

上海交通大学

学生实验报告

课程名称: 倒立摆系统课程设计

姓名: 李厚霖

学号: 520020910007

邮箱: lihoulin@sjtu.edu.cn

手机: 18760068218

同组人: 王泽骏、邓奕鸣

2023 年 5 月 25 日

1.实验任务和实验对象介绍

1.1 实验任务

本实验的目的是针对自动化系实验室搭建的倒立摆环境进行系统建模与控制器设计。利用已经搭建好的倒立摆环境完成。

1.2 倒立摆基本介绍

倒立摆（Inverted Pendulum）是一种经典的动态系统，它由一个竖直的摆杆和连接在其顶端的一个质点组成。与传统的摆锤不同，倒立摆的目标是在保持竖直位置的同时，实现对摆杆的平衡控制。

倒立摆被广泛应用于控制理论和机器人领域，因为它具有挑战性和实用价值。其动态特性使得倒立摆成为控制算法设计和控制系统评估的理想测试平台。

倒立摆的动力学行为非常敏感和不稳定，因此其控制是一个挑战性的问题。为了实现稳定的控制，常用的控制方法包括 PID 控制器、模糊控制、LQR 控制等。这些控制方法可以通过测量倾斜角度和角速度，并根据设定的控制策略来调整控制输入，实现倒立摆的平衡和稳定。

倒立摆不仅是一个重要的理论研究问题，也被广泛应用于机器人技术和自动化领域。通过倒立摆系统的控制研究，可以获得对于稳定性、控制理论和算法的深入理解，为实际应用中的控制问题提供参考和指导。倒立摆的研究也为机器人的平衡控制、自主导航以及人机交互等领域提供了重要的基础。

当前倒立摆的类型有以下几种：

- 直线倒立摆，是在直线运动模块上装有摆体组件，直线运动模块有一个自由度，小车可以沿导轨水平运动，在小车上装载不同的摆体组件，可以组成许多类别的倒立摆；
- 环形倒立摆，是在圆周运动模块上装有摆体组件，圆周运动模块有一个自由度，可以围绕齿轮中心做圆周运动，在运动手臂末端装有摆体组件，根据摆体组件的级数和串联或并联的方式，可以组成很多形式的倒立摆
- 平面倒立摆，是在可以做平面运动的运动模块上装有摆杆组件；

- 多极倒立摆；
- 人形倒立摆。

1.3 倒立摆特性

倒立摆具有一些特殊的动态特性，这些特性使其成为控制理论和机器人研究的重要对象。以下是倒立摆的一些典型特性：

- 不稳定性：倒立摆系统处于不稳定平衡状态，即稍有偏差就会引起摆杆的倾斜和摆动。这使得控制倒立摆成为一项挑战，需要通过精确的控制算法和策略来保持平衡。
- 非线性动力学：倒立摆系统的运动涉及非线性动力学方程，包括摆杆的旋转惯性、摩擦力、重力和控制输入等因素的相互作用。这些非线性特性使得倒立摆的控制更加复杂，需要使用适当的控制方法来解决非线性问题。
- 快速动态响应：由于倒立摆系统的不稳定性，对于外部干扰或控制输入的变化，倒立摆需要快速地响应和调整以保持平衡。这要求控制系统具备高带宽和快速响应能力。
- 稳定性分析：倒立摆系统的稳定性是控制设计的关键问题。通过稳定性分析，可以确定系统在不同参数和控制策略下的稳定性边界，并选择合适的控制方法来实现稳定控制。
- 非线性振荡：在倒立摆系统中，存在摆杆的周期性振荡现象。这是由于控制输入和摆杆的非线性相互作用导致的，需要通过合适的控制策略来抑制振荡并实现平衡。

倒立摆作为一个复杂的动态系统，不仅具有挑战性，也提供了丰富的研究内容和应用场景。通过研究倒立摆的特性，可以深入理解控制理论、动力学和稳定性分析，为机器人控制、平衡系统设计和自主导航等领域的应用提供理论基础和实践指导。

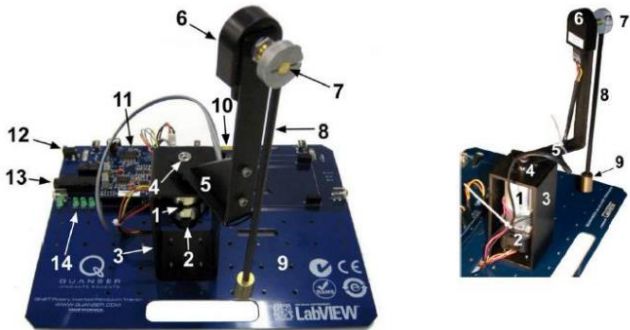
2.倒立摆系统结构

2.1 硬件系统

本次实验采用的是一个一级环形倒立摆系统，由一个摆杆和旋转臂组成，如下图所示，形象直观，结构简单，构件组成参数和形状易于改变，成本低廉。



该一阶倒立摆的系统构成如下图所示。各标号及说明如下表所示。



编号	说明
1	直流电机
2	臂杆角度测量高精度编码器
3	电机金属支架
4	旋转臂杆转轴
5	旋转臂杆
6	摆杆编码器
7	摆杆转轴
8	摆杆

9	摆杆质量块
10	ELVIS-II 抽卡金手指
11	QNET 倒立摆 PWM 和编码器信号接口板
12	QNET 倒立摆 24V 电源插头
13	熔丝
14	电源指示灯

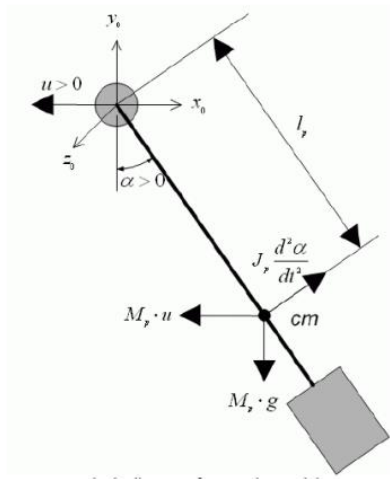
2.2 软件系统

主要采用了Labview 仿真平台软件,主要采用了老师给我们搭好的三个模块: Simple Modeling、Control Design、Swing Up。



3. 倒立摆的数学模型

3.1 倒立摆转动惯量计算



基于对 CSTR 系统物理模型的理解，将摆杆结构投影为正视图，如下图所示。根据系统参数计算摆杆整体转动惯量的理论值为：

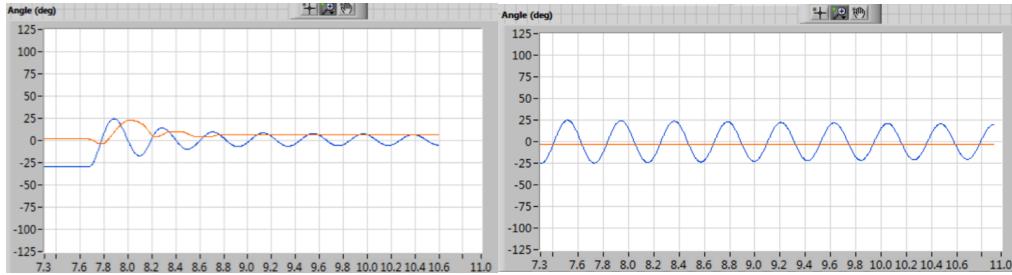
$$J_{p-theory} = \frac{1}{3}M_{p1}L_{p1}^2 + M_{p2}L_{p1}^2 + M_{p2}L_{p1}L_{p2} + \frac{1}{3}M_{p2}L_{p2}^2$$

$$= 6.9757 \times 10^{-4} kg \cdot m^2$$

测得出摆杆转动惯量的实际值为：

$$J_p = \frac{M_p g l_p}{4\pi^2 f^2} = 1.852249107 \times 10^{-4} kg \cdot m^2$$

其中 f 是测量频率，通过计算周期数与对应时间之比即可得到。（下图分别为固定基座和不固定基座得到的倒立摆摆动角度的图：



根据公式：

$$f = \frac{n_{cyc}}{\Delta t} = \frac{50}{17} Hz$$

误差分析：实际值与理论值的相对误差为：

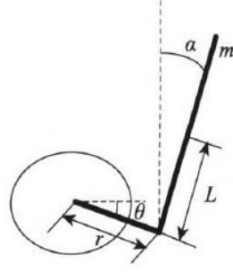
$$\frac{J_p - J_{p-theory}}{J_{p-theory}} \times 100\% = 74.48\%$$

理论值比实际值大得多，有两个原因：

- 理论情况下没有考虑摩擦阻力和空气阻力以及地球重力的影响。
- 实际摆杆重心和理论中心不重合。

3.2 倒立摆的状态空间模型

一阶旋转倒立摆的旋转臂和摆杆可以简化两个均匀的质量杆，模型简化如下图所示。其中 α 是摆杆关于垂直线的角位移， θ 是旋转臂关于水平线的角位移。



系统的动能包括：旋转臂转动的动能，摆杆摆动的动能，摆杆质心在水平方向和竖直方向的动能。定义零势能面为旋转臂转动的平面，则系统的动能和势能可分别记为 T 和 V ，且动能与势能的差记为 H ，则：

$$T = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}M_p(r\dot{\theta} - l_p\dot{\alpha}\cos \alpha)^2 + \frac{1}{2}M_p(-l_p\dot{\alpha}\sin \alpha)^2$$

$$V = M_p g L \cos \alpha$$

$$H = T - V = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}M_p(r\dot{\theta} - l_p\dot{\alpha}\cos \alpha)^2 + \frac{1}{2}M_p(-l_p\dot{\alpha}\sin \alpha)^2 - M_p g l_p \cos \alpha$$

建立旋转倒立摆的非线性 Lagrange 方程组如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial H}{\partial \theta} &= \tau - B_r \dot{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= -B_p \dot{\alpha} \end{aligned}$$

其中， τ 代表直流伺服电机输出转矩：

$$\tau = \frac{K_t(V_m - K_m \dot{\theta})}{R_m}$$

计算 Lagrange 方程组的各个分量，并在平衡位置附近进行线性化，得到如下线性方程组：

$$\begin{aligned} (J_{eq} + M_p r^2)\ddot{\theta} - M_p l_p r \ddot{\alpha} &= \tau - B_r \dot{\theta} \\ (J_p + M_p l_p^2)\ddot{\alpha} - M_p l_p r \ddot{\theta} - M_p g l_p \alpha &= -B_p \dot{\alpha} \end{aligned}$$

转化为矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{M_p^2 l_p^2 r g}{J_T} & \frac{-(J_p + M_p l_p^2)G}{J_T R_m} & \frac{-M_p l_p r B_p}{J_T} \\ 0 & \frac{M_p l_p g (J_{eq} + M_p r^2)}{J_T} & \frac{-M_p l_p r G}{J_T R_m} & \frac{-(J_{eq} + M_p r^2)B_p}{J_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(J_p + M_p l_p^2)K_t}{J_T R_m} \\ \frac{M_p l_p r K_t}{J_T R_m} \end{bmatrix} V_m$$

其中, $J_T = J_{eq}J_p + J_{eq}M_p l_p^2 + J_p M_p r^2, G = K_t K_m + B_r R_m$ 。

由于在实验过程中我们可以条件参数是倒立摆达到稳定, 因此可以基本忽略摩擦系数的影响, 即在原有的状态空间模型中令 $Bp = 0$ 。得到以下的状态空间模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} u_i \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

其中里面的具体参数为:

$$\begin{aligned} \text{其中 } a_{32} &= \frac{M_p l_p^2 r g}{J_p J_{eq} + J_p M_p r^2 + J_{eq} M_p l_p^2}, \quad a_{33} = -\frac{K_t K_m (J_p + M_p l_p^2)}{I R_m (J_p J_{eq} + J_p M_p r^2 + J_{eq} M_p l_p^2)}, \quad a_{42} = \\ &= \frac{M_p l_p g (J_{eq} + M_p r^2)}{J_p J_{eq} + J_p M_p r^2 + J_{eq} M_p l_p^2}, \quad a_{43} = -\frac{K_t K_m M_p l_p r}{I R_m (J_p J_{eq} + J_p M_p r^2 + J_{eq} M_p l_p^2)}, \quad b_3 = \frac{K_t (J_p + M_p l_p^2)}{I R_m (J_p J_{eq} + J_p M_p r^2 + J_{eq} M_p l_p^2)}, \quad b_4 = \\ &= \frac{K_t M_p l_p r}{I R_m (J_p J_{eq} + J_p M_p r^2 + J_{eq} M_p l_p^2)} \end{aligned}$$

其中参数及其物理意义如下图所示:

符号	描述	值	单位
M_{p1}	摆杆连杆的质量	0.008	kg
M_{p2}	摆杆小锤的质量	0.019	kg
L_{p1}	摆杆连杆的长度	0.171	m
L_{p2}	摆杆小锤的长度	0.190	m
M_p	摆杆连杆和小锤质量之和	0.0270	kg
l_p	摆杆质心到中轴的距离	0.153	m
r	旋转臂轴到摆杆轴的距离	0.0826	m
g	重力常数	9.8	m/s ²
n_{cyc}	旋转的圈数	3	圈
Δt	旋转 n_{cyc} 耗时	1.25	s
L_p	摆杆总长度	0.191	m
B_r	旋转臂粘性阻尼系数	0	Nms. rad ⁻¹
B_p	摆杆粘性阻尼系数	0	Nms. rad ⁻¹
K_m	反向电势系数	0.03334	V/(rad/s)
K_t	电机力矩系数	0.03334	N. m
R_m	直流电机电枢电阻	8.7	ohms
J_{eq}	旋转臂关于中轴的转动惯量	0.0000184	kg. m ²
V_m	直流电机的输入电压		V
f	测量频率		Hz
J_p	摆杆关于中轴的转动惯量		kg. m ²
τ	直流电机输出转矩		Nm

4.控制器设计

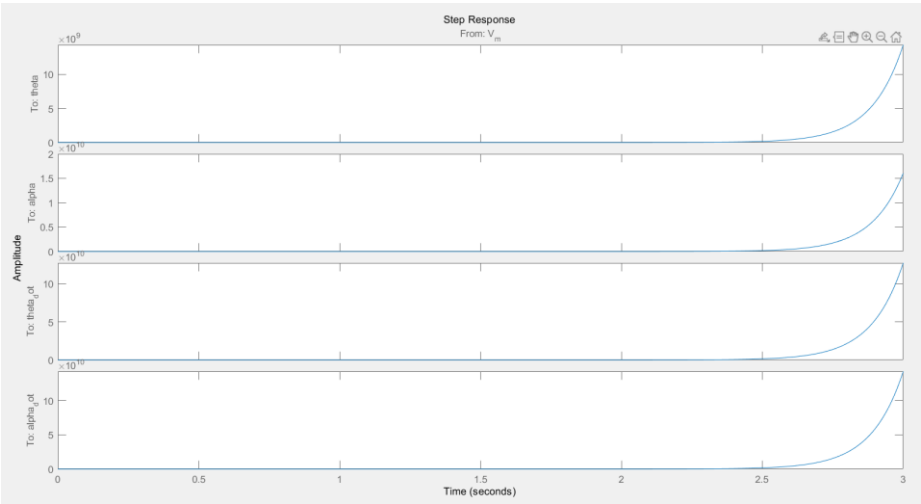
4.1 倒立摆系统的分析

对于建模得到的系统，对 A 矩阵计算得到特征值为：

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 8.8840 \quad \lambda_3 = -9.1031 \quad \lambda_4 = -0.3470$

	1
1	0
2	8.8840
3	-9.1031
4	-0.3470

所以可知存在位于复平面右半平面的极点，因此系统开环不稳。我们在用 MATLAB 对该系统的阶跃响应进行仿真验证分析，得到如下结果：



由此可以得知，该倒立摆系统原本是一个不稳定系统。

由于后续我们要设计控制器使倒立摆系统稳定，因此我们还需要验证该倒立摆系统的能控性。我们同样用 MATLAB 对系统进行能控性分析，得到其能控性矩阵 Q_c 为：

Qc				
4x4 double				
	1	2	3	4
1	0	16.9750	-9.6079	536.0630
2	0	7.0870	-4.0061	574.8687
3	16.9750	-9.6079	536.0630	-603.3604
4	7.0870	-4.0061	574.8687	-450.1877

经计算得到该矩阵的秩为 4，因此该系统能控。

4. 2LQR 控制器设计

LQ (linear quadratic) 问题——对于线性系统的控制器设计问题, 如果其性能指标是状态变量和(或)控制变量的二次型函数的积分, 则这种动态系统的最优化问题称为线性系统二次型性能指标的最优控制问题(即 LQ 问题), 简称为线性二次型最优控制问题或线性二次问题。

$$\min J(x, u) = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt$$

LQR (linear quadratic regulator) 即线性二次型调节器, 其对象是现代控制理论中以状态空间形式给出的线性系统, 而目标函数为对象状态和控制输入的二次型函数。

在对倒立摆非线性点线性近似后, 我们可以将其控制器设计问题简化为 LQ 问题, 因而我们可以采用经典的 LQR 法(线性二次型调节器)进行控制器设计, 对于如下系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

我们设计 LQR 控制器为:

$$u(t) = -Kx(t)$$

因而我们只需找到 K, 使得系统从给定的初始状态转移到目标控制末态时候, 系统性能指标即二次型性能指标最小化:

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S_x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt$$

根据最优控制理论, 求解Riccati方程, 求得矩阵 P。如果正定矩阵 P 存在, 则系统是稳定的或 A-BK 是稳定的。将此矩阵 P 代入方程, 即:

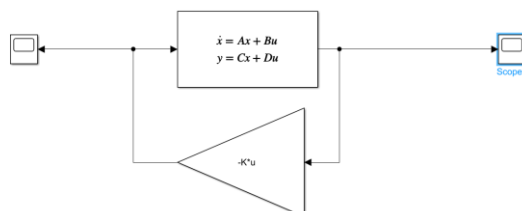
$$K = R^{-1}B^TP(t)$$

得到最优反馈增益矩阵 K。

LQR 控制器的性能主要由加权矩阵 Q 和 R 决定, 加权矩阵 Q 和 R 的选择反映能耗和误差的折中。本文取 R 阵为 1。LQR 方法中 Q 对角矩阵表示对各个状态变量的关注程度, 越重视某个状态变量, 越希望其误差分量尽可能小, Q 的对角元素相应的数值要取得越大。对于倒立摆系统, 我们的主要目标就是使摆杆倒置稳定, 也就是说对角度变量的重视程度最高, 其对应的值也应该最大, 因此我们主要关注的是 θ 和 α 。

4.3matlab 仿真

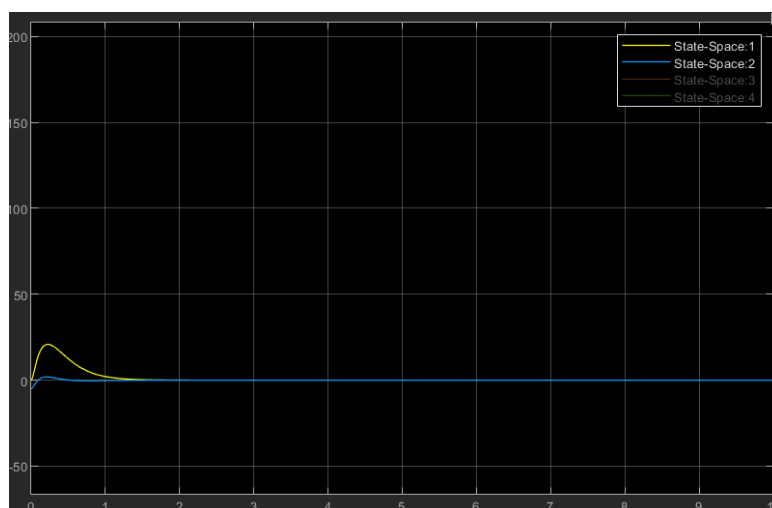
接下来我们对计算得到的模型和设想的控制器进行了 MATLAB 仿真，我们用 Simulink 搭建了仿真，如下图所示：



经过测试，我们得到了仿真的最终加权矩阵 Q 和其对应的反馈增益矩阵 K 。其中 Q 为

$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

得到 $K = [-7.07106781186552 \quad 100.9492 \quad -3.4497 \quad 13.7016]$ 。使用 MATLAB 对经过控制器反馈得到的一阶开环倒立摆进行仿真，给定 -10 rad 的扰动。我们可以得到效果图如下所示：



同样的，我们计算当前模型的特征值，即矩阵 $(A-BK)$ 的特征值，得到的结果为：

	1
1	$-19.4038 + 0.0000i$
2	$-7.6556 + 0.0000i$
3	$-6.0255 + 1.9288i$
4	$-6.0255 - 1.9288i$

显然，当前经过控制器调整后的模型是稳定的。

5. 实验结果和分析

5.1 建模阶段

根据倒立摆的状态空间模型，我们带入具体的数值（对应不同参数的数值及其物理意义如下图所示）：

符号	描述	值	单位
M_{p1}	摆杆连杆的质量	0.008	kg
M_{p2}	摆杆小锤的质量	0.019	kg
L_{p1}	摆杆连杆的长度	0.171	m
L_{p2}	摆杆小锤的长度	0.190	m
M_p	摆杆连杆和小锤质量之和	0.0270	kg
l_p	摆杆质心到中轴的距离	0.153	m
r	旋转臂轴到摆杆轴的距离	0.0826	m
g	重力常数	9.8	m/s ²
n_{cyc}	旋转的圈数	3	圈
Δt	旋转 n_{cyc} 耗时	1.25	s
L_p	摆杆总长度	0.191	m
B_r	旋转臂粘性阻尼系数	0	Nms. rad ⁻¹
B_p	摆杆粘性阻尼系数	0	Nms. rad ⁻¹
K_m	反向电势系数	0.03334	V/(rad/s)
K_t	电机力矩系数	0.03334	N.m
R_m	直流电机电枢电阻	8.7	ohms
J_{eq}	旋转臂关于中轴的转动惯量	0.0000184	kg. m ²
V_m	直流电机的输入电压		V
f	测量频率		Hz
J_p	摆杆关于中轴的转动惯量		kg. m ²
τ	直流电机输出转矩		Nm

得到的状态空间模型为：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 74.873 & -0.566 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16.975 \end{bmatrix} U \\ \ddot{\alpha} &= \begin{bmatrix} 0 & 80.796 & -0.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.087 \end{bmatrix} U \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.2 仿真阶段

5.2.1 Simulink 仿真

主要的仿真图搭建已经在 LQR 控制器的仿真部分展示，考虑不同 Q 参数的选取对控制器设计的影响，我们这里选取多组控制器参数进行探究，并分析不同参数对系统的影响。

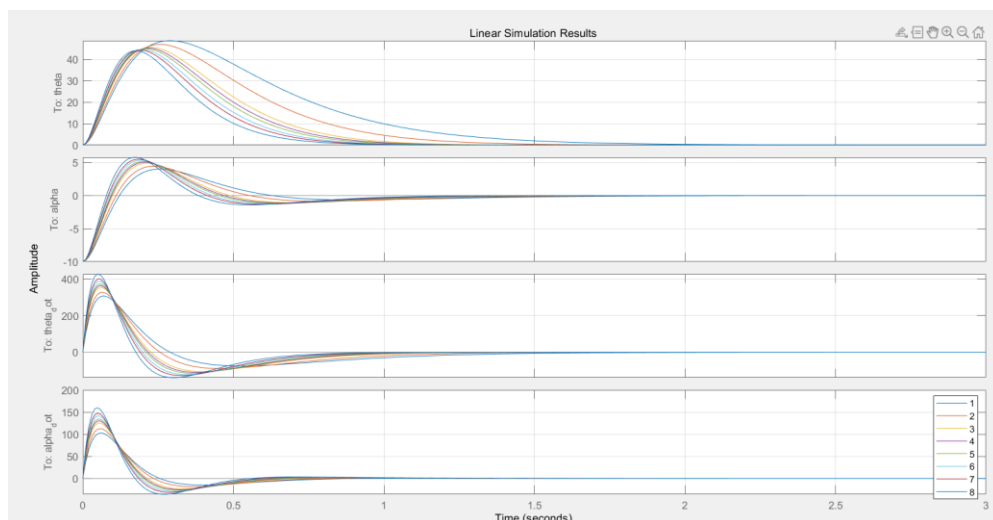
此处主要展示调节不同的加权矩阵 Q 对倒立摆响应曲线的影响。从而来探讨控制器的敏感性，对于如下加权矩阵 Q ：

$$Q = \begin{bmatrix} q1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q4 \end{bmatrix}$$

由于我们关注的主要是两个角度变量 θ 和 α ，因此主要调整 $q1, q2$ 两个参数。首先对 $q1$ 进行调整：固定 $q2$ 的数值为在 LQR 控制器中设置的 50，调整 $q1$ 数值变化为：

$$q1 = [10, 20, 40, 50, 60, 80, 100, 150]$$

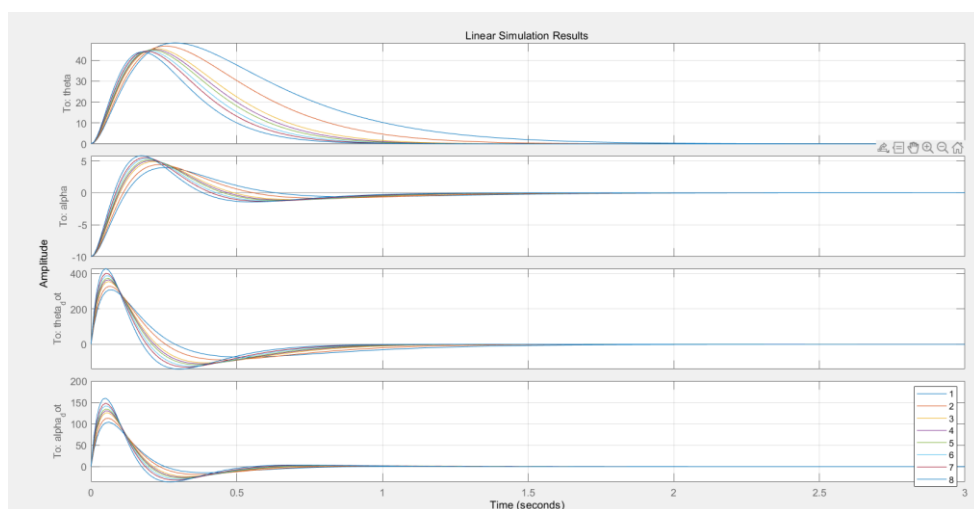
得到的响应曲线为：



同理，我们固定 $q1$ 为 50，调整 $q2$ 数变化为：

$$q2 = [150, 100, 80, 60, 50, 30, 20, 10]$$

得到的响应曲线为：

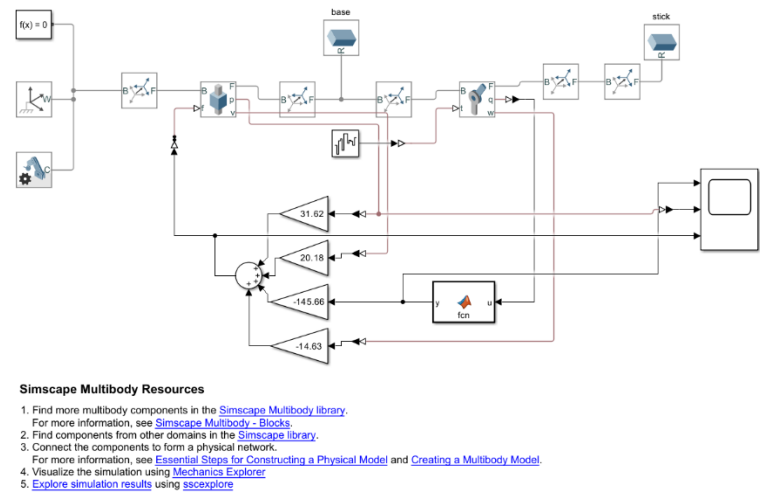


从图中可以发现, Q 矩阵中, 增加 $q1$ 使 θ 稳定时间和上升时间变短, 增大

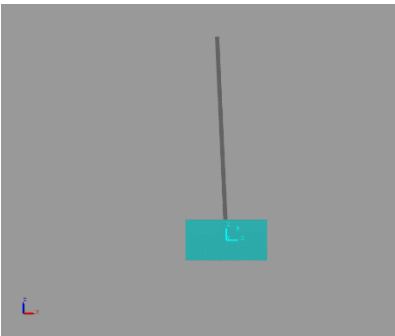
q2 使 α 响应明显加快,符合 LQR 方法的理论实际。且给定一定扰动,得到的控制效果在 仿真中均有较好的控制效果,参数敏感度不强。

5.2.2 Simscape 仿真

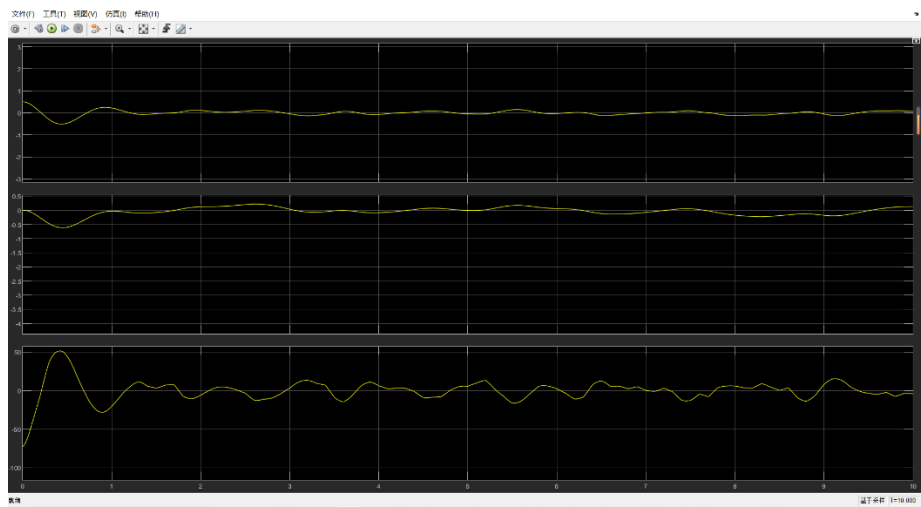
具体的仿真如下所示:



其运行得到的平面图为:



其角度、位置和控制量（力）的曲线为:

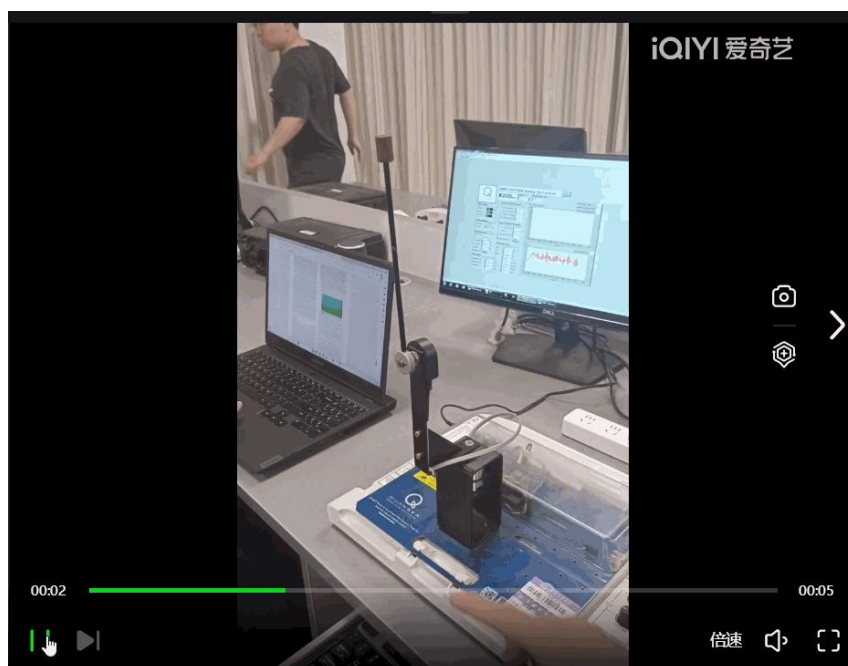


5.3 测试阶段

通过最后在实物上测试，我们得到了最终的 LQR 控制器，其加权矩阵 Q 和 K 分别为：

$$Q = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
$$K = [-8.9443 \quad 147.5914 \quad -5.0858 \quad 20.4265]$$

最后得到的实验效果如下图的 gif 所示：



我们可以发现，最终的测试结果和仿真结果还是有一定差距的，我经过思考，觉得主要有以下几个方面的原因：

- 模型误差：仿真模型是基于系统的理论模型构建的，而实际系统中可能存在一些未考虑或难以建模的因素，如我们在这次理论建模时就忽略了空气的摩擦、倒立摆系统自身的摩擦等。这些因素可能导致仿真结果与实际结果存在差异。
- 参数不确定性：倒立摆系统的参数，如质量、长度、转动惯量等，是通过实验测量获得的。这些参数的估计误差或变化可能会影响控制器的性能，导致仿真结果与实际结果不同。
- 控制器设计：LQR 控制器的设计是基于系统的数学模型和一组权重矩阵。权重矩阵的选择对于控制器的性能至关重要。如果权重矩阵选择不能准

确反映模型的需求，那么控制器的性能可能无法满足预期，从而导致仿真结果与实际结果的差异。

- 采样时间：在仿真中，通常会选择一个固定的采样时间来模拟连续时间系统。然而，在实际应用中，采样时间可能会受到硬件限制或其他因素的影响，可能与仿真中所假设的采样时间不同。这种不一致性可能导致仿真结果与实际结果之间的差异。

6. 课程感想和建议

6.1 感想

本次《倒立摆系统课程设计》中，我们针对倒立摆进行了系统建模与控制器设计。上完之后我主要有以下几点感想和收获：

- 深入理解了系统动力学：通过设计倒立摆课程，我对倒立摆系统的动力学行为有了更深入的理解。我学会了如何建立系统模型、分析稳定性和设计控制器等关键概念和技能。
- 实践与理论结合：倒立摆课程不仅提供了理论知识，还让我有机会实际操作和验证设计的控制方案。这种实践与理论相结合的学习方式帮助我更好地理解课程内容，并培养了解决实际问题的能力。
- 感受控制器的影响：通过设计和实施控制器，我亲身体验了控制器对系统行为的影响。我看到了控制器如何稳定倒立摆、抑制摆动，并且对参数调整的重要性有了更直观的认识。

6.2 建议

整体来说，这门课的设计和方式是很不错的，从学生的角度看基本完成了该课程的任务、达到了预期的效果，建议的话主要可以在以下两个方面改善：

系统建模的讲解：倒立摆的系统建模是课程设计的关键一步。为了帮助学生更好地理解建模的过程和原理，可以加强对系统动力学方程的讲解，并提供一些实例来帮助学生掌握建模技巧。

控制器调优的指导：在课程设计中，可以给予学生一些关于控制器调优的指导。控制器的性能对系统的稳定性和响应速度至关重要，指导学生如何根据系统特性进行调优，将有助于他们设计更优秀的控制器。

最后，感谢邬晶老师、宫亮老师以及两位助教老师的耐心讲解与指导，让我能够体验倒立摆系统的作用与魅力，同时学习到了宝贵的实践应用知识。

参考文献

[1] 于树友, 褚建新, 王银敏. 一阶旋转倒立摆输出反馈控制[J]. 实验技术与管理, 2020, 37(03): 165-170+199.

[2] 杨柏松, 林河利, 陈卸水, 熊建斌, 郑桂彬. 基于 LQR 的环形一级倒立摆控制算法研究[J]. 广东石油化工学院学报, 2015, 25(04): 47-51.

[3] 徐泽远. 简易旋转倒立摆及控制装置的设计[J]. 安徽农业科学, 2014, 42(26): 9216-9217+9254.

附录

部分代码如下图所示：

```
1 - A = [0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1; 0, 74.873, -0.566, 0; 0, 80.796, -0.236, 0];
2 - B = [0; 0; 16.975; 7.087];
3 - C = diag([1, 1, 1, 1]);
4 - D = [0; 0; 0; 0];
5 - e = eig(A);
6
7 - states = {'theta' 'alpha' 'theta_dot' 'alpha_dot'};
8 - inputs = {'V_m'}; outputs = {'theta'; 'alpha'; 'theta_dot'; 'alpha_dot'};
9 - t_test = 0: 0.01: 3; %测试时间
10 %稳定性分析
11 sys_ss = ss(A, B, C, D, 'statename', states, 'inputname', inputs, 'outputname', outputs);
12 step(sys_ss, t_test);
13 %可控性分析
14 Qc = ctrb(A, B);
15 disp(rank(Qc));
16
17 %LQR控制器
18 %Q = diag([50, 50, 1, 1]);
19 Q = diag([80, 60, 5, 5]);
20 R=1;
21 K=lqr(A, B, Q, R);
22 %新模型
23 Ap = A - B*K;
24 Bp = B; Cp = C; Dp = D;
25 e1 = eig(Ap);
```

```

27 - x0 = [0;-10;0;0]; %初始阶跃
28 - u = zeros(size(t_test));
29
30 %对比测试
31 - theta_q= [10, 20, 40, 50, 60, 80, 100, 150];
32 - alpha_q= [150, 100, 80, 60, 50, 30, 20, 10];
33 - for i=1:length(theta_q)
34 -     %q1 = 50;
35 -     q1 = theta_q(i);
36 -     q2 = alpha_q(i);
37 -     %q2 = 50;
38 -     Q = [q1 0 0 0
39 -          0 q2 0 0
40 -          0 0 1 0
41 -          0 0 0 1];
42 -     [K,P,r] = lqr(A,B,Q,R);
43 -     disp(K);
44 -     Ap = A - B*K;
45 -     Bp = B; Cp = C; Dp = D;
46 -     sys_lqr2 = ss(Ap, Bp, Cp, Dp, 'statename', states, 'inputname', inputs, 'outputname', outputs);
47 -     lsim(sys_lqr2, u, t_test, x0);
48
49 -     hold on
50 -     grid on
51 - end
52 - legend('1','2','3','4','5','6','7','8');

```