como el anulador de cierto conjunto de formas lineales sobre V . Por esta razón al anulador de un subconjunto ó subespacio S de V^* algunos textos lo representan por S^\perp y lo llaman el "ortogonal" de S en V (no olvidemos que V y su dual V^* se identifican mediante g en la Proposición 9.30, pag. 323).

De la definición anterior resulta inmediato que $(U^\perp)^\perp = U$ (compruébese). Además $\{0\}^\perp = V$ y $V^\perp = \{0\}$.

Hay que remarcar que puesto que $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V$, en el espacio vectorial euclídeo usual (\mathbb{R}^3, g) el subespacio suplemento ortogonal de cada recta vectorial es un plano vectorial. Si U_1 y U_2

son los dos planos vectoriales dados, respectivamente, por las ecuaciones implícitas

$$a_1 + a_2 - a_3 = 0 \quad y \quad a_1 + a_2 + 2 \cdot a_3 = 0$$

respecto a la base ortonormal ordenada $B = (e_1, e_2, e_3)$ entonces $U_1 \perp U_2$ y $U_2 \perp U_1$. Sin embargo U_2 no puede ser el suplemento ortogonal de U_1 pues U_1 y U_2 son ambos planos vectoriales (ilústrese esta situación con un dibujo).

Sea U un subespacio vectorial de V , y sea U^\perp el suplemento ortogonal de U en (V, g) . Como $V = U \oplus U^\perp$, resulta que cada vector $x \in V$ se escribe de manera única como $x_1 + x_2$ con $x_1 \in U$, $x_2 \in U^\perp$. Podemos entonces definir una aplicación

$$p_U : V \longrightarrow V \quad \text{mediante}$$

$$p_U(x) = x_1 \quad \text{si } x = x_1 + x_2$$

y también

$$p_{U^\perp} : V \longrightarrow V \quad \text{por}$$

$$p_{U^\perp}(x) = x_2 \quad \text{si } x = x_1 + x_2.$$

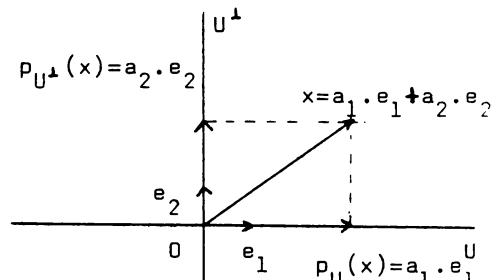
Por ejemplo, si $U = L(\{e_1\}) \subset \mathbb{R}^2$ tenemos que $U^\perp = L(\{e_2\})$, respecto de la métrica euclídea usual g de \mathbb{R}^2 y

$$p_U(a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2) = a_1 \cdot e_1$$

$$p_{U^\perp}(a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2) = a_2 \cdot e_2$$

Utilizando la definición de suma directa se prueba que p_U y p_{U^\perp} son lineales. En efecto, sean $x, y \in V$, y supongamos que $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ con $x_1, y_1 \in U$, $x_2, y_2 \in U^\perp \Rightarrow x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, de modo que

$$p_U(x + y) = x_1 + y_1 = p_U(x) + p_U(y).$$



Además, $a \cdot x = a \cdot x_1 + a \cdot x_2$ y por tanto

$$p_U(a \cdot x) = a \cdot p_U(x).$$

Del mismo modo se probaría que p_{U^\perp} es lineal.

Definición 9.36.- Al endomorfismo p_U de V se le llama la proyección ortogonal sobre U (a p_{U^\perp} la proyección ortogonal sobre U^\perp).

Nótese que p_U determina a p_{U^\perp} pues $p_{U^\perp} = I_V - p_U$. (Se podría probar que p_{U^\perp} es lineal viendo sólo que p_U lo es y teniendo en cuenta esta igualdad).

Proposición 9.37.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V . La proyección ortogonal p_U tiene las siguientes propiedades:

$$(1) \quad p_U \circ p_U = p_U$$

$$(2) \quad g(p_U(x), y) = g(x, p_U(y))$$

(3) U es el subespacio propio de V asociado al valor propio 1 de p_U , U^\perp el asociado al valor propio 0 de p_U .

Demostración.- Pongamos $x = x_1 + x_2 \in U \oplus U^\perp = V$ entonces

$$p_U(x) = x_1 = x_1 + 0 \in U \oplus U^\perp = V \text{ con lo que}$$

$$p_U(p_U(x)) = p_U(x_1) = x_1 = p_U(x).$$

lo que prueba (1).

(3) también es fácil pues $y \in U$ si y sólo si $p_U(y) = y$, y $\text{Ker } p_U = U^\perp$.

Para ver (2) podemos escribir $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$ según $V = U \oplus U^\perp$. Así,

$$p_U(x) = x_1, \quad p_U(y) = y_1 \quad y$$

$$g(p_U(x), y) = g(x_1, y_1 + y_2) = g(x_1, y_1)$$

$$g(x, p_U(y)) = g(x_1 + x_2, y_1) = g(x_1, y_1)$$

Con lo que se prueba (2) y acaba la demostración.

Nosotros sabíamos que, al cumplir p_U (1), se tenía $V = \text{Ker } p_U \oplus \text{Im } p_U$ (ver prob. nº 2, pag. 152). Un vistazo a lo anterior nos da que $\text{Ker } p_U = U^\perp$ y $U = \text{Im } p_U$. Por otro lado p_U es diagonalizable y podemos encontrar una base ortonormal ordenada B de (V, g) tal que

$$M(p_U, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

siendo $m = \dim_{\mathbb{R}} U$. Para ello basta con tomar bases ortonormales de $(U, g|_U)$ y $(U^\perp, g|_{U^\perp})$ (ejemplo 6, pag. 295) y juntarlas para tener también así una base ortonormal de (V, g) . El hecho de que una proyección ortogonal sea un endomorfismo diagonalizable "en una base ortonormal" de (V, g) se generalizará más adelante para un endomorfismo que verifique la condición (2) de la Proposición 9.37. (Epígrafe siguiente).

Uno puede ahora pensar en dar un recíproco a la Proposición 9.37, que se enuncia en los siguientes términos:

Proposición 9.38.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sea $p \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ que verifica

$$(1)' \quad p \circ p = p$$

$$(2)' \quad g(p(x), y) = g(x, p(y)) \quad \forall x, y \in V$$

Entonces p es la proyección ortonormal de V sobre $U = \{x \in V / p(x) = x\}$.

Demostración.- Por (1)' podemos escribir $V = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ (ver prob. 2, pag. 152). Como $p \circ p = p$ entonces tomamos $U = \text{Im } p$. De modo que $V = U \oplus \text{Ker } p$ y tenemos que si $x \in V$ es $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in U$

y $x_2 \in \text{Ker } p$ entonces $p(x) = x_1$. Sólo faltaría que demostrar que $\text{Ker } p = U^\perp$ (aqui nos va a intervenir la condición (2)'). Si $x \in \text{Ker } p$ se tendrá

$$g(y, x) = g(p(y), x) = g(y, p(x)) = 0 \quad \forall y \in V$$

así $x \in U^\perp$. Recíprocamente, si $x \in U^\perp$ entonces

$$g(p(x), y) = g(x, p(y)) = 0 \quad \forall y \in V$$

ya que $p(y) \in \text{Im } p = U$ y $x \in U^\perp$. Así $x \in \text{Ker } p$. Uniendo ambas inclusiones tenemos $U^\perp = \text{Ker } p$ y se acaba la prueba.

Observemos que la Proposición 9.38 también afirma que si $p \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ verifica (1)' y (2)' existe una base ortonormal ordenada B de (V, g) tal que, si $m = \text{rango } p$, se tiene

$$M(p, B) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endomorfismo adjunto de un endomorfismo. Endomorfismos autoadjuntos: su diagonalización. Consecuencias sobre métricas, formas cuadráticas y matrices simétricas. El teorema de Sylvester.-

Ya hemos visto (pag. 335) que la proyección ortogonal $p_U : V \longrightarrow V$ es diagonalizable; más todavía, que existe una base ortonormal B de (V, g) tal que $M(p_U, B)$ es diagonal. Ahora nos proponemos generalizar este hecho a cierto tipo de endomorfismos de un espacio vectorial euclídeo (V, g) .

Proposición 9.39.- Sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ y sea g una métrica euclídea sobre V . Entonces \hat{f} definido por

$$g(\hat{f}(x), y) = g(x, f(y))$$

es un endomorfismo de V .

Demostración.- En efecto \hat{f} es una aplicación pues como ya hemos puesto de manifiesto $g(\hat{f}(x), y) \quad \forall y \in V$ determina únicamente $\hat{f}(x)$. Por otro lado

$$g(\hat{f}(x + x'), y) = g(x + x', f(y)) = g(x, f(y)) + g(x', f(y)) =$$

$$= g(\hat{f}(x), y) + g(\hat{f}(x'), y) = g(\hat{f}(x) + \hat{f}(x'), y) \quad \forall y \in V$$

por tanto

$$\hat{f}(x + x') = \hat{f}(x) + \hat{f}(x') \quad \forall x, x' \in V.$$

$$\text{Análogamente, } \hat{f}(a \cdot x) = a \cdot \hat{f}(x) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V.$$

Definición 9.40.- Al endomorfismo \hat{f} definido a partir de f mediante g se le llama el endomorfismo adjunto de f con respecto a g .

La siguiente proposición nos proporcionaría una definición equivalente para \hat{f} :

Proposición 9.41.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$. Entonces:

$$\hat{f} = \ast \circ t_f \circ b$$

donde $t_f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V^*$ es el traspuesto de f (Definición 5.10, pag. 168).

Demostración.- Sea $x \in V$, entonces $(t_f(xb))^*$ es el vector de V definido por

$$g((t_f(xb))^*, y) = (t_f(xb))(y) \quad \forall y \in V,$$

pero

$$(t_f(xb))(y) = xb(f(y)) = g(x, f(y)) = g(\hat{f}(x), y) \quad \forall y \in V.$$

Por tanto se tiene

$$(t_f(xb))^* = \hat{f}(x) \quad \forall x \in V,$$

$$\text{y con ello } \ast \circ t_f \circ b = \hat{f}.$$

Como consecuencia, si B es una base ordenada de V y B^* su base dual en V^* tenemos

$$M(\hat{f}, B) = M(*, B^*, B) \cdot M(f, B^*) \cdot M(B, B, B^*)$$

es decir,

$$M(\hat{f}, B) = M_B(g)^{-1} \cdot t_{M(f, B)} \cdot M_B(g)$$

donde se ha utilizado que $M(t_{f, B^*}) = t_{M(f, B)}$, (ver Proposición 5.13, pag. 169). En particular si B es una base ortonormal de (V, g) tenemos:

$$M(\hat{f}, B) = t_{M(f, B)}.$$

En el caso de la proyección ortogonal p_U resulta que $\hat{p}_U = p_U$. Es decir, p_U coincide con su adjunto. Es por tanto, "autoadjunto" en el sentido de la siguiente:

Definición 9.42. - Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$. Diremos que f es autoadjunto respecto a g si $\hat{f}=f$; es decir, si

$$g(f(x), y) = g(x, f(y)) \quad \forall x, y \in V.$$

Según las observaciones hechas antes de la Definición 9.42 resulta que :

Proposición 9.43. - Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$. Entonces f es autoadjunto respecto a g sí y sólo sí para una base ortonormal ordenada B de (V, g) la matriz $M(f, B)$ es simétrica.

(Por este resultado en algunos textos a los endomorfismos autoadjuntos se les llama también simétricos).

Nótese que la imagen de la aplicación lineal inyectiva del Teorema 9.4. pag. 299, es precisamente, el conjunto de todos los endomorfismos de V autoadjuntos respecto de la métrica euclídea g . Así, estos constituyen un subespacio vectorial de $\text{End}_{\mathbb{R}} V$ cuya

dimensión es $\frac{1}{2} \cdot n(n+1)$ siendo $n = \dim \mathbb{R}^V$. Por tanto, estudiando endomorfismos de V autoadjuntos respecto a g estamos estudiando métricas sobre V (un resultado concreto donde se aplica esto lo da el Corolario 9.49, pag. 342).

Nos encaminamos a probar un resultado de diagonalización de endomorfismos autoadjuntos que como veremos tiene muchas consecuencias.

Proposición 9.44.- Toda matriz simétrica real A tiene al menos un valor propio real.

Demostración.- Mirando A como una matriz compleja podemos asegurar que existe $a \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}^n$ ($= M_{n \times 1}(\mathbb{C})$), $z \neq 0$, tal que $A.z = a.z$. En efecto, la ecuación característica de A , $p_A(t) = 0$ (Definición 8.7, pag. 277) tiene al menos una solución compleja $a \in \mathbb{C}$, (pag. 290). Como $\text{rang}(A - a.I_n) < n$ (ver pag. 276) resulta que existe $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$, tal que $(A - a.I_n).z = 0$; es decir, $A.z = a.z$. Ahora bien,

$$A.z = a.z \quad \text{implica que } {}^t \bar{z}.A.z = a.{}^t \bar{z}.z$$

donde ${}^t \bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)$, \bar{z}_j es el complejo conjugado de z_j , si $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Analicemos ambos miembros de la igualdad ${}^t \bar{z}.A.z = a.{}^t \bar{z}.z$. Tenemos

$${}^t \bar{z}.z = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 > 0 \quad \text{y} \quad {}^t \bar{z}.A.z = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \bar{z}_i \cdot z_j$$

pero ${}^t \bar{z}.A.z$ es un número real, pues su conjugado cumple

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a_{ij} \cdot z_i \cdot \bar{z}_j &= \sum_{i,j} a_{ji} \cdot z_j \cdot \bar{z}_i = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \bar{z}_i \cdot z_j \\ &\text{cambio} \\ &i \text{ por } j \end{aligned}$$

por ser A simétrica. Por tanto el complejo conjugado de ${}^t \bar{z}.A.z$ es

él mismo y en definitiva $t_{\bar{z} \cdot A \cdot z}$ es real. De esto podemos concluir que $a \in \mathbb{R}$ pues

$$a = \frac{1}{t_{z \cdot z}} \cdot t_{\bar{z} \cdot A \cdot z}$$

Esto concluye la demostración.

Obsérvese que al ser $a \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tal que $A \cdot x = a \cdot x$.

Corolario 9.45.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeos y sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$, autoadjunto respecto a g . Entonces f tiene al menos un valor propio real.

Demostración.- Sea B una base ortonormal ordenada de (V, g) , entonces (Proposición 9.43, pag. 338) $M(f, B)$ es una matriz simétrica real. Entonces $M(f, B)$ tiene un valor propio real y esto implica (ver pag. 275) que a es un valor propio "real" de f .

Proposición 9.46.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeos y $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ autoadjunto respecto a g . Si U es un subespacio de V invariante por f entonces su suplemento ortogonal U^\perp es también invariante por f .

Demostración.- Veamos que si $x \in U^\perp \Rightarrow f(x) \in U^\perp$. Para ello tengamos en cuenta que $g(f(x), y) = g(x, f(y))$ de modo que $g(f(x), y) = 0$ $\forall y \in U$ y $f(x) \in U^\perp$.

Obsérvese que si tomamos U como un subespacio propio V_a de V , al ser V_a invariante por f (Proposición 8.11, pag. 280) también lo será V_a^\perp . Sea b otro valor propio de f , $b \neq a$, Si $x \in V_a$, $x \neq 0$, e $y \in V_b$, $y \neq 0$, de $g(f(x), y) = g(x, f(y))$ tenemos $(a-b) \cdot g(x, y) = 0$, y por tanto $g(x, y) = 0$, es decir $V_b \subset V_a^\perp$. Esto se generaliza a un número finito de vectores propios, de modo que se tendría que vectores propios correspondientes a valores propios distintos son siempre perpendiculares (dos a dos).

Estableceremos ahora el Teorema de diagonalización de endomorfismos autoadjuntos.

Teorema 9.47.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ autoadjunto respecto a g . Entonces existe una base ortonormal ordenada B de (V, g) formada por vectores propios.

Demostración.- Haremos la prueba por inducción sobre la dimensión n de V . Para $n=1$ sabemos que f tiene que ser la "multiplicación" por un escalar $a \in \mathbb{R}$, tomando $x \in V$ con $\|x\|=1$ resulta que $B=(x)$ es una base ortonormal formada por un vector propio. Sunogramos por hipótesis de inducción que lo que afirma el teorema es cierto para dimensión $n-1$. Sea ahora (V, g) un espacio vectorial euclídeo con $\dim_{\mathbb{R}} V=n$ y $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ autoadjunto respecto a g . Por el Corolario 9.45, existe $x \in V$, $x \neq 0$, con $f(x) = a \cdot x$ para $a \in \mathbb{R}$. Sea $U = L(\{x\})$. Como U es invariantes por f también U^\perp es invariante por f (Proposición 9.46). De modo que la restricción de f a U^\perp , $f|_{U^\perp}: U^\perp \rightarrow U^\perp$ es un endomorfismo de U^\perp autoadjunto respecto a la métrica euclídea $g|_{U^\perp}$ (ejemplo 6, pag. 295). Por la hipótesis de inducción existe una base ortonormal $B = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ de $(U^\perp, g|_{U^\perp})$ (U^\perp tiene dimensión $n-1$) formada por vectores propios de $f|_{U^\perp}$. Entonces $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde $x_1 = \frac{1}{\|x\|} \cdot x \in U$, es una base ortonormal de (V, g) por ser $V = U \oplus U^\perp$ y es claro que $M(f, B)$ es una matriz diagonal. Esto concluye la demostración del Teorema.

Corolario 9.48.- Sea A una matriz simétrica real de orden n . Entonces existe $P \in O(n, \mathbb{R})$ tal que $P^t A P$ es una matriz diagonal.

Demostración.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo con $\dim_{\mathbb{R}} V=n$ y sea B una base ortonormal ordenada de (V, g) . El endomorfismo f de V definido por $M(f, B) = A$ es autoadjunto respecto a g (Proposición 9.43, pag. 338). Según el Teorema 9.47, existe una base ortonormal ordenada \tilde{B} tal que $M(f, \tilde{B})$ es diagonal. Entonces si $P = M(1_V, \tilde{B}, B)$

resulta que $P \in O(n, \mathbb{R})$ (pag. 312) y

$${}^t P \cdot A \cdot P = {}^t P \cdot M(f, B) \cdot P = M(f, \tilde{B})$$

lo que acaba la demostración.

Corolario 9.49.- Sea g' un tensor simétrico de tipo $(2,0)$ sobre un espacio vectorial euclídeo (V, g) (es decir $g' \in S_2(V)$). Entonces existe una base ortonormal B de (V, g) tal que $M_B(g')$ es diagonal.

Demostración.- En efecto, dado $g' \in S_2(V)$ construyo el único endomorfismo $f_{g'}$ de V del Teorema 9.4, pag. 292. Recordemos que $f_{g'}(x)$ es el único vector de V definido por $g(f_{g'}(x), y) = g'(x, y) \quad \forall y \in V$. Este endomorfismo $f_{g'}$ es autoadjunto respecto a g , por tanto, según el Teorema 9.47, existe una base ortonormal ordenada $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $M(f_{g'}, B)$ es diagonal. Pongamos $f_{g'}(x_i) = r_i \cdot x_i$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces

$$g'(x_i, x_j) = g(f_{g'}(x_i), x_j) = r_i \cdot g(x_i, x_j) = r_i \cdot \delta_{ij}.$$

Es decir $M_B(g') = M(f_{g'}, B)$ que es una matriz diagonal.

Teniendo en cuenta la relación que hay entre "métricas" sobre V y formas cuadráticas (Proposición 9.3, pag. 297) podemos enunciar:

Corolario 9.50.- Sea F una forma cuadrática sobre un espacio vectorial euclídeo (V, g) . Entonces existen una base ortonormal ordenada $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de (V, g) y números reales r_1, \dots, r_n tales que

$$F(x) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot a_i^2 \quad \text{siendo} \quad x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i.$$

Demostración.- Sea $g_F \in S_2(V)$ definido a partir de g como en (2) de la Definición 9.2, pag. 296. Según el Corolario 9.49, existe una base ortonormal ordenada $B = (x_1, \dots, x_n)$ de (V, g) tal que

$g_F(x_i, x_j) = r_i \cdot \delta_{ij}$ para ciertos números reales r_1, \dots, r_n (que son los valores propios del endomorfismo autoadjunto asociado a g_F).

Entonces si $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ tenemos

$$F(x) = g_F(x, x) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot a_i^2$$

y así concluye la prueba.

Estos dos últimos resultados pueden enunciarse en una forma más general. Veamos que pueden diagonalizarse tensores simétricos de tipo $(2,0)$ y formas cuadráticas sobre un espacio vectorial real.

Corolario 9.51.- Sea ς' un tensor simétrico de tipo $(2,0)$ sobre un espacio vectorial real V . Entonces existe una base ordenada $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de V tal que

$$g' = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \varphi^i \otimes \varphi^i$$

donde $B^* = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ es la base dual de B y $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$.

Demostración.- Elijamos cualquier base ordenada B_1 de V , y sea g la única métrica sobre V dada por $M_{B_1}(g) = I_n$. Entonces g es euclídea. A partir de esta métrica euclídea auxiliar nos ponemos en la situación del Corolario 9.49, es decir, g' es un tensor simétrico de tipo $(2,0)$ sobre el espacio vectorial euclídeo (V, g) . Existe una base ortonormal ordenada $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de (V, g) tal que $M_B(g')$ es diagonal, es decir $g'(x_i, x_j) = r_i \cdot \delta_{ij}$. Pero esto implica (Teorema 6.7, pag 188) que

$$\varsigma' = \sum_{i,j} g'(x_i, x_j) \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \varphi^i \otimes \varphi^i$$

lo que acaba la demostración.

Corolario 9.52.- Sea F una forma cuadrática sobre un espacio vectorial real V . Entonces existen una base ordenada $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de V y números reales r_1, \dots, r_n tales que

$$F(x) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot e_i^2 \quad \text{siendo } x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i.$$

Demostración.- Sea B_1 una base ordenada de V y sea g la única métrica sobre V dada por $M_{B_1}(g) = I_n$. Entonces g es euclídea y aplicando el Corolario 9.50, existe una base ordenada ortonormal $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de (V, g) tal que si

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \quad \text{se tiene } F(x) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot e_i^2$$

para ciertos $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$, que es lo que se quería probar.

Estos resultados nos amplian el concepto de diagonalización. Así, el Corolario 9.49 nos afirma que en un espacio vectorial euclídeo (V, g) , para cada tensor simétrico de tipo $(2,0)$ g' sobre él existe una base ortonormal B de (V, g) donde g' "es diagonal". El Corolario 9.50 nos dice que también, en el mismo contexto anterior, existen bases ortonormales donde una forma cuadrática "es diagonal". Si embargo, los últimos corolarios son más generales pues afirman, que existen bases en un espacio vectorial real donde un tensor simétrico (ó una forma cuadrática) es diagonal.

Como una aplicación al estudio de espacios vectoriales métricos (no euclídeos en general) tenemos el siguiente

Teorema 9.53.- (Teorema de Sylvester). - Sea (V, g') un espacio vectorial métrico. Entonces existen enteros s y r , que sólo dependen de g' , y una base ordenada $B = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+r}, x_{s+r+1}, \dots, x_n)$ de V tales que

$$g'(x_i, x_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$g'(x_i, x_i) = \begin{cases} -1 & \text{si } i \in \{1, \dots, s\} \\ 1 & \text{si } i \in \{s+1, \dots, s+r\} \\ 0 & \text{si } i \in \{s+r+1, \dots, n\} \end{cases} .$$

Demostración.- Sea $\tilde{B} = (y_1, \dots, y_n)$ una base ordenada de V , obtenida por el Corolario 9.51, que cumple $g'(y_i, y_j) = 0$, $i \neq j$. Ordenamos los vectores de \tilde{B} de tal modo que

$$g(y_i, y_i) = r_i < 0 \quad \text{si } i \in \{1, \dots, s\}$$

$$g(y_j, y_j) = r_j > 0 \quad \text{si } j \in \{s+1, \dots, s+r\}$$

$$g(y_k, y_k) = 0 \quad \text{si } k \in \{s+r+1, \dots, n\}.$$

Entonces si tomamos

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{-r_i}} \cdot y_i \quad \text{si } i \in \{1, \dots, s\}$$

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{r_j}} \cdot y_j \quad \text{si } j \in \{s+1, \dots, s+r\}$$

$$x_k = y_k \quad \text{si } k \in \{s+r+1, \dots, n\}$$

resulta que $B = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+r}, x_{s+r+1}, \dots, x_n)$ cumple lo anunciado.

Supongamos que $B' = (x'_1, \dots, x'_t, x'_{t+1}, \dots, x'_{t+p}, x'_{t+p+1}, \dots, x'_n)$ es otra base de V que cumple $g'(x'_i, x'_j) = 0$ $i \neq j$, y además

$$\begin{aligned} g'(x'_i, x'_i) &= -1 \quad \text{si } i \in \{1, \dots, t\} \\ g'(x'_j, x'_j) &= 1 \quad \text{si } j \in \{t+1, \dots, t+p\} \\ g'(x'_k, x'_k) &= 0 \quad \text{si } k \in \{t+p+1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

En primer lugar tenemos que rango $M_B(g') = \text{rango } M_B(g)$ (ver pag. 301 y pag. 148) por tanto $s+r = t+p$. Veamos que $s=t$ con lo que también se tendría $r=p$. En efecto, supongamos $s>t$ ($t < s$ sería análogo) y sean

$$\begin{aligned} U_1 &= L(\{x'_{t+1}, \dots, x'_{t+p}, x'_{t+p+1}, \dots, x'_n\}) \quad \text{y} \\ U_2 &= L(\{x_1, \dots, x_s\}). \end{aligned}$$

Entonces por la Proposición 3.41, pag. 98, tenemos

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) = \dim_{\mathbb{R}} U_1 + \dim_{\mathbb{R}} U_2 - \dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) \geq (n-t) + s - n$$

ya que

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) \leq n$$

De modo que

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) \geq s-t > 0$$

lo que implica que existe $z \in U_1 \cap U_2$, $z \neq 0$. Pero esto es absurdo pues si $z \in U_1$ se tiene $g'(z, z) \geq 0$ y por $z \in U_2$ que $g(z, z) < 0$ (por ser $z \neq 0$). Esto concluye la demostración del teorema.

Sería natural llamarle a una base obtenida en el Teorema 9.53 base ortonormal de (V, g') (cómprárese con el Teorema 9.14, pag. 308). Entonces el resultado que acabamos de probar se podría enunciar diciendo que cada espacio vectorial métrico (V, g') tiene una base ortonormal.

Utilizando la Proposición 9.3, pag. 297, se probará como ejercicio el siguiente

Corolario 9.54.- Sea V un espacio vectorial real y F una forma cuadrática sobre él. Existen números enteros s y r, que sólo dependen de F, y una base ordenada $B = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+r}, x_{s+r+1}, \dots, x_n)$ de V tales que

$$F(x) = -\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{j=s+1}^{s+r} a_j^2 \quad \text{si } x = \sum_{k=1}^n a_k \cdot x_k$$

(compárese con el Corolario 9.52, pag. 344).

Por último tenemos

Corolario 9.55.- Para cada matriz simétrica real A existe $P \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que

$$t_P \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

donde s+r es el rango de A.

Obsérvese que en este resultado la matriz P que aparece es "sólo" regular, mientras que en Corolario 9.48, pag. 341, P es ortogonal (y por tanto $t_P = P^{-1}$). Por consiguiente, el Corolario 9.55 nos da la relación matricial de cambio de base para las "matrices de coordenadas" de una misma "métrica" (pag. 301). No se debe por ello confundir este último corolario con un resultado de diagonalización de matrices (como el Corolario 9.48, ver también el Corolario 8.16, pag. 284).

De todo lo anterior se deduce que usando la diagonalización de endomorfismos autoadjuntos podemos resolver simultáneamente varios problemas, ejemplo de lo cual son los cinco enunciados siguientes, que se resuelven a partir del primero de ellos.

(1) Se considera (\mathbb{R}^3, g) , donde g es la métrica usual de \mathbb{R}^3 , que viene dada por $M_B(g) = I_3$, siendo $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base ordenada usual de \mathbb{R}^3 . Sea $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$f(a_1, a_2, a_3) = (-a_1 + a_2 + a_3, a_1 - a_2 + a_3, a_1 + a_2 - a_3).$$

Probar que f es autoadjunto respecto a g y que existe una base ortonormal $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de (\mathbb{R}^3, g) tal que

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es (ortogonalmente) semejante a una matriz diagonal.

(3) Encontrar una base ortonormal ordenada $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de (\mathbb{R}^3, g) que "diagonalice" al tensor simétrico g' dado por

$$g'(x, y) = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{siendo } x = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot e_i,$$

$y = \sum_{i=1}^3 b_i \cdot e_i$. Es decir, B' cumple $g'(e'_i, e'_j) = 0$ si $i \neq j$.

(4) Encontrar una base ortonormal $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de (\mathbb{R}^3, g) que "diagonalice" a la forma cuadrática

$$F(x) = -a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_3 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \quad \text{siendo } x = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot e_i.$$

Es decir, B' cumple $g_F(e'_i, e'_j) = 0$ si $i \neq j$.

(5) Se considera en \mathbb{R}^3 la métrica g' dada por $g'(e_i, e_i) = -1$, $i = 1, 2, 3$, $g'(e_i, e_j) = g'(e_j, e_i) = 1$ si $i \neq j$. Encontrar una base ortonormal (ver pag. 346) del espacio vectorial métrico (\mathbb{R}^3, g) .

Véamos (1). En efecto, $M(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es simétrica y B es una base ortogonal de (\mathbb{R}^3, g) , por lo tanto (Proposición 9.43, pag. 338), f es autoadjunto. De la ecuación característica $p_f(t) = 0$ sacamos $t=1$ y $t=-2$ (doble). Sabemos entonces que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_{-2}$ (Teorema 9.47. pag. 341) y que ha de ser $V_{-2} \subset V_1^\perp$ (ver pag. 340). Así tenemos que $V_1^\perp = V_{-2}$. Una base ortonormal de (\mathbb{R}^3, g) que diagonalice a f se forma tomando un vector unitario en V_1 (una base ortonormal de V_1) y una base ortonormal de V_{-2} que estaría formada por dos vectores. Uniendo ambas, tenemos la base ortonormal de (\mathbb{R}^3, g) deseada

$$V_1 = \left\{ a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 \mid \begin{array}{l} -2 \cdot a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 - 2 \cdot a_2 + a_3 = 0 \end{array} \right\} = L(\{e_1 + e_2 + e_3\})$$

$$\text{Tomo } e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (e_1 + e_2 + e_3) \in V_1.$$

$$V_{-2} = \left\{ a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}.$$

De modo que $\{e_1 - e_2, e_1 - e_3\}$ es una base de V_{-2} , la ortonormalizo por el procedimiento de Gram-Schmidt (Teorema 9.14, pag. 308) obteniendo

$$e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 - e_2), \quad e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e_1 + \frac{1}{2} \cdot e_2 - e_3 \right)$$

que es una base ortonormal de $(V_{-2}, g|_{V_{-2}})$.

Como $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = -2 \cdot e'_2$, $f(e'_3) = -2 \cdot e'_3$ tenemos

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } B' = (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ que es una base ortonormal de } (\mathbb{R}^3, g).$$

Una matriz $P \in O(3, \mathbb{R})$ tal que

$$t_P \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ lo que resuelve (2).}$$

(3) y (4) se resuelven tomando justamente la base ortonormal ordenada B' que acabamos de hallar. Por último, definimos g tal que $M_{B'}(g) = I_3$. Entonces g es una métrica euclídea (la usual de \mathbb{R}^3) y si definimos $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ por $g'(x, y) = g(f(x), y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$ (Teorema 9.4 , pag. 299) resulta que f es un endomorfismo de \mathbb{R}^3 autoadjunto respecto a g y

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Sea B' la base de \mathbb{R}^3 obtenida en (1). Tenemos,

$$g'(e'_1, e'_1) = g(f(e'_1), e'_1) = g(e'_1, e'_1) = 1 ; \quad g'(e'_2, e'_2) = -2 ; \quad g'(e'_3, e'_3) = -2$$

$$\text{y } g'(e'_i, e'_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

De modo que si $e''_1 = e'_1$, $e''_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e'_2$, $e''_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e'_3$ resulta que

$$B'' = (e''_1, e''_2, e''_3) \text{ es una base ordenada de } \mathbb{R}^3 \text{ y } M_{B''}(g') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

es decir, B'' es una base ortonormal ordenada del espacio vectorial métrico (\mathbb{R}^3, g') .

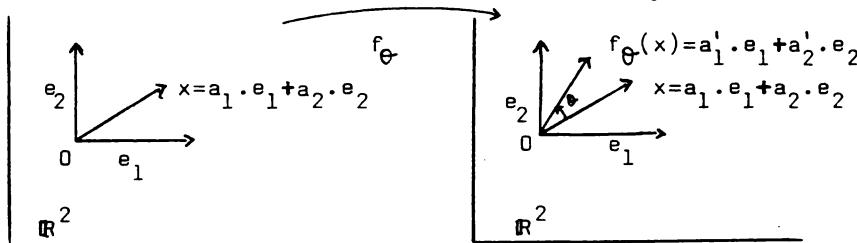
Clasificación de las isometrías de un espacio vectorial

métrico euclídeo.-

Consideremos el plano euclídeo (\mathbb{R}^2, g) (ejemplo 1, pag. 293 con $n=2$) y sean f_θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, h los endomorfismos de \mathbb{R}^2 dados por

$$M(f_\theta, B) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ y } M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $B = (e_1, e_2)$ es la base ordenada usual de \mathbb{R}^2 . Como B es una base orthonormal de (\mathbb{R}^2, g) y $M(f_\theta, B)$ son matrices ortogonales, f_θ y h son isometrías de (\mathbb{R}^2, g) (ver pag. 314). Orientemos \mathbb{R}^2 tomando B como una base ordenada positivamente (Definición 7.18, pag. 264). Entonces podemos interpretar geométricamente f_θ según el dibujo



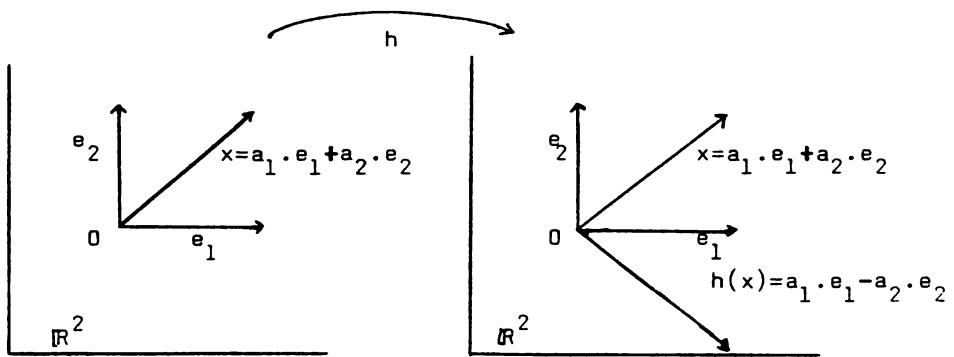
siendo

$$a'_1 = \cos \theta \cdot a_1 - \sin \theta \cdot a_2$$

$$a'_2 = \sin \theta \cdot a_1 + \cos \theta \cdot a_2$$

Así f_θ es una "rotación" en el sentido contrario a la marcha de las agujas de un reloj ($f_\theta = 1_{\mathbb{R}^2}$ si $\theta=0$). El ángulo θ es el ángulo orientado entre x y $f(x)$. Nótese que f_θ conserva la orientación representada por B pues $\det f_\theta = 1$ (Proposición 7.20, pag. 265).

Y para h tenemos



Entonces h es una "reflexión" (o simetría) respecto de la recta vectorial $U = L(\{e_1\})$ (U es un "espejo" donde al mirarse x se ve como $f(x)$). Esta isometría h de (\mathbb{R}^2, g) cumple $\det h = -1$, por tanto invierte la orientación representada por B . Nótese que $h(e_1) = e_1$, $h(e_2) = -e_2$ y que la base $(h(e_1), h(e_2))$ no induce en \mathbb{R}^2 la misma orientación que $B = (e_1, e_2)$.

A la vista de esto nos proponemos probar la siguiente

Proposición 9.56.- Sea f una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V, g) con $\dim \mathbb{R}^V = 2$. Entonces, existe una base ortonormal B de (V, g) tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ó bien } M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

Demostración.- Sea $B' = (y_1, y_2)$ cualquier base ortonormal de (V, g) . Sabemos (pag. 308) que, $M(f, B')$ es ortogonal. Así que sabiendo

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{tendremos}$$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \quad y \\ a_{11} \cdot a_{12} + a_{22} \cdot a_{21} = 0.$$

Las dos primeras relaciones dicen que los vectores (a_{11}, a_{21}) y $(a_{22}, -a_{12})$ son unitarios respecto de la métrica euclídea usual de \mathbb{R}^2 , y la siguiente que son dependientes, por tanto $(a_{11}, a_{21}) = \pm(a_{22}, -a_{12})$. Como $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$ existe un único θ , $0 \leq \theta < 2\pi$ tal que $a_{11} = \cos \theta$ y $a_{21} = \sin \theta$. Para los otros dos números tenemos dos posibilidades:

$$(a) \quad a_{12} = -\sin \theta \quad a_{22} = \cos \theta$$

$$(b) \quad a_{12} = \sin \theta \quad a_{22} = -\cos \theta.$$

En el caso (a) tenemos

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y en el (b)

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que en (a) tenemos $\det f = 1$ y en (b) $\det f = -1$. Es claro que, en el caso (a), si $f \neq 1$, entonces el único vector fijo por f es el cero. Veamos que ocurre en el otro caso. Sea $x = a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2$, entonces si f es la isometría dada por (b) se tiene $f(x) = x$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\left. \begin{aligned} (\cos \theta - 1) \cdot a_1 + \sin \theta \cdot a_2 &= 0 \\ \sin \theta \cdot a_1 + (-1 - \cos \theta) \cdot a_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que se puede ver como un sistema homogéneo en las incógnitas a_1 y a_2 .

Como

$$\det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = -(\cos^2 \theta - 1) - \sin^2 \theta = 0$$

resulta que para una isometría f del tipo (b) existe $x \in V$, $x \neq 0$, tal que $f(x) = x$, y por tanto el subespacio vectorial $U = \{y \in V / f(y) = y\}$ (que es una recta vectorial) queda fijo "vector a vector" por f .

En otras palabras, 1 es un valor propio de f y el subespacio propio U_1 coincide con U . Sea entonces $x_1 \in U$ con $\|x_1\| = 1$ y $x_2 \in U^\perp$ con $\|x_2\| = 1$. Entonces $B = (x_1, x_2)$ es una base ortonormal ordenada de (V, g) que cumple

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

de donde $\det f = d$, pero sabíamos que $\det f = -1$ (de la pag. anterior) por tanto ha de ser $d = -1$. Como $M(f, B)$ tiene que ser ortogonal (pag. 315) necesariamente $c = 0$. Con lo que acaba la demostración.

Debido a la intérpretación geométrica de las pags. 351 y 352, y al desarrollo de esta demostración damos la siguiente

Definición 9.57. — Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sea f una isometría de (V, g) . Diremos que f es una rotación si $\det f = 1$ y diremos que f es una reflexión si $\det f = -1$. (Obsérvese que 1 y -1 son los dos únicos valores posibles para $\det f$ (pag. 313)).

En la Proposición 9.56 lo que se ha probado es que, cuando $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, es posible elegir bases ortonormales ordenadas B de (V, g) de tal forma que si f es una rotación se tenga

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y si f es una reflexión

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

En el primero de los casos, si orientamos V mediante la base orto-normal ordenada B , tenemos que si $x \in V$, $x \neq 0$, entonces $f(x)$ es el único vector de V con igual longitud que x y tal que el ángulo orientado (Definición 9.27, pag. 321) entre x y $f(x)$ es θ . Suele llamarse a θ el ángulo de rotación de f .

Nótese que el subconjunto $\text{Iso}^+(V, g)$ del grupo de las isometrías de (V, g) formado por las rotaciones es un subgrupo normal de $\text{Iso}(V, g)$ (ver pag. 319). El subconjunto de las reflexiones no es un subgrupo de $\text{Iso}(V, g)$ (al componer dos reflexiones nos da una rotación). $\text{Iso}^+(V, g)$ es, además, isomorfo con el grupo especial ortogonal $\text{SO}(n, \mathbb{R})$, $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ (pag. 319).

Consecuencia inmediata de la Proposición 9.56, pag. 35^a, es que una matriz $A \in O(2, \mathbb{R})$ es (ortogonalmente) semejante a una del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

según que $\det A = 1$ ó $\det A = -1$ respectivamente. (Este resultado se generaliza en el Corolario 9.60, pag. 358).

Proposición 9.58.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sea f una isometría de (V, g) . Entonces

(1) Si U es un subespacio vectorial de V invariante por f , tambien el suplemento ortogonal U^\perp de U es invariante por f .

(2) Si a es un valor propio de f entonces $a=1$ ó $a=-1$.

Demostración.- Sea $x \in U^\perp$. Para probar que $f(x) \in U^\perp$ lo que hay que ver es que $g(f(x), y) = 0 \quad \forall y \in U$ (pag. 331). Ahora bien

$$g(f(x), y) = g(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(y)) = g(x, f^{-1}(y)).$$

pero como U es invariante por f tambien lo será por f^{-1} y por tanto $g(x, f^{-1}(y)) = 0 \quad \forall y \in U$, lo que implica que $f(x) \in U^\perp$. Así queda probado que U^\perp es invariante por f .

Para (2) supongamos que $f(x) = a \cdot x$, $x \neq 0$. Como $g(f(x), f(x)) = g(x, x)$ se tendrá. $a^2 \cdot g(x, x) = g(x, x)$ y $g(x, x) > 0$ por lo que $a^2 = 1$. Lo que concluye la prueba.

Tras este resultado hay que hacer dos observaciones. la primera es que una isometría de (V, g) no tiene porque tener ningún valor propio. Por ejemplo, una rotación distinta de l_V y de $-l_V$, en un plano vectorial euclídeo no tiene ningún valor propio. La segunda es que en la demostración de la Proposición 9.58, está implícito el hecho de que el endomorfismo adjunto (Definición 9.40, pag. 337) de una isometría f de (V, g) es f^{-1} (que también es una isometría de (V, g) por la Proposición 9.22, pag. 316). Por tanto, las únicas isometrías de (V, g) que son autoadjuntas respecto a g son aquellas f que verifican $f \circ f = l_V$.

Teorema 9.59. — Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, $n \geq 2$, y sea f una isometría de (V, g) . Entonces, existen enteros no negativos p, q, s con $p+q+2s=n$ y una base ortonormal B de (V, g) tales que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \\ \hline & R(\theta_1) \\ & \vdots \\ & 0 & 0 \\ 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

donde $R(\theta_j) = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$, $0 < \theta_j < 2\pi$, $\theta_j \neq \pi$ para todo j ,

I_p e I_q las matrices identidad de órdenes p y q respectivamente.

(Se entenderá que si $p=0$ no aparecen "unos" en la diagonal de $M(f, B)$, si $q=0$ que no aparece ningún -1 en la diagonal, y que si $s=0$ no hay ninguna submatriz del tipo $R(\theta_j)$ en $M(f, B)$).

Demostración.- Pongamos en primer lugar

$$U = \{x \in V / f(x) = x\} \quad y \quad U' = \{x \in V / f(x) = -x\}.$$

Tanto U como U' son subespacios vectoriales de V . Si l es un valor propio de f entonces $U = V_1$, si no lo es entonces $U = \{0\}$ (análogamente con $-l$ y U').

U y U' son invariantes por f (Proposición 8.11, pag. 280) y además si $x \in U$ e $y \in U'$ se tiene $g(x, y) = 0$ (ver pag. 340). Sea entonces $W = U \oplus U'$ (nótese que $U \cap U' = \{0\}$) que será también un subespacio de V invariante por f . Entonces, (Prop. 9.58) el subespacio W^\perp , que puede ser $\{0\}$ (si $V = U \oplus U'$) es invariante por f y la restricción de f a W^\perp

$$f|_{W^\perp}: W^\perp \longrightarrow W^\perp$$

no tiene ningún valor propio pues si $f|_{W^\perp}$ tuviera un valor propio a sería $a = \pm 1$, entonces existiría $x \in W^\perp$, $x \neq 0$, con $f(x) = a \cdot x$ y también ocurriría $x \in W$ con lo que $x \in W \cap W^\perp = \{0\}$.

Consideraremos el endomorfismo de W^\perp $h = f|_{W^\perp} + (f|_{W^\perp})^{-1}$. Como $(f|_{W^\perp})^{-1}$ es el endomorfismo adjunto de $f|_{W^\perp}$ respecto de $g|_{W^\perp}$ (ver discusión pag. anterior) tenemos que h es autoadjunto respecto de $g|_{W^\perp}$. Por el Teorema 9.47, pag. 341, h es diagonalizable, en particular h tiene un valor propio $b \in \mathbb{R}$. Sea entonces $z \in W^\perp$, $z \neq 0$, tal que $h(z) = b \cdot z$. Es decir, z cumple

$$f(z) + f^{-1}(z) = b \cdot z$$

y aplicando f a ambos miembros resulta

$$f(f(z)) + z = b \cdot f(z).$$

Observemos que los dos vectores de W^\perp z y $f(z)$ son linealmente independientes (z no puede ser un vector propio de f) por tanto generan un plano vectorial $W_1 = L(\{z, f(z)\})$ que es invariante por f debido a la anterior igualdad. Por tanto la restricción de f a W_1 , $f|_{W_1}: W_1 \longrightarrow W_1$ es una isometría de $(W_1, g|_{W_1})$ cuyo único vector fijo es el cero. Por la Proposición 9.56, pag. 352, existe una base ortonormal ordenada de $(W_1, g|_{W_1})$ tal que la matriz de

$f|_{W_1}$ respecto a ella es

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

con $0 < \theta_1 < 2\pi$, $\theta_1 \neq \pi$. Sea ahora $W \oplus W_1$ (nótese que $W \cap W_1 = \{0\}$) que es un subespacio de V invariantes por f y tal que $g(x,y) = 0$ $\forall x \in W$, $\forall y \in W_1$. Repetimos ahora el proceso para $(W \oplus W_1)^\perp$ tal y como se hizo para W^\perp . Así, tenemos que V puede descomponerse como

$$V = U \oplus U' \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_s$$

donde U , U' , W_j , $1 \leq j \leq s$ son subespacios de V invariantes por f , además si x e y pertenecen a dos subespacios distintos se tiene $g(x,y) = 0$. Supongamos $\dim_{\mathbb{R}} U = p$ y $\dim_{\mathbb{R}} U' = q$. Entonces si (x_1, \dots, x_p) es una base ortonormal ordenada de $(U, g|_U)$, $(x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$ es una base ortonormal ordenada de $(U', g|_{U'})$ y $(x_{p+q+j}, x_{p+q+j+1})$ una base ortonormal ordenada de $(W_j, g|_{W_j})$ tal que relativo a ella $f|_{W_j}$ tenga por matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$$

con $0 < \theta_j < 2\pi$, $\theta_j \neq \pi$, $1 \leq j \leq s$, resulta que

$$B = (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}, x_{p+q+1}, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

es una base ortonormal ordenada de (V, g) tal que $M(f, B)$ es de la forma requerida. Esto concluye la demostración.

Corolario 9.60.- Sea $A \in O(n, \mathbb{R})$. Entonces existe $P \in O(n, \mathbb{R})$ tal que $t^P A P$ es del tipo de la que se da en el Teorema 9.59.

Demostración.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y sea B_1 una base ortonormal de (V, g) , entonces el endomorfismo f de V definido por $M(f, B_1) = A$ es una isometría de (V, g) (pag. 314). Por el Teorema 9.59 existe una base ortonormal B de (V, g) donde $M(f, B)$ es de la forma deseada, pero resulta que $t^P M(f, B_1) P = M(f, B)$, que es lo que se quería probar.

Obsérvese que en el Teorema 9.59, pag. 356, si la isometría f tiene algún valor propio, entonces necesariamente estos son 1 ó -1. En este caso p es la dimensión del subespacio propio V_1 y q la del subespacio propio V_{-1} . Además, si $s=0$ f es diagonalizable y si $s \neq 0$ existen planos vectoriales en V invariantes por f en los que ningún vector distinto del cero es fijo por f ni se aplica en su opuesto.

Como caso particular del Teorema 9.59 tenemos que si f es una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V, g) con $\dim_{\mathbb{R}} V=3$, entonces f es de uno de los siguientes tipos:

(1) f es diagonalizable y existe una base ortonormal B de (V, g) tal que $M(f, B)$ es I_3 ó $-I_3$ (respectivamente si $f=1_V$ ó $f=-1_V$) o bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) f no es diagonalizable y existe una base ortonormal B de (V, g) tal que $M(f, B)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

con $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$.

Como consecuencia se deduce que toda isometría de un espacio vectorial euclídeo tridimensional deja invariante una recta vectorial bien vector a vector, o bien lleva cada vector en su opuesto.

PROBLEMAS

1.- En \mathbb{R}^2 se considera la base ordenada usual $B = (e_1, e_2)$ y las métricas g , g' , g'' dadas por

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_B(g') = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad M_B(g'') = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Demostrar que g es una métrica euclídea sobre \mathbb{R}^2 . Probar también que g' es definida negativa y que g'' es indefinida. Dar un ejemplo de una métrica degenerada sobre \mathbb{R}^2 \tilde{g} de tal modo que el vector $x = e_1 - 2.e_2$ sea perpendicular a cualquier $y \in \mathbb{R}^2$ según \tilde{g} (ver Def. 9.6, pag. 300).

2.- Sean g y g' dos métricas sobre $V(\mathbb{R})$. Supongamos que $F_g = F_{g'}^-($ Definición 9.1, pag. 296). Probar que $g=g'$.

3.- Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] / \text{grado } p(x) \leq 2\}$. Ponemos $g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 p(t).q(t) dt$ (considerando cada polinomio identificado a la correspondiente función polinómica). Demostrar que g es una métrica euclídea en V . Probar que la base $\{1, x, x^2\}$ no es ortonormal en (V, g) . Obtener, a partir de ella, por el procedimiento de Gram-Schmidt (Teorema 9.14, pag. 308) una base ortonormal de (V, g) .

4.- Sea (V, g) un espacio vectorial métrico y sean V' un espacio vectorial real y $f: V \longrightarrow V'$ un isomorfismo. Demostrar que existe una única métrica g' en V' que convierte a f en una isometría (ver pags. 315 y 316) de (V, g) en (V', g') .

5.- Demostrar mediante un contraejemplo que si (V, g) es un espacio vectorial métrico y U es un subespacio de V , no existe, en general una métrica g' en V/U que cumpla $g'(x+U, y+U) = g(x, y)$.

6.- Sea $\mathfrak{J}_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden n sobre \mathbb{R} (ver pag. 211). Se considera sobre $\mathfrak{J}_n(\mathbb{R})$ el tensor g dado por $g(A,C) = \text{traza}(A \cdot C)$, $A, C \in \mathfrak{J}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que g es una métrica euclídea sobre $\mathfrak{J}_n(\mathbb{R})$. (Utilizar ejemplo 5 y 6, pag. 295).

Sea ahora (V, g) un espacio vectorial euclídeo con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y sea $W = \{f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V / f \text{ es autoadjunto respecto a } g\}$. Para una base ortonormal ordenada B de (V, g) se considera el isomorfismo

$\hat{F}_B : W \longrightarrow \mathfrak{J}_n(\mathbb{R})$, $\hat{F}_B(f) = M(f, B)$ y sea g_B la métrica euclídea sobre W que hace que \hat{F}_B^{-1} sea una isometría (ver problema 4).

Demostrar que $g_B(f, h) = \text{traza}(f \circ h)$ y que, por tanto, g_B no depende de B .

7.- Sean V y V' espacios vectoriales sobre \mathbb{R} y $f: V \longrightarrow V'$ un monomorfismo. Demostrar que si g' es una métrica sobre V' el tensor g sobre V definido por $g(x, y) = g'(f(x), f(y))$ es una métrica sobre V . Probar que si g' es euclídea también lo es g . Si U es un subespacio de un espacio vectorial métrico (V', g') y f es la inclusión de U en V' ¿quién es g ? (ver ejemplo 6 en pag. 295).

8.- Sea (V, g) un espacio vectorial métrico y sea $A_r(V^*)$ el espacio vectorial de tensores hemisimétricos de orden r sobre V^* (ver pag. 214). Probar que existe una única métrica \tilde{g}_r en $A_r(V^*)$ tal que

$$\tilde{g}_r(x_1 \wedge \dots \wedge x_r, y_1 \wedge \dots \wedge y_r) = \det(g(x_i, y_j))$$

(ver pag. 229 y Teorema 6.43 en pag. 227). Probar que si g es euclídea también lo es \tilde{g}_r . Y en el caso en que g es euclídea encontrar una base ortonormal de $(A_r(V^*), \tilde{g}_r)$ a partir de una de (V, g) .

9.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Probar que

$$\left\| \frac{1}{2} \cdot (x-y) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2} \cdot (x+y) \right\|^2 = \frac{1}{2} \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para cualesquiera $x, y \in V$.

10.- En un espacio vectorial euclídeo (V, g) probar que si $x, y \in V$ entonces x e y son perpendiculares sí y sólo sí $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Dar una interpretación geométrica de este hecho.

11.- Demostrar con ayuda de la Desigualdad de Schwarz (3) en Proposición 9.10, pag. 303) que si a_1, \dots, a_n son números reales cualesquiera entonces

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2$$

y se da la igualdad si y sólo si $a_i = a_j$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

12.- En el espacio euclídeo usual (\mathbb{R}^3, g) obtener una base ortonormal aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt (Teorema 9.14, pag. 308) a la base $(e_1 + e_3, e_1 + 2.e_2, 2.e_2 + 3.e_3)$. Calcular también unas ecuaciones implícitas, respecto a esta base, de U^\perp siendo $U = L(\{e_1 + e_3, e_2\})$.

13.- Sean (V, g) y (V', g') dos espacios vectoriales métricos isométricos (pag. 315). Demostrar que (V, g) es no degenerado sí y sólo sí (V', g') es no degenerado. Probar también que (V, g) es euclídeo (respec. definido negativo) sí y sólo sí (V', g') es euclídeo (respec. definido negativo).

14.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo, con $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$, orientado mediante una base ortonormal ordenada $B = (u_1, u_2, u_3)$. Demostrar que $u_1 \times u_2 = u_3$ (ver pag. 321). Probar también que si $x, y \in V$ entonces su producto vectorial $x \times y$ es perpendicular a x e y , y que si $\|x\| = \|y\| = 1$ tenemos que $(x, y, x \times y)$ es una base ortonormal de (V, g) que define la misma orientación que B .

15.- Sea (V, g) un espacio vectorial (no necesariamente euclídeo) y sea U un subespacio de V . Si se pone $U^\perp = \{x \in V / g(x, y) = 0 \forall y \in U\}$ (como en pag. 331) probar que U^\perp es un subespacio de V y que $(U, g|_U)$ es no degenerado sí y sólo sí $U \cap U^\perp = \{0\}$. Demostrar que si (V, g) es no degenerado se tiene $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V$ (aunque no se pueda establecer (2) de la Proposición 9.34)

16.- Sean (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sean $f, h \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$, $a \in \mathbb{R}$.
 Probar las siguientes igualdades: $\hat{f} = f$, $\hat{f+h} = \hat{f} + \hat{h}$, $\hat{a.f} = a.\hat{f}$,
 $\hat{f.h} = \hat{h}.\hat{f}$. (Utilizar la Proposición 9.41, pag. 337).

17.- Se considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Encontrar $P \in O(3, \mathbb{R})$
 tal que $t_P A P$ sea una matriz diagonal.

18.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ auto-adjunto respecto a g . Supongamos que $g(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in V$. Probar que existe un único $h \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ autoadjunto respecto a g y que verifica $g(h(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in V$ tal que $h \cdot h = f$ (compárese con pag. 286).

19.- Se considera (\mathbb{R}^3, g) siendo g la métrica usual y F, F' formas cuadráticas sobre \mathbb{R}^3 dadas por

$$F(x) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3 - a_2 \cdot a_3$$

$$F'(x) = 2 \cdot a_1^2 + 3 \cdot a_2^2 - a_3^2 - 8 \cdot a_1 \cdot a_3$$

dónde $x = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3$ y $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base usual de \mathbb{R}^3 . Encontrar bases ortonormales de (\mathbb{R}^3, g) que diagonalicen a F y F' .

20.- Sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ dado por $f(a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_1 + 2 \cdot a_3, 2 \cdot a_2)$. Demostrar que f es autoadjunto respecto a la métrica euclídea usual g de \mathbb{R}^3 . Encontrar una base ortonormal B de (\mathbb{R}^3, g) tal que $M(f, B)$ sea diagonal.

21.- Sea (V, g) un espacio vectorial métrico con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, y sean s y $s+t$ los enteros que aparecen en el Teorema de Sylvester (Teorema 9.53, pag. 345). s se llama el índice de g y $s+t$ el rango de g ($= \text{rango } M_B(g)$, para cualquier base B). s , $s+t$ y n caracterizan a (V, g) en el siguiente sentido: Demostrar que si (V', g') es otro espacio vectorial métrico, (V, g) es isométrico a (V', g') si y sólo si ocurre $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V'$, el índice de g es igual al de g' y el rango de g igual al de g' .

22.- Sean $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial y U, U' subespacios de V tales que $V = U \oplus U'$. Encontrar una métrica euclídea g sobre V tal que $U' = U^\perp$.

23.- Sean $A \in \mathcal{J}_n(\mathbb{R})$, V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una base ordenada de V . Se considera la métrica g sobre V dada por $M_B(g) = A$ (ver pag. 301). Probar que g es euclídea si y sólo si, todos los valores propios de A son positivos.

24.- Se considera \mathbb{R}^3 y g la métrica sobre \mathbb{R}^3 definida por $g(e_1, e_1) = g(e_1, e_2) = g(e_2, e_3) = 2$; $g(e_1, e_3) = g(e_3, e_3) = 1$; $g(e_2, e_2) = 5$ donde $B = (e_1, e_2, e_3)$ es la base usual. Probar que g es una métrica euclídea sobre \mathbb{R}^3 . Sea T el tensor 2 covariante

y simétrico dado por $M_B(T) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Encontrar una base

ortonormal B de (\mathbb{R}^3, g) tal que $M_B(T)$ sea diagonal. Encontrar una base B de \mathbb{R}^3 donde T adopte su forma canónica (del Teorema de Sylvester, Teorema 9.53, pag. 345).

25.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sea $f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} V$.

- Si \hat{f} representa el endomorfismo de V adjunto de f demostrar que $f \circ \hat{f}$ es diagonalizable y que todos sus valores propios son positivos.
- Encontrar $h \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} V$ autoadjunto respecto a g que tenga todos sus valores propios positivos y que cumpla $h \circ h = f \circ \hat{f}$.
- Probar que $h^{-1} \circ f$ es una isometría de (V, g) .
- Como aplicación de lo anterior demostrar que cada $A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ se puede escribir de la forma $A = P \cdot R$ donde $P \in \mathcal{J}_n(\mathbb{R})$ con todos sus valores propios positivos y $R \in O(n, \mathbb{R})$.

e) Aplicar el apartado anterior a $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $-a, b \in \mathbb{R}$. (ver prob. 15 de la lección 4º).

26.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y sea U un subespacio vectorial de V , $U \neq \{0\}$, $U \neq V$. Demostrar que para cada $f \in \text{Iso}(U, g|_U)$ existe $F \in \text{Iso}(V, g)$ tal que $F(x) = f(x) \quad \forall x \in U$. Probar que puede tomarse siempre F como una rotación.

27.- Sea V un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 con $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ y sea f un endomorfismo de V . Demostrar que $f(u) \times f(v) = (\det f).u \times v$, para toda base $\{u, v\}$ de V , siendo " \times " el producto vectorial usual en \mathbb{R}^3 . En particular si $\{u, v\}$ es ortonormal respecto de $g|_V$, siendo g la métrica euclídea usual de \mathbb{R}^3 , probar que $|\det f| = \|f(u) \times f(v)\|$.

28.- Se considera un espacio vectorial euclídeo tridimensional (V, g) , dotado de una orientación $c(B)$. Para cada $x \neq 0$, $x \in V$, se define $F_x \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ por $F_x(y) = x \times y$, siendo " \times " el producto vectorial en (V, g) relativo a $c(B)$. a) Caracterizar $\text{Ker } F_x$ e $\text{Im } F_x$. Dado $z \in \text{Im } F_x$ ¿ existe más de un vector $y \in V$ tal que $F_x(y) = z$? b) Demostrar que el endomorfismo de V adjunto de F_x respecto de g es $F_{-x} = -F_x$, para todo vector x .

29.- Demostrar que para toda $A \in \mathcal{J}_n(\mathbb{R})$ se cumple

$$(\text{traza } A)^2 \leq n \cdot \text{traza } A^2$$

y se da la igualdad si y solo si $A = a \cdot I_n$ para algún $a \in \mathbb{R}$. (Ind. ver problemas 6 y 11 de esta lección).

30.- Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y sea f cualquier endomorfismo de $V(\mathbb{R})$. Probar que para cualquier base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V se cumple $\text{traza}(f) = \sum_{j,k=1}^n g^{*jk} \cdot g(f(x_j), x_k)$. Si $n=2$ y f es autoadjunto, $\text{traza}(f) = 0$ si y sólo si $g_{22} \cdot g(f(x_1), x_1) + g_{11} \cdot g(f(x_2), x_2) - 2 \cdot g_{12} \cdot g(f(x_1), x_2) = 0$.

31.- Sea (V, g) un espacio vectorial métrico euclídeo con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y sean $f, h \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$, autoadjuntos respecto a g y que cumplen $f \circ h = h \circ f$. a) Probar que los subespacios propios de f (resp. de h) son invariantes por h (resp. por f). b) Demostrar que es posible encontrar una base ortonormal B de (V, g) tal que $M(f, B)$ y $M(h, B)$ sean diagonales. (Ind. Diagonalizar la restricción de h a cada subespacio propio de f).

APENDICE: GEOMETRIA Y RELATIVIDAD ESPECIAL.

"Estoy convencido de que ha sido perjudicial la consecuencia que ha tenido en el progreso del pensamiento científico, el empeño de los filósofos de sacar fuera del dominio del empirismo ciertos conceptos fundamentales, trasladándolos así de este dominio, que está bajo nuestro control, a las alturas intangibles de lo apriorístico".

A. Einstein

"La Teoría Especial de la Relatividad significó el comienzo de un difícil aprendizaje para descifrar teorías que violan los principios del sentido común y que sólo pueden ser expresadas matemáticamente".

L. Pearce Williams

Desde muy antiguo uno de los problemas que más preocupaba en la Mecánica clásica, era decidir si existía una forma de determinar el estado de reposo o movimiento uniforme de un cuerpo, desde "dentro" de dicho cuerpo.

Está cuestión quedó parcialmente zanjada cuando Galileo, allá por el siglo XVI, dió su famoso Principio de Relatividad que puede enunciarse como sigue:

Ningún experimento mecánico que tenga lugar dentro de un sistema físico puede conducir a descubrir el movimiento uniforme de dicho sistema.

Este principio implica que los fenómenos mecánicos que tengan lugar en dos laboratorios "inerciales", uno con velocidad uniforme respecto del otro, deben expresarse de la misma forma respecto de ambos laboratorios. Es decir, las ecuaciones de un experimento mecánico respecto de dos observadores inerciales tienen la misma forma. Esta afirmación es de hecho equivalente al Principio de Relatividad de Galileo.

Otro postulado básico de la mecánica clásica era que el tiempo transcurre independientemente del observador inercial.

A partir de estas hipótesis se obtenían las ecuaciones de Galileo que, para un hipotético mundo unidimensional L (para mayor sencillez) nos relacionan las mediciones espaciales x, x' que hacen de un mismo suceso dos observadores inerciales O y O' , el segundo con velocidad constante v respecto al primero,

$$x' = x - v \cdot t .$$

A esta ecuación se le añade otra

$$t' = t$$

que nos dice el carácter absoluto del tiempo (independiente de O y O'). A partir de las ecuaciones de Galileo se obtienen fácilmente algunas consecuencias que están "de acuerdo" con nuestra experiencia cotidiana del mundo físico. Así, podemos decir que la longitud de una varilla que viaja solidariamente con O' no varía cuando es medida por O' o por O , es por tanto una cantidad absoluta. Otra consecuencia es la ley de adicción de velocidades, a saber, si O'' es un tercer observador inercial con velocidad w respecto de O' , la velocidad de O'' respecto de O es $v + w$.

Al final del siglo pasado se empezó a ver claro que existían serias dificultades para aplicar los presupuestos de la física clásica a algunos fenómenos relacionados con las propiedades de la luz. A partir de los trabajos de Young y Fresnel, que pusieron de manifiesto la naturaleza ondulatoria de la luz, la mentalidad mecanicista de la época exigió la existencia del "éter" como medio de propagación de la luz. Como este se suponía en reposo absoluto se pensó que con

algún tipo de experimento que involucrase a la luz, podría detectarse el movimiento uniforme de traslación de la Tierra. Supuesto que la velocidad de la luz en el vacío era constante e igual a $3 \cdot 10^8$ m/s se pensó que si se enviaba un rayo de luz en la misma dirección y sentido del movimiento de la Tierra y se medía su velocidad entonces, como según la ley de adicción de velocidades sería $w = c + v$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío y v la velocidad de la Tierra, podríamos obtener $v = w - c$. Se repitió el experimento enviando un rayo de luz en la misma dirección y sentido opuesto de la trayectoria de la Tierra. En ambos casos se encontró que la velocidad del rayo de luz era "asombrosamente" igual a c . Se pensó entonces, influenciados sin duda por el pensamiento de la época, una respuesta artificiosa al porqué de ese resultado del experimento. Así, se decía que en el primero de los casos la velocidad del rayo de luz era $c + v$, pero se observaba c debido a que el éter "frenaba" mediante algún tipo de arrastre el rayo. En el segundo caso era un cierto "empuje" el que nos hacía ver c en lugar de $c - v$.

El problema era que el resultado de estos experimentos iba en contra de la ley de adicción de velocidades que, como apuntamos en la página anterior, se obtenía como una consecuencia de las ecuaciones de Galileo. Por otro lado nadie parecía darse cuenta que en las soluciones de las ecuaciones de Maxwell no intervenía la velocidad del foco emisor y que, curiosamente, estas ecuaciones no eran invariantes por las ecuaciones de Galileo.

Lorentz, Poincaré y otros contribuyeron al avance en la resolución de las dificultades que, desde la física clásica, presentaban muchos fenómenos acerca de la luz. Pero no fue hasta 1.905 que A. Einstein dió la primera solución satisfactoria con la publicación de su artículo "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento" que contiene su Teoría especial de la Relatividad. Esta se basa en los dos postulados siguientes:

(1) Las leyes de la electrodinámica y la óptica son iguales en todos los sistemas de referencia en los que sean válidas las ecuaciones de la mecánica. (*)

(2) La luz se propaga en el vacío con velocidad c, independientemente del estado de movimiento del foco emisor.

El primer postulado es una generalización del Principio de Relatividad de Galileo, y el segundo no es más que aceptar como ciertos los resultados de algunos hechos experimentales sin buscarles ninguna explicación artificiosa.

En 1.908 Minkowski demostró que las ecuaciones a las que llegó Einstein (pag. 374) que daban "una nueva forma de cambiar coordenadas" eran naturales en un espacio-tiempo cuatridimensional, obtenido por fusión del espacio tridimensional ordinario y un eje temporal cuya coordenada se transformaba, en contra de lo que ocurría en las ecuaciones de Galileo (pag. 367).

Nosotros vamos a dar una visión de la cinemática de la Relatividad especial desde este último punto de vista. Se trata de ver como los dos Postulados de Einstein conducen a la introducción de un "modelo matemático": cíerto espacio vectorial métrico no euclídeo, y de ver que las ecuaciones de Einstein son ecuaciones de cambio de base entre bases ortonormales (en el sentido de la pag. 346) de dicho espacio vectorial métrico. Por razones obvias hemos incluido una breve introducción histórica, y tras la obtención de las ecuaciones de Einstein veremos algunas consecuencias de estas, en contraposición a las mencionadas, en la pag. 367, de las ecuaciones de Galileo.

Consideremos por simplicidad, como antes, que el espacio físico es unidimensional y está descrito, por tanto, por una recta L. Para un observador inercial O de L, cada suceso está perfectamente determinado por un par ordenado de números reales (x, t) que corresponden, respectivamente, a la abscisa orientada medida desde O y al tiempo que marca un reloj que posee el observador O. Conviene desde un

(*) Once años mas tarde Einstein reformuló este principio generalizándolo, diciendo: Las leyes de la Física tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales.

punto de vista físico que las dos coordenadas que representan un suceso tengan las mismas dimensiones. Por esto a un suceso de L que ocurra en la abscisa x y tiempo t (respecto de O) lo vamos a representar por el par $(x, c.t)$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. A $c.t$ se le denomina tiempo-luz del suceso respecto del observador O .

Mediante este observador O , identificamos el conjunto de los sucesos que ocurren en L con el espacio numérico \mathbb{R}^2 . Supongamos que desde $x = 0$ y en el tiempo $t = 0$ se lanza un rayo de luz; la ecuación que describe el rayo de luz viene dada, para O , por

$$x^2 - c^2 \cdot t^2 = 0.$$

Si definimos sobre \mathbb{R}^2 el tensor simétrico 2 veces covariante g por

$$g(u, w) = (a_1, a_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

siendo $u = (a_1, a_2)$, $w = (b_1, b_2)$, entonces (\mathbb{R}^2, g) es un espacio vectorial métrico indefinido (Definición 9.8), g es no degenerada y tiene índice 1 (pag. 363); por tanto (\mathbb{R}^2, g) es isométrico (prob. 21, pag. 363) con el espacio vectorial métrico (\mathbb{R}^2, g_1) del ejemplo 2, pag. 294. A la métrica g la llamaremos la métrica de Lorentz usual de \mathbb{R}^2 , y a (\mathbb{R}^2, g) el plano (vectorial) de Lorentz.

El observador O puede verse como la base usual de \mathbb{R}^2 , $B = (e_1, e_2)$ pero lo importante es que con respecto a la métrica de Lorentz g , la base B cumple

$$g(e_1, e_1) = 1 = -g(e_2, e_2), \quad g(e_1, e_2) = 0.$$

Así B es una base ortonormal del espacio vectorial métrico (\mathbb{R}^2, g) en el sentido de la pag. 346 (ver también el Teorema 9.53)

En el plano de Lorentz podemos hablar de perpendicularidad (Definición 9.5). Precisamente el movimiento de un rayo de luz está descrito por vectores $u \neq 0$ que son perpendiculares a ellos mismos. Nótese que si u tiene coordenadas $(x, c.t)$ en B , entonces la ecuación que describe un rayo de luz se escribe ahora $g(u, u) = 0$.

Consideremos ahora un segundo observador inercial $0'$, tambien en L , que se mueve con velocidad constante v respecto de 0 . Para este observador $0'$ podemos realizar un análisis similar al realizado para 0 . En particular, la ecuación de un rayo de luz enviado desde $x' = 0$ en el tiempo $t' = 0$ vendrá dada por

$$x'^2 - c^2 \cdot t'^2 = 0$$

ya que, por un lado, esta ecuación tiene que tener la misma forma para $0'$ que la obtenida por 0 (pag. 370) según el Principio de Relatividad ((1) en pag. 369), y por otro la velocidad de la luz para $0'$ es la misma que para 0 , de acuerdo con el Postulado (2) de la pag. 369. El observador $0'$ puede verse como una base ortonormal $B' = (e'_1, e'_2)$ del plano de Lorentz.

Las ecuaciones que describen el movimiento del rayo de luz para 0 y para $0'$, deben trasformarse una en la otra mediante las ecuaciones de cambio de coordenadas que nos relacionan 0 y $0'$, es decir con las ecuaciones de cambio de base entre las bases ortonormales B y B' del plano de Lorentz.

Antes de continuar conviene hacer notar que, si nuestro mundo de partida hubiese sido tridimensional, entonces cada suceso, respecto de un observador inercial 0 , se representa por una lista ordenada de números reales $(x, y, z, c.t)$. En lugar de (\mathbb{R}^2, g) se utiliza el espacio de Lorentz-Minkowski (\mathbb{R}^4, g') , donde la métrica g' está dada por $g'(e_i, e_i) = 1 = -g'(e_4, e_4)$, $i = 1, 2, 3$, y $g'(e_k, e_j) = 0$, $k \neq j$, siendo $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base usual de \mathbb{R}^4 . Así el espacio de Lorentz-Minkowski es isométrico (y por tanto idéntico como espacio vectorial métrico) con (\mathbb{R}^4, g_1) , donde ahora g_1 es la métrica sobre \mathbb{R}^4 dada en el ejemplo 2, pag. 294. Cada observador inercial se convierte en una base ortonormal ordenada del espacio de Lorentz-Minkowski, y así interesa saber como son las matrices de cambio de base entre este tipo de bases. Sin duda sería un buen ejercicio para el lector traspasar al espacio de Lorentz-Minkowski aquello que sigue.

Dadas las bases ortonormales $B = (e_1, e_2)$ y $B' = (e'_1, e'_2)$ del plano de Lorentz, si escribimos

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11} \cdot e'_1 + a_{21} \cdot e'_2 \\ e_2 &= a_{12} \cdot e'_1 + a_{22} \cdot e'_2 \end{aligned}$$

resulta que las ecuaciones buscadas serán

$$\begin{pmatrix} x' \\ c \cdot t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ c \cdot t \end{pmatrix}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = M(\mathbb{R}^2, B, B')$ (ver pag. 138).

B y B' son bases ortonormales de un espacio vectorial métrico que no es euclídeo. Por tanto carece de sentido decir que la matriz A es ortogonal (Definición 9.17), pero razonando como en la pag. 312 llegamos a que la matriz regular A cumple

$${}^t A \cdot G \cdot A = G \quad (*)$$

siendo $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, es decir, G es la matriz de la métrica de

Lorentz en una base ortonormal de (\mathbb{R}^2, g) .

Utilizando el Teorema 7.9, pag. 242, obtenemos que

$$\det A = \pm 1.$$

El caso -1 se desecha pues, desde un punto de vista físico el caso límite en el que los dos observadores coinciden en uno solo, es decir, cuando $B' = B$, debe estar contenido en las ecuaciones de cambio de base y es pensable que cualquier otra matriz de cambio de base se obtenga "continuamente" de I_2 . Más geométricamente, B y B' deben definir la misma orientación de \mathbb{R}^2 (pag. 264).

(*) El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden 2 sobre \mathbb{R} A que cumplen ${}^t A \cdot G \cdot A = G$ forma un grupo que se llama el grupo de Lorentz de orden 2, y se representa por $O^1(2, \mathbb{R})$.

De la condición que verifica la matriz A se obtiene que $a_{22} \neq 0$. Además, como tenemos

$$c.t' = a_{21}.x + a_{22}.c.t$$

de la ecuación matricial de cambio de base, resulta que $a_{22} > 0$. En efecto, para aquellos sucesos que ocurren en O esta fórmula se escribe

$$c.t' = a_{22}.c.t$$

entonces, si $a_{22} < 0$ los relojes de O y O' marcharían en sentidos de giro opuestos; es decir, B y B' tiene que definir la misma orientación temporal en el plano de Lorentz.

Todas estas condiciones sobre la matriz A conducen a que la ecuación matricial de cambio de base de la pag. anterior se escribe

$$\begin{pmatrix} x' \\ c.t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ c.t \end{pmatrix}$$

donde b es un escalar real que, como es lógico, tiene que venir determinado al hacer uso de que O' viaja con velocidad constante v con respecto a O.

Consideremos un suceso en O' que tendrá coordenadas $(0, c.t')$ en B' y $(x, c.t)$ en B. De la ecuación matricial anterior se obtiene que

$$x = b.c.t$$

lo que implica que $b = (1/c) \cdot (dx/dt) = v/c$, que sustituido arriba

En el conjunto de todas las bases ortonormales \mathcal{E} del plano de Lorentz se puede definir la siguiente relación de equivalencia: si $B, B' \in \mathcal{E}$ decimos que $B \sim B'$, se lee B define la misma orientación temporal que B', si el elemento a_{22} de $M(1, \mathbb{R}, B)$ es > 0 . Se comprueba que sólo hay dos clases de equivalencia. A cada una de ellas se le llama una orientación temporal (comparar con pag. 264). El subconjunto de las $A \in O^1(2, \mathbb{R})$ con $\det A = 1$ y $a_{22} > 0$ es un subgrupo de $O^1(2, \mathbb{R})$. Se llama el grupo especial-temporal de Lorentz.

conduce a la obtención de las ecuaciones de Lorentz:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot x - \frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot t$$

$$t' = \frac{-(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot t$$

Obsérvese que, en contra de lo que ocurría con las ecuaciones de Galileo (pag. 367), t' depende ahora no sólo de t sino también de x . Por otro lado, si v es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz c , resulta que $1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \approx 1$ y $v/c^2 \approx 0$, con lo que podemos decir que las ecuaciones de Galileo son una aproximación de las ecuaciones de Lorentz para v pequeña con respecto a c .

A continuación vamos a deducir algunas consecuencias de las ecuaciones de Lorentz. Imaginemos, en primer lugar, que una barra rígida viaja solidariamente con O' . O' mide su longitud y encuentra que es $\ell' = x'_2 - x'_1$. También O mide la longitud de la barra, hace esta medida instantánea y encuentra que es $\ell = x_2 - x_1$. A partir de la primera de las ecuaciones de Lorentz obtenemos

$$\ell' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot \ell$$

Esta fórmula, que demuestra la no igualdad entre ℓ y ℓ' , puede ser interpretada así: como $1/\sqrt{1 - (v/c)^2} > 1$, si $v \neq 0$, la longitud que mide O de la barra que viaja con O' es más corta que la longitud que mide O' .

Este fenómeno no se entiende desde la física prerrelativista, pues las ecuaciones de Galileo nos habrían dado $\ell = \ell'$ (ver pag. 367), es decir, que la longitud medida de la barra no dependería de la velocidad relativa de O' respecto de O .

Nótese que el papel de los observadores O y O' es intercambiable, de manera que si O lleva velocidad v respecto de O' , y O lleva consigo una barra, la longitud que de esta mide O' es menor que la que mide O .

Imaginemos que estamos en el andén de una estación de ferrocarril, el cual hemos medido obteniendo que su longitud es 100 mts. Un "supertren", que va a velocidad $v = (\sqrt{3}/2).c$ y que mide 200 mts. según su conductor, pasa por la estación y, en el momento de cruzarla, vemos que coincide con el andén y por tanto mide lo mismo que él; en efecto,

$$200 = \frac{\ell}{\sqrt{1/4}} = 2.\ell$$

lo que implica que $\ell = 100$ mts. Pero, si el conductor del tren cuando cruza la estación, mide el andén resultará, al viajar el andén a velocidad $v = (\sqrt{3}/2).c$ respecto de él, que el andén mide 50 mts. para el conductor del supertren.

Supongamos ahora dos sucesos que se producen en la posición x medida desde O en los instantes t_1 y t_2 . Los tiempos que mide el observador O' , t'_1 y t'_2 se obtienen por la segunda de las ecuaciones de Lorentz, y así ocurre

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot (t_2 - t_1).$$

Como $1/\sqrt{1 - (v/c)^2} > 1$, resulta que $t'_2 - t'_1 > t_2 - t_1$, o sea, que según el reloj del observador O' resulta que el reloj de O retrasa respecto del suyo. Pero, como antes, los papeles de O y O' son intercambiables, de manera que si O ve el reloj de O' , dirá que el reloj de O' retrasa respecto del suyo.

Si el espacio de partida es tridimensional sólo se verificará esta "contracción" en la dirección del movimiento. Este fenómeno se conoce como la contracción de Lorentz-Fitzgerald.

Este fenómeno relativista no se entiende en la "física clásica pues, como sabemos, para esta el tiempo era absoluto (independiente del observador). En su tiempo dió lugar a la famosa paradoja de "los hermanos gemelos" que, aunque fue explicada por A. Einstein hace ya mas de 50 años, todavía sigue conduciendo a situaciones extrañas, debidas fundamentalmente a interpretaciones erroneas de la fórmula anterior.

Imaginemos dos hermanos gemelos P y P' . Supongamos que P' sale un dia de viaje en una nave espacial, con velocidad constante v respecto de P que se queda en la Tierra (ahora nuestros observadores "inerciales" son P y P'). Al cabo de un cierto tiempo T el hermano P' se encuentra en $(v.T, c.T)$ respecto de P . Desde que P' ha salido en su nave espacial ha transcurrido, según la segunda de las ecuaciones de Lorentz (pag. 374), en su reloj

$$T' = \frac{1 - (v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot T$$

es decir

$$T' = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot T .$$

En ese instante P' regresa a la Tierra, donde se encuentra su hermano gemelo P . El tiempo de vuelta de P' es T para P y T' , dado por la fórmula precedente, para P' . Así, cuando P' regresa junto a P , para P han pasado

$$T + T' = 2.T \text{ unidades de tiempo,}$$

mientras que para P' han pasado

$$T' + T = 2\sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot T \text{ unidades de tiempo.}$$

Como $\sqrt{1 - (v/c)^2} > 1$, ocurre que P' , a su encuentro con su hermano gemelo P , resulta ser más joven que P .

¿ Como se soluciona esta paradoja ? Parece ser que existen serias dudas sobre la viabilidad práctica de obtener velocidades muy altas de manera casi instantánea, pero la respuesta más sencilla es que

P' en el momento de su regreso deja de ser un observador inercial y, por tanto, no se puede aplicar la consecuencia de las ecuaciones de Lorentz que acabamos de deducir. Además, nótese que tal y como se plantea la paradoja, los papeles de P y P' en ella no son intercambiables, pues tiene cierta prioridad un hermano gemelo sobre el otro.

Finalmente, si O , O' y O'' son tres observadores inerciales, O' con velocidad v_1 respecto de O y O'' con velocidad v_2 respecto a O' , ¿cuál será la velocidad relativa v de O'' respecto de O ?

Combinando las ecuaciones de Lorentz correspondientes a O , O' y a O'', O'' obtenemos las de O , O'' . En estas se observa que

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} .$$

La física prerrelativista hubiese respondido a esta pregunta con la ley de adicción de velocidades (pag. 367). Nótese que para v_1 y v_2 pequeñas respecto de c , la ley de adicción de velocidades aproxima a esta fórmula.

Referencias

- P. G. Bergmann, Introduction to the Theory of Relativity, Prentice-Hall, 1942.
- A. Einstein, El significado de la Relatividad, Espasa Calpe, Madrid 4^a edición, 1980.
- A. Einstein, A. Grünbaum, A. S. Eddington y otros, La teoría de la Relatividad, Alianza Universidad, 1984.
- R. L. Faber, Differential Geometry and Relativity Theory, An Introduction, Marcel Dekker, 1983.
- A. Lallena, A. Romero, "Espacios vectoriales métricos y teoría especial de la Relatividad: cinemática", Revista Mat. Epsilon, septiembre 1985, num. 5, pp. 33-37.
- R. Resnik, Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad, Limusa, 1977.
- I. M. Yaglom, A simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis, Heidelberg Science Library, Springer Verlag, 1979.

BIBLIOGRAFIA

- J. de Burgos, Curso de Algebra y Geometría, Alhambra, Madrid 1977.
- J. Dieudonné, Algèbre Lineaire et Géométrie Élémentaire, Hermann, París 1964.
- F. R. Gantmacher, Théorie des matrices I, II, Dunod, París 1966.
- W. Greub, Linear Algebra, (fourth edition) Graduate Texts in Math. Springer Verlag, New York, 1981.
- W. Greub, Multilinear Algebra, (second edition) Universitext, Springer Verlag, New York, 1978.
- J. Heinhold, B. Riedmüller, Algebra Lineal y Geometría Analítica I,II Reverté, 1980, 1981.
- P. J. Kahn, Introducción al Algebra Lineal, Castillo, Madrid 1970.
- N. H. Kuiper, Linear Algebra and Geometry, (second revised edition) North-Holland Publ. Co. Amsterdam 1965.
- S. Lang, Algebra, Aguilar, Madrid 1973..
- S. Lang, Linear Algebra, Addison Wesley Publ. Co. Inc. 1966.
- A. Lichnerowicz, Elementos de Cálculo Tensorial, (tercera edición) Aguilar, Madrid 1968.
- S. Mac Lane, G. Birkhoff, Algèbre I,II, Cahiers Scient. Fasc. XXXV et XXXVI, Gauthiers-Villars, París 1971.
- A. I. Malsev, Fundamentos de Algebra Lineal, Mir, Moscú 1972.
- K. Nomizu, Fundamentals of Linear Algebra, (second edition) Chelsea Publ. Co. New York 1979.
- J. de Pillis, Linear Algebra, Holt. Rinehart and Winston Inc. New York 1969.
- M. Queysanne, Algebra Básica, Vivens-Vives, Zaragoza 1971.
- E. Snapper, R. J. Troyer, Metric Affine Geometry, Academic Press, London 1971.
- F. M. Stewart, Introducción al Algebra Lineal, Tecnos, Madrid 1971.

INDICE ALFABETICO

A

- Adjunto de un elemento de una matriz, 247.
- Angulo de dos vectores, 306.
- Angulo orientado de dos vectores, 321.
- Anillo, 49.
 - cociente, 55.
 - conmutativo, 49.
 - de integridad, 64.
 - de las matrices cuadradas, 140.
 - de los endomorfismos de un espacio vectorial, 139, 140.
 - de los enteros módulo p, 48, 56, 62-64.
 - de los números enteros, 47, 67.
 - de los polinomios, 48.
 - principal, 69.
 - producto cartesiano de otros dos, 68.
 - trivial, 49.
- Anillos isomorfos, 61.
- Anulador, 165.
- Aplicación, 6.
 - biyectiva, 9.
 - inyectiva, 9.
 - inversa de una biyectiva, 10.
 - lineal, 107, 108.
 - sobreyectiva, 9.
 - traspuesta de una aplicación lineal, 168.
- Automorfismo de anillos, 58.
- Automorfismo de espacios vectoriales, 108.
- Automorfismo de espacios vectoriales que conserva orientación, 265.
- Automorfismo de grupos, 34.
- Autovector, (ver vector propio).
- Autovalor, (ver valor propio).

B

- Base, cambio de, 100, 138, 162, 192, 312.
— de un espacio vectorial, 89.
— dual, 159.
— ordenada, 94.
— ordenada dual, 159.
— ordenada ortonormal, 310.
— ordenada positivamente, 264.
— ordenada negativamente, 264.
— ordenada usual de \mathbb{R}^n , 95.
— ortonormal, 308.
— teorema de ampliación de la, 96.
— teorema de la, 92.
— usual de \mathbb{R}^n , 95.

C

- Característica de un anillo, 62.
Cardinal, 26.
Clase de equivalencia, 4.
Codomonio, 7.
Combinación lineal, 80.
Composición de aplicaciones, 8.
Composición de aplicaciones lineales, 111.
Composición de homomorfismos de anillos, 59.
Composición de homomorfismos de grupos, 34.
Conjunto, 1.
— cociente, 5.
— de las partes de un conjunto, 1.
— generador, 85.
— ortonormal, 307.
— vacío, 1.
Conjuntos coordinables, 39.
Contenido, 1.
Contracción (ver tensores, contracción de)
Coordenadas, 94, 128, 162, 193, 311.

Corchete de dos matrices cuadradas, 233.
Cuaternios de Hamilton, 70.
Cuerpo, 65.
— conmutativo, 65.
Cuerpos de los números racionales, reales y complejos, 52, 57, 65.

D

Dependencia lineal, 87-89.
Desarrollo del determinante de una matriz cuadrada por una fila o columna, 247-249.
Descomposición canónica de una aplicación lineal, 113.
Determinante de un endomorfismo, 237, 238.
Determinante de una matriz cuadrada, 241, 242, 244.
Diagonalización de un endomorfismo, 274, 281-283.
Diagonalización de un endomorfismo autoadjunto, 341, 348-349.
Diagonalización de una matriz cuadrada, 274, 284.
Diagonalización de una matriz simétrica, 341, 348-349.
Diagonalización de un tensor de tipo (1,1), 275.
Diagonalización, teorema fundamental de, 283.
Dimensión de un espacio vectorial, 93, 95, 96, 118.
Divisores de cero, 64, 140.
Dominio, 7.

E

Ecuación característica de un endomorfismo, 277, 283.
Ecuación característica de una matriz cuadrada, 277, 284.
Ecuaciones analíticas de una aplicación lineal, 121.
Ecuaciones implícitas, 258.
Ecuaciones paramétricas, 257.
Einstein, principio de Relatividad de, 369.
Endomorfismo adjunto de un endomorfismo, 337.
Endomorfismo autoadjunto, 338.
Endomorfismo de anillos, 58.
Endomorfismo de $A_r(V)$ inducido por f , 236.
Endomorfismo de espacios vectoriales, 108, 139, 140.

Endomorfismo de grupos, 34.
Epimorfismo de anillos, 58.
Epimorfismo de espacios vectoriales, 108.
Epimorfismo de grupos, 34.
Escalares, 75, 76.
Espacio vectorial, 74-76.
— cociente, 84, 85, 97.
— de las aplicaciones lineales de V en V , 124-128.
— de las matrices de orden $m \times n$ sobre K , 131-133.
— de los polinomios con coeficientes reales, 86, 89.
— de los vectores libre, 71.
— dual, 158.
— finitamente generado, 85, 86, 90.
 $K^n(K)$, 73, 76, 89, 95.
— métrico, 292-293.
— métrico definido negativo, 302.
— métrico degenerado, 302.
— métrico euclídeo (o definido positivo), 293, 302.
— métrico indefinido, 302.
— métrico no degenerado, 302.
— orientado, 265.
— $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$, 72, 73, 89, 95.
Espacios vectoriales complejos, 73, 86, 89, 103, 152.
Espacios vectoriales, producto cartesiano de dos, 103.

F

Forma cuadrática, 296, 342, 344.
Forma cuadrática asociada a una métrica, 296.
Forma lineal, 158.

G

Galileo, ecuaciones de, 367.
Galileo, principio de Relatividad de, 366, 367.
Generador de un grupo cíclico, 28.
Grafo (o gráfico), 5, 46, 157.

Gram-Schmidt, proceso de ortonormalización de, 309.
Grupo, 15-19, 20.
— cíclico, 28, 46.
— cociente, 31, 32.
— conmutativo (o abeliano), 20.
— de las permutaciones de un conjunto, 42, 45.
— de las isometrías de un espacio vectorial métrico, 316.
— de los automorfismos de un espacio vectorial, 141.
— de los enteros módulo p , 32, 44.
— lineal especial, 265, 318.
— lineal general, 141, 250.
— ortogonal, 313, 316.
— ortogonal especial, 318.
Grupos isomorfos, 39.
Grupos, producto cartesiano de dos, 42.

H

Homomorfismo de anillos, 57, 58, 66.
Homomorfismo de espacios vectoriales (ver aplicación lineal).
Homomorfismo de grupos, 33, 34.

I

Ideal, 54, 60.
— maximal, 70.
— primo, 70.
Imagen de una aplicación, 7.
Imagen de una aplicación lineal, 110, 113.
Imagen de un homomorfismo de anillos, 60, 61.
Imagen de un homomorfismo de grupos, 36, 37.
Imagen directa, 7, 44, 69, 110.
Imagen recíproca, 7, 44, 69, 110.
Independencia lineal, 87-89.
Índice de una métrica, 363.
Isometría, 314-317.

Isometría que conserva la orientación, 319.
Isometrías de un espacio vectorial euclídeo, clasificación de, 352-356.
Isomorfismo de anillos, 58, 61.
Isomorfismo de espacios vectoriales, 108, 115, 118.
Isomorfismo de grupos, 34, 39.
Isomorfismo natural, 120.
Isomorfismos musicales, 324, 325.

L

Lagrange, teorema de, 27.
Ley relativista de adicción de velocidades, 377.
Longitud de un vector (ver norma de un vector).
Lorentz, base ortonormal del plano de, 370.
Lorentz, el plano de, 370.
Lorentz, grupo de, 372.
Lorentz, la métrica de, 370.
Lorentz-Fitzgerald, contracción de, 374, 375.
Lorentz-Minkowski, el espacio de, 371.

M

Matrices, 123.
— diagonales, 156, 274.
— equivalentes, 143-148.
— escritas por cajas, 155.
— producto de, 134-136.
— suma de, 131, 132.
— triangulares inferiores, 156.
— triangulares superiores, 156.
Matrices cuadradas, operaciones con, 140.
Matriz,
— adjunta, 249, 270.
— antisimétrica, 211, 212, 233, 267.
— columna, 142.
— de una aplicación lineal, 122, 123, 144, 146.
— de un endomorfismo, 140, 141, 149.

- identidad, 136, 140.
 - nula, 132.
 - ortogonal, 313, 341, 356, 359.
 - , producto de un escalar por una, 131, 132.
 - regular, 141.
 - simétrica, 211, 212, 294, 338, 341, 347, 365.
 - traspuesta, 170-172.
- Métrica, 293.
- definida negativa, 300.
 - degenerada, 300, 301.
 - euclídea (o definida positiva), 293, 300.
 - indefinida, 301.
 - inducida a un subespacio, 295.
 - no degenerada, 300, 301.
 - producto de otras dos, 295, 296.
- Minkowski, desigualdad de, 303, 305.

N

- Norma de un vector, 303, 307.
- Núcleo de un homomorfismo de anillos, 59.
- Núcleo de un homomorfismo de grupos, 35.
- Núcleo de una aplicación lineal, 109.
- Nulidad de una aplicación lineal, 110, 118, 119.

O

- Orden de un elemento de un grupo finito, 29.
- Orientación, 262-265.
- , automorfismo que conserva la, 265, 266.
 - en un espacio vectorial euclídeo, 318-321.
 - , isometrías que conservan la, 319 (ver rotación).
- Orientación temporal, 373.

P

- Paradoja de los hermanos gemelos, 376, 377.
- Partición, 5, 27.

Permutación de un conjunto (ver grupo de las permutaciones).
Permutación, número de inversiones de una, 45, 213.
Permutación, signatura de una, 45, 213.
Permutaciones pares e impares, 45.
Perpendicularidad (ver relación de perpendicularidad).
Polinomio característico de un endomorfismo, 276, 277, 283.
Polinomio característico de una matriz cuadrada, 276-278, 283.
Potencias en un grupo, 28.
Producto cartesiano de conjuntos, 2, 13.
Producto contraido de tensores, 203.
Producto diádico, 191.
Producto escalar (ver métrica euclídea).
Producto exterior, 217, 218, 221, 226.
Producto interno de tensores, 204, 205.
Producto tensorial, 182, 186, 187.
Producto vectorial, 321, 322, 365.
Proyección ortogonal, 333-336.

R

Rango de una aplicación lineal, 110, 118, 119, 146, 171.
Rango de una matriz, 148, 172.
Rango de una métrica, 363.
Rango, teorema del, 250, 251.
Reflexión, 354.
Reflexividad, teorema de, 163.
Relación de congruencia módulo p , 32.
Relación de equivalencia, 2, 3.
Relación de equivalencia en un grupo abeliano inducida por un subgrupo, 26, 53, 83.
Relación de equivalencia que induce una aplicación, 11, 37, 61, 113.
Relación de orden (parcial y total), 3.
Relación de perpendicularidad, 300.
Relaciones de equivalencia en un grupo inducidas por un subgrupo, 26.
Relatividad Especial, postulados de la, 369.
Rotación, 354.
Rouché-Frobenius, teorema de, 254, 255.

S

- Schwarz, desigualdad de, 303-305, 362, 365.
Sistemas de ecuaciones, 137, 164, 252, 254.
— compatibles e incompatibles, 256.
— de Cramer, 253.
— determinados e indeterminados, 256.
— homogeneos, 255.
Sistemas de generadores, 85, 89.
Subanillo, 53.
Subconjunto, 1.
Subcuerpo, 65.
Subespacio generado por un conjunto de vectores, 80.
Subespacio suplemento ortogonal, 332.
Subespacio vectorial, 77, 78.
Subespacios supplementarios, 97, 105.
Subespacios vectoriales, intersección de, 78, 79.
Subespacios vectoriales, suma de, 78, 79.
Subespacio vectorial propio asociado a una valor propio, 279-282.
Subgrupo, 23, 24, 27.
— cílico, 28.
— normal, 30.
Subgrupos propios e impropios, 23.
Suma directa, 82, 83, 99.
Sylvester, teorema de, 345.

T

- Tensor determinante en la base B, 237, 263.
Tensor de tipo (r,s), 178.
Tensores alternados, 207, 212-225.
Tensores, contracción de, 198-204.
Tensores contravariantes, 179, 229.
Tensores covariantes, 179, 205-229.

Tensores de tipo (1,1), 182-185, 275, 326-330.
Tensores hemisimétricos, 206, 208, 212, 213-228.
Tensores simétricos (ver tambien métricas), 206, 208, 212-214.
Teorema de isomorfía de anillos, 61, 62.
Teorema de isomorfía de grupos, 37, 38.
Teoremas de isomorfía de espacios vectoriales, 115.
Trasposición de aplicaciones lineales, 170, 171.
Trasposición de matrices, 170, 171.
Traspuesto de un tensor de tipo (2,0), 206-208.
Traza de un endomorfismo, 155, 365.
Traza de una matriz cuadrada, 155, 365.

V

Valor propio de un endomorfismo, 273, 276.
Valor propio de una matriz cuadrada, 273, 276.
Vector libre, 5, 15, 71.
Vector propio de un endomorfismo, 273, 280, 339, 341.
Vector propio de una matriz cuadrada, 273, 280, 339, 341.
Vector unitario, 307.
Vectores, 75.
— linealmente dependientes, 87, 89.
— linealmente independientes, 87, 89, 96, 97.

LISTA DE SIMBOLOS

- $=; \neq; \in; \notin$. Igual; distinto; pertenece; no pertenece.
- $\subset; \not\subset; \Rightarrow; \Leftrightarrow$. Subconjunto de; no es subconjunto de; entonces; equivalencia lógica.
- $\mathcal{P}(X)$. Conjunto de las partes de un conjunto X .
- $\cap; \cup$. Intersección; unión.
- $X - A; \emptyset$. Complementario del subconjunto A de X ; conjunto vacío.
- $X \times Y$. Producto cartesiano del conjunto X por el conjunto Y .
- $\forall; \exists; \exists!$. Para todo; existe; existe un único.
- $\mathcal{R}; \sim$. Relación binaria; relación de equivalencia.
- $C(x); X/\sim$. Clase de equivalencia de representante x ; conjunto cociente de X sobre \sim .
- $f: X \rightarrow Y; f(x) = y$. Aplicación de X en Y ; y es la imagen por f de x .
- $G(f); \text{Im } f$. Grafo de f ; imagen de f .
- $f^*(A); f^*(B)$. Imagen directa de A ; imagen recíproca de B .
- $l_X; f^{-1}$. Aplicación identidad de X . Aplicación inversa de f biyectiva.
- $g \circ f$. Composición de g y f (primero f y luego g).
- $\mathbb{N}; \mathbb{Z}$. Conjuntos de los números naturales y los números enteros (resp.).
- $<; \leq$. Menor; menor o igual.
- $\vec{AB}; C(\vec{AB})$. Vector de origen A y extremo B . Vector libre representado por \vec{AB} .
- $(G, \cdot); e; \bar{x}$. Grupo; elemento neutro; simétrico de x .
- $xH; Hx$. Clases laterales de x según H .
- $G/H = \{xH/x \in G\}$. $H/G = \{Hx/x \in G\}$.
- $\text{card}(X)$. Número de elementos (cardinal) de X .
- $x^n, n \in \mathbb{Z}$. Potencias n -ésimas, $n \in \mathbb{Z}$, en notaciones multiplicativa y aditiva, de x .
- $p\mathbb{Z}; (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$. Subgrupo de los múltiplos enteros de p ; grupo cociente de los enteros módulo p .
- $(\mathbb{R}, +); (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot); (\mathbb{R}^+, \cdot)$. Grupo aditivo de los números reales; grupo multiplicativo de los reales distintos de 0; grupo multiplicativo de los reales positivos.
- $f: G \rightarrow G'$. Homomorfismo de (G, \cdot) en (G', \cdot) .
- $\text{Ker } f$. Núcleo del homomorfismo f .

$G \cong G'$. G y G' son grupos isomorfos.

$\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. Conjunto de todas las aplicaciones de X en \mathbb{R} .

S_r . Grupo de las permutaciones de X ; grupo de las permutaciones de $\{1, 2, \dots, r\}$.

$[\sigma]; (-1)^{[\sigma]}$. Número de inversiones de la permutación σ ; signatura de σ .

$(\mathbb{Z}, +, \cdot); (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Anillo de los números enteros; anillo de enteros módulo p .

$(R, +, \cdot); 0, 1; -a$. Anillo; neutros de la suma y producto; opuesto de a .

$(\mathbb{Q}, +, \cdot); (\mathbb{R}, +, \cdot); (\mathbb{C}, +, \cdot)$. Cuerpo de los nros racionales, reales y complejos.

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$. Anillo de polinomios con coeficientes reales.

$(R/A, +, \cdot)$. Anillo cociente de R sobre el ideal A .

$f: R \rightarrow R'$. Homomorfismo de $(R, +, \cdot)$ en $(R', +, \cdot)$.

$R \cong R'$. R y R' son anillos isomorfos.

$\text{carac}(R)$. Característica del anillo $(R, +, \cdot)$.

$\text{in}(R)$. Grupo multiplicativo de los elementos de $(R, +, \cdot)$ que poseen inverso.

$(K, +, \cdot); a^{-1}$. Cuerpo; inverso de $a \neq 0$.

$(\mathbb{H}, +, \cdot)$. Cuerpo de los cuaternios de Hamilton.

$V(K); V^0 = \{0\}$. Espacio vectorial sobre el cuerpo K ; espacio vectorial trivial.

$K^n(K)$. Espacio vectorial de las listas de n elementos de K .

$U+V; L(H)$. Subespacio suma de U y V ; subespacio generado por H .

$\oplus; V=U \oplus U'$. Suma directa; U' es un suplementario de U en V .

\sum . Sumatorio.

V/U . Espacio vectorial cociente de V sobre U .

$\mathbb{R}[x](\mathbb{R})$. Espacio vectorial real de todos los polinomios con coeficientes reales.

$\mathbb{C}(\mathbb{C}); \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Espacio vectorial \mathbb{C} sobre \mathbb{C} ; espacio vectorial \mathbb{C} sobre \mathbb{R} .

$B = \{x_1, \dots, x_n\}; B = (x_1, \dots, x_n); \dim_K V$. Base; base ordenada; dimensión de $V(K)$.

$\{e_1, \dots, e_n\}; (e_1, \dots, e_n)$. Base usual de $K^n(K)$; base ordenada usual de $K^n(K)$.

(a_1, \dots, a_n) . Coordenadas en una base ordenada; vector de $K^n(K)$.

$f: V \rightarrow V'; f_\alpha: V \rightarrow V'$. Aplicación lineal; aplicación lineal nula.

$b_B: K^n \rightarrow V$. Isomorfismo inducido por B .

$\text{nulidad}(f); \text{rango}(f)$. Dimensiones (resp.) de $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.

$V \cong V'$. V y V' son espacios vectoriales isomorfos.

$\delta_{ij}, \delta_j^i, \delta^{ij}$. Deltas de Kronecker.

$M(f, B, B')$; $A = (a_{ij})$. Matriz de f respecto a B y B' ; matriz.

$\text{Hom}_K(V, V')$. Espacio vectorial de las aplicaciones lineales de V en V' .

$\mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Espacio vectorial de las matrices de m filas y n columnas sobre K .

$f+h$; $A+C$. Suma de aplicaciones lineales; suma de matrices.

$a.f$; $a.A$. Producto de escalares por aplicaciones lineales y matrices.

$\{f_{ij}\}$; $\{E_{ij}\}$. Bases naturales de $\text{Hom}_K(V, V')$ y $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$.

$\text{rango}(A)$. Rango de la matriz A .

$f \circ g$; $A \cdot B$. Composición de aplicaciones lineales; producto de matrices.

$M(I_V, B', B)$. Matriz de cambio de base.

$\text{End}_K V$; $\mathcal{M}_n(K)$. Anillos (y espacios vectoriales) $\text{Hom}_K(V, V)$ y $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$.

$M(f, B)$. Matriz de $f \in \text{End}_K V$ en la base ordenada B .

$\text{traza}(f)$; $\text{traza}(A)$. Trazas de $f \in \text{End}_K V$ y $A \in \mathcal{M}_n(K)$ (resp.).

$\text{Aut}_K V$. Grupo de los automorfismos de V .

$G_1(n, K)$. Grupo de las matrices regulares de orden n sobre K : el grupo lineal general de orden n sobre K .

A^{-1} . Matriz inversa de la matriz regular A .

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Matriz escrita por cajas.

$\varphi, \psi, \alpha, \dots$; $V^*(K)$. Formas lineales; espacio vectorial dual de $V(K)$.

B^* ; B^* . Base dual de B ; base ordenada dual de B .

V^{**} . Espacio dual de V^* o bidual de V .

$\text{an}(S)$. Subespacio anulador de S .

t_f ; t_A . Aplicación traspuesta de f ; matriz traspuesta de A .

$\mathcal{T}_{r,s}(V)$. Espacio vectorial de los tensores de tipo (r,s) sobre V .

T ; T_o ; T_f . Tensor; tensor nulo; tensor de tipo $(1,1)$ asociado a f .

\otimes . Producto tensorial.

t_{ij} ; t_j^i ; t^{ij} . Componentes de tensores de orden 2.

$t_{k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_s}$. Componentes de un tensor de tipo (r,s) .

$\left(t_{k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_s} \right)$. Multimatriz de tipo (r,s) y orden n .

$C(T)$. Contracción de un tensor T de tipo $(1,1)$.

$C_i^j(T)$. Contracción de T respecto a las variables i covariante y j contravariante.

$C_{i,j}^{k,l} T$. Contracción de T en dos variables.

$C_i^j(T \otimes T')$. Producto contraido de T y T' .

$i_x T$, $i_y T'$. Productos internos de tensores (covariante y contravariante).

$S_k(V); H_k(V); A_k(V)$. Espacios vectoriales de tensores simétricos, hemisimétricos y alternados.

$\mathcal{S}_n(K), \mathcal{A}_n(K)$. Espacios vectoriales de matrices simétricas y antisimétricas.

t_T . Tensor traspuesto de $T \in \mathcal{G}_{2,0}(V)$.

σ_T . Tensor obtenido de $T \in \mathcal{G}_{r,0}(V)$ mediante $\sigma \in S_r$.

\wedge . Producto exterior.

$\widetilde{\mathcal{G}}_{r,s} = \left\{ \sigma \in S_{r+s} / \sigma(1) < \dots < \sigma(r) \text{ y } \sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s) \right\}$.

f^*T . Tensor inducido por T y el endomorfismo f .

\det_B . Tensor hemisimétrico determinante en la base B .

$\det f; \det A$. Determinante de $f \in \text{End}_K V$; determinante de $A \in M_n(K)$.

Δ_{ij} . Adjunto del elemento fila i columna j de una matriz cuadrada.

\hat{A} . Matriz que tiene Δ_{ji} en la fila i columna j .

$(A|b)$. Matriz ampliada de A mediante $b \in M_{m \times 1}(K)$.

$c(B)$. Clase de bases ordenadas en $V(\mathbb{R})$: una orientación de V .

$(V(\mathbb{R}), c(B))$. Espacio vectorial orientado.

$\text{Aut}_{\mathbb{R}}^+ V$. Subgrupo de $\text{Aut}_{\mathbb{R}} V$ de los $f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} V$ con $\det f > 0$.

$GL^+(n, \mathbb{R})$. Subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ de los $A \in GL(n, \mathbb{R})$ con $\det A > 0$.

$SL(n, \mathbb{R})$. Subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ de los $A \in GL(n, \mathbb{R})$ con $\det A = 1$: el grupo lineal especial de orden n sobre \mathbb{R} .

$p_f(t), p_A(t)$ ($p_f(t)=0, p_A(t)=0$). Polinomios (ecuaciones) característicos de $f \in \text{End}_K V$ y de $A \in M_n(K)$.

V_a . Subespacio propio asociado al valor propio a .

$g; (V, g)$. Métrica; espacio vectorial métrico.

$g_1 \times g_2$. Métrica producto de las métricas g_1 y g_2 .

$g|_U$. Métrica restricción de g al subespacio U .

$F_g; F$. Forma cuadrática asociada a g ; forma cuadrática.

g_F . Métrica asociada a F .

$F(V)$. Espacio vectorial de las formas cuadráticas sobre V .

g_{ij} ; $M_B(g) = (g_{ij})$. Componentes de g ; matriz de g relativa a la base ordenada B .

$\|x\|; |a|$. Norma de x ; valor absoluto de $a \in \mathbb{R}$.

$\chi(x,y)$. Ángulo de x e y en (V,g) euclídeo.

$O(n, \mathbb{R})$. Subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ formado por $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tales que $A^{-1} = A^t$: el grupo ortogonal de orden n .

$SO(n, \mathbb{R})$. Subgrupo de $O(n, \mathbb{R})$ constituido por las matrices ortogonales de determinante uno: el grupo especial ortogonal de orden n .

$Iso(V,g)$. Grupo de isometrías de (V,g) .

$Iso^+(V,g)$. Subgrupo de $Iso(V,g)$ formado por las isometrías de (V,g) con determinante positivo.

θ . Ángulo orientado.

$x \times y$. Producto vectorial de x por y .

\flat, \sharp . Isomorfismos musicales (bemol y sostenido).

g^* . Métrica en V^* inducida por g .

U^\perp . Suplemento ortogonal en (V,g) del subespacio U .

P_U . Proyección ortogonal sobre U .

\hat{f} . Adjunto del endomorfismo f de un espacio vectorial respecto de una métrica euclídea.



Editorial La Madraza

Camino Bajo s/n.
Teléf. 55 20 85 - Fax 57 15 56
18100 ARMILLA (Granada)