Suid-Afrikaanse Wiskunde-Olimpiade
Derde Ronde 2003
Tyd: 4 uur

1. Jy het vyf stukke papier. Jy kies een of meer daarvan en sny elkeen op in vyf kleiner stukke. Nou neem jy een of meer stukke van hierdie klomp en sny elkeen op in vyf kleiner stukke. Ensovoorts. Bewys dat jy nooit 2003 stukke sal hê nie.

2. Gegee ’n parallelogram $ABCD$, verbind A met die middelpunte E en F van die teenoorstaande sye BC en CD. AE en AF sny die diagonaal BD in M en N. Bewys dat M en N vir BD in drie gelyke dele verdeel.

3. Die eerste vier syfers van ’n sekere positiewe heeltal n is 1137. Bewys dat die syfers van n so geskommel kan word dat die nuwe getal deelbaar is deur 7.

4. In ’n gegewe vyfhoek $ABCDE$ het die driehoeke ABC, BCD, CDE, DEA en EAB almal dieselfde area. Die lyne AC en AD sny BE in die punte M en N. Bewys dat $BM = EN$.

5. Bewys dat die som van die kwadrate van twee opeenvolgende positiewe heeltalle nie gelyk kan wees aan die som van die vierdemagte van twee opeenvolgende positiewe heeltalle nie.

6. In $\triangle ABC$ is die som van die sye $2s$ en die straal van die ingeskrewe sirkel r. Drie halfsirkels met middellyne AB, BC en CA word aan die buitekant van ABC geteken. ’n Sirkel van straal t raak aan al drie halfsirkels. Bewys dat
$$\frac{s}{2} < t \le \frac{s}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r.$$

South African Mathematical Olympiad
Third Round 2003
Time: 4 hours

1. You have five pieces of paper. You pick one or more of them and cut each of them into five smaller pieces. Now you take one or more of the pieces from this lot and cut each of these into five smaller pieces. And so on. Prove that you will never have 2003 pieces.

2. Given a parallelogram $ABCD$, join A to the midpoints E and F of the opposite sides BC and CD. AE and AF intersect the diagonal BD in M and N. Prove that M and N divide BD into three equal parts.

3. The first four digits of a certain positive integer n are 1137. Prove that the digits of n can be shuffled in such a way that the new number is divisible by 7.

4. In a given pentagon $ABCDE$, triangles ABC, BCD, CDE, DEA and EAB all have the same area. The lines AC and AD intersect BE at points M and N. Prove that $BM = EN$.

5. Prove that the sum of the squares of two consecutive positive integers cannot be equal to a sum of the fourth powers of two consecutive positive integers.

6. In $\triangle ABC$, the sum of the sides is $2s$ and the radius of the incircle is r. Three semicircles with diameters AB, BC and CA are drawn on the outside of ABC. A circle with radius t touches all three semicircles. Prove that
$$\frac{s}{2} < t \leq \frac{s}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r.$$