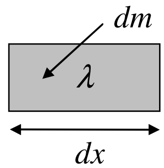
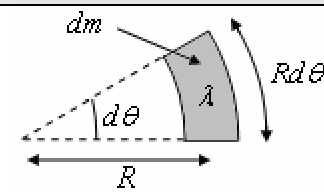
Chapitre 4.5 – Le moment d’inertie par intégration

Découpage d’une densité de masse

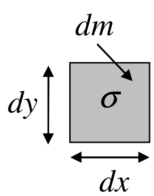
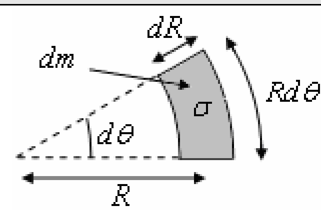
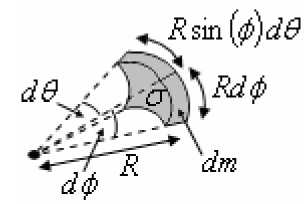
Pour évaluer l’inertie d’un objet non ponctuel, il faut découper l’objet en plusieurs volumes infinitésimaux de masse dm et calculer l’inertie totale I provenant de la contribution de toutes les masses infinitésimales en effectuant une sommation.

Voici quelques formes de découpage infinitésimal fréquemment employées :

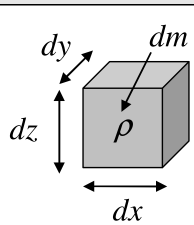
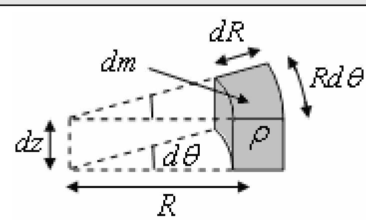
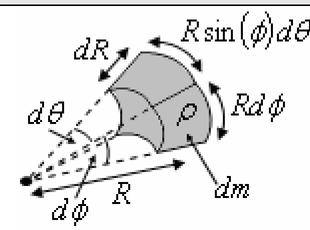
<u>En 1D :</u> Densité linéaire $[\lambda] = \text{kg/m}$ et $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}L$

Tige : $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x$	Tige cylindrique : $\mathrm{d}m = \lambda\,R\,\mathrm{d}\theta$
	

<u>En 2D :</u> Densité surfacique $[\sigma] = \text{kg/m}^2$ et $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}A$

Carré : $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	Carré cylindrique : $\mathrm{d}m = \sigma\,R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta$	Carré sphérique: $\mathrm{d}m = \sigma\,R^2\sin(\phi)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
		

<u>En 3D :</u> Densité volumique $[\rho] = \text{kg/m}^3$ et $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$

Cube[1] : $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	Cube cylindrique[2] : $\mathrm{d}m = \rho\,R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$	Cube sphérique[3] : $\mathrm{d}m = \rho\,R^2\sin(\phi)\mathrm{d}R\,d\theta\,\mathrm{d}\phi$
		

<u>Remarque :</u> $x, y, z \in [-\infty..\infty]$ et $R \in [0..\infty]$ $\theta \in [0..2\pi]$ $\phi \in [0..\pi]$

θ : Longitude — θ : Axe parallèle à x — ϕ : Axe parallèle à z

ϕ : Colatitude — « Rotation plan xy » — « Rotation $+z$ à $-z$ »

---

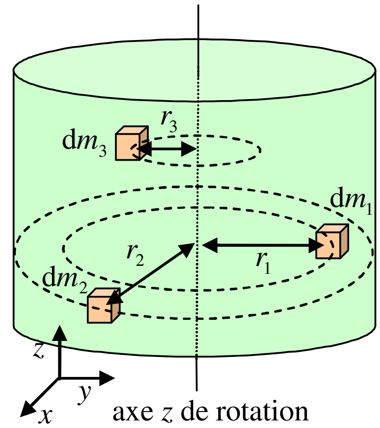
[1] Ce découpage s’effectue dans le système d’axe xyz qui porte le nom de coordonnée cartésienne.

[2] Ce découpage s’effectue dans le système d’axe $R\theta z$ qui porte le nom de coordonnée cylindrique.

[3] Ce découpage s’effectue dans le système d’axe $R\theta\Phi$ qui porte le nom de coordonnée sphérique.

Moment d'inertie d'un corps selon l'axe z

Le moment d'inertie d'un corps I par rapport à l'axe z de rotation peut être évaluée en découpant le corps en un nombre infini de morceaux infinitésimaux de masse dm et en additionnant tous les moments d'inertie dI provenant de tous ces morceaux de masse :



$$I = \int dI = \int r^2 \mathrm{d}m$$

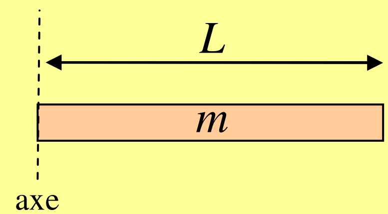
où I : Moment d'inertie total du corps ($\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$)

r : Distance dans le plan xy entre l'axe z et dm (m)

dm : Morceau infinitésimal de masse (kg)

Situation 1 : ***Le moment d'inertie d'une tige.*** Une tige homogène de masse m et de longueur L tourne autour d'un axe perpendiculaire à elle-même qui passe par une de ses extrémités (voir schéma ci-contre). On désire utiliser le calcul intégral pour montrer que son moment d'inertie est donnée par :

$$I = \frac{1}{3} m L^2$$



Évaluons la densité linéaire λ de masse de la tige, puisqu'elle est uniforme :

$$\lambda = \frac{m}{L}$$

Découpons notre tige en morceau de tige infinitésimale de largeur dx et représentons la mesure r du moment d'inertie à l'aide de notre système d'axe x sachant que l'origine est située sur l'axe de rotation :

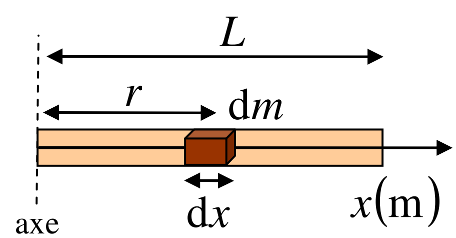
<u>Moment d'inertie infinitésimal :</u>

$$\mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m$$

et

$$\mathrm{d}m = \lambda \,\mathrm{d}x$$

$$r = x$$



Posons notre intégrale afin d'additionner toutes les inerties dI provenant de tous les dm situés sur la tige entre la coordonnée $x = 0$ et $x = L$:

$I = \int \mathrm{d}I \quad \Rightarrow \quad I = \int r^2 \mathrm{d}m$ (Remplacer $\mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m$)

$\Rightarrow \quad I = \int (x)^2 (\lambda \,\mathrm{d}x)$ (Remplacer $r = x$ et $\mathrm{d}m = \lambda \,\mathrm{d}x$)

$\Rightarrow \quad I = \lambda \int x^2 \mathrm{d}x$ (Factoriser la constante λ)

Posons les bornes de l'intégrale entre $x = 0$ et $x = L$:

$$I = \lambda \int x^2 \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad I = \lambda \int_{x=0}^{L} x^2 \mathrm{d}x \qquad \text{(Bornes : } x = 0 \to L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L \qquad \left(\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)$$

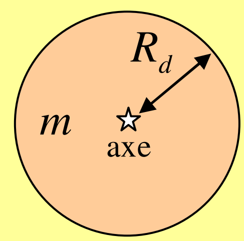
$$\Rightarrow \quad I = \lambda \left[\frac{(L)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} \right]_0^L \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{m}{L} \right) \frac{L^3}{3} \qquad \left(\text{Remplacer } \lambda = \frac{m}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3} m L^2 \quad \blacksquare \qquad \text{(Simplifier)}$$

Situation 2 : *Le moment d'inertie d'un disque.* Un disque mince et homogène de masse m et de rayon R_d tourne autour d'un axe, perpendiculaire à son plan, qui passe par son centre (voir schéma ci-contre). On désire utiliser le calcul intégral pour montrer que son moment d'inertie est donnée par :

$$I = \frac{1}{2} m R_d^{\ 2}$$



Évaluons la densité surfacique σ de masse du disque, puisqu'elle est uniforme :

$$\sigma = \frac{m}{A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{m}{\pi R_d^{\ 2}}} \qquad \text{où} \quad A = \pi R_d^{\ 2}$$

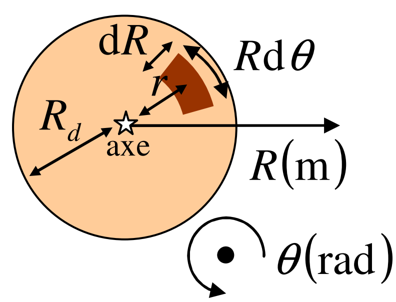
Découpons notre disque en morceau de carré cylindrique infinitésimal (coordonnée cylindrique $R\theta$) de largeur $\mathrm{d}R$ et de longueur $R\,\mathrm{d}\theta$ et représentons la mesure r du moment d'inertie à l'aide de notre système d'axe $R\theta$ sachant que l'origine est située au centre du disque :

<u>Moment d'inertie infinitésimal :</u>

$$\mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m$$

et $$\mathrm{d}m = \sigma R \,\mathrm{d}R \,\mathrm{d}\theta$$

$$r = R$$



Posons notre intégrale afin d'additionner toutes les inerties dI provenant de tous les dm situés sur le disque entre la coordonnée $R=0$ et $R=R_d$ puis entre la coordonnée $\theta=0$ et $\theta=2\pi$:

$I=\int \mathrm{d}I \quad \Rightarrow \quad I=\int r^2 \mathrm{d}m$ (Remplacer $\mathrm{d}I=r^2\mathrm{d}m$)

$\Rightarrow \quad I=\iint (R)^2(\sigma R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta)$ (Remplacer $r=R$ et $\mathrm{d}m=\sigma R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta$)

$\Rightarrow \quad I=\sigma\iint R^3\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta$ (Factoriser la constante σ)

$\Rightarrow \quad I=\sigma\int_{R=0}^{R_d}\int_{\theta=0}^{2\pi} R^3\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta$ (Bornes : $R=0\rightarrow R_d$ et $\theta=0\rightarrow 2\pi$)

$\Rightarrow \quad I=\sigma\int_{R=0}^{R_d} R^3\mathrm{dR}\int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta$ (Factoriser constante pour intégrale sur θ)

$\Rightarrow \quad I=\sigma\int_{R=0}^{R_d} R^3\mathrm{d}R\,[\theta]_0^{2\pi}$ (Résoudre pour θ : $\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$)

$\Rightarrow \quad I=\sigma\int_{R=0}^{R_d} R^3\mathrm{d}R\,((2\pi)-(0))$ (Évaluer l'intégrale sur θ)

$\Rightarrow \quad I=2\pi\sigma\int_{R=0}^{R_d} R^3\mathrm{d}R$ (Factoriser constante pour intégrale sur R)

$\Rightarrow \quad I=2\pi\sigma\left[\frac{R^4}{4}\right]_0^{R_d}$ (Résoudre pour R : $\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$)

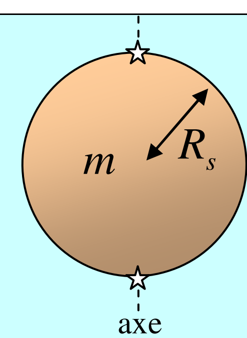
$\Rightarrow \quad I=2\pi\sigma\left(\frac{(R_d)^4}{4}-\frac{(0)^4}{4}\right)$ (Évaluer l'intégrale sur R)

$\Rightarrow \quad I=2\pi\left(\frac{m}{\pi R_d^{\ 2}}\right)\frac{R_d^{\ 4}}{4}$ (Remplacer $\sigma=\frac{m}{\pi R_d^{\ 2}}$)

$\Rightarrow \quad I=\frac{1}{2}mR_d^{\ 2} \quad \blacksquare$ (Simplifier)

Situation A : *Le moment d'inertie d'une sphère.* Une sphère homogène de masse m et de rayon R_s tourne autour d'un axe qui passe par son centre (voir schéma ci-contre). On désire utiliser le calcul intégral pour montrer que son moment d'inertie est donnée par :

$$I=\frac{2}{5}mR_s^{\ 2}$$



Évaluons la densité volumique ρ de masse de la sphère, puisqu'elle est uniforme :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{4\pi R_d^{\ 3}/3} \qquad (A = 4\pi R_d^{\ 3}/3)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{3m}{4\pi R_d^{\ 3}}} \qquad \text{(Simplification)}$$

Découpons notre sphère en morceau de cube sphérique infinitésimal (coordonnée sphérique $R\theta\phi$) de côté $\mathrm{d}R$, $R\sin(\phi)\mathrm{d}\theta$ et $R\,\mathrm{d}\phi$ et représentons la mesure r du moment d'inertie à l'aide de notre système d'axe $R\theta\phi$ sachant que l'origine est située au centre de la sphère. Considérons que notre sphère tourne autour de l'axe z :

<u>Moment d'inertie infinitésimal :</u>

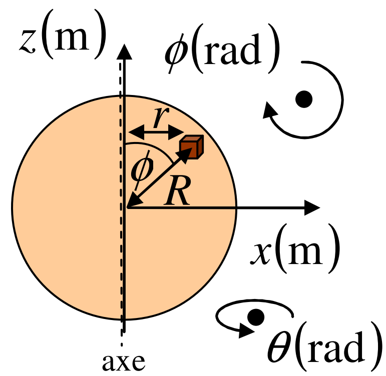
$$\mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m$$

et

$$\mathrm{d}m = \rho R^2 \sin(\phi) \mathrm{d}R\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$$

$$r = R\sin(\phi)$$

<u>Rappel :</u> θ : rotation plan xy
ϕ : rotation mesurée par l'axe z



Posons notre intégrale afin d'additionner toutes les inerties $\mathrm{d}I$ provenant de tous les $\mathrm{d}m$ situés sur la sphère entre la coordonnée $R = 0$ et $R = R_s$, entre la coordonnée $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ puis entre la coordonnée $\phi = 0$ et $\phi = \pi$:

$$I = \int \mathrm{d}I \quad \Rightarrow \quad I = \int r^2 \mathrm{d}m \qquad (\text{Remplacer } \mathrm{d}I = r^2\mathrm{d}m)$$

$$\Rightarrow \quad I = \iiint (R\sin(\phi))^2 \left(\rho R^2 \sin(\phi)\mathrm{d}R\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi\right) \qquad (\text{Remplacer } r = R\sin(\phi) \text{ et } dm)$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{R=0}^{R_s} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \rho R^4 \sin^3(\phi) \mathrm{d}R\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \qquad \text{(Bornes des intégrales)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \rho \int_{R=0}^{R_s} R^4 \mathrm{d}R \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\phi=0}^{\pi} \sin^3(\phi)\mathrm{d}\phi} \qquad \text{(Factoriser dans les intégrales)}$$

Utilisons la table d'intégrale suivante pour évaluer l'intégrale sur ϕ :

$$\int \sin^3(x) dx = \frac{1}{12}\left(\cos(3x) - 9\cos(x)\right)$$

Nous obtenons le résultat suivant pour l'intégrale sur ϕ :

$$I_\phi = \int_{\phi=0}^{\pi} \sin^3(\phi)\,\mathrm{d}\phi \qquad \text{(Intégrale à évaluer)}$$

$$\Rightarrow \quad I_\phi = \left[\frac{1}{12}\left(\cos(3\phi) - 9\cos(\phi)\right)\right]_0^{\pi} \qquad \text{(Appliquer la table d'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad I_\phi = \frac{1}{12}\left[\cos(3\phi)\right]_0^{\pi} - \frac{9}{12}\left[\cos(\phi)\right]_0^{\pi} \qquad \text{(Séparer termes à évaluer)}$$

$$\Rightarrow \quad I_\phi = \frac{1}{12}\left(\cos(3\pi) - \cos(0)\right) - \frac{9}{12}\left(\cos(\pi) - \cos(0)\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad I_\phi = \frac{1}{12}\left((-1) - (1)\right) - \frac{9}{12}\left((-1) - (1)\right) \qquad (\cos(\pi) = \cos(3\pi) - 1 \ \text{ et } \ \cos(0) = 1)$$

$$\Rightarrow \quad I_\phi = \frac{-2}{12} + \frac{18}{12} \qquad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_\phi = \frac{4}{3}} \qquad \text{(Calcul)}$$

Revenons à notre intégrale initiale et évaluons l'inertie totale :

$$I = \rho \int_{R=0}^{R_s} R^4\,\mathrm{d}R \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\phi=0}^{\pi} \sin^3(\phi)\,\mathrm{d}\phi \qquad \text{(Expression précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \rho \int_{R=0}^{R_s} R^4\,\mathrm{d}R \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\frac{4}{3}\right) \qquad \text{(Résultat intégrale sur } \phi \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{4}{3}\rho\left(\int_{R=0}^{R_s} R^4\,\mathrm{d}R\right)\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) \qquad \text{(Factoriser 4/3, séparer intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{4}{3}\rho\left[\frac{R^5}{5}\right]_0^{R_s}\left[\theta\right]_0^{2\pi} \qquad \left(\text{Résoudre sur } R \text{ et } \theta : \int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{4}{3}\rho\left(\frac{R_s^{\,5}}{5}\right)(2\pi) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

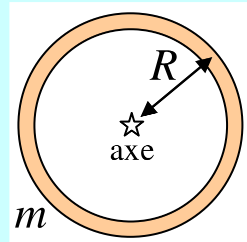
$$\Rightarrow \quad I = \frac{4}{3}\left(\frac{3m}{4\pi R_d^{\,3}}\right)\frac{R_s^{\,5}}{5}2\pi \qquad \left(\text{Remplacer } \rho = \frac{3m}{4\pi R_d^{\,3}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{5}mR_s^{\,2} \quad \blacksquare \qquad \text{(Simplifier)}$$

Exercice

Exercice A : *Le moment d'inertie d'un anneau.* Un anneau mince et homogène de masse m et de rayon R tourne autour d'un axe, perpendiculaire à son plan, qui passe par son centre (voir schéma ci-contre). Monter que son moment d'inertie est donnée par :

$$I = mR^2$$

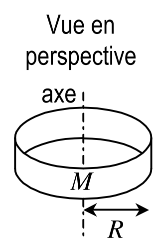


Solution

Exercice A : *Le moment d'inertie d'un anneau.*

<u>Densité linéaire :</u>

$$\lambda = \frac{m}{L} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{m}{2\pi R} \qquad \text{où} \quad L = 2\pi R$$



<u>Moment d'inertie infinitésimal :</u>

$$\mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m$$

et
$$\mathrm{d}m = \lambda R \,\mathrm{d}\theta$$
$$r = R$$

<u>Calcul :</u>

$$I = \int \mathrm{d}I = \int r^2 \mathrm{d}m \quad \Rightarrow \quad I = \int_{\theta=0}^{2\pi} R^2 \lambda R \,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(Remplacer } r = R \text{ et } \mathrm{d}m = \lambda R\,\mathrm{d}\theta\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \lambda R^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \qquad \text{(Factoriser constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \lambda R^3 [\theta]_0^{2\pi} \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \lambda R^3 \left((2\pi) - (0)\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\pi\lambda R^3 \qquad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\pi \left(\frac{m}{2\pi R}\right) R^3 \qquad \text{(Remplacer } \lambda = \frac{m}{2\pi R}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad I = mR^2 \quad \blacksquare \qquad \text{(Simplifier)}$$