

# 场外衍生品 - 雪球类产品的定价与对冲

## 1 基础知识

### 1.1 pinrisk

Def. 作为卖方，合约临近到期的时候，如果标的价格和合约行权价十分接近，如果是虚值期权Delta将接近于0，但一旦标的价格变动使得合约变为实值，那么Delta将变为-1，这个时候需要考虑Delta对冲来避免方向性损失，但是，国内市场的T+1制度又意味着在买入标的进行Delta对冲的时候也要承担至少一天的标的价格变动的风险（第二天才能卖），而不对冲又要承担Delta带来的损失。这种风险称为pinrisk

remark.从Greek上来看，pinrisk的来源是临近到期Gamma在平值附近集中所导致

### 1.2 平价公式

Thm.  $c - p = S - K * e^{-rT}$

proof. 通过BS公式可以得到call和put的显式解为：  $c = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$ 和

$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$ ，其中  $d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ ， $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ ，N表示标准正态上侧分位数，T表示剩余到期时间，二者做差即得

remark.

·通过平价公式可以计算IV，例如可以通过公式带入其他变量反推出r，然后带入BS公式反解IV

·平价公式右侧的K一项是将行权价在贴现到了现在，S则意味着市场的预期标的价格，通过跟标的真实价格对比也可以看出市场对标的的看法

·进一步，借助BS公式，考虑一个行权价为  $\frac{(Se^{rT})^2}{K}$  的put的理论价格，这个时候

$-d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K * e^{2rT}}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + 2rT - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ ，这和行权价为K的call显式解中的  $d_1$  一致，进一步将  $\frac{(Se^{rT})^2}{K}$  带入到put的定价公式可以得到一个call和put的换算关系：

$$c(K) = \frac{K}{Se^{rT}} p\left(\frac{(Se^{rT})^2}{K}\right)$$

这个结论的好处是可以直接将一些看跌结构的结论直接换算到看涨结构上

### 1.3 对冲误差

·理论上，定价和对冲操作无误的时候，总对冲误差期望=0

·单次对冲误差正比于Gamma，因为Gamma是Delta的导数，Delta对冲的时候假设未来的Delta保持现在水平，但是价格变动带来的Delta变化正比于Gamma，这一部分损失也就正比于Gamma

·单次对冲误差反比于对冲频率，因为对冲频率越高，对冲时间间隔越短，Gamma带来的Delta变化越小，越接近理论情况，对冲误差越小

·总对冲误差是关于标的价格路径依赖的

## 2 场外衍生品的设计流程

与场内衍生品的区别：对接客户，依赖客户需求

设计过程考虑可交易性：针对标的的特点设计衍生品

例如对于A股个股，无法做空，所以一般只能买看跌or卖看涨，做多可以对冲的结构

### 2.1 设计过程-根据客户需求

- 客户认为股票上涨的时候，作为卖方向客户卖出看涨，卖出波动率
- 客户认为股票涨跌幅有限，作为买方向客户买看涨/看跌，买入波动率
- 客户认为股票涨跌幅有限但是小涨，不满足于卖方的期权费收入，采取反向转股结构：客户卖出看跌，并买入一个看涨二元期权，盈亏平衡点更高，但是可能亏损更大  
券商承担二元期权的pinrisk
- 在上面一种情况中，进一步提高客户胜率，可以考虑设置敲出敲入条款，也就是雪球结构，但是券商会承担更大pinrisk

### 2.2 设计后-合规与风控

- 合规：对交易标的，指标的把控，前后台分离
- 风控：包括Greeks敞口控制，资金管理，pnl收入来源分析
- 系统支持规模化交易

## 3 雪球类场外衍生品

- 基本结构包含：  
标的证券，名义本金，期限，敲入敲出价格和频率，保证金比例和敲出票息
- 敲出：客户获得年化票息
- 敲入：客户等同于持有看跌期权
- 收益计算：  
雪球结构惟一亏损的情况是敲入未敲出的时候到期标的价格低于行权价，这个时候等同于卖出一个看跌期权合约的收益  
具体的收益计算如下：

雪球式	挂钩中证 500 的雪球式收益凭证年	
期限	12 个月（在敲出观察日可能提前敲出结束）	
挂钩标的	中证 500 指数	
敲出水平	期初价格 x103%	
敲入水平	期初价格 x85%	
敲出票息(同红利票息)	20%（年化）	
敲出事件（每月观察）	若在任何敲出观察日，挂钩标的收盘价格大于等于敲出水平	
敲入事件（每日观察）	若在任何敲入观察日，挂钩标的收盘价格小于敲入水平	
投资收益	敲出（自动提前终止）	敲出收益金额：20% x 名义本金 x 计息天数/365
	敲入且未敲出	$\min(\text{期末价格}/\text{期初价格}-1, 0) \times \text{本金}$
	未敲入未敲出	红利收益金额：20% x 名义本金 x 计息天数/365

资料来源：信达证券研发中心整理

remark.

- 最大亏损雪球：加入最大亏损限制的雪球，

特别地，最大亏损是0的时候称作小雪球

- Step-down雪球：敲出价随着时间推移的雪球
- OTM雪球：敲入的期权行权价为敲入价
- 早利雪球：票息随时间变化，越早的时间票息越高，降低晚些时间的票息
- 折价转股：敲入事件改为按照转股价买入股票，转变为线性结构
- 敲入重置：敲入后，敲出价下调，例如90%的期初价
- 降落伞：最后一期敲出价格下调为敲入价
- 凤凰：每次敲出观察时标的价格在敲入敲出价格的时候，会获得月度票息
- FCN：每次敲出观察获得一期月度票息
- 一触即发：票息固定，不随时间变化

## 4 雪球结构定价

雪球定价的思路是价格= $E(\text{discount} * \text{payoff})$ ，即所有损益折现到当前的期望，损益的计算已经在合约中很明确了，但对于每种情况发生的概率是未知的，且在标的价格满足几何布朗运动假设下欲求概率不一定有显式解，因此考虑数值方法来求解

### 4.1 蒙特卡洛方法

蒙特卡洛通过模拟N条标的价格的路径并将所有路径对应的payoff折现到当下求期望进而得到，当N很大的时候，大数定律保证期望会趋近于理论价格，具体来说标的价格的生成路径递推公式为：

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}\right)$$

$\varepsilon$ 为服从标准正态分布的随机变量，之后计算每条路径的payoff

remark.

- 国内需要注意涨跌停的问题，但个人实证发现考虑和不考虑涨跌停在时间分割的足够细且路径数量够多的时候几乎没有差别
- 降低误差的方法：使用对偶随机变量 i.e. 每次生成路径的时候再使用 $-\varepsilon$ 生成一个对偶的路径

### 4.2 有限差分方法

假设期权价格 $V(t,s)$ ，x坐标t是时间，y坐标s是标的价格

时间上的差分方法有：

- 前向差分： $\frac{\partial V(i,j)}{\partial t} \approx \frac{V(i+1,j) - V(i,j)}{\Delta t}$
- 后向差分： $\frac{\partial V(i+1,j)}{\partial t} \approx \frac{V(i+1,j) - V(i,j)}{\Delta t}$
- 中央差分： $\frac{\partial V([(\theta + (1-\theta)(i+1)), j]}{\partial t} \approx \frac{V(i+1,j) - V(i,j)}{\Delta t}$

标的价格上使用中央差分：

$$\frac{\partial V(i,j)}{\partial S} = \frac{V(i,j+1) - V(i,j-1)}{2\Delta S}$$
$$\frac{\partial^2 V(i,j)}{\partial S^2} = \frac{V(i,j+1) + V(i,j-1) - 2V(i,j)}{\Delta S^2}$$

另一方面，在BS模型中，通过构建风险中性组合可以得到BS微分方程：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$$

将三种差分形式分别带入微分方程，可以得到三种不同的递推公式，进而可以递推出当前时刻不同标的价格对应的合约价格

除去递推形式推导比较复杂，有限差分的另一个问题在于边界设定问题，这个问题的解决思路是将雪球期权按照敲出、未敲入且未敲出和敲入未敲出三类分解为三部分，前二者的边界条件很好确定，但要注意折现问题，重点在于如何处理第三种情况，或者说，怎样设定敲入事件的边界条件，对此考虑使用一组上涨失效看跌障碍期权（UOP）的空头和双边失效看跌障碍期权（DKOP）多头思路来复制，构建思路：

1. 首先在敲入不敲出的时候，我们希望组合收益等同于一个看涨期权空头，因此应该包含一个敲出价下为一个看涨期权空头的合约，因此考虑在组合中加入一个UOP的空头，但是如何抵消掉敲出时的票息支付？
2. 所以再在组合中加入一个DKOP多头，这样在敲出or未敲入敲出的时候二者可以抵消费用，组合价值为0

这样的组合可以复制敲入事件时的收益，且两种合约的边界条件都比较好设定将敲出、未敲入且未敲出和敲入未敲出三类对应的复制期权价格加总（因为互为独立事件）得到雪球的最终价格

remark.有限差分的好处在于可以直接得到当下各个标的价格对应的合约价格，和MC方法相比Greek的计算更方便，但是实现比较复杂，细节比较多（自己尝试写了一下得到的结果和MC的定价结果还是有些差距，理论上应该差别不大）

## 4.3 票息计算

### 4.3.1 计算

通过不断改变票息带入模型（一般用蒙特卡洛），可以得到一个合约价格关于票息的函数 $V(C)$ ，进一步可以通过数值方法求出理论票息i.e. $V(C) = 0$ 的解

方法一：二分法

方法二：牛顿法

remark.

·考虑反息的时候(例如1%的时候)，可以求解 $V(C) = -$ （返息率）的解作为最终结果

·考虑基差为负：基差为负的时候可以将基差视为一种连续分红，在无风险 $r$ 原来的基础上加上一个年化基差 $b$ 作为新的无风险利率带入模型

#### 4.3.2 估算

·如果假设其他变量固定，票息外生，不受模型内其他因素影响，那么票息可以认为和合约价格线性（实际上写出期望的公式就可以看出） $V(C) = aC + b$ ，那么可以选取两个点之后求出直线再求出根

·从 $V(C) = 0$ 的角度出发，另一种估算思路是从

年化票息 \* 敲出概率 \* 平均敲出时间 = 平均敲入亏损 \* 敲入概率

这个思路出发解出理论票息，除去理论的年化票息外其他几个量都可以通过蒙特卡洛方法得到

#### 4.3.3 敏感性分析

从4.3.2的第二种估算方法可以分析出敲入敲出价格对票息的影响：

·敲入价对雪球的影响

敲入价越低，平均敲出时间会越长，平均敲入亏损增加，敲入概率越小

进一步票息逐渐减少且减少速率逐渐增大

·敲出价对雪球的影响

敲出价越高，合约越不容易敲出，增大了敲入概率和平均敲出时间，估算公式中分子分母都变大，票息变化不单调而是会有一个峰值

·最大亏损的影响

最大亏损越大，平均敲入亏损越大，票息越高，但是票息增加的速率逐渐变小

·期限的影响

标的为个股的时候，期限增加导致的票息变化不单调，有一个峰值（无穷远处股价会涨的很高，参考BS公式中的漂移项，导致平均敲出时间增加，票息减少）

标的为指数等有基差的产品时候，期限增加导致票息单调增加，且趋于平缓（分红增加了敲入概率）

#### 4.4 Greeks

雪球的Greeks一般通过有限差分来计算（MC需要跑很多次），具体计算方式为：

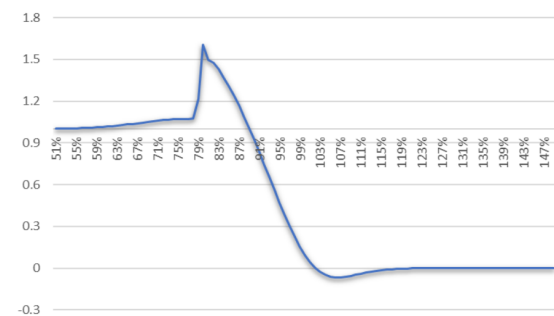
$$Delta = \frac{V(S + \delta S) - V(S - \delta S)}{2 * \delta S}$$

$$Gamma = \frac{V(S + \delta S) + V(S - \delta S) - 2V(S)}{(\delta S)^2}$$

$$Vega = \frac{V(\sigma + \delta \sigma) - V(\sigma - \delta \sigma)}{2 * \delta \sigma}$$

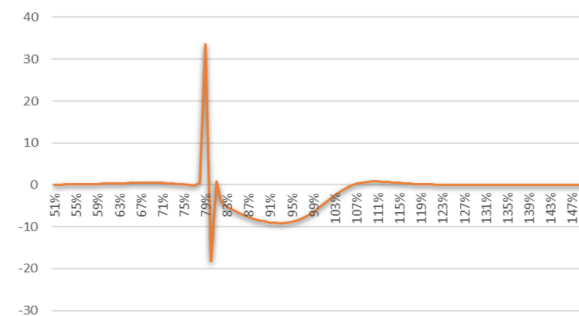
以3中的雪球合约为例，greeks结果：

图 13: 雪球结构 Delta 分布图



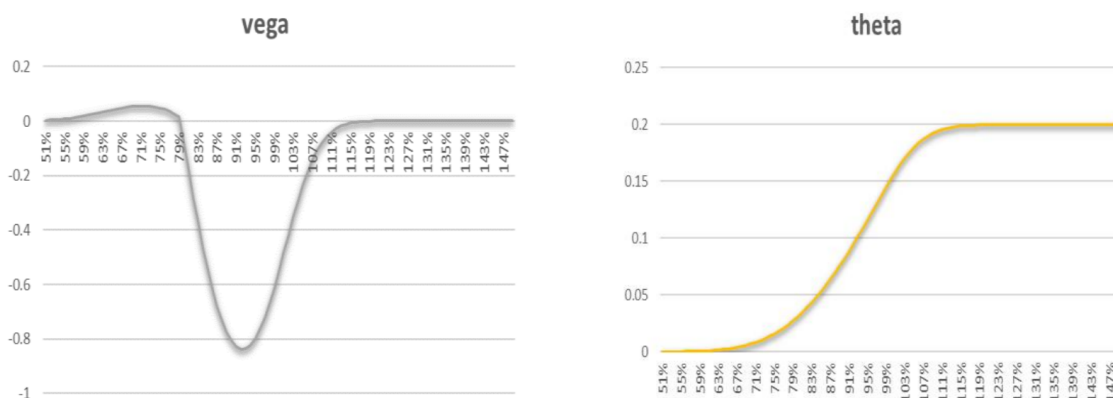
资料来源:wind 信达证券研发中心

图 14: 雪球结构 Gamma 分布图



资料来源:wind 信达证券研发中心

图 15: 雪球结构 Vega 与 Theta 分布图



资料来源:wind 信达证券研发中心

可以看出雪球的Theta和香草期权有所区别:

- Delta可以大于1，尤其在敲入价格附近的Delta是大于1的，这是由于敲入事件会导致对期权合约的估值影响较大，所以敲入价附近的期权价格对标的价格变化会很敏感，导致Delta很高，带来了很高的pinrisk，对冲操作会考虑把敲入价平移到较低水平来对冲
- Vega和香草期权形态相反，从合约内容上来看也是直观的，这表明雪球比较适合低波动率的市场，同时也表明雪球也是对冲Call的Vega的一种手段
- Theta在敲入前后变化很大

## 4.5 对冲

- 使用标的对冲的话，例如指数，并非直接对冲Delta，而是先用现货价格计算CashDelta然后用等同金额的期货对冲
- 敲入时点的对冲在低流动性环境下的市场的冲击可能较大，例如对于期货会带来基差变化
- 考虑一个雪球和Call相反方向的持仓组合：  
可以用雪球来对冲Call的Vega，但是只可以一定程度上  
Call可以抵消雪球的Theta亏损  
Call无法对冲雪球的pinrisk，因为在敲入价附近Call的Delta会接近0  
敲出越晚or敲入越早，pinrisk越高，对pnl影响越不利

参考文献:

- 信达证券-信达证券场外衍生品研究系列之一：雪球结构定价与风险深度分析

