

黑天鹅行情下的波动率交易Alpha

几乎处处学不会

01/07/24

1 概述

期权作为一种非线性产品，相较于标的，有更多的维度可以交易，其中最重要的一个维度就是波动率，包含实现波动率和隐含波动率，最常见的例子是Delta中性的双买/卖组合。以往的研究指出，波动率交易的Alpha来源指的是方差溢酬，但并未有其他Alpha的讨论，且缺乏定性讨论。基于此背景，笔者首先介绍了方差溢薪和方差掉期，之后聚焦黑天鹅行情，以沪深300etf期权及中证500etf期权为对象，验证了《期权波动率交易的ALPHA研究》¹一文中提出的黑天鹅行情下的六种Alpha，对波动率交易的Alpha进行定量讨论。

2 基础概念

2.1 方差溢酬

方差溢酬是波动率交易的重要Alpha之一，其定义为：真实方差在自然概率测度和风险中性概率测度下的条件期望之差，即：

$$VRP_{t,T} = E_t^P(RV_{t,T}) - E_t^Q(RV_{t,T}) = RV_{t,T} - IV_{t,T}$$

在BSM模型中，股价服从GBM（dZ为标准布朗运动）：

$$\frac{dS}{S} = \mu_t dt + \sigma_t dZ$$

由Ito公式对衍生品 $C(S, t)$ 有： $\Delta C = \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t$

注意到一份Delta中性的组合为 $\Pi = \Delta C - \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S$ ，因此：

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t$$

在BSM模型假设成立条件下，令分红 $q=0$ ，则：

$$\Gamma = \partial^2 C / \partial S^2 = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} N'(d_1)$$

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)} N(d_2)$$

注意到 $rKe^{-r(T-t)} N(d_2)$ 足够小，略去，则有： $\Theta \Delta t \approx -\frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \Gamma \Delta t$ ，进一步可以在 Π 中进行替换得到：

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t \\
&\approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (\Delta S)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma_{\text{imp}}^2 \Delta t \\
&\approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \left[\left(\frac{\Delta S}{S} \right)^2 - (\sigma_{\text{imp}} \sqrt{\Delta t})^2 \right] \\
&\approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 [RV_{t,t+\Delta t} - IV_{t,t+\Delta t}]
\end{aligned}$$

于是当IV大于RV的时候，即波动率被高估的时候，做空 Π 获得收益，反之做多获得收益。实际上后文会指出，从实证角度，前者属于长期现象。

2.2 方差掉期复制和VIX

2.2.1 方差掉期价格估计推导

对于实现波动率，我们可以使用HV即标的n日年化标准差来衡量，但对于IV一侧，由于偏移现象的存在，单独选取任何位置的合约作为市场对实现波动率的预期都是不全面的，因此我们要找到这样一个指标，它独立反应了整体市场对实现波动率的预期，且波动率敞口和股票价格无关，这个指标就是方差掉期，现实计算为Vix指数。

一份方差掉期的payoff为： $\pi = N(\sigma_R^2 - \sigma_K^2)$ ，N为名义方差， σ_K 为约定的交割方差，这两个值是约定好的，而 σ_R 为现实中的实现波动率。

同2.1假设股价服从GBM，由Ito公式有：

$$d\ln S = \left(\mu_t - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \sigma_t dZ$$

移项并利用dS消掉dZ： $\frac{dS}{S} - d\ln S = \frac{1}{2} \sigma_t^2 dt$

两侧做0到T的定积分并除以T，有： $\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^T \frac{1}{S} dS - \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \right]$

左侧为实现方差的加权平均，将之作为对 σ_R^2 的估计，因此方差掉期的价格估计落在了求右侧部分的期望即

$$\pi = \frac{2}{T} E \left[\int_0^T \frac{1}{S} dS - \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \right]$$

第一项 $\int_0^T \frac{1}{S} dS$ 等同于持有1/S份股价为1元的标的在T期的payoff，由无套利原则：

$$E \left[\int_0^T \frac{1}{S} dS \right] = rT$$

对于第二项，为了复制这份对数合约，引入行权价 S^* ：

$$-\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) = -\ln \left(\frac{S^*}{S_0} \right) - \ln \left(\frac{S_T}{S^*} \right)$$

右侧第一项为常数，而注意到对于一个权重为 $1/K^2$ 的OTM组合：

$$\begin{aligned} & \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P(S_T, K) dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(S_T, K) dK \\ &= \int_{S^*}^{S_T} \frac{1}{K^2} (S_T - K) dK = \left(\frac{S_T - S^*}{S^*} \right) - \ln \left(\frac{S_T}{S^*} \right) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} -E \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \right] &= -\ln \left(\frac{S^*}{S_0} \right) - \frac{S_0 e^{rT} - S^*}{S^*} + \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{rT} P(K, 0) dK \\ &\quad + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{rT} C(K, 0) dK \end{aligned}$$

取 S^* 为当前价格 S_0 ，整理得到：

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{2}{T} \left[rT - (e^{rT} - 1) + e^{rT} \int_0^{S_0} \frac{1}{K^2} P(K, 0) dK \right. \\ &\quad \left. + e^{rT} \int_{S_0}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(K, 0) dK \right] \end{aligned}$$

2.2.2 Vix指数

将方差掉期的计算离散化就得到了Vix指数，Vix的计算如下：

在计算VIX之前，我们首先定义某期限下的期权合约的方差为：

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2$$

其中T为有效期限，F为从指数价格计算出来的远期价格， K_0 为低于F的第一个行权价，之后 K_i 为虚值期权的行权价， $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$ 为执行价间隔，R为无风险利率， $Q(K_i)$ 为行权价为 K_i 的买卖中间价格。

可以看出，第一项为2.2.1中积分项的离散化，后一项为 S^* 取F的时候对剩余部分的近似。通过这个公式可以计算出近月合约方差 σ_1^2 与 σ_2^2 ，之后有：

$$VIX = 100 \sqrt{\left\{ T_1 \sigma_1^2 \left[\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] + T_2 \sigma_2^2 \left[\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] \right\} \times \frac{N_{365}}{N_{30}}}$$

N_{30} or N_{360} 为为30/360天的分钟数， N_{T_1} 为近月期权距到期日的分钟数， N_{T_2} 同理，可以看出VIX为近月和次近月的期权合约方差的加权平均。

将计算公式分解来看，需要分成几部分：

·T的计算

$$T = \frac{M_{current} + M_{settlement} + M_{other days}}{Minutes in a year}$$

$M_{current}$ 为当天距24:00的分钟数， $M_{settlement}$ 指结算日结算时间到24:00的分钟数， $M_{other days}$ 为当天到结算日的总分钟数

·远期期权价格F计算

$$F = K_0 + e^{RT} (Q(K_{0,C}) - Q(K_{0,P}))$$

这里的 K_0 为平值期权的行权价， $(Q(K_{0,C}) - Q(K_{0,P}))$ 为平值的认购认沽合约报价差，注意，在计算得到F后需重新决定计算 σ^2 要用到的 K_0 （低于F一档的行权价，对于call option，选择大于F的；put option则反之）

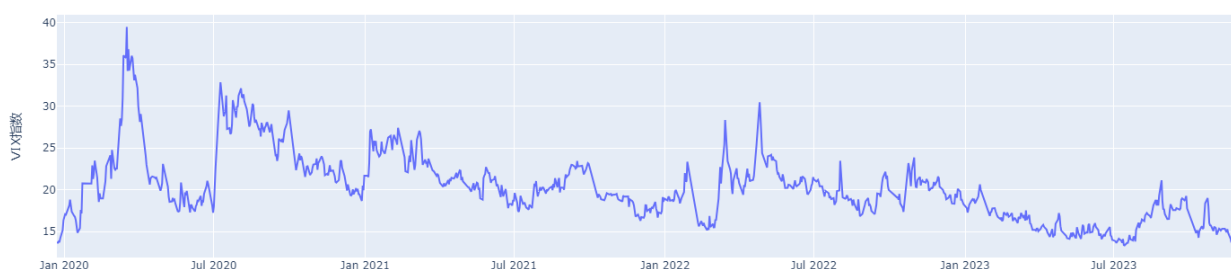
· ΔK_i 的计算

中间期权合约的 ΔK_i 为 $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$ ，对于两侧（最低最高价）的期权合约则不用除以2
i.e. $\Delta K_i = K_i - K_{i-1}, i = 2, N$

· $Q(K_i)$ 的计算

$$Q(K_i) = (Q(K_{i,ask}) + Q(K_{i,bid}))/2$$

以300etf为例子，用日线计算得到的vix为：

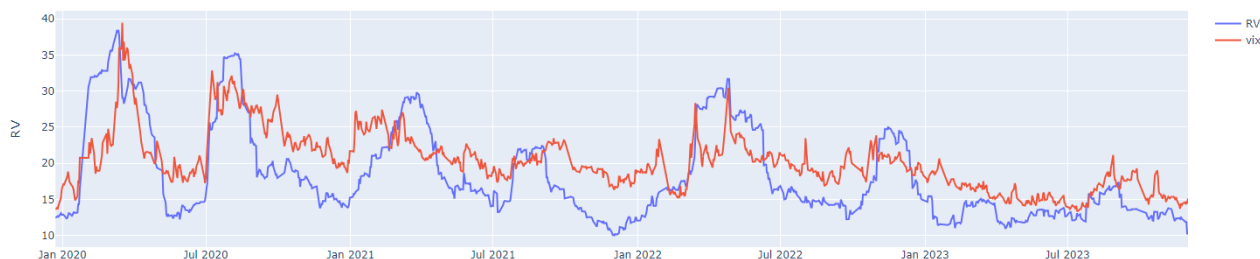


3 黑天鹅行情下的6个波动率交易Alpha

“黑天鹅”行情是指波动率出现连续的跳跃上涨的行情，也就是行情波涛汹涌的日子。《期权波动率交易的ALPHA研究》指出，在这种情况下，波动率交易的ALPHA主要有6个，分别是IV均值回归性、波动率交易止损的优势、IV偏度的均值回归性、IV脉冲上涨缓慢下跌的特性、突发事件发生时近月IV变化较大的特性、IV的非对称性，接下来我们将分别对Alpha进行验证和改进，最后提出波动率均值回归性、iv曲面移动、iv曲面形变、脉冲效应、期限alpha和非对称性6个alpha。

3.1 波动率的均值回归性

波动率相较于标的，具有更强的均值回归性，这种强均值回归性质使得当波动率处于历史极端值（即黑天鹅行情）的时候，我们可以建立对应组合，赚取其回归均值时的收益，而均值回归性在这个过程中提高了胜率。本文中，我们选取 $IV/RV = Vix/HV30$ （称为 irRatio）作为指标，这里的原因是，在波动率交易中，如果我们做多波动率，我们希望RV尽量大，时间价值流逝（Theta）尽量小，隐波提升提供收益增量，这就意味着IV增大，此时irRatio增大；而当做空波动率的时候，则反之，此时irRatio减小。由此可见，irRatio为波动率交易提供了一定的参照，选取合理。先以300etf为例子，vix、HV30和irRaio走势如图：



对比可看出前文论述成立，另外，irRatio比vix和HV30具有更强的均值回归性，ADF单位根检验结果为：

```
300etf irRatio ADF检验结果：
adf: -4.383630784063153
p-value: 0.0003172710859543139
critical values: {'1%': -3.4372448882473177, '5%': -2.86458394997689, '10%': -2.5683907715382888}
300etf vix ADF检验结果：
adf: -3.8315312193473194
p-value: 0.00260069290661517
critical values: {'1%': -3.4372303791313144, '5%': -2.864577551835195, '10%': -2.568387363624452}
300etf RV ADF检验结果：
adf: -3.9166895393717724
p-value: 0.0019153973635907973
critical values: {'1%': -3.437281430175827, '5%': -2.864600638781532, '10%': -2.5683993544869015}
```

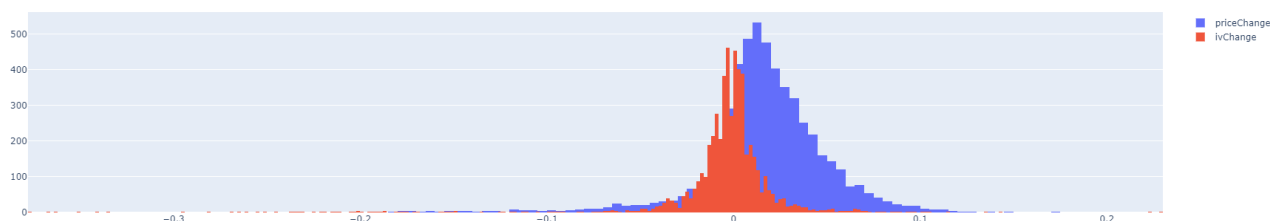
虽然HV30和vix在5%水平上显著，但irRatio在1%水平上显著，具备更强的均值回归性。综上可以看出，波动率的均值回归性成立，且实现波动率和隐含波动率间也存在着均值回归，实际上，通过对irRatio进行描述性统计会发现，irRatio的均值在1以上，意味着隐含波动率长期来看是稳定大于实现波动率的，这也印证了2.1方差溢酬中提到的卖权优势理论。

对于中证500etf，其均值回归性不如沪深300etf，但是也在10%水平上显著，推测原因是由于上市时间段，数据量较小，导致结果不具备统计学意义，其均值回归性仍无法下定论。

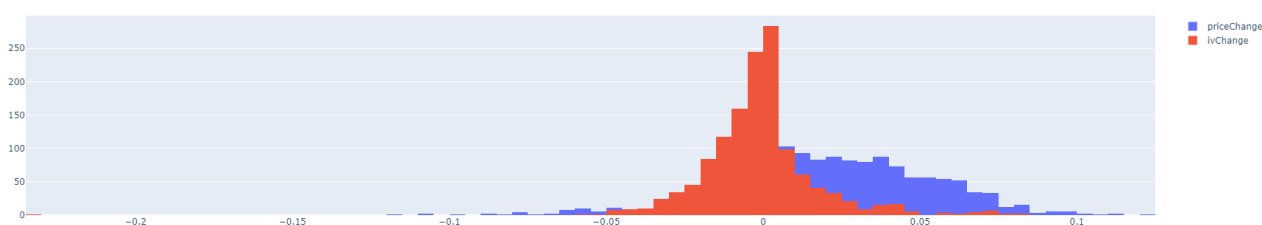
```
500etf irRatio ADF检验结果：
adf: -2.808723428030361
p-value: 0.05703845231207525
critical values: {'1%': -3.4535872903895797, '5%': -2.871771355211212, '10%': -2.5722217283277127}
500etf vix ADF检验结果：
adf: -2.5399761691745053
p-value: 0.10604812370355371
critical values: {'1%': -3.453922368485787, '5%': -2.871918329081633, '10%': -2.5723001147959184}
500etf RV ADF检验结果：
adf: -7.108242144826981
p-value: 4.001281569236933e-10
critical values: {'1%': -3.4540076534999957, '5%': -2.8719557347997178, '10%': -2.5723200648758366}
```

3.3 隐含波动率曲面移动

在期限和行权价水平上，隐含波动率都存在偏移现象，体现在所有的合约的IV构成的曲面不为平面，而随着时间推移，曲面会随之移动。如果我们关注曲面上的某一点，伴随曲面移动，它也会移动（当然也有概率是这个点不动曲面在动），如果移动是规律性的移动，那么我们可以由此建立对应组合赚取收益。这里选取一个具体的例子：在一个卖OTM组合中，当合约从OTM变为ATM的时候，对于OTM，其IV较高，而当其变成ATM时，我们会将其止损，此时IV较低，这样实现了IV的高卖低买。为此，首先以300etf为例，我们统计了所有当前为OTM一档，并且到期前变为ATM的合约的IV变化和价格变化：



IV近似服从一个均值在0以下的正态分布，这印证了前文的结论。然而价格变化均值在0以上，这表明空头平均收益为负数，这是由于我们只讨论了单侧空头，价格变化是Delta, Gamma, Vega, Theta, Rho等维度共同作用的结果，且可能这一过程时间较长，作用因素较多，因此IV这一部分的收益落实还需进一步构建组合进行回测来验证。中证500etf一侧的结果也是类似的：



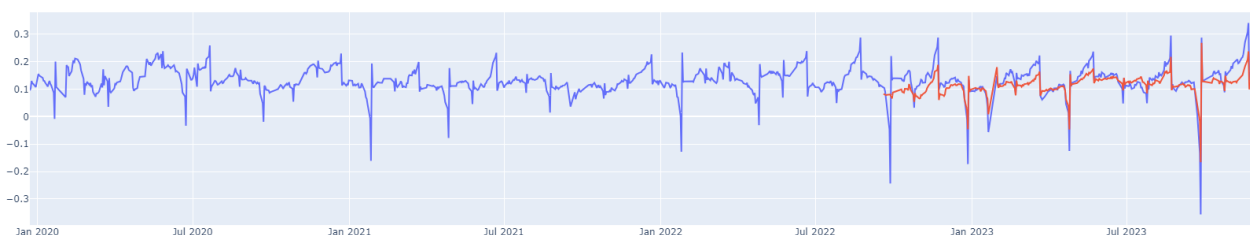
3.3 隐含波动率曲面形变-IV偏度的均值回归性

在3.2中，我们聚焦了曲面的移动的alpha，而另一个alpha维度是曲面形变，具体而言，IV偏度的均值回归性赋予了对偏度进行统计套利的可能，接下来我们将验证这一结论。

首先，首先对于偏度指数的计算，我们首先通过线性回归的方式（Call和Put取平均）计算了当月和下月合约的IV偏度，之后通过加权平均的方式来合成skew指数，即：

$$Skew = w * skew_{currentMonth} + (1 - w)skew_{nextMonth}, w = (T_{next} - 22)/(T_{next} - T_{current})$$

skew指数为（红线为300etf，蓝线为500etf）：



在此基础上进行单位根检验：

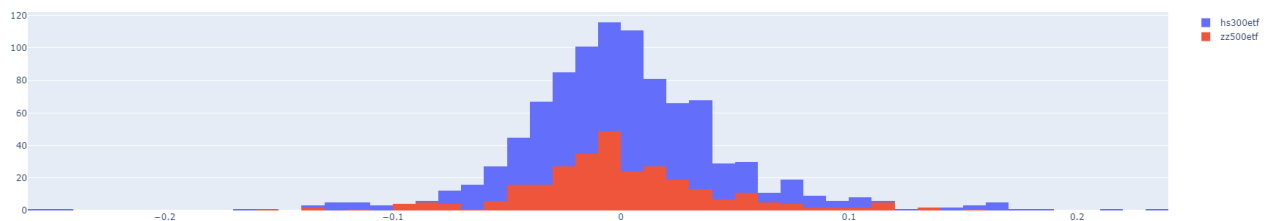
```
300etf skewidx ADF检验结果:
adf: -9.709776914926021
p-value: 1.018890789677984e-16
critical values: {'1%': -3.43722314744835, '5%': -2.8645743628401763, '10%': -2.5683856650361054}
500etf skewidx ADF检验结果:
adf: -6.000138201760269
p-value: 1.664925509687923e-07
critical values: {'1%': -3.4531816058796143, '5%': -2.871593390724642, '10%': -2.5721268156511536}
```

在1%水平上显著，二者均值回归性均十分显著。而观察到二者均值均在0以上，这表明偏移现象也是长期存在的，符合理论预期。

3.4 IV脉冲效应

IV脉冲上涨缓慢下跌的特征是指IV在短时间内迅速上升，而下跌时则较为缓慢。这一现象可能与期权市场的买卖活动有关。当宏观事件突然来临时，交易者开始不计成本买入期权进行投机操作，从而迅速拉升了期权的IV；当宏观消息慢慢被市场消化时，期权的IV开始缓缓下跌到长期均线附近。

这样的现象在统计学中的表现应为IV变化率呈现一个左偏分布，即skew小于0，这是由于快速上涨迅速下跌带来的直接结果就是，小幅跌和大幅涨在变化率样本中占比较高，因此，统计VIX的对数变化率，分布为：

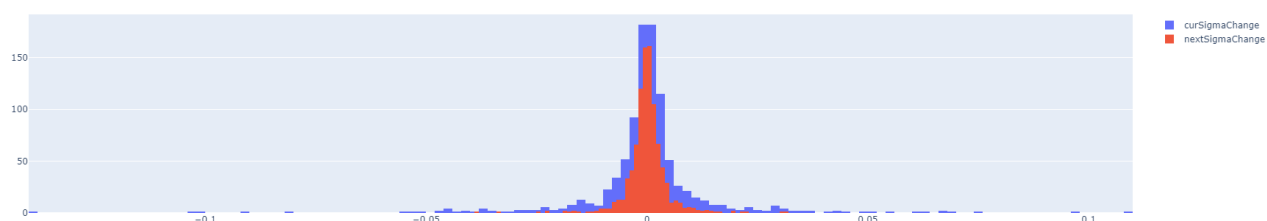


再通过计算得到，300etf的vix对数变化率skew小于0，验证了结论，而500etf一侧skew略大于0，其skew的均值回归性仍未有定论。

3.5 期限Alpha

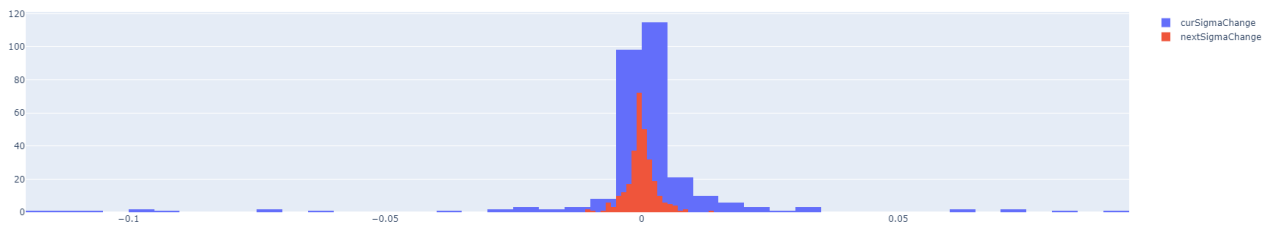
期限Alpha指的是，近突发事件发生时，近月IV会突然上升，远月IV也会上升，但是近月上升幅度更大，这种同一时间在不同期限上的不同效应笔者称之为期限Alpha。这是合理的，由于突发事件通常会引发市场不确定性的增加，这种不确定性会导致市场参与者购买更多的期权，以保护他们的投资。由于近月期权比远月期权价格便宜，而且保护效果更直接，故购买数量较多，这些会导致近月隐含波动率上升更大。

为了验证这一部分，我们统计了组成Vix的近月和远月波动率分别的变化分布以300etf为例：



可以看出，近月分布的方差更大，变化范围更广，符合理论。而对于500etf结论同样成

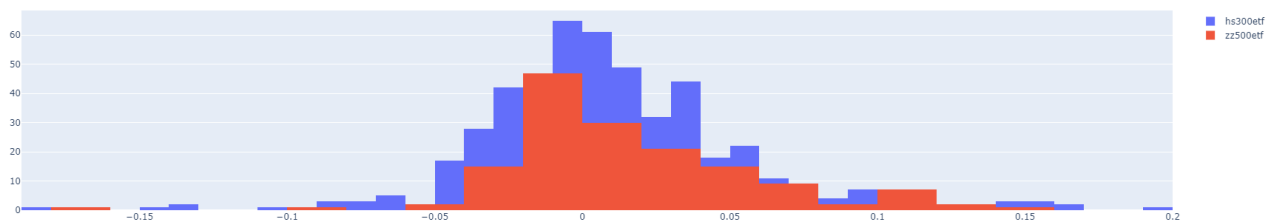
立：



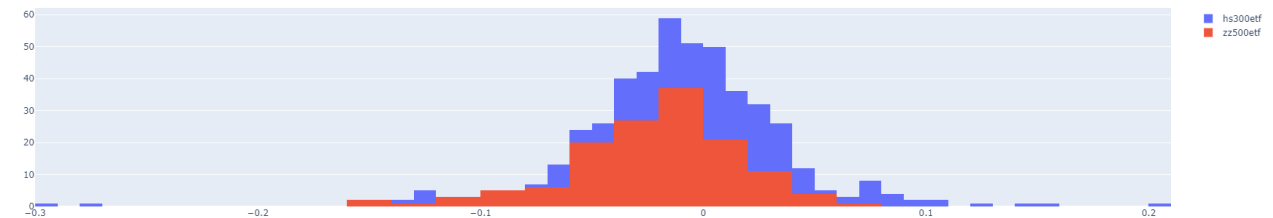
3.6 非对称性

波动率的非对称性是指金融市场中，价格上涨和下跌所带来的波动率不同。通常情况下，价格下跌所带来的波动率要比价格上涨所带来的波动率更大。波动率的非对称性存在的原因是市场参与者的心理因素。当市场价格下跌时，投资者往往会更加恐慌和惊慌失措，导致交易活跃度增加，市场波动率进一步上升。相反，当市场价格上涨时，投资者往往会更加冷静和理智，交易活跃度不会增加太多，市场波动率也不会大幅上升。

为了研究此Alpha，我们统计了标的上涨和下跌的时候对应Vix的变化率分布，其中下跌时候的分布为：



上涨时候的分布为：



可以看出，对比上涨和下跌时候，下跌的时候Vix变化分布更为几种，且集中在0附近，这表明非对称性存在，但结论和预想相反，即下跌的时候IV变化幅度会小于上涨的时候。

4 总结

本文首先介绍了方差溢酬和vix的基本概念，之后在此基础上以沪深300etf和中证500etf期权为对象，针对原来¹的黑天鹅行情下的6个alpha进行了改进与定量分析，最后分别给出对应结论。

5 参考文献

1. 期权波动率交易的ALPHA研究_期货日报网 (qhrb.com.cn)
2. 期权定价效率以及基于择时的做空波动率策略 (东证期货)
3. Reddit期权板块 AlphaGiveth

4. 波动率曲面：期权波动率建模实战指南 ([美]Jim Gatheral （吉姆·盖斯勒尔），陈思)