

Pair Trading

Def.1 配对交易 (pair trading) : 利用不同品种之间价格变化的相关性, 赚取相对价值强弱的方式, 具体来说, 当两个标的之间有强烈的正相关 (负相关) 的时候, 且对于未来走势有一个预期的时候, 可以通过双买or卖 (一买一卖的) 的方式来赚取不同品种之间的涨跌差异

Def.2 $\Delta = \partial P / \partial S$, 其中P为期权价格, S为股票价格, 从这个角度来看Delta描述的是标的每变化1块钱的时候期权合约价格变化多少单位钱, 所以他描述的是一种绝对变化

然而, 我们在现实中更关注的并非价格变化的值, 而是价格变化的幅度, 例如, 收益率。比较直观的解释就是一个1块钱的标的涨1块钱和一个1000块钱的标的涨1块钱显然对于投资者来说是不同的

在同一标的下, 保持收益率中性只需组合的Delta值总和为0 i.e. Delta中性即可, 因为价格一致导致标的价格变化带来的期权合约价格变化与Delta呈线性, 故Delta中性=收益率中性

但在pair trading中, 是不同标的的不同合约, 这意味着即使两合约Delta相等, 他们的标的价格不同, 导致标的价格同样波动1% (注意, 是百分比) 所带来的期权合约价格不再线性, 我们无法通过Delta中性来保证收益率中性, 也就需要引入新的概念Delta Cash

Def.3 $\Delta Cash = \text{Stock Price} \Delta M n d$
其中M为合约乘数 n为仓位 d为方向 (认购or认沽)

以A标的和B标的的合约对冲为例, 因此新的中性判准应当是, $\Delta Cash_A = \Delta Cash_B$, 特别地, 当(合约乘数 持仓)一致的时候中性条件简化为 $\text{Stock Price}_A \Delta_A = \text{Stock Price}_B * \Delta_B$

remark.实际上Delta Cash是一种度量方式之间的变换, 合约价格关于股票价格的弹性 $\epsilon = \frac{\partial P / P}{\partial S / S} = \frac{\%}{\% \text{ measure}}$, 而 $\Delta Cash = S * \partial P / \partial S = \epsilon * P$, 于是可以看出Delta Cash意味着标的价格每变化1%的时候, 期权合约价格变化了多少钱, 可以说Delta Cash沟通了两种度量方式之间的变化关系

更直觉的来看, 当标的价格变化%1时候, 标的价格变化了 $P * \% \Delta$

通过Delta Cash我们可以通过标的的收益率来计算期权价格的绝对变化, 收益率又可以统一不同的标的 (A标的涨1块钱和B标的涨一块钱可能在投资者看来不同, 但在A标的和B标的的属性类似甚至价格走势有相关性的时候, A标的和B标的波动1%在投资者看来是相同的变化), 因此可以看出, Delta Cash更方便进行期权的配对交易

进一步地我们定义Delta Percentage(Delta%)为：

$$\text{Def.5 Delta\%} = \text{Delta} * \frac{\text{Stock Price}}{\text{Strike Price}} / 100$$

注意到不同于Delta Cash，Delta乘以的是标的现价和行权价的比例。Delta%的反映了购买1张期权合约的收益，它的好处就是可以直接用购买时的资金乘以Delta%算出当下的Delta Cash，方便进行后续的对冲操作

类似于Delta Cash，我们也有Gamma Cash：

$$\text{Def.4 Gamma Cash} = S^2 \text{ Gamma } M n d$$

我们知道 $\gamma = \partial^2 P / \partial S^2$ ，所以

$$S^2 * \gamma * M * n * d = S * (S * \gamma) * M * n * d = S * \text{Delta} * \epsilon_{\gamma, \text{Delta}} * M * n * d = \text{Delta Cash} * \epsilon_{\gamma, \text{Delta}}$$

remark. 可以看出Gamma Cash将标的的收益率变化和Delta Cash的绝对变化沟通了起来，但实际上，Gamma Cash所刻画的Delta Cash变化会有偏差，且标的波动越大偏差越大，这是由于，在Delta变化的同时stock price也在变化，所以在等式两边直接乘以S将会产生 $\text{Delta} * \Delta S$ 的偏误，当标的波动幅度较小的时候这个偏误可以忽略，但随着波动增加，误差累积将不再可以忽略

$$\text{Def.5 Vega Cash} = \text{Vega} / 100 M n d$$

$$\text{Def.6 Theta Cash} = \text{Theta} / 360 M n d$$

这两个Cash没有乘以价格是为了波动率和时间我们一般不以%来讨论