Delta 对冲策略、离散对冲与摩擦成本

几乎处处学不会

新年快乐！

1 风险中性定价公式

考虑一个欧式认购期权合约，其剩余期限 T，合约价格 $C_i = C(t, S_t)$，标的价格 S_t，对 T 划分使得 $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$，记 $\delta t = t_{i+1} - t_i$，t 时刻的价格为 S_t，则 C_i 的价格为 $C(t, S_t)$。对于一个对冲策略，使用 $\Delta_i = \delta(t_i, S_i)$ 份标的来对冲如上合约多头（我们暂时不假定其为 BSM delta），于是在 t_0 时刻组合价值为 $C_0(Option) - \Delta_0 S_0(Stock) + \Delta_0 S_0(Cash) = C_0$，这份组合的价值在 t_1 时刻为 $C_1 - \Delta_0 S_1 + \Delta_0 S_0 e^{r\delta t}$，由于时间的变化，我们需要调整 Δ_0 为 Δ_1，使得组合依旧保持 Delta 中性，这意味着我们需要额外做空仓位为 $\Delta_1 - \Delta_0$ 的标的，对应现金头寸也需调整，于是最终的组合价值为：

$$C_1 - \Delta_1 S_1 + \Delta_0 S_0 e^{r\delta t} + (\Delta_1 - \Delta_0) S_1$$

进一步，在 t_2 时刻，组合价值为：

$$C_2 - \Delta_1 S_2 + \Delta_0 S_0 e^{2r\delta t} + (\Delta_1 - \Delta_0) S_1 e^{r\delta t}$$

以此类推，我们可以得到在 t_n 时刻，组合价值为：

$$C_n - \Delta_n S_n + \Delta_0 S_0 e^{nr\delta t} + \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k - \Delta_{k-1}) S_k e^{(n-k)r\delta T}$$

令 n 趋于无穷，我们可以得到组合价值为（注意 0 作为下界）：

$$C_T - \Delta_T S_T + \int_0^T S(t) e^{r(T-t)} d(\Delta(t))$$

在市场符合无套利原则的情况下，组合现在的价格应该等于组合在未来的价格的贴现值，即：

$$V = e^{-rT}(C_T - \Delta_T S_T + \int_0^T S(t) e^{r(T-t)} d(\Delta(t)))$$

注意到

$$d(e^{r(T-t)} S(t)\Delta(t)) = -re^{r(T-t)} S(t)\Delta(t)dt + e^{r(T-t)}\Delta(t)dS(t) + e^{r(T-t)} S(t)d(\Delta(t))$$

代入积分中后整理，我们可以得到：

$$V = e^{-rT} C_T - \int_0^T e^{-rt}\Delta(t)(dS(t) - rS(t)dt)$$

如果标的价格服从一个 GBM 过程，我们可以得到：

$$V = e^{-rT} C_T - \int_0^T e^{-rt}\Delta(t)\sigma S(t)dW(t)$$

于是有 $\mathbf{E}[V] = e^{-rT}\mathbf{E}[C_T]$（风险中性定价公式），V 是我们以一个初始价值为 C_0 的组合，保持 Delta 中性后得到的一个组合在 t_0 时刻的价格，它的期望等于认购合约在到期日的价格期望的贴现值，这意味着只要标的价格符合几何布朗运动（drift 为 r），那么这个期望和对冲策略是无关的，换言之，即使不对冲，期望依旧不变。如果我们选择对冲份额为 BSM Delta$\frac{\partial C}{\partial S}$，那么 V 将恒等于合约在 t_0 时刻的价格（可以取两侧微分验证），此时意味着对冲策略复制了此认购合约。

2 对冲策略 1：按实现波动率对冲

2.1 对冲策略 1 的方式

在第一部分中，我们并未给定一个对冲策略 $\Delta(t)$，在这一章中，我们首先考虑以实现波动率对冲的策略：市场按照波动率 σ_i 给出价格 $V^i(t)$，这个 σ_i 是伴随时间变化的，而在 t_0 时刻，我们能对 T 时刻的实现波动率有一个精准的估计 σ_r（实际上做到这一点会有一定难度），并且我们认为预期的 RV 会高于现在的隐波（$\sigma_r > \sigma_i$），也就是市场此时低估了波动率，而所谓"精准"的意思是，T 时刻满足 $\sigma_r = \sigma_i$。我们按照 σ_r 给出的价格 $V^r(t)$ 进行对冲，这意味着在 t 时刻：

1. 持有一份期权多头，价格为 $V^i(t)$
2. 做空 $\Delta^r(t)$ 份标的
3. 剩余资金头寸为 $\Delta^r(t)S_t - V^i(t)$

在上面我们用上标 i 和 r 分别表示市场给出的隐含波动率和我们估计的实现波动率，实现波动率一旦在 t_0 时刻做出预测后不变，而市场隐含波动率则随交易发生变化，但实现波动率不变并不意味着对冲份额不变，因为剩余到期时间和标的价格等依旧在变化，所以 BSM DeltaΔ_r 依旧是关于 t 的函数。

2.2 对冲策略 1 的 pnl 现值

通过第一部分的推导，我们可以发现实际上按照 σ_r 来对冲等同于我们按照我们对波动率的预期复制一个新的期权合约，其初始价格为 $V^r(0)$，但市场给出的定价为 $V^i(0)$，于是不难想到最终的 pnl 应为 $V^r(0) - V^i(0)$。事实上，如果我们考虑组合从 t 时刻到 $t + dt$ 时刻的 pnl 变化 $dPnl(t)$，有：

$$dPnl(t) = dV^i(t) - \Delta^r(t)dS + r\left(\Delta^r(t)S - V^i(t)\right)dt$$

另一方面，在 BSM 框架下，复制得到的合约 $V^r(t)$ 关于对冲份额 $\Delta^r(t)$ 的变化应该满足：

$$dV^r(t) - \Delta^r(t)dS = r(V^r(t) - \Delta^r(t)S)dt$$

于是带入到 $dPnl(t)$ 中，我们可以得到：

$$dPnl(t) = e^{rt}d\left[e^{-rt}\left(V^i(t) - V^r(t)\right)\right]$$

进一步，最终的 pnl**现值** 应该等于每个时刻的 $dPnl(t)$ 贴现到现在的积分，即：

$$Pnl = \int_0^T e^{-rt}dP\&L(t) = \int_0^T d\left[e^{-rt}\left(V^i(t) - V^r(t)\right)\right] = \left[V^i(t) - V^r(t)\right]_{t=0}^T = V^r(0) - V^i(0)$$

等式最后应用了"精准"的定义，即 T 时刻 $\sigma_r = \sigma_i$。从上面的结果来看，这印证了我们之前的猜想：按照预期 RV 进行对冲的 pnl 等同于预期 RV 和合约当前 IV 分别给出价格的差值。通过 MC 模拟，我们可以验证这一点：

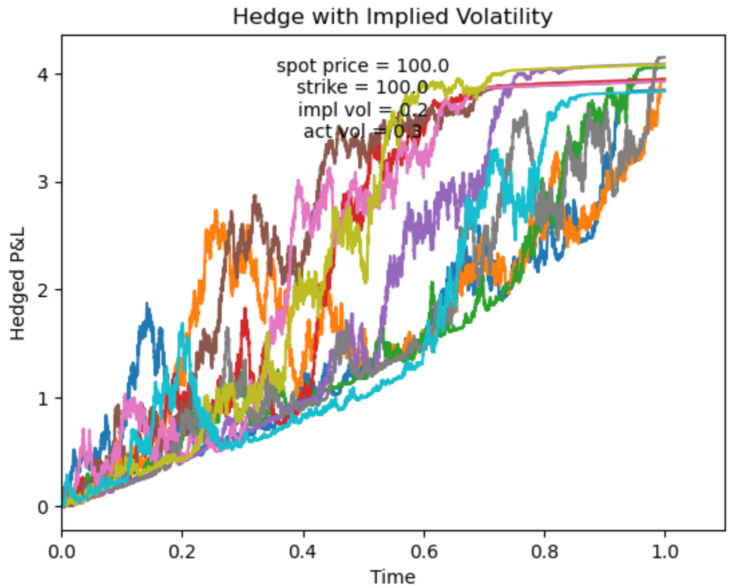

图 1: MC 模拟下对冲策略 1 的 pnl 现值

从上图中我们可以看到，在到期前对冲 Pnl 具有路径依赖性质，但最终 T 时刻的 Pnl 会收敛到一个定值，也就是我们之前推导的 $V^r(0) - V^i(0)$，究其根本原因在于对实现波动率预测的精准性，而在到期前，由于我们依旧使用对 T 时刻估计的 σ_r 来对冲，而当前 $\sigma_i(t)$ 并不等于 σ_r，所以此时 pnl 为 $[V^r(0) - V^i(0)] - e^{-rt}[V^r(t) - V^i(t)]$，所以 pnl 具有路径依赖性质。

我们还会观察到图像出现了一个下包络线，并且上侧有界。沿用前面的结论，在 t 时刻的时候 pnl 为：

$$Pnl(t) = [V^r(0) - V^i(0)] - e^{-rt}[V^r(t) - V^i(t)]$$

对于上界，显然为后一项为 0 的时候取到（因为 $\sigma_r > \sigma_i$），这要求 $S_t = 0$ 恒成立；对于下包络线，考虑对 $V^r(t) - V^i(t)$ 取关于 S 的导数，令导数等于 0 取得最小值（二阶导恒正性质由 Gamma 符号保证），这等同于令 $\Delta^r(t) = \Delta^i(t)$，在 BSM 框架下可以带入 Δ 表达式后得到关系：

$$S^* = K * e^{(\frac{\sigma_r \sigma_i}{2} - r)t}$$

进一步将得到的 $S^*(t)$ 带入 $V(t, S(t))$ 中可以得到下包络线。这条线表明，按照精准的实现波动率对冲至少会有一个正 Pnl，并且由前文最终 Pnl 会收敛到 $V^r(0) - V^i(0)$。

从另一个角度，如果我们应用 BSM 微分方程：

$$\Theta^i + \Delta^i r S + \frac{1}{2}\Gamma^i S^2 \sigma_i^2 = rV^i$$

和：

$$dV^i(t) = \Theta^i dt + \Delta^i dS + \frac{1}{2}\Gamma^i S^2 \sigma_r^2 dt$$

带入到 $dPnl(t)$ 中，我们可以得到：

$$dPnl(t) = \frac{1}{2}\Gamma^i S^2 \left(\sigma_r^2 - \sigma_i^2\right) dt + \left(\Delta^i - \Delta^r\right)\left[(\mu - r)Sdt + \sigma_r S dW\right]$$

可以看出，当 $\sigma_r > \sigma_i$ 时，$dPnl(t)$ 的第一项为正，这意味着我们的对冲策略可以通过 Gamma 盈利，但第二项不为 0，且为一个随机项，这意味着在 T 时刻前的对冲具有路径依赖性质，而当 T 时刻时，第二项为 0，第一项也为 0，这意味着最终 Pnl 会收敛到一个定值。

3　对冲策略 2：按隐含波动率对冲

然而正如前文所说，精准地预测实现波动率具有一定的难度，所以常常会使用隐含波动率来进行对冲，实际上这等同于在前文利用 BSM 微分方程时得到的 $dPnl(t)$ 中将 Δ_r 替换为 Δ_i，于是第二项随机项被消除，有：

$$dPnl(t) = \tfrac{1}{2}\Gamma^i S^2 \left(\sigma_r^2 - \sigma_i^2\right) dt$$

这意味着在任意微小时刻中的收益在符号上是非随机的，稳定的为正收益，然后注意到 Γ^i 是关于 S, t 等的函数，所以收益的大小依然具有路径依赖。同第二部分的原理，总收益的现值为：

$$Pnl = \tfrac{1}{2}\int_0^T \mathrm{e}^{-rt}\Gamma^i S^2 \left(\sigma_r^2 - \sigma_i^2\right) dt$$

通过 MC 模拟，得到结果为：

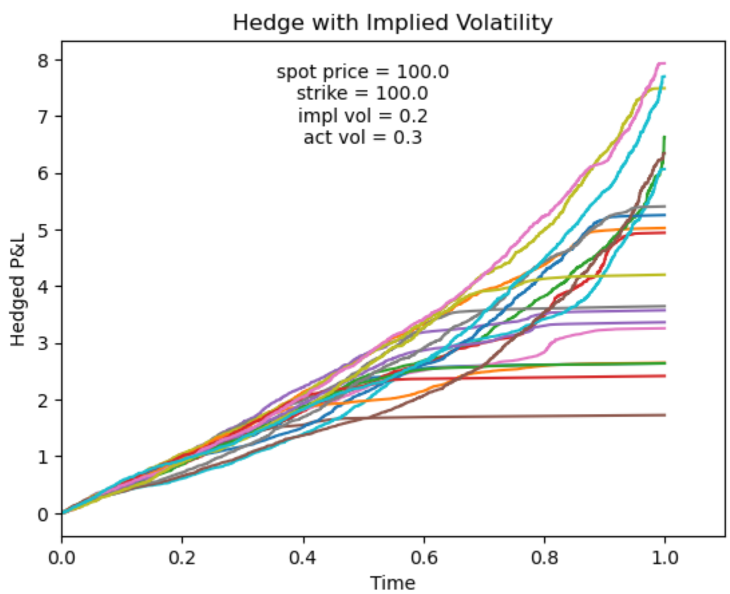

图 2: MC 模拟下对冲策略 2 的 pnl 现值

观察到部分曲线出现平的走势，这可能是由于股价过高导致 Gamma 过小，进一步 $dPnl(t)$ 趋近于 0 所导致的。

4　离散对冲的影响

在前面两部分中，我们都假设了对冲是连续的，在任意小 dt 时刻内都可以调整对冲份额，但在现实中是不可行的（手续费等摩擦成本），所以，在这一部分，我们将讨论在离散的时间点上对冲带来的影响。依旧考虑对冲一个认购合约多头的场景，我们持有 $\frac{\partial C}{\partial S}$ 份标的空头，组合价值为：$\pi = C - \frac{\partial C}{\partial S}S$，之后在 Δt 时间后，如果在连续对冲的假设下，组合时刻保持 Delta 中性，由无套利原则组合 Pnl 应为：$r\pi\Delta t$，然而在离散对冲的情况下，由于各种因素对交易频率的限制，我们在 Δt 时间内并未进行对冲，于是离散对冲情形下的组合 Pnl 为：$C(t+\Delta t, S+\Delta S) - \frac{\partial C}{\partial S}\Delta S - C$，进一步做差得到对冲误差：

$$\Delta HE = C(t+\Delta t, S+\Delta S) - \frac{\partial C}{\partial S}\Delta S - C - r\pi\Delta t = C(t+\Delta t, S+\Delta S) - \frac{\partial C}{\partial S}\Delta S - C - r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)\Delta t$$

由 BSM 微分方程，又 $C(t+\Delta t,S+\Delta S)=C(t,S)+dC$，有：

$$\Delta HE=\left[\frac{\partial C}{\partial t}-r\left(C-\frac{\partial C}{\partial S}S\right)\right]\Delta t+\frac{1}{2}\Gamma\left(\Delta S\right)^2$$

由于标的价格服从 GBM 过程，带入到上式中，由布朗运动性质只需保留 $\Delta W(t)^2$ 项，舍去其余高阶量，得到：

$$\Delta HE=\left[\frac{\partial C}{\partial t}-r\left(C-\frac{\partial C}{\partial S}S\right)\right]\Delta t+\frac{1}{2}\Gamma\sigma^2S^2\left(\Delta W(t)\right)^2$$

为了进一步简化，注意到对 BSM 微分方程移项后有：$\frac{\partial C}{\partial t}-r\left(C-\frac{\partial C}{\partial S}S\right)=-\frac{1}{2}\Gamma\sigma^2S^2$，于是等式前一部分可进行替换得到：

$$\Delta HE=\frac{1}{2}\Gamma\sigma^2S^2(Z^2-1)\Delta t$$

其中 $Z=\frac{\Delta W(t)}{\Delta t}$，由布朗运动性质可以知道这是一个独立的标准正态分布随机变量，将 ΔHE 累加得到总的对冲误差：

$$HE=\frac{1}{2}\frac{\sigma^2T}{n}\sum_i\Gamma_iS_i^2(Z_i^2-1)$$

HE 的期望显然为 0（由于 Z_i^2 为一个自由度为 1 的卡方分布，期望已知），对于方差，我们需要用到以下事实：

$$E[\Gamma_iS_i^2]^2=S_0^4\Gamma_0^2\sqrt{\frac{T^2}{T^2-t_i^2}}$$

这一结论可以通过对股价服从的对数正态分布积分得到期望，基于这个结论，我们可以得到：

$$\sigma_{HE}^2=\frac{1}{2}\frac{\sigma^4T^2}{n^2}\sum_iE[\Gamma_iS_i^2]^2=\frac{1}{2}\frac{\sigma^4T^2}{n^2}\Gamma_0^2S_0^4\sum_i\sqrt{\frac{T^2}{T^2-t_i^2}}=\frac{1}{2}\frac{\sigma^4T}{n}\Gamma_0^2S_0^4\sum_i\sqrt{\frac{T^2}{T^2-t_i^2}}\Delta t_i$$

令划分 n 区域无穷，得到：

$$\sigma_{HE}^2=\frac{1}{2}\frac{\sigma^4T}{n}\Gamma_0^2S_0^4\int_0^T\sqrt{\frac{T^2}{T^2-t^2}}dt=\frac{\pi}{4}\frac{\sigma^4T^2}{n}\Gamma_0^2S_0^4$$

因此 $\sigma_{HE}=\sqrt{\frac{\pi}{4}}\frac{\sigma^2T}{\sqrt{n}}\Gamma_0S_0^2$，而利用 BSM 框架下 Gamma 和 Vega 的关系：$\Gamma_0S_0^2=\frac{1}{\sigma T}\frac{\partial C}{\partial\sigma}$，进一步得到 $\sigma_{HE}=\sqrt{\frac{\pi}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{\partial C}{\partial\sigma}$。这个结果表明，随着对冲次数 n 的增加，对冲误差的方差会减小，这个方差正比于 $\frac{1}{\sqrt{n}}$，这是符合预期的，因为对冲次数越多越接近连续对冲的情形，所以误差会逐渐减小。

值得注意的是，离散对冲仅会带来误差，但不会改变对冲策略 2 的路径依赖性质和对冲策略 1 的收敛性质。

5 摩擦成本对对冲的影响

接下来，考虑摩擦成本对对冲的影响。在现实中，对冲是需要支付一定的成本的，这个成本可能是交易费用，也可能是滑点、冲击成本等，这些成本都会对对冲策略产生影响。在这一部分，我们设定标的的摩擦成本为仓位的比例 k，也就是说如果交易 N 份标的，我们需要支付 $k|N|$ 的成本，在对冲过程中，相隔 dt 时间后需要调整的标的仓位为 $\Delta(t+dt,S(t+dt)-\Delta(t,S(t)))$，利用 Ito 引理，我们可以得到：

$$\Delta(t+dt,S(t+dt)-\Delta(t,S(t)))=\frac{\partial\Delta}{\partial S}dS+O(dt)=\frac{\partial\Delta}{\partial S}\sigma SdW(t)+O(dt)=\frac{\partial\Delta}{\partial S}\sigma S\sqrt{dt}Z+O(dt)=\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\sigma S\sqrt{dt}Z$$

其中 $Z=\frac{dW(t)}{dat}$ 为一个标准正态分布随机变量，于是我们可以得到在 $t+dt$ 时刻需要支付的摩擦成本为：

$$k\sigma S^2\sqrt{dt}\left|\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\right||Z|$$

在 t 时刻的条件期望为：$k\sigma S^2\sqrt{dt}\left|\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\right|E\left[|Z|\mid\mathcal{F}_t\right]=k\sigma S^2\sqrt{dt}\left|\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\right|\sqrt{\frac{2}{\pi}}$，可以看出，摩擦成本的期望和 $\sqrt{dt}$ 同阶，在离散对冲情形下，其与 $\sqrt{n}$ 同阶，在连续对冲情形下，n 趋于正无穷，意味着摩擦成本是无穷，所以在现实中连续对冲也是不可能的。

考虑一个以隐含波动率对冲认购合约多头的组合，在加入摩擦成本后，组合的收益需要扣除摩擦成本，所以：

$$dPnl(t) = dV - \Delta dS - k\sigma S^2\sqrt{dt}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right||Z| = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt - k\sigma S^2\sqrt{dt}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right||Z|$$

可以发现，加入摩擦成本后组合收益加入了一个随机项，不再确定，它在 t 时刻的条件期望为：$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt - k\sigma S^2\sqrt{dt}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 组合收益为无风险收益率 r 所以有 $E\left[d\pi|\mathcal{F}_t\right] = r\left(V - \Delta S\right)dt$，代入后整理可以得到一个 PDE：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - k\sigma S^2\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\sqrt{\frac{2}{\pi dt}} = rV$$

如果作替换 $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 - 2k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi dt}}$，那么上面的 PDE 将会化为经典的 BSM PDE，通过观察替换后的 $\hat{\sigma}^2$ 的第二项可以发现，组合价值越高，摩擦成本的影响越小，这是由于摩擦成本的相对比率减小了；其次，随着对冲频率的增加，dt 减小，摩擦成本的影响增大；最后是当波动率水平很高的时候，也就是 $sigma$ 较大的时候，摩擦成本的影响也较大，从直观上，波动率的增加意味着标的价格变化的幅度增大，会使得标的的对冲仓位调整变大，导致摩擦成本的增加。

所以综合 4，5 来看，提高对冲频率虽然可以减小对冲误差的方差，使得对冲策略更加稳定，但与此同时摩擦成本也会降低对冲策略的收益，所以对冲频率在不同的策略需求场景下应当会存在一个最优解，这个最优解应当是一个平衡点，使得对冲误差的方差满足我们的需求并且摩擦成本的影响在可接受范围内，具体的约束则需要根据具体的策略需求来确定。

6 参考

1.《波动率微笑》机械工业出版社