The South African Mathematical Olympiad
Third Round 2020
Senior Division (Grades 10 to 12)
Time : 4 hours
(No calculating devices are allowed)

1. Find the smallest positive multiple of 20 with exactly 20 positive divisors.

2. Let S be a square with sides of length 2 and R be a rhombus with sides of length 2 and angles measuring 60° and 120°. These quadrilaterals are arranged to have the same centre and the diagonals of the rhombus are parallel to the sides of the square. Calculate the area of the region on which the figures overlap.

3. If x, y, z are real numbers satisfying
$$\begin{aligned}(x+1)(y+1)(z+1) &= 3\\(x+2)(y+2)(z+2) &= -2\\(x+3)(y+3)(z+3) &= -1,\end{aligned}$$
find the value of
$$(x+20)(y+20)(z+20).$$

4. A positive integer k is said to be *visionary* if there are integers $a > 0$ and $b \geqslant 0$ such that $a \cdot k + b \cdot (k+1) = 2020$. How many visionary integers are there?.

5. Let ABC be a triangle, and let T be a point on the extension of AB beyond B, and U a point on the extension of AC beyond C, such that $BT = CU$. Moreover, let R and S be points on the extensions of AB and AC beyond A such that $AS = AT$ and $AR = AU$. Prove that R, S, T, U lie on a circle whose centre lies on the circumcircle of ABC.

6. Marjorie is the drum major of the world's largest marching band, with more than one million members. She would like the band members to stand in a square formation. To this end, she determines the smallest integer n such that the band would fit in an $n \times n$ square and lets the members form rows of n people. However, she is dissatisfied with the result, since some empty positions remain. Therefore, she tells the entire first row of n members to go home and repeats the process with the remaining members. Her aim is to continue it until the band forms a perfect square, but as it happens, she does not succeed until the last members are sent home. Determine the smallest possible number of members in this marching band.

Each problem is worth 7 points.

Die Suid Afrikaanse Wiskunde Olimpiade
Derde Ronde 2020
Senior Afdeling (Grade 10 tot 12)
Tyd : 4 ure
(Geen rekenapparate word toegelaat nie)

1. Vind die kleinste positiewe veelvoud van 20 wat presies 20 positiewe delers het.

2. Laat S 'n vierkant met sye van lengte 2 wees en laat R 'n ruit met sye van lengte 2 en hoeke van 60° en 120° wees. R en S word bo-op mekaar geplaas sodat hulle middelpunte saamval en die diagonale van R ewewydig is aan die sye van S. Bereken die oppervlakte van die gebied waar R en S oorvleuel.

3. Indien x, y, z reële getalle is wat die vergelykings

$$\begin{aligned}(x+1)(y+1)(z+1) &= 3\\(x+2)(y+2)(z+2) &= -2\\(x+3)(y+3)(z+3) &= -1\end{aligned}$$

bevredig, vind die waarde van

$$(x+20)(y+20)(z+20).$$

4. 'n Positiewe heelgetal k word *visioenêr* genoem as daar heelgetalle $a > 0$ en $b \geqslant 0$ is sodat $a \cdot k + b \cdot (k+1) = 2020$. Hoeveel visioenêre heelgetalle is daar?

5. Beskou driehoek ABC. Laat T 'n punt op die verlenging van AB (anderkant B) wees, en laat U 'n punt op die verlenging van AC (anderkant C) wees, sodanig dat $BT = CU$. Verder, laat R en S punte op die verlengings van AB en AC (anderkant A) wees, sodanig dat $AS = AT$ en $AR = AU$. Bewys dat R, S, T, U op 'n sirkel lê waarvan die middelpunt op die omgeskrewe sirkel van ABC geleë is.

6. Marjorie is die tamboer-majoor van die wêreld se grootste kadet-orkes, met meer as een miljoen lede. Sy wil graag die lede van die orkes in 'n vierkantige formasie laat staan. Om dit te probeer regkry, neem sy die kleinste heelgetal n sodat die orkes in 'n $n \times n$ vierkant sal pas, en laat hulle in rye van n lede staan. Maar sy is ontevrede, want daar is posisies in die vierkant wat nie gevul word nie. Gevolglik laat sy die hele eerste ry van n lede huis toe gaan, en herhaal dan die hele proses van voor af met die orige lede. Haar doelwit is om aan te hou met hierdie proses totdat die orkes 'n perfekte vierkant vorm, maar soos die noodlot dit wil hê, slaag sy nie daarin nie, totdat die laaste lede van die orkes huistoe gestuur word. Bepaal die kleinste moontlike aantal lede van hierdie orkes.

Elke probleem is 7 punte werd.