The South African Mathematical Olympiad
Third Round 2018
Senior Division (Grades 10 to 12)
Time : 4 hours
(No calculating devices are allowed)

1. One hundred empty glasses are arranged in a 10×10 array. Now we pick a of the rows and pour blue liquid into all glasses in these rows, so that they are half full. The remaining rows are filled halfway with yellow liquid. Afterwards, we pick b of the columns and fill them up with blue liquid. The remaining columns are filled up with yellow liquid. The mixture of blue and yellow liquid turns green. If both halves in a glass have the same colour, then that colour remains as it is.
   (a) Determine all possible combinations of values for a and b so that exactly half of the glasses contain green liquid at the end.
   (b) Is it possible that precisely one quarter of the glasses contain green liquid at the end?
2. In triangle ABC, $AB = AC$, and D is on BC. A point E is chosen on AC, and a point F is chosen on AB, such that $DE = DC$ and $DF = DB$. It is given that $\dfrac{DC}{BD} = 2$ and $\dfrac{AF}{AE} = 5$. Determine the value of $\dfrac{AB}{BC}$.
3. Determine the smallest positive integer n whose prime factors are all greater than 18, and that can be expressed as $n = a^3 + b^3$ with positive integers a and b.
4. Let ABC be a triangle with circumradius R, and let ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C be the altitudes through A, B, C respectively. The altitudes meet at H. Let P be an arbitrary point in the same plane as ABC. The feet of the perpendicular lines through P onto ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C are D, E, F respectively. Prove that the areas of DEF and ABC satisfy the following equation:
$$\frac{\mathrm{area}(DEF)}{\mathrm{area}(ABC)} = \frac{PH^2}{4R^2}.$$
5. Determine all sequences $a_1, a_2, a_3, \ldots$ of nonnegative integers such that $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ and a_n divides $a_{n-1} + n$ for all $n \geq 2$.
6. Let n be a positive integer, and let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be distinct positive integers with $x_1 = 1$. Construct an $n \times 3$ table where the entries of the k-th row are $x_k, 2x_k, 3x_k$ for $k = 1, 2, \ldots, n$. Now follow a procedure where, in each step, two identical entries are removed from the table. This continues until there are no more identical entries in the table.
   (a) Prove that at least three entries remain at the end of the procedure.
   (b) Prove that there are infinitely many possible choices for n and $x_1, x_2, \ldots, x_n$ such that only three entries remain.

Each problem is worth 7 points.

Die Suid-Afrikaanse Wiskunde Olimpiade
Derde Ronde 2018
Senior Afdeling (Grade 10 tot 12)
Tyd : 4 ure
(Geen rekenapparate word toegelaat nie)

1. Eenhonderd leë glase word gerangskik in 'n vierkantige formasie van tien rye en tien kolomme. Ons kies a van die rye en vul al die glase in hierdie rye halfvol met 'n blou vloeistof. Die ander rye word halfvol gevul met 'n geel vloeistof. Daarna kies ons b van die kolomme en vul al die glase in hierdie kolomme met 'n blou vloeistof tot hulle vol is. Die ander kolomme word gevul met 'n geel vloeistof tot hulle vol is. Die mengsel van blou en geel vloeistowwe verander na 'n groen vloeistof. Indien beide halwes van 'n glas met dieselfde kleur gevul is, dan bly die kleur onveranderd.

   (a) Bepaal alle moontlike kombinasies van die waardes vir a en b sodanig dat presies die helfte van die glase aan die einde van die proses 'n groen vloeistof bevat.

   (b) Is dit moontlik dat presies 'n kwart van die glase aan die einde van die proses 'n groen vloeistof bevat?

2. In driehoek ABC is $AB = AC$ en D is op BC. 'n Punt E word op AC gekies, en 'n punt F word op AB gekies, sodanig dat $DE = DC$ en $DF = DB$. Dit word gegee dat $\dfrac{DC}{BD} = 2$ en $\dfrac{AF}{AE} = 5$. Bepaal die waarde van $\dfrac{AB}{BC}$.

3. Bepaal die kleinste positiewe heelgetal n waarvan die priemfaktore almal groter as 18 is, en wat geskryf kan word as $n = a^3 + b^3$ met a en b positiewe heelgetalle.

4. Laat ABC 'n driehoek wees met omgeskrewe radius R, en laat ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C die hoogtelyne deur A, B, C onderskeidelik wees. Hierdie hoogtelyne ontmoet in H. Laat P 'n willekeurige punt in dieselfde vlak as ABC wees. Die voete van die loodlyne deur P op ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C is D, E, F onderskeidelik. Bewys dat die oppervlaktes van DEF en ABC die volgende bevredig:
$$\frac{\text{area}(DEF)}{\text{area}(ABC)} = \frac{PH^2}{4R^2}.$$

5. Vind alle rye $a_1, a_2, a_3, \ldots$ van nie-negatiewe heelgetalle sodanig dat $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ en a_n 'n deler van $a_{n-1} + n$ is vir alle $n \geq 2$.

6. Laat n 'n positiewe heelgetal wees, en laat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verskillende positiewe heelgetalle wees, met $x_1 = 1$. Konstrueer 'n $n \times 3$ tabel, waar die inskrywings van die k-de ry gegee word deur $x_k, 2x_k, 3x_k$, vir $k = 1, 2, \ldots, n$. Nou volg 'n prosedure, waar, in elke stap, twee identiese inskrywings uit die tabel verwyder word. Hierdie prosedure gaan voort totdat daar geen identiese inskrywings in die tabel is nie.

   (a) Bewys dat daar minstens drie inskrywings oorbly in die tabel aan die einde van die prosedure.

   (b) Bewys dat daar oneindig baie moontlike keuses vir n en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is sodat daar slegs drie inskrywings oorbly.

Elke probleem is 7 punte werd.