

场外衍生品-累计期权

累计期权大体上可以分为普通累计期权，增强型累计期权和敲出补偿累计期权三种：

一、普通累计期权

1.1 定义

一份标准向上敲出累计期权合约一共需要5个参数，分别是：

- 1 合约期限：随客户需求
- 2 入场价 S_0 ：随客户需求
- 3 区间：执行价格 $K < \text{入场价格 } S_0 < \text{观察价格 } H$
- 4 系数：N

payoff计算：

- 日收盘价 $S_i > H$ 时，合约结束
- $K < S_i < H$ 时，当日收益 $S_i - K$ （用K价格买入，盈利）
- $S_i < K$ 时，当日收益 $N * (S_i - K)$ （用K价格买入N倍，亏损）

结算：可期货or现金结算

remark.

- 应用场景：在一个震荡偏强的行情中，客户有低价采购的需求
- 风险：大涨大跌，大涨导致合约结束；大跌累计多单可能亏损
- 如果在计算payoff的时候，当观察日价格高于H的时候，由合约结束改成当日不成交并继续观察，则这个时候是一个向上敲出累计期权
- 对应的有向下敲出累计期权，适用于客户有保值需求的时候，当标的价格下跌的时候，客户可以通过高价出货来获得空单收益
- 如果在payoff计算的时候，当 $K < S_i < H$ 时改为固定收益e.g.X元/吨，则此时为一个区间固定赔付向上敲出累计期权，对应的有固定赔付累沽期权，他们和标准期权的关系类似于欧式期权和二元期权的关系
- 通过叠加累计向上和向下敲出期权的多头可以实现更宽震荡区间的套保，类似的可以进行更多的套保优化

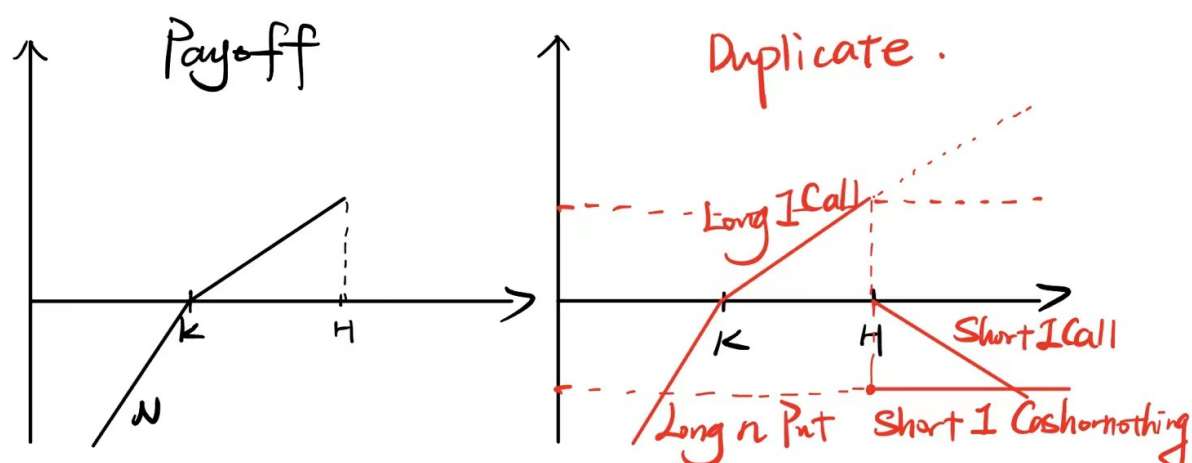
1.2 普通累计期权的组装与定价

作为一种奇异期权，我们无法直接套用模型来定价，因此考虑将其拆解为几个更简单的期权合约的组合，并分别计算价格之后叠加来对普通累计期权进行定价

组装思路：

首先观察到到期收益图，在执行价格K以下的部分可以用N份行权价为K的欧式看跌期权空头来复制，执行价格K以上的部分，在敲出价格H之前的部分可以用一份行权价为K欧式看涨期权多头来复制，在此基础上，敲出价格以上的部分首先要用一份行权价为H欧式看涨期权空头来保证斜率为0，这个时候相当于组成了一个借方牛市价差组合，在敲出价格H以上有固定收益 $H-K$ ，而我们要复制的累计期权组合在H以上收益为0，所以还需要用一个到

期收益为 $H-K$ ，行权价为 H 的二元期权空头，三者综合组装出了一份标准向上敲出累计期权合约，如下为示意图：



remark.

- 对于欧式看涨/跌期权，可以使用BS公式进行定价
- 对于二元期权，一种选择是通过蒙特卡洛模拟来定价，但也可以考虑计算在风险中性概率下敲出现金的贴现来定价，这里省略推导过程，最后的计算公式为：

$$price = K * exp(-r(T-t)) * N(d_2)$$

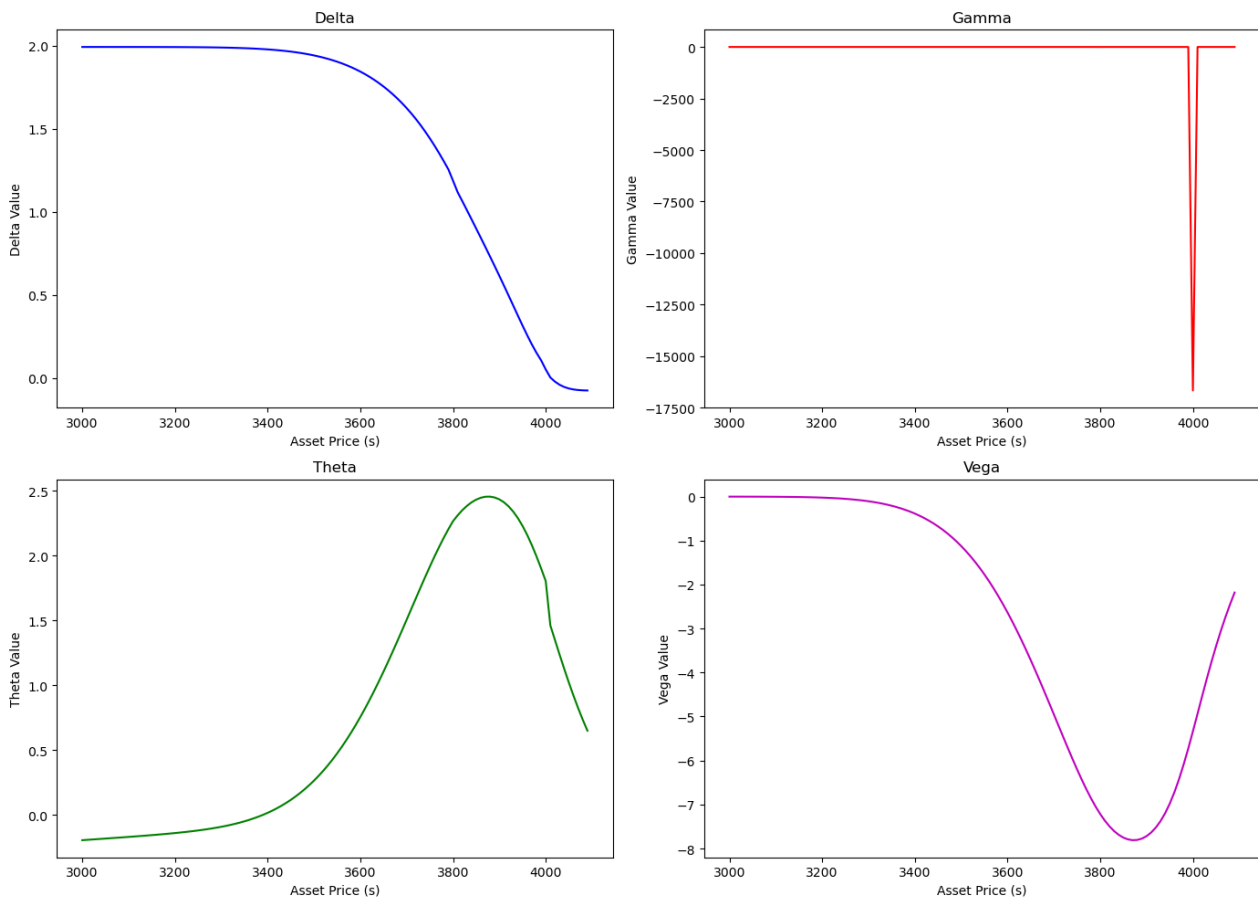
其中

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

K 为行权价格，在累计期权的组装中应为累计期权合约中的敲出价格 H -执行价格 K 。实际上，对于二元期权的处理，另一个做法为用在行权价 K 附近用一个多份牛市价差组合去近似复制，但这样的方法在现实中有一定的复制难度，一是难以找到行权价间隔一般较大，难以找到 $K+(-)dK$ 这样行权价的期权，另一点是可能需要多份合约来复制，复制成本可能较大

1.3 普通累计期权的Greeks

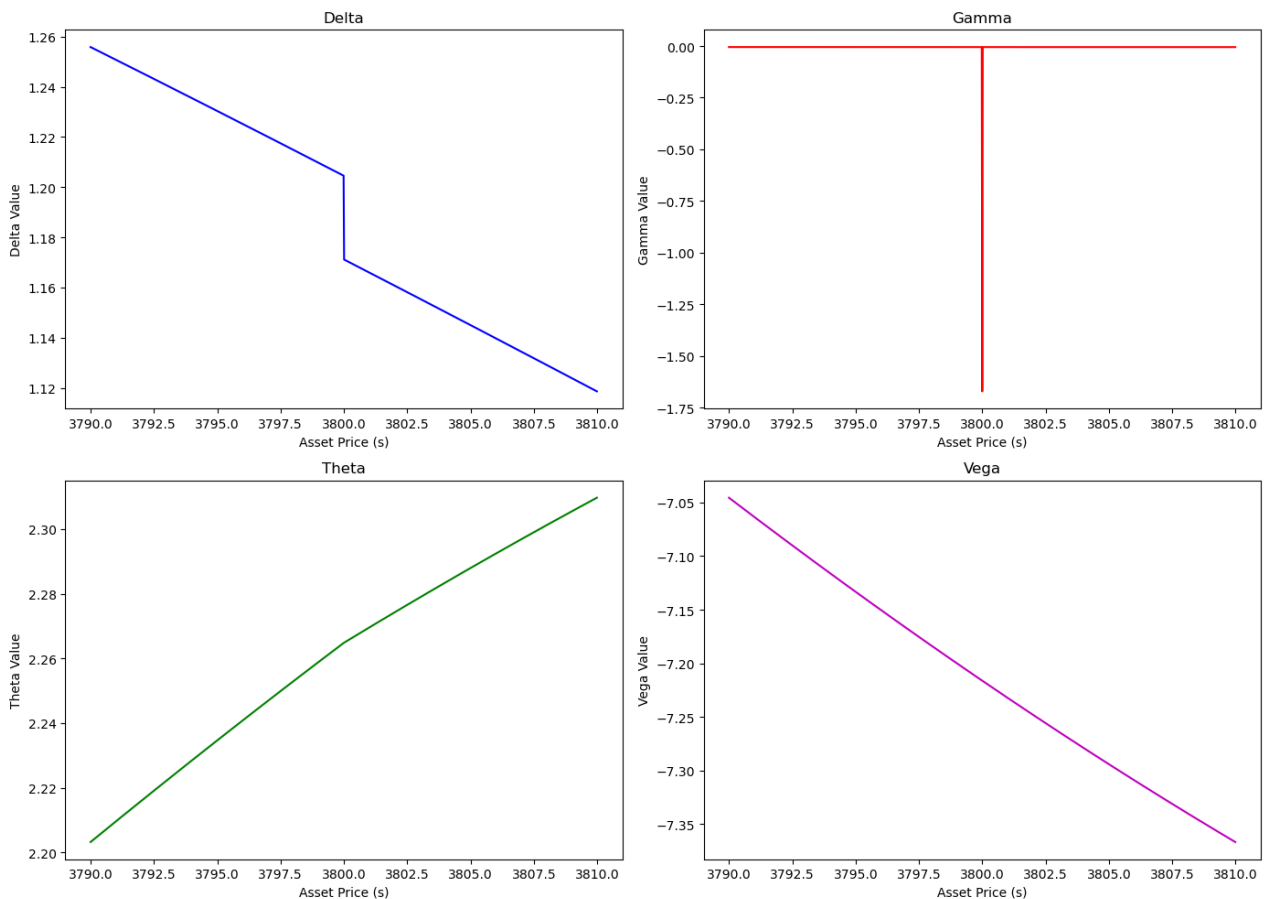
在将累计期权拆分后，就可以通过定价公式来计算Greeks，这里考虑Delta，Gamma，Vega和Theta四个Greek，将存续期内的不同期限合约的价格取平均作为单位权利金，以一份 $H=4000, K=3900, N=2$ ，的合约为例，在敲出价格 H 以上的部分，Greeks如下图：



观察到在敲出价格H附近Gamma巨大，从数据上，Delta在此处出现了很大的变化，在敲出价格处突然变小。Delta总体随标的价格逐渐减少，在敲出价格以上接近0，在远小于执行价格的部分接近于2。Theta的峰值与Vega的峰谷出现在执行价格和敲出价格之间。造成这样的现象可能是由于多份合约的叠加所导致的。

需要指出，使用（理论）静态复制方法得到的Greeks和上图几乎一致。

另一个需要注意的点是在执行价格K附近，Delta也会有突变，导致Gamma忽然增加，Greeks图像为：



在敲出价格H附近，Delta的变化则更大，导致Gamma出现了非常大的值，但没有敲出价格处大。

二、增强型累计期权/累计延续期权

1 定义

·在普通累计期权的基础上，增强型累计期权在敲出价格H以上的部分合约不再失效，而是等同一份行权价为H的欧式期权，例如对于增强型累计看涨期权在收盘价大于H的时候收益为 $S_i - H$ 。在执行价格一下， $N=2$

·累计延续期权和增强型的区别在于，在敲出价格H以上的部分同一份行权价为K2的欧式期权，一般而言，K2会在执行价格K1和敲出价格H之间。另外一点是，在敲除后，如果标的价格回落到K2和H之间，则Payoff等于一份普通累计期权叠加上和之前相同的行权价为K2的欧式期权

remark.同样的也有向下累计延续期权和增强型认沽期权等

2 拆分

·对于增强型累计期权的拆分，可以在普通累计期权的基础上叠加一份行权价为H的欧式期权即可，在定价上新叠加的欧式期权也可以使用BS模型来计算价格

·对于累计延续期权的拆分则更为复杂，通常考虑将其拆分为累计普通期权和敲入价格为H，行权价为K2向上敲入（Call Up and In i.e. cui）期权,在标的价格触碰到H的时候会买入一份行权价为K2的欧式期权合约

对于CUI的定价难点在于敲入结构对合约价格的影响，因此这一部分的定价思路为，在原

有的欧式期权合约价格基础上加入敲入结构的补偿价格，这一部分的价格推导要结合停时理论和反射原理等定理，简略来说：

$$\text{Price}_{\text{cui}} = p_1 + p_2$$

其中

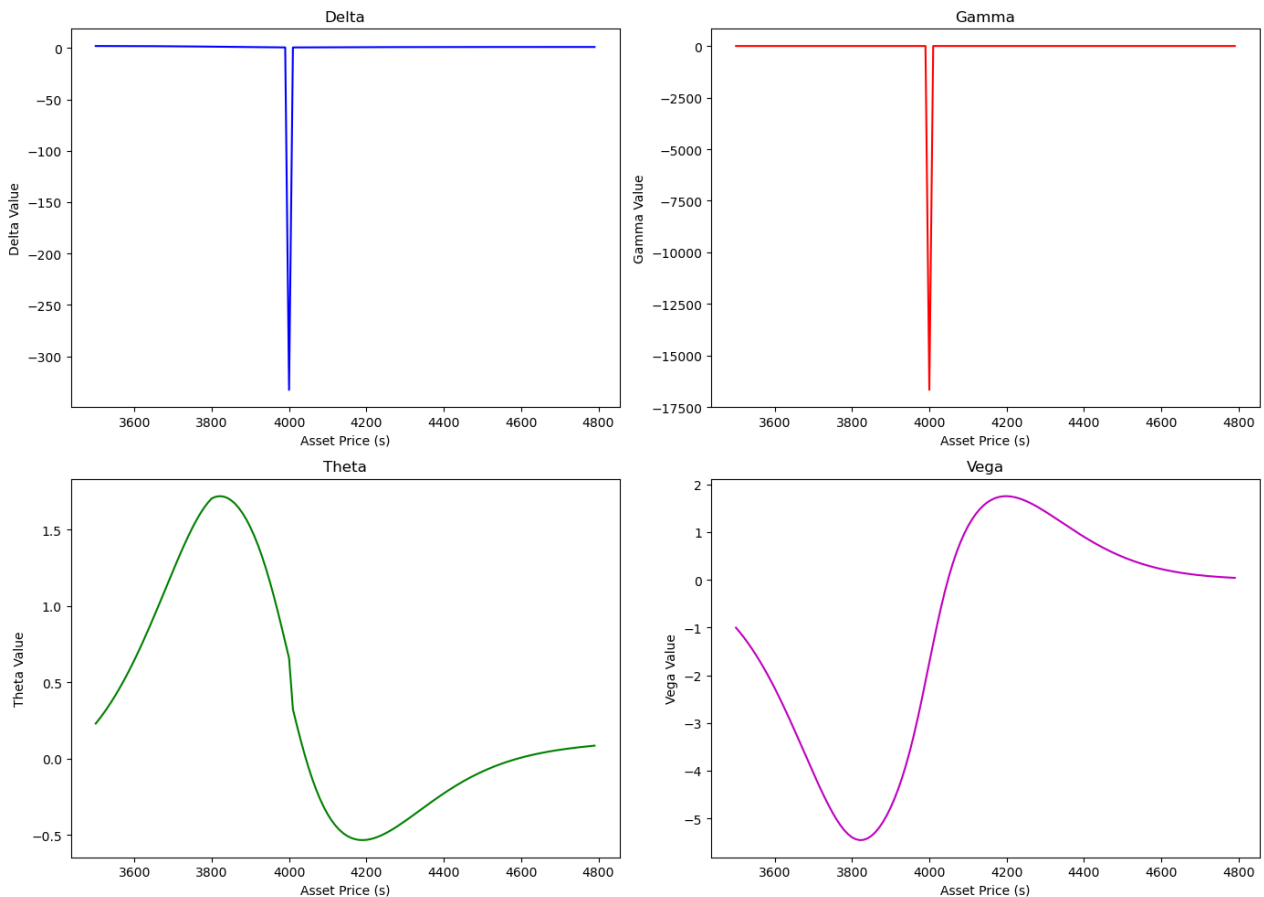
$$p_1 = S_0 e^{(b-r)T} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_2}\right) + (b + \frac{v^2}{2})T}{v\sqrt{T}}\right) - K_2 e^{-rT} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_2}\right) + (b + \frac{v^2}{2})T}{v\sqrt{T}} - v\sqrt{T}\right)$$

$$p_2 = k e^{-rT} \left(N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{H}\right) + (b + \frac{v^2}{2})T}{v\sqrt{T}} - v\sqrt{T}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^2 \left(\frac{b - \frac{v^2}{2}}{v^2} + 1\right) N\left(\frac{\ln\left(\frac{H}{S_0}\right) + (b + \frac{v^2}{2})T}{v\sqrt{T}} - v\sqrt{T}\right) \right)$$

其中N (·) 表示正态累积分布函数

2.3 Greeks

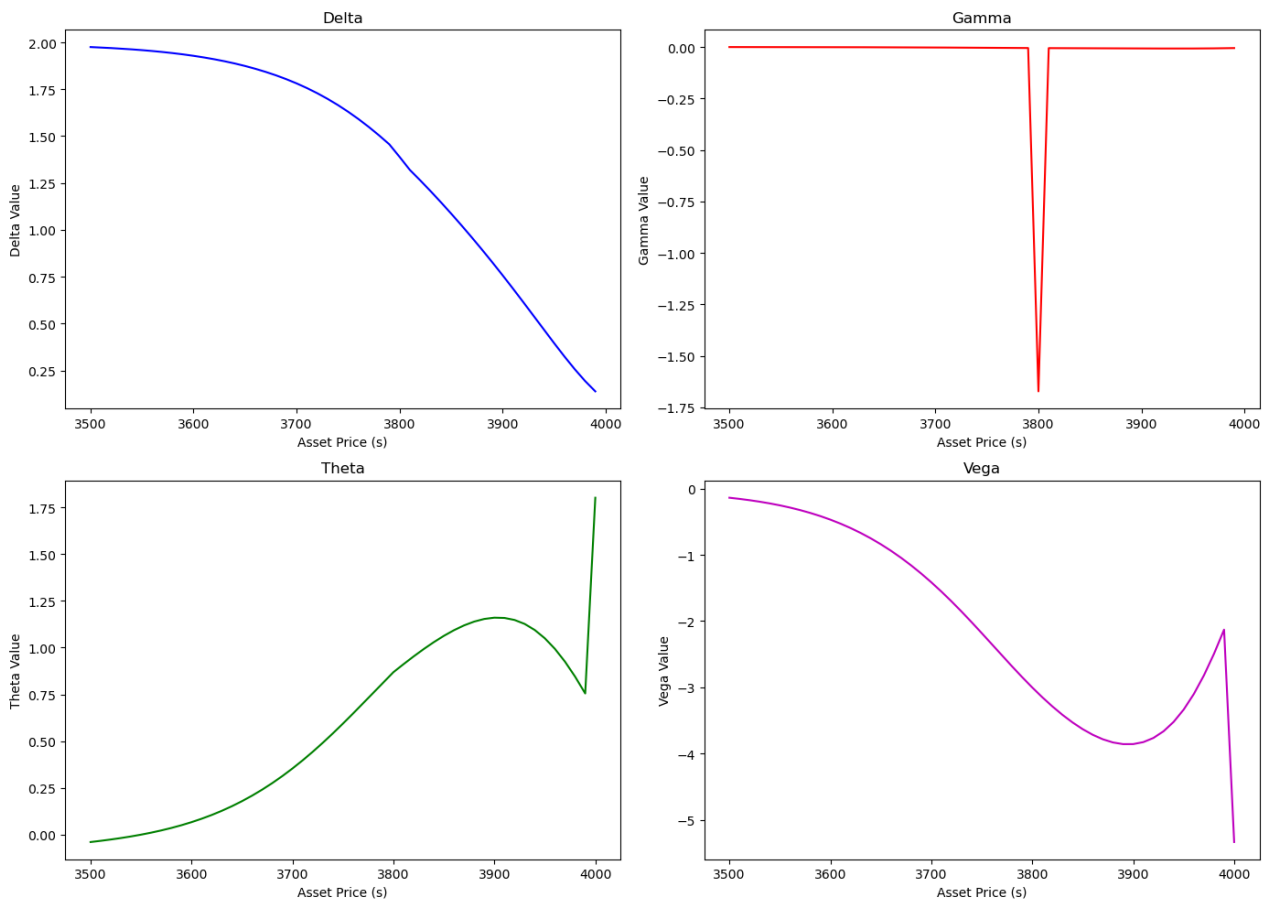
参数同第一节，累计增强型期权的Greeks如图所示：



和普通累计期权类似的是在敲出价格H以前的部分，但在敲出价格H以上的部分由于新增的欧式期权部分出现了变化

对于累计延续期权，在价格未触碰H前的Greeks等同于一份普通累计期权，当触碰H后，在普通累计期权的基础上会叠加一个行权价为K2的欧式期权，这使得K2到H部分的

Greeks发生了变化，敲入价格H以下的Greeks为：



三、敲出补偿期权

3.1 定义

敲出补偿期权在触碰到敲出价格H以前的payoff依旧是一个普通累计期权，但当触碰到敲出价格的时候，将会以从开始日期到敲出发生日期之间的累计合同按照K结算，敲出发生日期至到期日的合同价格为入场价格S。当标的价格跌破执行价格K1的时候，需要以K1购入2 * 合同约定数量


3.2 拆分

如果我们画出到期收益图，我们会发现敲出补偿期权的payoff和累计延续期权的payoff有一定的相似之处，进一步得到复制的思路：

- 通过一份标准向上敲出鲨鱼鳍期权多头来复制敲出前K1到H的payoff
- 之后用一份向上敲入(价格为S)的看涨期权多头来复制敲出后结算价格为S的payoff的S以上的部分，对于S以下的部分，考虑使用向上敲入看跌期权空头来复制；
- 对于K1以下部分的payoff，使用欧式看跌期权空头+向上敲出看跌期权空头来复制，这样在敲出后，障碍期权失效，保留的欧式看跌期权组成了结算价格为K1的部分在K1以下部分的payoff

3.3 Greeks

一份向上敲出看涨期权的Greeks如下：

 D:\ruc\quant\Q\Derivatives\睿捷\第九轮\累计期权\greeks_compensate.png

观察到Theta和Vega的形态较之前几种期权都不同，这可能是由于敲出结构的不同造成的